



Creación de un portafolio con las nueve criptomonedas de mayor capitalización en el mercado

Jorge Gomez Aguilar

Universidad del Valle
Facultad de Ingeniería
Escuela de Estadística
Cali, Colombia
2022

Creación de un portafolio con las nueve criptomonedas de mayor capitalización en el mercado

Jorge Gomez Aguilar

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Estadístico

Director:
Ph.D Cesar Andres Ojeda Echeverry

Codirectora:
Ph.D Luz Adriana Pereira Hoyos

Universidad del Valle
Facultad de Ingeniería
Escuela de Estadística
Cali, Colombia
2022

Dedicatoria

A Dios por darme salud y sabiduría para culminar mi carrera de manera satisfactoria

A mi madre Rosaura Ceballos, por brindarme la oportunidad de salir adelante, y por darme todo lo que en mis primeros años de vida anhelé y no tuve.

A mis hermanos Alejandro y Fernanda Trujillo, por inculcarme desde pequeño el amor por aprender sin importar las dificultades y por la disciplina que hoy me caracteriza.

A todos ustedes, gracias por hacer parte de este logro.

Y como siempre lo he dicho: he sido, soy y seré bendecido por Dios ¡siempre!

Agradecimientos

A mi profesor de colegio Jorge Payán, por mostrarme la existencia de esta hermosa carrera. A mi alma mater, la prestigiosa Universidad del Valle, por permitirme alcanzar un nuevo logro en mi vida y que fundamentará mi camino durante el resto de mis días. A todos los profesores por compartir su valioso conocimiento durante mi formación académica. Y agradezco especialmente a los profesores Luz Adriana Pereira Ph.D y Cesar Ojeda Ph.D en Estadística, por tenerme en cuenta para la realización de este hermoso proyecto, quienes me han guiado y brindado sus conocimientos para culminarlo de forma satisfactoria. Agradezco a todos los que confiaron en mi y me apoyaron durante todo el transcurso de mi carrera.

Resumen

Este trabajo crea un portafolio de inversión que en lugar de incorporar activos tradicionales, incorpora criptomonedas, debido a sus características únicas de altos rendimientos, como consecuencia de las grandes cantidades de flujo de capital que atraen. El problema radica en la estimación del parámetro del modelo de cartera de mínima varianza. Como objetivo se tiene crear un portafolio con nueve criptomonedas de mayor capitalización en el mercado, basado en el modelo de cartera de mínima varianza, cuya estimación del parámetro de dispersión se realice con estimadores robustos. Los datos fueron obtenidos de la plataforma CoinMarketCap, entre el 8-agostos-2015 al 9-abril-2018, lo que corresponde a 976 días de negociación en total. En la construcción del portafolio se utilizó para estimar el parámetro de dispersión el método clásico, la estimación por máxima verosimilitud y con los métodos robustos, la estimación por medio del determinante de mínima covarianza, el elipsoide de volumen mínimo y el estimador Ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettenring. Los resultados muestran que los portafolios que utilizaron los métodos robustos obtuvieron los mejores rendimientos en periodos de alta volatilidad. Como conclusión, se tiene que los portafolios contruidos con criptomonedas basados en los estimadores robustos son los más rentables.

Palabras claves: Criptomoneda, portafolio, hechos estilizados, estimación robusta, Back-testing.

Abstract

This paper creates an investment portfolio that instead of incorporating traditional assets, incorporates cryptocurrencies, due to their unique characteristics of high returns, as a consequence of the large amounts of capital flow they attract. The problem lies in the parameter estimation of the minimum variance portfolio model. The objective is to create a portfolio with nine cryptocurrencies with the largest market capitalization, based on the minimum variance portfolio model, the estimation of the dispersion parameter of which is performed with robust estimators. The data were obtained from the CoinMarketCap platform, between 8-August-2015 to 9-April-2018, which corresponds to 976 trading days in total. In the construction of the portfolio, the classical method was used to estimate the dispersion parameter, the estimation by maximum likelihood and with the robust methods, the estimation by means of the determinant of minimum covariance, the minimum volume ellipsoid and the Orthogonalized Gnanadesikan and Kettenring estimator. The results show that the portfolios that used the robust methods obtained the best returns in periods of high volatility. As a conclusion, the portfolios constructed with cryptocurrencies based on the robust estimators are the most profitable.

Keywords: Cryptocurrency, Portfolio, Stylized facts, Robust estimation, Backtesting

Contenido

Agradecimientos	iv
Resumen	v
1 Introducción	3
1.1 Planteamiento del problema	4
1.2 Justificación	6
1.3 Objetivos	6
1.3.1 Objetivo General	6
1.3.2 Objetivos Específicos	7
1.4 Antecedentes	7
2 Marco teórico	11
2.1 Marco teórico conceptual	11
2.1.1 Criptomoneda	11
2.1.2 Capitalización de mercado	11
2.1.3 Rendimiento financiero	12
2.1.4 Hechos estilizados	13
2.1.5 Teoría de portafolios	13
2.1.6 Backtesting	18
2.2 Marco teórico estadístico	19
2.2.1 Estadística robusta	19
2.2.2 Estimación robusta de la matriz de covarianza	20
3 Metodología	23
3.1 Obtención y preparación de la base de datos	23
3.2 Análisis de las series temporales de rendimientos	24
3.3 Portafolio de Mínima Varianza con estimadores clásico y robustos	25
3.3.1 Estimación de la matriz de covarianza	25
3.3.2 Portafolio de Mínima Varianza	29
3.4 Backtesting	29
4 Resultados	30
4.1 Análisis de las series temporales de rendimientos	30

4.2	Portafolios de Mínima Varianza	39
4.3	Comparación de los métodos robustos con el método máxima verosimilitud usando Backtesting	42
4.3.1	Totalidad de rendimientos históricos	42
4.3.2	Últimos 450 rendimientos históricos	43
5	Conclusiones y recomendaciones	45
5.1	Conclusiones	45
5.2	Recomendaciones	46
	Bibliografía	47

Lista de Figuras

2-1	Frontera eficiente. Fuente: tomado de Kim and Francis (2013)	15
4-1	Precios diarios de Bitcoin 2015 - 2018	30
4-2	Precios diarios de Ethereum, Litecoin, Monero y Dash 2015 - 2018	31
4-3	Precios diarios de Ripple, Stellar, NEM y Verge 2015 - 2018	31
4-4	Rendimientos logarítmicos de las criptomonedas	32
4-5	Histograma de los rendimientos logarítmicos de las criptomonedas	33
4-6	Boxplot de los rendimientos logarítmicos de las criptomonedas	34
4-7	QQ-plots de los rendimientos logarítmicos de las criptomonedas	35
4-8	Rendimientos logarítmicos absolutos de las criptomonedas	36
4-9	ACF de los Rendimientos logarítmicos absolutos de las criptomonedas	37
4-10	Composición de los portafolios	40
4-11	Riesgo-rendimiento de los portafolios contruidos	41
4-12	Rendimiento relativo de los portafolios robustos para los 975 registros	42
4-13	Rendimiento relativo de los portafolios robustos para los 450 registros	43

Lista de Tablas

4-1	Resumen estadístico de los rendimientos logarítmicos de las criptomonedas .	38
4-2	Comparación de los portafolios	41
4-3	Estadísticas descriptivas de los excesos de rendimiento para los 975 registros	42
4-4	Estadísticas descriptivas de los excesos de rendimiento para los 450 registros	43

1 Introducción

El modelo de Media Varianza presentado por Markowitz (1952) consiste en que dado un conjunto de activos disponibles, se busca asignar un porcentaje del capital a invertir sobre dichos activos, que permitan maximizar el rendimiento mientras se minimiza el riesgo asociado a dicha inversión. Para este modelo, se requiere estimar la media y varianza de los rendimientos de los activos pertenecientes al portafolio de inversión, cuya estimación se realiza a través del método de máxima verosimilitud, asumiendo normalidad en los rendimientos. Esto genera un error de estimación debido a la presencia de valores atípicos de los rendimientos de los activos que componen un portafolio, generando de esta manera que la estimación de los parámetros del modelo presenten inestabilidad en la asignación de las ponderaciones. Además los portafolios construidos con base en el modelo de Markowitz se ven más afectados por los puntos atípicos que aquellos construidos con base al modelo de mínima varianza según explica Pfaff (2016); Gutiérrez-Sepúlveda et al. (2018), ya que la estimación de la dispersión se ve menos influenciada por estos puntos que la estimación del rendimiento medio.

Por otra parte, el vertiginoso aumento en el volumen del comercio de las criptomonedas definidas como la unión de una moneda virtual, protocolo y software, que permiten realizar transacciones entre pares (P2P) con costes de transacción bajos y que además de incorporar los principios de la criptografía opera de forma descentralizada, establecida bajo la tecnología blockchain (Colle, 2018), ha provocado un rápido crecimiento de las dimensiones del mercado, lo que a su vez, ha llamado la atención de las industrias financieras, las instituciones gubernamentales y de particulares, debido al gran auge que han tenido desde finales del año 2017, donde la mayoría han logrado alcanzar capitalizaciones de mercado superiores a los mil millones de dólares, y a diferencia de los activos financieros tradicionales tienen precios altamente volátiles (Brauneis and Mestel, 2019).

En este trabajo, el interés está en que, en lugar de incorporar activos tradicionales en un portafolio, sean incorporadas criptomonedas. Además de estimar el parámetro del modelo de cartera de mínima varianza en presencia de las características que presentan las criptomonedas, alta volatilidad y datos atípicos. Por lo tanto, en el presente trabajo se propone crear un portafolio de mínima varianza, con las nueve criptomonedas de mayor capitalización en el mercado, cuya estimación del parámetro de dispersión se realice con estimadores robustos, de esta forma obtener un modelo de cartera adecuado para lograr mitigar el riesgo de los

inversionistas, ya que el uso de los estimadores robustos para la estimación de parámetros en datos que no siguen estrictamente una función paramétrica, permite obtener resultados más sólidos e insensibles frente a la presencia de datos atípicos.

Los resultados arrojaron que los portafolios de mínima varianza contruidos con estimadores robustos fueron los mejores en términos del riesgo asumido ya que, en comparación con el estimador de máxima verosimilitud, son significativamente menores. Además, en la evaluación de las rentabilidades a través del procedimiento de ventana móvil de los últimos 450 días, es decir, los días de mayor volatilidad, todos los portafolios que usaron estimadores robustos obtuvieron mejores resultados.

El presente trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 1, se aborda el planteamiento del problema, la justificación, los objetivos de la investigación y los antecedentes. El Capítulo 2, está conformado por el marco teórico de la investigación; en la primera parte se encuentra el marco conceptual, en el cual se incluyen definiciones sobre criptomonedas y teoría de portafolios, y en la segunda parte se encuentra el marco estadístico, donde se describen los estimadores robustos que se van a utilizar. El Capítulo 3 presenta la metodología de la investigación, en la cual se describen las características de las criptomonedas. El Capítulo 4, está conformado por los resultados de la investigación, en el cual se encuentran los resultados más importantes del análisis de las series de rendimientos y el proceso de construcción de los portafolios de inversión. Finalmente, en el Capítulo 5 se desarrollan las conclusiones y recomendaciones del trabajo de grado.

1.1. Planteamiento del problema

Liu (2019) menciona que hay debates sobre si las criptomonedas pueden considerarse como una nueva clase de activos en lugar de monedas tradicionales. Esto ocurre dado que la naturaleza del dinero es ser una convención social, lo que produce que los activos se acepten como forma de pago y un depósito de valor que se espera sea aceptado por una contraparte en el futuro (Milkau and Bott, 2018). Además, la forma más recurrente de que se emita dinero y que se brinde confianza en el mismo en la economía está bajo la batuta de un banco central, el cual es el responsable de preservar el interés económico de la sociedad en una moneda estable. Ahora bien, las criptomonedas son unidades digitales que son emitidas por agentes privados, las cuales cuentan con su propia unidad de cuenta y por supuesto pueden ser adquiridas, preservadas y transferidas de manera electrónica. Sin embargo, estas unidades digitales difícilmente pueden considerarse monedas ya que carecen de valor intrínseco puesto que no tienen un respaldo como si lo tienen las monedas tradicionales. Como consecuencia de esto y otras dificultades (ciberseguridad y riesgos operativos, nula o inadecuada protección a inversores y consumidores, alto e ineficiente uso de recursos energéticos) se genera dudas sobre la posibilidad de que el sistema de las criptomonedas que se conoce actualmente, pueda

reemplazar las monedas tradicionales.

Un análisis y revisión de literatura que realizaron Parra-Polanía et al. (2019), afirmaron que las criptomonedas en su actual condición no pueden ser consideradas como monedas tradicionales ya que no cumplen la función de dinero de forma eficiente debido a la volatilidad de sus precios. Algo similar encontraron Baur et al. (2018), al mencionar que la criptomoneda Bitcoin debe ser vista como un tipo de activo especulativo en lugar de una moneda tradicional, ya que las personas que la poseen lo hacen con el fin de utilizarla como inversión. Esto ha hecho que muchos investigadores como Brauneis and Mestel (2019) vean las criptomonedas como un tipo de activo con precios muy altos y volátiles. Además, se ha encontrado que las criptomonedas comparten mucha similitud con el comportamiento de los activos financieros. Por ejemplo, Chan et al. (2017) analizaron algunas criptomonedas como Bitcoin, Dash, Litecoin, MaidSafeCoin, Monero, Doggecoin y Ripple y encontraron que la distribución de los rendimientos no es normal, por el contrario tienden a ser leptocúrticas y con colas pesadas, lo cual va en línea con las investigaciones de Zhang et al. (2018); Corbet et al. (2018).

En la teoría de portafolios de Markowitz (1952), es necesario estimar la media y la varianza de los rendimientos de los activos pertenecientes a un portafolio, lo cual se hace comúnmente utilizando el método de máxima verosimilitud, que supone una distribución normal en los rendimientos de dichos activos. Sin embargo, como se ha dicho anteriormente, este supuesto es de difícil cumplimiento debido a la presencia de observaciones atípicas, lo cual hace que se genere un error elevado en la estimación, produciendo que la asignación de las ponderaciones en el portafolio sea inestable. Además, los portafolios contruidos con base en el modelo de Markowitz se ven más afectados por los puntos atípicos que aquellos contruidos con base al modelo de mínima varianza, según explica Pfaff (2016); Gutiérrez-Sepúlveda et al. (2018), ya que la estimación de la dispersión se ve menos influenciada por estos puntos que la estimación del rendimiento medio.

Considerando que las criptomonedas son activos especulativos que pueden generar ganancias potenciales debido a su alta volatilidad en comparación con los activos financieros tradicionales, y que pueden llamar la atención de los inversores en los portafolios con criptomonedas, el propósito del presente trabajo es crear un portafolio conformado con las nueve criptomonedas de mayor capitalización en el mercado con base en el modelo de mínima varianza, cuya estimación de la dispersión se realice a través de estimadores robustos, las cuales de antemano no suponen una distribución y reducen el impacto de los valores atípicos, produciendo estimaciones representativas de la mayoría de los datos de la muestra, permitiendo a los inversionistas mitigar la exposición al riesgo que se enfrentan cuando ocurre una errada estimación.

1.2. Justificación

En los modelos de portafolio se busca estimar los parámetros media y/o varianza, cuya estimación generalmente se hace a través del método de máxima verosimilitud, bajo el supuesto de que los rendimientos se distribuyen normal. Sin embargo, algunos estudios indican fallencias de estos modelos ya que la presencia de datos atípicos asumiendo normalidad genera un error de estimación en sus parámetros y, por tanto, la asignación de las ponderaciones es inestable (DeMiguel and Nogales, 2009; Gutiérrez-Sepúlveda et al., 2018; Lauprete et al., 2003).

Dado que el propósito de este trabajo es crear un portafolio de inversión para el mercado de las criptomonedas, el cual se caracteriza por su alta volatilidad, es necesario estudiar la estabilidad de las asignaciones de los pesos de las criptomonedas que conformarán el portafolio. En particular, en este trabajo se considera el modelo de mínima varianza para la creación del portafolio, realizando la estimación de la matriz de varianzas y covarianzas bajo métodos robustos, los cuales no asumen una distribución específica de los rendimientos tales como el Determinante de Covarianza Mínima (MCD), el Elipsoide de Volumen Mínimo (MVE) y el estimador Ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettenring (OGK).

Por otra parte, dada la extrema complejidad y el alto riesgo que representa el mercado de criptomonedas, este puede ser un instrumento de inversión alternativo debido a su característica única de rendimientos altos (como consecuencia de las grandes cantidades de flujo de capital que atrae el auge del mercado de criptomonedas) y baja correlación con los activos financieros (Sun et al., 2020). Además que tienen perfiles de riesgo-recompensa diferenciados. Esto hace que los inversionistas que estén en la búsqueda de formas alternativas de inversión, centren su atención cada vez más a los portafolios de inversión en criptomonedas, ya que ven una posibilidad potencial en este mercado que crece a pasos agigantados. Así mismo, se pretende que este proyecto tenga un aporte considerable a la teoría de inversión, debido a que hasta el momento no se encuentra información sobre portafolios con criptomonedas que traten de minimizar el error de estimación del riesgo a través del uso de estimadores robustos.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Crear un portafolio con las nueve criptomonedas de mayor capitalización en el mercado.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Examinar las características de las series temporales de los rendimientos de las nueve criptomonedas de mayor capitalización en el mercado.
- Aplicar los estimadores de la matriz de covarianza tanto clásico como robustos al modelo de cartera de Mínima Varianza.
- Evaluar y comparar por medio de backtesting los modelos de cartera de Mínima Varianza construidos con los diferentes estimadores de la matriz de covarianza.

1.4. Antecedentes

Cavello Serna et al. (2018) en su tesis *Las Criptomonedas: Una estrategia de inversión*, tienen como principal objetivo determinar una estrategia de inversión en criptomonedas basado en la relación rendimiento-riesgo. Para lo cual inician describiendo y explicando el concepto de criptomoneda, después construyen una frontera eficiente con las criptomonedas utilizando el modelo media-varianza de Markowitz y finalmente desarrollando una aplicación del modelo en función de las criptomonedas con el fin de determinar un portafolio de inversión. Las criptomonedas usadas fueron Bitcoin, Ethereum, Litecoin, Ripple, Digita Cash y Monero además de los índices S&P500 y S&P500IT. Durante el análisis de los rendimientos de las criptomonedas y de los índices observando las volatilidades, histogramas y correlaciones, los autores infieren que en realidad no hay una correlación entre la criptomoneda Bitcoin y los índices S&P500 y S&P500IT, lo que ayuda en la diversificación incluir criptomonedas en portafolios de inversión. Todo este análisis ayudó a plantear el escenario deseable para el portafolio óptimo y permitió calcular las cuatro fronteras eficientes. Cuando se realiza la comparación de estas fronteras, se puede ver que la que está compuesta por las criptomonedas tiene un desplazamiento, lo cual mejora la relación rendimiento-riesgo cuando se agrega de manera individual cada uno de los índices, empezando con el S&P500, después el S&P500IT y por último ambos. De esta manera obtuvieron el portafolio óptimo, en donde a las criptomonedas Bitcoin y Dash se les asigna una mayor proporción del capital y cuyo nivel de riesgo es bajo, ya que va desde 0.66 % hasta el 1.04 % de riesgo diario.

Si bien esta tesis genera un aporte a la literatura sobre portafolios con criptomonedas, la misma tiene una discrepancia con otras investigaciones ya, que en sus conclusiones dice que incorpora las criptomonedas al modelo de media-varianza debido a que los rendimientos diarios tienden a ser unimodales y simétricos. Sin embargo, dicha afirmación no es aceptable porque la teoría de portafolios supone que los rendimientos se distribuyen normal y dicha tendencia de las criptomonedas no implica exactamente normalidad.

Brauneis and Mestel (2019), en su artículo *Cryptocurrency-portfolios in a mean-variance framework*, para valorar los beneficios de riesgo-rendimiento de los portafolios de criptomonedas, aplicaron el marco de media-varianza de Markowitz. Esto lo hacen utilizando los precios diarios de 500 criptomonedas con mayor capitalización de mercado en el periodo 1-ene-2015 al 31-dic-2017. Los autores relacionan el riesgo y rendimiento de algunas estrategias de portafolios de media-varianza con inversiones individuales en criptomonedas con dos referentes como lo son el portafolio igualmente ponderado y el CRIX. En su análisis realizado out-of-sample y teniendo en cuenta el costo de transacción, hallaron que combinar criptomonedas prospera la inversión de riesgo bajo. El portafolio igualmente ponderado es superior a las criptomonedas de manera individual y al 75 % de los portafolios óptimos de media-varianza utilizados, esto en términos del ratio Sharpe y los rendimientos equivalentes de certeza.

En este artículo, los autores se basan en la selección de portafolio de media-varianza para abordar y cuantificar el efecto que tiene en el portafolio la inversión en criptomonedas. Sin embargo, son conscientes de que existen otras alternativas de optimización diferente a la media-varianza debido al no cumplimiento de la normalidad de los rendimientos, pero se justifican en su uso ya que quieren revelar evidencia preliminar sobre las propiedades de múltiples inversiones en criptomonedas.

Platanakis and Urquhart (2019), en su artículo *Portfolio management with cryptocurrencies: The role of estimation risk*, comparan los rendimientos de los métodos de construcción de portafolios, como lo son la regla ingenua, el modelo de media-varianza de Markowitz y el modelo avanzado Black-Litterman con VBC, el cual controla los errores de estimación de los parámetros en un portafolio de criptomonedas. Esta comparación se realizó utilizando los datos semanales de las criptomonedas Bitcoin, Litecoin, Ripple y Dash durante el período del 21-feb-2014 al 4-may-2018, para un total de 220 observaciones semanales. Su análisis muestra que el modelo avanzado de Black-Litterman con VBC tiene rendimientos superiores ajustados al riesgo out-of-sample presentando menor riesgo.

Este artículo destaca que la teoría de portafolios puede enfrentar dificultades cuando se aplica a portafolios de criptomonedas, dado los errores de estimación de los parámetros. Por tanto, aconsejan que es preferible utilizar técnicas avanzadas de portafolios que controlen este error de estimación en los parámetros de entrada al administrar portafolios de criptomonedas.

Liu (2019), en su artículo *Portfolio diversification across cryptocurrencies*, analiza la inversión y el papel de la diversificación en el mercado de las criptomonedas. Para esto aplica seis modelos clásicos de selección de portafolios (regla de igual ponderación $1/N$, varianza mínima, paridad de riesgo, Markowitz, máximo ratio Sharpe y máxima utilidad) evaluando a través del método out-of-sample. También analizaron el desempeño del portafolio con la fija-

ción de diferentes costos de transacción, periodos de reequilibrios, al igual que los parámetros de aversión al riesgo para comprender que modelo es mejor en uno o más aspectos específicos. Los datos de las criptomonedas se recogieron entre el 7-ago-2015 y el 9-abr-2018, con 977 días de negociación en total. Las criptomonedas escogidas fueron las que empezaron a operar a más tardar el 7-ago-2015 y con capitalización de mercado superior a 1 billón de dolares, estas fueron: Bitcoin, Ethereum, Ripple, Litecoin, Stellar, Monero, Dash, Tether, NEM y Verge. Liu encontró que individualmente gran parte de las criptomonedas tienen rendimientos, ratio Sharpe y utilidad demasiados altos. Además, la mayoría de correlaciones de las criptomonedas son bajas, menores a 0.3. Particularmente para Tether, NEM y Verge, esto propicia combinar criptomonedas en portafolios de inversión. Evaluando ya el desempeño de los seis modelos de portafolios utilizados, para un reequilibrio de treinta días, comparados con los rendimientos de las criptomonedas de manera individual, el ratio Sharpe y la utilidad tuvieron un incremento significativo indicando que la diversificación entre criptomonedas ayuda a mejorar la inversión. También el modelo de mínima varianza logra una volatilidad out-of-sample más pequeña y una reducción máxima, pero esto contrasta con que es menos atractivo que el ratio Sharpe y utilidad, caso contrario pasa con la utilidad máxima, ya que esta alcanza el rendimiento y la utilidad más altos out-of-sample. Pero aclaran que ninguno de los modelos superó la regla de igual ponderación $1/N$ probablemente debido al error de estimación de los parámetros de los modelos.

López-Herrera et al. (2020), en su artículo *Desempeño de ocho de las criptomonedas de mayor capitalización de mercado*, estudian el riesgo de mercado de las criptomonedas con base en métricas que se utilizan comúnmente para activos financieros. Las criptomonedas utilizadas fueron Bitcoin, Litecoin, Ethereum, Ripple, Tether, BitcoinCash, EOS y Tron, que se seleccionaron debido a que son las que tienen mayor capitalización de mercado al 6-mar-2019. El complemento del análisis se realiza con la evaluación del desempeño de las criptomonedas dentro de portafolios de media-varianza de Markowitz. Se encuentra que las criptomonedas son demasiado heterogeneas entre si, lo cual puede obedecer a sus características particulares. Esto puede resultar en la irrelevancia de algunas criptomonedas dentro del portafolio.

A pesar de su sencillez, los autores recalcan que el portafolio de media-varianza no es el adecuado cuando la varianza tiene en cuenta las pérdidas en las colas en el momento que sus distribuciones se encuentran sesgadas hacia el lado de las pérdidas y dan opciones que permiten lidiar con dicha inadecuación.

Boiko et al. (2021), en su artículo *The optimization of the cryptocurrency portfolio in view of the risks*, determinaron que los rendimientos de las criptomonedas no se distribuyen normal, esto por la presencia de rendimientos de cola pesada, haciendo que el uso de la teoría clásica de portafolio de Markowitz para las criptomonedas sea inadecuado. Ellos obtuvieron las expresiones para la medida de riesgo de VaR sobre la base de la función de distribución

de Cauchy y, utilizando el enfoque VaR, realizaron los cálculos de estimación de riesgo. Las criptomonedas utilizadas fueron Bitcoin, Bitcoin Cash, Litecoin, XRP, Ethereum y NEM, y se recogieron entre el 19-jul-2018 y 12-oct-2019. Los portafolios óptimos fueron construidos con el modelo de optimización modificado de Markowitz. El portafolio conformado con el 100 % de Bitcoin presenta el mayor nivel de riesgo posible (9.33 %) y el máximo rendimiento (0.235 %) siendo inaceptable para abordar el problema de la maximización del beneficio con el requisito de la diversificación del riesgo. Sin embargo, con un portafolio conformado por un 44 % de acciones de Amazon y un 56 % de Bitcoin se obtiene un portafolio con un rendimiento de 0.190 % la cual es condicionalmente óptima porque tiene una rendimiento máximo con un nivel de riesgo limitado. Los resultados de los cálculos de esta investigación demuestran que Bitcoin domina el portafolio de criptomonedas debido a los rendimientos altos y su bajo riesgo. Además, indican que un instrumento para gestionar el riesgo del portafolio de criptomonedas es la integración en la estructura de acciones de Amazon.

Condori (2021), en su artículo *Diversificación de carteras de inversión con criptomonedas* tuvieron como objetivo organizar de manera experimental portafolios de inversión con las criptomonedas bajo la teoría de Markowitz. La investigación fue cuantitativa y experimental, conteniendo el proceso de estructuración de portafolios de criptomonedas bajo Markowitz con programación no lineal cuantitativa. Los datos históricos de cotizaciones diarias de las criptomonedas Bitcoin, Ethereum, Litecoin, Ripple y Tether van desde el 7-ago-2015 hasta el 11-nov-2020. En el análisis, Ethereum presentó el mayor rendimiento, seguido de Bitcoin y Ripple. Además de que Ethereum tuvo la mayor volatilidad. Ya en la construcción del portafolio, se obtuvo que aquel portafolio eficiente se da cuando se invierte 70 % en Bitcoin, 14 % en Ethereum, 6 % en Ripple y 10 % en Thether. Como conclusión, los autores demuestran que existe un efecto en la reducción de la volatilidad cuando el número de criptomonedas que se agregan a la cartera se incrementan.

Si bien los autores generan un aporte en la investigación sobre construcción de portafolios con criptomonedas, cabe resaltar que en todo el documento no se tuvo en cuenta que para construir el modelo de cartera de Markowitz, se debe cumplir que los rendimientos se distribuyan normal ya que de acuerdo a la literatura hasta ahora expuesta, este es un factor fundamental en dicha construcción.

2 Marco teórico

Este capítulo se divide en dos partes. La primera parte tiene el marco teórico conceptual, en el cual se incluyen definiciones importantes sobre criptomonedas y teoría sobre la construcción de portafolios de inversión. En la segunda parte se presenta lo referente al marco teórico estadístico, donde se detalla los temas tratados para la parte estadística.

2.1. Marco teórico conceptual

2.1.1. Criptomoneda

Una criptomoneda es una moneda virtual, protocolo y software. La unión de estos componentes hace posible que las transacciones se hagan casi de forma inmediata entre pares (P2P), permitiendo que se puedan realizar pagos en todo el mundo con costos de transacción bajos o en algunos casos nulos. Además, las criptomonedas incorporan los principios de la criptografía, lo cual las hace seguras y anónimas. Adicionalmente operan de forma descentralizada, establecidas bajo la tecnología de cadena de bloques o blockchain (Colle, 2018). La criptomoneda fue creada con el fin de servir como medio de intercambio de bienes y servicios sin la necesidad de un intermediario, y por la descentralización de políticas de circulación evita que los gobiernos tengan el poder de decidir un aumento o disminución de la masa monetaria (Cadena Díaz et al., 2018). Actualmente se encuentran en el mercado más de 9900 criptomonedas disponibles según el sitio web CoinMarketCap.

2.1.2. Capitalización de mercado

Al valor de una empresa en el mercado de valores se le denomina capitalización de mercado. Se fundamenta en el actual precio de las acciones y el número total de dichas acciones en circulación, es decir, es el mercado total de acciones en circulación de una empresa. Su cálculo se realiza multiplicando el número total de acciones en circulación por el precio de mercado actual de una acción. La capitalización de mercado permite tener una claridad sobre el valor de una empresa. Debido a esto, es importante que antes de invertir en una acción se tenga en cuenta además del precio individual de dicha acción, la comparación de la capitalización de mercado (Kumar and Kumara, 2021).

2.1.3. Rendimiento financiero

El objetivo de una inversión es conseguir una ganancia. Los ingresos o las pérdidas de una inversión, dependen de la variación de los precios como de las cantidades de los activos que se conservan. Un inversor está interesado que los ingresos sean elevados en relación con el tamaño de sus inversiones iniciales. Los rendimientos miden esto, ya que son cambios en el precio expresados como una fracción del precio inicial (Ruppert and Matteson, 2011). Los estudios financieros se basan en los rendimientos en lugar de los precios, ya que se encuentran libre de escala y presentan propiedades estadísticas atractivas como la estacionariedad y la ergodicidad (Campbell et al., 1998).

■ Rendimiento simple

Sea P_t el precio de un activo financiero en el momento t . Asumiendo que no existen rentas distribuidas en forma de dividendos o intereses, el rendimiento simple de dicho activo entre los instantes $t - 1$ y t viene dado por la expresión

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

El numerador $P_t - P_{t-1}$ es el ingreso o el beneficio durante el periodo de tenencia, por lo tanto, un beneficio negativo significaría una pérdida. El denominador P_{t-1} , es la inversión inicial al comienzo del periodo de tenencia. Por esta razón, el rendimiento simple puede considerarse como la tasa de ingresos o beneficios relativos (Ruppert and Matteson, 2011).

■ Rendimiento logarítmico

Los rendimientos logarítmicos o rendimientos compuestos de forma continua, se denotan por r_t y son definidos como

$$r_t = \log(1 + R_t) = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = p_t - p_{t-1} \quad (2-1)$$

donde $p_t = \log(P_t)$ se denomina precio logarítmico.

Los rendimientos logarítmicos son aproximadamente iguales a los rendimientos simples porque si x es pequeño, entonces $\log(1 + x) \approx x$. Cuando ambos rendimientos son muy negativos, la diferencia entre estos es más pronunciada. Los rendimientos simples cercanos al límite inferior de -1 , es decir, pérdidas completas, corresponden a rendimientos

logarítmicos cercanos a $-\infty$. Usar rendimientos logarítmicos tiene como ventaja la simplicidad de los rendimientos multiperiodos. Ya que el rendimiento logarítmico de s periodos es sólo la suma de los rendimientos logarítmicos de un solo periodo, en lugar del producto como en el caso de los rendimientos simples (Ruppert and Matteson, 2011).

2.1.4. Hechos estilizados

El resultado de más de medio siglo de investigaciones sobre las series de tiempo de rendimientos financieros hace ver que, desde el punto de vista estadístico, las variaciones de los precios de los activos comparten ciertas particularidades estadísticas en gran parte de instrumentos, mercados y periodos de tiempo. Estas regularidades empíricas son conocidas en la literatura especializada como hechos estilizados (Cont, 2001).

El concepto de hechos estilizados fue insertado originalmente por Kaldor (1961), el cual sugiere empezar el análisis de un fenómeno económico con una visión “estilizada” de los hechos. Es decir, enfocándose más en lo general que en los detalles individuales. Lo cual permite tener una nueva forma de analizar el comportamiento de las series macroeconómicas considerando como punto de partida los hechos estilizados para la construcción de modelos teóricos (García-Moreno García et al., 2016).

Según Pfaff (2016), para los datos observados de los mercados financieros se pueden establecer los siguientes hechos estilizados:

- Los datos de series de tiempo de rendimientos especialmente los rendimientos diarios, a menudo no son independientes ni están idénticamente distribuidos (iid)
- La volatilidad de los procesos de los rendimientos no es constante en el tiempo.
- La autocorrelación de los rendimientos absolutos o al cuadrado es muy grande.
- Los rendimientos tienen una distribución leptocúrtica. Es más probable que ocurran eventos extremos que en una distribución normal.
- Los rendimientos extremos se observan muy cerca en el tiempo (cluster de volatilidad).
- La distribución empírica de los rendimientos se encuentra sesgada a la izquierda; es decir, es más probable que se produzcan rendimientos negativos que positivos.

2.1.5. Teoría de portafolios

La teoría de portafolios fue desarrollada por Harry Markowitz en el año 1952 cuando presentó el artículo titulado *Portfolio Selection*. La teoría de portafolios consiste en destinar capital

sobre el número de activos que se tienen disponibles con el fin de maximizar el rendimiento de la inversión en tanto se minimiza el riesgo asociado a dicha inversión, lo cual permite obtener portafolios que no logran ser mejorados en términos de riesgo-rendimiento y que se conocen como portafolios eficientes (Gutiérrez-Sepúlveda et al., 2018). Esta teoría se basa en la diversificación, que es un concepto primordial en la construcción de portafolios óptimos, permitiendo estructurar combinaciones de activos con relaciones de riesgo-rendimiento superiores, en donde el riesgo es medido por la estimación de la varianza de los rendimientos esperados (Betancourt Bejarano et al., 2013). Además, se asume que los inversionistas son adversos al riesgo, de tal modo que si se ven enfrentados a elegir entre dos activos que presentan el mismo rendimiento, estos escogerán aquel que presente menor riesgo, buscando en este sentido minimizar el riesgo dado un rendimiento esperado (Chipoco, 2015). En términos generales, la teoría de portafolios se relaciona con la selección de un determinado portafolio de inversión siendo este el más conveniente dentro del conjunto de portafolios existentes.

Markowitz desarrolló su modelo basado en el comportamiento racional de los inversores. En otras palabras, los inversores quieren rendimientos y rechazan el riesgo. Por tanto, para él una cartera será eficiente si ofrece el máximo rendimiento posible para un determinado riesgo, o de forma equivalente, si ofrece el menor riesgo posible para un determinado nivel de rendimiento. Se puede calcular un conjunto eficiente de carteras resolviendo el siguiente problema de optimización cuadrática:

$$\text{Minimizar } \sigma_p^2 = w^T \Sigma w \quad (2-2)$$

sujeto a:

$$E[R_p] = \phi$$

$$w^T 1_k = 1$$

donde w es un vector de pesos de k activos en el portafolio, 1_k representa un vector columna cuyos k elementos son todos unos. σ_p^2 representa la varianza del portafolio. $E[R_p]$, es el rendimiento esperado del portafolio, de tal forma que al variar el parámetro ϕ se obtendrá en cada caso, al resolver el problema, el conjunto de pesos w que minimizan el riesgo del portafolio, así como su valor correspondiente. El conjunto de pares $[E[R_p], \sigma_p^2]$ de todos los portafolios eficientes es denominado frontera eficiente. Un vez conocida la frontera, el inversor, de acuerdo con sus preferencias, elegirá su portafolio óptimo.

A continuación se presentan algunas definiciones que resultan importantes de la teoría de portafolios que aquí será empleados.

■ Diversificación

Diversificar es invertir en más de un activo con la finalidad de minimizar el riesgo al cual se estaría expuesto cuando sólo se invierte en un activo. El ejemplo más simple de

diversificación es conocido con el dicho popular: “No ponga todos los huevos en una misma canasta”, de esta forma se distribuye el riesgo asociado a cada “huevo” (activo financiero) en varias “canastas” de inversión. Así, si se cae una canasta, la pérdida no será tan grande ya que la mayoría de los huevos no se romperán, es decir, que esa pérdida será compensada por la ganancia de las otras canastas de inversión. Sin embargo, hay que tener presente que la diversificación a pesar de que permite reducir el riesgo, este no llegará al punto de eliminarse completamente debido la existencia de los factores macroeconómicos que hacen que la exposición al riesgo sea latente y no diversificable. En pocas palabras, la diversificación se puede mirar como la compensación entre las pérdidas de ciertos activos versus las ganancias de otros (Betancourt Bejarano et al., 2013).

■ Frontera eficiente

La teoría de Markowitz determina la frontera eficiente como el conjunto de portafolios conformados por todas las combinaciones de riesgo-rendimiento, que pueden ser obtenidas entre los diferentes activos que conforman el portafolio y que ofrecen el más alto rendimiento esperado para cualquier nivel de riesgo dado (Betancourt Bejarano et al., 2013). Según García (2008), el conocimiento de la frontera eficiente por parte del inversionista resulta beneficioso ya que de acuerdo a sus preferencias o aversión al riesgo preferirá su portafolio óptimo.

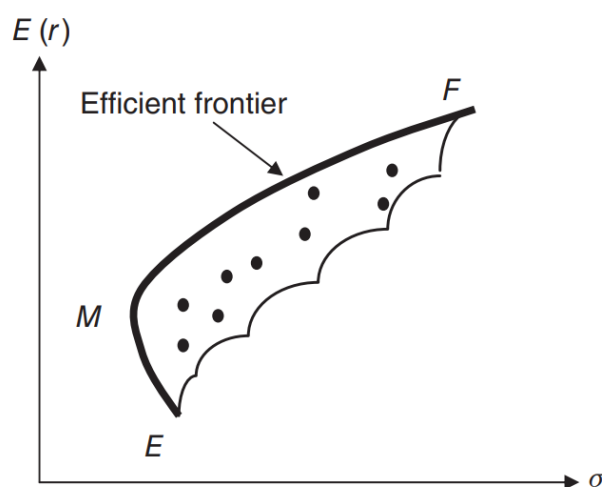


Figura 2-1: Frontera eficiente. Fuente: tomado de Kim and Francis (2013)

Como se muestra en la Figura 2-1 los portafolios ubicados entre los puntos M y F se les denomina frontera eficiente. El punto M representa el portafolio de mínima varianza,

el punto E representa un portafolio ineficiente y el punto F representa el portafolio de máximo rendimiento esperado.

■ Rendimiento del portafolio

Según Chipoco (2015), el cálculo del rendimiento del portafolio es un promedio ponderado de los rendimientos de cada uno de los instrumentos que lo componen. Para encontrarlo, se debe tener presente lo siguiente:

- El precio del activo i en el tiempo t queda expresado como $P_{i,t}$. Este es el precio de cierre en el tiempo t .
- Rendimiento logarítmico del activo i en el tiempo t por $r_{i,t} = \log \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} \right)$
- Sea $r_i = (r_{i,1}, r_{i,2}, \dots, r_{i,n})^T$ un vector aleatorio de los rendimientos del activo i .
- Sea $w = (w_1, w_2, \dots, w_k)^T$ un vector de pesos de k activos en el portafolio.

De esta manera, el rendimiento del portafolio queda expresado como:

$$R_p = \sum_{i=1}^k w_i r_i \quad (2-3)$$

■ Rendimiento esperado del portafolio

Según Chipoco (2015), el rendimiento esperado para un portafolio de inversión está determinado por el peso promedio de los valores esperados de los rendimientos de las inversiones individuales del portafolio, según se muestra en la fórmula siguiente:

$$E[R_p] = \sum_{i=1}^k w_i E[r_i] \quad (2-4)$$

donde:

- w_i es la fracción del valor total del portafolio que debe invertirse en el activo i .
- $E[r_i]$ representa el valor esperado de los rendimientos para el activo i .

■ Riesgo del portafolio

La frase “variabilidad del rendimiento” podría sustituirse por la palabra riesgo. Los términos matemáticos que miden el riesgo son la varianza y desviación estándar (Kim

and Francis, 2013). Por lo tanto, la varianza es una medida de la variación de los rendimientos (r_i) en torno al rendimiento esperado ($E[r_i]$) y se calcula como:

$$\sigma_i^2 = Var[r_i]$$

Para dos activos i y j , la covarianza de los rendimientos queda definida por:

$$\sigma_{ij} = E[(r_i - E[r_i])(r_j - E[r_j])]$$

Se determina que la desviación estándar del rendimiento del portafolio R_p , $\sigma_p = \sqrt{Var(R_p)}$, según Markowitz 1952 queda definida como:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^k w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k w_i w_j \sigma_{ij}} = \sqrt{w^T \Sigma w}, \quad \text{con } i \neq j \quad (2-5)$$

donde:

- σ_p representa la desviación estándar del portafolio.
- σ_i^2 representa la varianza de los rendimientos del activo i .
- σ_{ij} representa la covarianza entre los rendimientos para el activo i y j .

$$\bullet \Sigma = \begin{pmatrix} Var[r_1] & Cov[r_1, r_2] & \cdots & Cov[r_1, r_k] \\ Cov[r_2, r_1] & Var[r_2] & \cdots & Cov[r_2, r_k] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov[r_k, r_1] & Cov[r_k, r_2] & \cdots & Var[r_k] \end{pmatrix}$$

donde Σ es simétrica y semidefinida positiva.

Así, se puede observar que la desviación estándar del portafolio de activos es una función de los pesos promedio de las varianzas individuales y los pesos y covarianzas de los activos del portafolio.

■ Portafolio de Mínima Varianza

El portafolio de mínima varianza es el portafolio eficiente con el menor riesgo posible, que busca minimizar la varianza del portafolio siempre que se invierta la totalidad del capital de inversión. Esto hace que por debajo de él no exista otro portafolio con un menor riesgo posible, ya que es el punto de inflexión en la frontera eficiente que separa los portafolios eficientes de los ineficientes y a diferencia del portafolio de Markowitz no tiene un rendimiento objetivo.

El portafolio de mínima varianza se obtiene mediante la solución del siguiente problema de minimización:

$$\text{Minimizar}_w \quad w^T \Sigma w \quad (2-6)$$

sujeto a $w^T 1_k = 1$,

donde $1_k \in \mathbb{R}^k$ representa un vector columna cuyos k elementos son todos unos y la restricción $w^T 1_k = 1$ asegura que los pesos de la cartera sumen uno, es decir, indica que se invierte exactamente el capital disponible (Medina, 2003).

2.1.6. Backtesting

El backtesting o backtest es un elemento primordial cuando se trata de la administración de portafolios, y a menudo es utilizado como una evaluación del rendimiento histórico hipotético de una estrategia de negociación sugerida. El portafolio se somete a un backtesting reconstruyendo, con datos históricos, las transacciones que habrían tenido lugar en el pasado según las reglas definidas por una determinada estrategia. La teoría subyacente es que las estrategias que funcionaron bien en el pasado probablemente seguirán funcionando bien en el futuro. Los resultados del backtesting proporcionan estadísticas que tienen la posibilidad de utilizarse para medir la efectividad de la estrategia. No obstante, los resultados conseguidos en el backtest dependen en enorme medida de los comportamientos del lapso probado. Por consiguiente, se aconseja realizar un backtest en un período prolongado de tiempo que cubra diversos tipos de condiciones de mercado (Pfaff, 2016).

A continuación, se detalla el procedimiento de “ventana móvil” el cual es el método más común empleado en la práctica para generar soluciones a problemas de control óptimo no homogéneos cuando el horizonte es infinito (Wang and Liu, 2011).

■ Ventana Móvil

El análisis de portafolio móvil se usa comúnmente para probar el resultado de la optimización de portafolio a lo largo del tiempo. Un backtest retrospectivo sobre datos históricos brinda una idea sobre la estabilidad y el rendimiento de una estrategia en particular. Luego, la estrategia se puede optimizar y perfeccionarse antes de aplicarla a los mercados reales (Pfaff, 2016).

Según DeMiguel and Nogales (2009), para implementar esta técnica se utiliza el siguiente procedimiento. En primer lugar, se divide el número total de n rendimientos en porciones *in sample* y *out of sample*, donde los rendimientos *in sample* que es la ventana sobre la cual se realizará la estimación, abarcará los primeros M datos de los

rendimientos y cuya longitud es $M < n$ y las *out of sample* serán los $n - M$ rendimientos restantes. En segundo lugar, utilizando los datos de los rendimientos de la ventana de estimación se calculan los parámetros del portafolio de mínima varianza. Este procedimiento se repite durante $n - M$ ocasiones, desplazándose la ventana $\{t, t + M\}$ con $t = 1, 2, \dots, (n - M)$. Finalizado el proceso se han generado $n - M$ vectores de ponderación w .

2.2. Marco teórico estadístico

En esta subsección se presenta la definición de conceptos teóricos-estadísticos que son utilizados en el desarrollo de este trabajo.

2.2.1. Estadística robusta

En el trabajo empírico la media y covarianza muestral son utilizadas frecuentemente para realizar la estimación de los respectivos momentos teóricos de localización y dispersión de la población, los cuales pueden derivarse del principio de máxima verosimilitud. Sin embargo, existen ocasiones en que la función de probabilidad de las variables aleatorias no son conocidas, lo cual ocasiona que los modelos que se basan en supuestos con distribuciones paramétricas produzcan resultados erróneos conllevando a conclusiones poco útiles y haciendo que los estimadores pierdan sus propiedades deseables. Por tal motivo, es preferible acudir a métodos y técnicas que estén exentos a las violaciones de los supuestos del modelo y/o a valores atípicos. La estadística robusta se ocupa de este tipo de problemas dando soluciones en forma de estimadores robustos y de inferencia basada en ellos (Pfaff, 2016). Los métodos y conceptos de la estadística robusta tuvieron su aparición en la década de 1950 cuando Box utilizó el término técnico “estadística robusta” (Mittnik et al., 2007).

La estadística robusta ofrece un enfoque alternativo a la estadística clásica, ya que evalúa los cambios en las estimaciones producidos por pequeños cambios en las suposiciones básicas y genera estimaciones nuevas que son indiferentes a variaciones pequeñas en algunos de los supuestos de los modelos estadísticos. Además, modifica los criterios de optimización buscando una estabilidad mayor y menor sensibilidad a variaciones abruptas en los datos y ofreciendo una ventaja con respecto a la estadística clásica porque evitan especificar anticipadamente qué puntos de datos son considerados atípicos, eliminando de esta manera un elemento subjetivo en el análisis de los datos. En el entorno financiero, la estadística robusta se utiliza en la conformación de activos de un portafolio con el objetivo de que el error de estimación causado por datos atípicos que se presentan en la serie de rendimientos de los activos se minimice, buscando de esta forma portafolios pocos sensibles a dichos valores (Gutiérrez-Sepúlveda et al., 2018).

2.2.2. Estimación robusta de la matriz de covarianza

Existen diversos métodos de estimación robustos de la matriz de covarianza que han sido muy utilizados en la práctica, los cuales se han dividido en dos enfoques, la detección de valores atípicos y la estimación robusta. Este último enfoque abarca los siguientes métodos.

- **Determinante de Covarianza Mínima (MCD)**

El estimador del determinante de covarianza mínimo, fue propuesto por Rousseeuw (1984). Es un estimador robusto de la localización y la dispersión multivariante. Tiene como objetivo encontrar $h \leq n$ observaciones cuya matriz de covarianza tenga el determinante de menor valor (Hubert et al., 2012). Su uso es adecuado si el número de observaciones es al menos 5 veces el número de variables k (Gutiérrez-Sepúlveda et al., 2018).

Según Todorov and Filzmoser (2010), el estimador MCD de un conjunto de rendimientos $r = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ en \mathbb{R}^k , es definido por el subconjunto $\{r_{i_1}, r_{i_2}, \dots, r_{i_h}\}$ de las h observaciones cuya matriz de covarianza tiene el menor determinante entre todos los posibles subconjuntos de tamaño h tal que

$$h = \left\lceil \frac{n + k + 1}{2} \right\rceil \quad (2-7)$$

donde, $\lceil \cdot \rceil$ denota la parte entera del cociente, y con $\frac{n}{2} \leq h \leq n$. Además, cuanto mayor sea el valor que tome h , más robusto es el estimador.

La estimación del valor esperado μ_{MCD} por el método MCD es la media de los h puntos y se define como:

$$\hat{\mu}_{MCD} = \frac{1}{h} \sum_{l=1}^h r_{i_l}, \quad (2-8)$$

mientras que la estimación de la dispersión es su matriz de covarianza Σ_{MCD} , multiplicada por un factor de consistencia que por lo general tiene el valor de 0,75 y un factor de corrección de muestra pequeñas, y se define como:

$$\hat{\Sigma}_{MCD} = \frac{c(h)s(h, n, k)}{h - 1} \sum_{l=1}^h (r_{i_l} - \hat{\mu}_{MCD})(r_{i_l} - \hat{\mu}_{MCD})^T, \quad (2-9)$$

donde los factores tanto de corrección de consistencia $c(h)$ como de corrección de muestras pequeñas $s(h, n, k)$ se seleccionan de forma que $\hat{\Sigma}_{MCD}$ sea consistente en el modelo normal multivariante e insesgado en las muestras pequeñas.

■ Elipsoide de Volumen Mínimo (MVE)

El elipsoide de volumen mínimo propuesto por Rousseeuw and Leroy (1987), es una alternativa robusta a las estimaciones clásicas de vectores de medias y matrices de covarianza. Las muestras de una distribución normal multivariante conforman elipsoides de puntos de datos. De acuerdo a esto, el estimador MVE corresponde a esos elipsoides más pequeños que contienen al menos la mitad de las observaciones. Dichas observaciones no contaminadas son utilizadas para realizar las estimaciones del vector de medias y la matriz de covarianza (Würtz et al., 2009).

Según Van Aelst and Rousseeuw (2009), el estimador MVE del vector de medias y matriz de covarianza de un conjunto de rendimientos $r = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ en \mathbb{R}^k se define como el centro y forma del elipsoide con volumen mínimo que cubre al menos h puntos de r , donde h puede ser elegido entre $[n/2] + 1$ y n .

Formalmente, el estimador MVE de localización $\hat{\mu}_{MVE}$, y el estimador de dispersión $\hat{\Sigma}_{MVE}$ que minimizan $|\Sigma|$ sujeto a

$$\#\{l; (r_l - \mu)^T \Sigma^{-1} (r_l - \mu) \leq c^2\} \geq h \quad (2-10)$$

con $l = 1, \dots, n$,

donde la minimización es sobre todo $\mu \in \mathbb{R}^k$ y $\Sigma_{MVE} \in PDS(k)$, la clase de matrices simétricas positivas definidas de tamaño k .

El valor c es una constante fija elegida que determina la magnitud de $\hat{\Sigma}_{MVE}$. Normalmente c se elige de forma que $\hat{\Sigma}_{MVE}$ sea un estimador consistente de la matriz de covarianza para datos procedentes de una distribución normal multivariante. Es decir, $c = \sqrt{\chi_{k,\alpha}^2}$ donde $\alpha = h/n$.

De acuerdo a la definición anterior, el MVE estima el centro y la dispersión de las h observaciones del conjunto de datos que se encuentran más concentradas. Además, el valor de h determina la solidez de las estimaciones, por lo que una elección estándar que produce el máximo valor de desglose se da cuando $h = \left\lceil \frac{n+k+1}{2} \right\rceil$.

■ Estimador Ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettenring (OGK)

El estimador ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettenring fue presentado por Maronna and Zamar (2002) y tiene como objetivo calcular la estimación de la matriz de

covarianza ortogonalizada por pares. Este método de estimación se aplicó a la estimación robusta de covarianza de Gnanadesikan y Kettenring (Hubert et al., 2012).

Según Chipoco (2015), el estimador OGK se basa en un estimador robusto de la covarianza $\Sigma_{ij} = Cov[r_i, r_j]$ propuesto por Gnanadesikan y Kettenring en 1972. Su relación se fundamenta en:

$$Cov[r_i, r_j] = \frac{1}{4} (\sigma[r_i + r_j]^2 - \sigma[r_i - r_j]^2) \quad (2-11)$$

Donde σ es la desviación estandar. Los autores propusieron definir una “matriz de covarianza robusta” utilizando una escala robusta como σ ; utilizaron una desviación estándar recortada. Este estimador es denotado como $\hat{\Sigma}_{GK} = \hat{C}ov[r_i, r_j]$.

Este procedimiento de cálculo es mejorado por Maronna and Zamar (2002) de la siguiente forma:

- Se obtiene la descomposición espectral $\hat{\Sigma}_{GK} = E\Lambda E^{-1}$ donde E es la matriz de vectores propios y Λ es la matriz diagonal de valores propios.
- Se proyectan los datos en la base generada por las columnas de la matriz E .
- Se calcula $\hat{\mu}_{OGK}$ y $\hat{\Sigma}_{OGK}$ usando estas proyecciones.

3 Metodología

En esta sección se describe los pasos que se consideran pertinentes destacar para alcanzar los objetivos trazados en el presente trabajo de grado.

3.1. Obtención y preparación de la base de datos

Para este estudio, se cuenta con una base de datos de criptomonedas disponibles en Liu (2019), la cual fue obtenida de manera gratuita de la plataforma coinmarketcap, durante el periodo comprendido entre el 8-agosto-2015 al 9-abril-2018, lo que corresponde a 976 días de negociación en total. Los datos recopilados diariamente consisten en precios de cierre, al igual que el volumen en dolares y la capitalización de mercado.

Las criptomonedas descritas a continuación corresponden a las nueve de mayor capitalización en el mercado. Las cuales corresponden a aquellas que tienen capitalización de mercado superior un billón de dolares.

- **Bitcoin:** Se introdujo en 2008 y se lanzó poco después, en enero de 2009, como la primera y principal criptomoneda descentralizada. Es una moneda en línea peer-to-peer, lo que significa que todas las transacciones se realizan directamente entre participantes iguales e independientes en la red sin ningunos intermediarios que necesitan para delegarlas o facilitar operaciones.
- **Ethereum:** A diferencia de Bitcoin, esta criptomoneda no tiene restricciones de minado y se utiliza para implementar acuerdos y contratos inteligentes, que mientras dure su creación no pueden ser cortados, censurados o manipulados por intermediarios.
- **Ripple:** Es una criptomoneda creada en 2012 para pagos globales. Permite a los usuarios enviar dinero a un costo muy bajo, lo que atrae el interés potencial de clientes minoristas y bancos. Una de las principales propuestas de valor de Ripple son sus costos de transacción muy pequeños y, al mismo tiempo, proporciona transacciones finales en menos de cinco segundos.
- **Litecoin:** Es una criptomoneda diseñada para brindar pagos rápidos, seguros y de bajo costo aprovechando las características únicas de la tecnología blockchain y fue lanzada en 2011. Tiene un tiempo de bloques de tan solo 2,5 minutos, y comisiones por

transacción demasiado bajas, lo que la hace apta para microtransacciones y pagos en puntos de venta.

- **Stellar:** Es una red abierta que permite el movimiento y almacenamiento de dinero y fue lanzada en 2014. El objetivo original de la empresa fue promover la inclusión financiera al llegar a las personas no bancarizadas de todo el mundo, pero pronto sus prioridades cambiaron a ayudar a las empresas financieras a poder conectarse entre sí a través de la tecnología blockchain.
- **Monero:** Fue lanzado en 2014. Su objetivo es permitir transacciones privadas y anónimas. Además, los pagos se realizan de forma rápida y a bajo costo sin temor a la censura.
- **Dash:** Es una cadena de bloques y criptomoneda de código abierto enfocada en proporcionar una red de pago global descentralizada, rápida y económica, lanzada en 2014. Dash busca mejorar el Bitcoin (BTC) ofreciendo más privacidad y transacciones más rápidas.
- **NEM:** Lanzado en 2015, este es un ecosistema de plataformas que utilizan blockchain y encriptación para brindar soluciones a empresas y particulares.
- **Verge:** Esta es una criptomoneda y cadena de bloques centrada en la privacidad que mejora la cadena de bloques original de Bitcoin y ofrece funciones de privacidad adicionales, como la integración de la red de anonimato Tor en una billetera llamada vergePay y la opción de enviar transacciones a una dirección fija. Su objetivo es proporcionar una red de pago descentralizada.

3.2. Análisis de las series temporales de rendimientos

En la primera fase de esta investigación se observó el compartimiento de los precios de cierre de las nueve criptomonedas, con el fin clarificar como han ido evolucionando durante el periodo en que fueron recolectadas. Después se continuó realizando el análisis de las series de rendimiento. Como se había mencionado anteriormente, los rendimientos de un activo son un resumen completo y sin escala de la oportunidad de inversión, que generan una facilidad de manejarlos a diferencia de las series de los precios, debido a sus propiedades estadísticas más atractivas. Por lo tanto, se calcularon los rendimientos logarítmicos $r_{i,t}$ a cada una de las nueve criptomonedas, de la siguiente manera:

$$r_{i,t} = \log \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} \right) \text{ con } i = 1, \dots, 9 \text{ y } t = 1, \dots, 976$$

donde i representa las criptomonedas y t el periodo de análisis.

Dado lo anterior, en una primera etapa, se realiza una inspección visual del exceso de curtosis y asimetría de los rendimientos, a través del histograma y diagrama de cajas.

Se analizó el supuesto de normalidad mediante el diagrama de probabilidad normal, el cual mide la relación entre los cuantiles de una muestra y los teóricos de una distribución normal y se realizó la respectiva prueba formal.

Por último, se analizaron los periodos de baja y alta volatilidad observados a través de los rendimientos absolutos. Estos periodos son llamados clúster de volatilidad. Además se examinó la relación lineal entre la volatilidad de diferentes periodos por medio del ACF.

Después de realizada la inspección visual, en una segunda etapa se continuó con un resumen estadístico de los rendimientos de las criptomonedas con el fin de comprender de mejor manera su comportamiento.

3.3. Portafolio de Mínima Varianza con estimadores clásico y robustos

Para el análisis del portafolio de Mínima Varianza basado en estimadores clásicos y robustos de la matriz de covarianza, se consideraron dos etapas: En la primera etapa se estimó la matriz de covarianza de manera clásica y robusta; en la segunda etapa se ingresó cada uno de los parámetros de la matriz de covarianza estimados en la etapa uno y se crearon los portafolios. Todo este proceso se implementó con el software R.

3.3.1. Estimación de la matriz de covarianza

A continuación se presenta el procedimiento empleado para la estimación de la matriz de covarianza con el método clásico, correspondiente al estimador de Máxima Verosimilitud, y para la estimación de la matriz de covarianza mediante los métodos de estimación robusta, como lo es el Determinante de Covarianza Mínima, Elipsoide de Volumen Mínimo y el Estimador Ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettenring.

Máxima Verosimilitud

Suponiendo que el conjunto de rendimientos $r = \{r_1, r_2, \dots, r_{975}\}$ en \mathbb{R}^9 de las criptomonedas, representan una muestra aleatoria normal multivariante con vector de media μ y matriz de covarianza Σ . Como $r = \{r_1, r_2, \dots, r_{975}\}$ son mutuamente independientes Ledoit and Wolf

(2003) y cada uno tiene una distribución $N_k(\mu, \Sigma)$, la función de densidad conjunta de todos los rendimientos es el producto de las densidades normales marginales:

$$L(\mu, \Sigma) = \prod_{l=1}^{975} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{9/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-(r_l - \mu)^T \Sigma^{-1} (r_l - \mu)/2} \right\} = \frac{1}{(2\pi)^{(975 \cdot 9)/2} |\Sigma|^{975/2}} e^{-\sum_{l=1}^{975} (r_l - \mu)^T \Sigma^{-1} (r_l - \mu)/2}$$

siendo esta la función de verosimilitud. Para hallar el estimador de Σ (también de μ) que mejor explique los rendimientos, se tuvo que encontrar los valores de μ y Σ que maximizaron esta función. Esta técnica es conocida con el nombre de estimación por máxima verosimilitud y es la técnica clásica utilizada para encontrar un estimador de Σ . Los estimadores resultantes ($\hat{\mu}$ y $\hat{\Sigma}$) son los de máxima verosimilitud.

Utilizando las propiedades de las matrices simétricas y la definición de traza de una matriz (suma de los elementos de su diagonal), se reescribió la función de verosimilitud como

$$L(\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{(975 \cdot 9)/2} |\Sigma|^{975/2}} e^{-\{tr[\Sigma^{-1}(\sum_{l=1}^{975} (r_l - \bar{r})(r_l - \bar{r})^T)] + n(\bar{r} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\bar{r} - \mu)\}/2}$$

Teniendo en cuenta que Σ^{-1} es positiva definida, es decir, la distancia $(\bar{r} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\bar{r} - \mu) > 0$ a menos que $\hat{\mu} = \bar{r}$. De esta forma, la función de verosimilitud se maximizó con respecto a μ en

$$\hat{\mu} = \frac{1}{975} \sum_{l=1}^{975} r_l$$

al igual que la función de verosimilitud se maximizó con respecto a Σ en

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{975} \sum_{l=1}^{975} (r_l - \bar{r})(r_l - \bar{r})^T$$

Este proceso de estimación se realizó utilizando la función `covEstimator()` del paquete `fPortfolio` de R.

Determinante de Covarianza Mínima

Dado el conjunto de rendimientos $r = \{r_1, r_2, \dots, r_{975}\}$ en \mathfrak{R}^9 , se calculó y eligió el subconjunto

$$h = \left\lceil \frac{n + k + 1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{975 + 9 + 1}{2} \right\rceil = 492$$

Desde el conjunto de rendimientos r , se obtuvo

$$I = \binom{n}{h} = \binom{975}{492}$$

subconjuntos de tamaño 492, es decir

$$H_1, H_2, \dots, H_I$$

A estos subconjuntos, se les calculó el vector de medias

$$\hat{\mu}_{H_1}, \hat{\mu}_{H_2}, \dots, \hat{\mu}_{H_I}$$

y las respectivas matrices de covarianzas

$$\hat{\Sigma}_{H_1}, \hat{\Sigma}_{H_2}, \dots, \hat{\Sigma}_{H_I}$$

Luego, se calculó el determinante de cada una de las matrices de covarianzas obtenidas

$$|\hat{\Sigma}_{H_1}|, |\hat{\Sigma}_{H_2}|, \dots, |\hat{\Sigma}_{H_I}|$$

Después de realizado este proceso, se eligió el subconjunto con el cual se obtuvo la matriz de covarianza con mínimo determinante. Finalmente, el estimador $\hat{\mu}_{MCD}$ fue el vector de medias que correspondió al subconjunto del que se obtuvo la matriz de covarianza con mínimo determinante, el cual se calculó con la Ecuación 2-8, y el estimador $\hat{\Sigma}_{MCD}$ se calculó con la Ecuación 2-9. Este proceso se realizó utilizando la función `covMcdEstimator()` del paquete `fPortfolio` de R.

Elipsoide de Volumen Mínimo

El algoritmo aproximado MVE estándar limita su búsqueda a los elipsoides determinados por subconjuntos formados por $(k + 1) = (9 + 1)$ observaciones de r . Para cada subconjunto de tamaño 10, indexado por $g = \{i_1, \dots, i_{10}\} \subset \{1, \dots, 945\}$, su media muestral es dada por

$$\hat{\mu}_g = \frac{1}{10} \sum_{g=1}^{10} r_{i_g}$$

y la matriz de covarianza muestral es

$$\hat{\Sigma}_g = \frac{1}{9} \sum_{g=1}^{10} (r_{i_g} - \hat{\mu}_g)(r_{i_g} - \hat{\mu}_g)^T$$

El elipsoide determinado por $\hat{\mu}_g$ y $\hat{\Sigma}_g$ se infla o desinfla hasta que contenga exactamente $h = 492$ puntos: el factor de escala viene dado por D_g^2/c^2 con $c = \sqrt{\chi_{9,492/945}^2} = 3,09$ y

$$D_g^2 = [(r_l - \hat{\mu}_g)^T \hat{\Sigma}_g^{-1} (r_l - \hat{\mu}_g)]_{492:945}$$

donde 492:945 indica la 492^{ésima} distancia cuadrada más pequeña entre las distancias cuadradas de las 945 observaciones en r . El elipsoide resultante satisface entonces la condición 2-10 y su volumen es proporcional a

$$[\det((D_g^2/c^2)\hat{\Sigma}_g)]^{1/2} = (D_g/c)^9 \det(\hat{\Sigma}_g)^{1/2} \quad (3-1)$$

El algoritmo devuelve entonces la solución con la menor función objetivo 3-1 entre un gran número de 10 subconjuntos. Este procedimiento se realizó utilizando la función `covmveEstimator()` del paquete `fPortfolio` de R.

Estimador Ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettenring

Dado el conjunto de rendimientos $r = \{r_1, r_2, \dots, r_{975}\}$ en \mathbb{R}^9 . Sea σ y μ estimadores robustos univariantes de dispersión y localización, es decir, σ es la τ -escala de Yohai and Zamar 1988 y μ es una media ponderada, y v una estimación robusta de la covarianza definida en pares de rendimientos. Se definió la matriz de covarianza $\hat{\Sigma}_{OGK}$ y el vector de medias $\hat{\mu}_{OGK}$ como sigue:

Primero se definió $D = \text{diag}(\sigma(r_1), \dots, \sigma(r_9))$ y $y_l = D^{-1}r_l$ con $l = 1, \dots, 945$. Después se calculó la matriz de correlación $U = [u_{ij}]$ aplicando v a las columnas Y_i con $i = 1, \dots, 9$, es decir

$$u_{ii} = 1 \text{ y } u_{ij} = v(Y_i, Y_j), \quad i \neq j$$

Luego se calculan los valores propios λ_i y vectores propios e_i de U ($i \equiv 1, \dots, 9$) y se llama E a la matriz cuyas columnas son los e_i 's, de modo que $U \equiv E\Lambda E^T$ con $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_9)$. Por último, sea

$$A = DE \text{ y } z_l = E^T y_l = A^{-1}r_l$$

donde $r_l = Az_l$ y así se definió el vector de medias

$$\hat{\mu}_{OGK} = A\nu$$

donde $\nu = (\mu(Z_1), \dots, \mu(Z_9))^T$ y la matriz de covarianza

$$\hat{\Sigma}_{OGK} = A\Gamma A^T$$

donde $\Gamma = \text{diag}(\sigma(Z_1)^2, \dots, \sigma(Z_9)^2)$

Se tomó como v el estimador Gnanadesikan-Kettenring definido en 2-11, el cual queda como

$$u_{ij} = \frac{1}{4} (\sigma[Y_i + Y_j]^2 - \sigma[Y_i - Y_j]^2), \quad i \neq j$$

Esta estimación se denomina estimación ortogonalizada de Gnanadesikan-Kettenring (OGK). Este procedimiento se realizó usando la función `covOGKEstimator()` del paquete `fPortfolio` de R.

3.3.2. Portafolio de Mínima Varianza

Una vez calculado cada uno de los estimadores, estos se incorporaron en el modelo de Markowitz como estimador de la matriz de covarianza.

Para crear el portafolio de Mínima varianza, se utilizó la función `minvariancePortfolio()` del paquete `fPortfolio` de R. Para crear este portafolio se especificó primero los estimadores de la matriz de covarianza en la función `portfolioSpec()`. Además, se colocó una restricción llamada “LongOnly” la cual refleja el hecho de que se permite que todos los pesos estén entre cero y uno. De acuerdo a esto, los portafolios quedaron configurados de la siguiente manera:

1. Portafolio de Mínima varianza usando el estimador de Máxima verosimilitud.
2. Portafolio de Mínima varianza usando el estimador del Determinante de covarianza mínima.
3. Portafolio de Mínima varianza usando el estimador del Elipsoide de volumen mínimo.
4. Portafolio de Mínima varianza usando el estimador de Ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettenring.

Con estos portafolios ya configurados, se utilizó un modelo de optimización cuadrática que se usa en la Teoría de portafolios de Markowitz con el fin de encontrar las ponderaciones que minimicen las varianzas de los portafolios.

3.4. Backtesting

Se realizaron 2 backtesting a los cuatro portafolios de inversión obtenidos, con el fin de evaluar sus rentabilidades. Para esto, se utilizó el procedimiento de ventana móvil. El primer backtesting contempló el total de los 975 registros de rendimientos disponibles. Mientras que el segundo, sólo contempló los últimos 450 registros de rendimientos que correspondieron a los días de mayor volatilidad dentro de todo el periodo de análisis.

El backtesting inicia dividiendo los 975 rendimientos en proporciones *in sample* y *out sample*, donde los rendimientos *in sample* que correspondieron a la ventana rodante, que abarcó los primeros 720 rendimientos y los *out sample* fueron los 255 rendimientos restantes. Utilizando los 720 rendimientos, se calculan los parámetros de los portafolios. Se repite el procedimiento para el siguiente periodo incluyendo los rendimientos de un día posterior y eliminando los del último día. Así, el proceso se repite 255 veces. Al final del proceso se extrajeron los 255 vectores de ponderaciones de los portafolios, los cuales permitieron el cálculo del exceso de rendimientos de los portafolios con que se realizaron las comparaciones de los portafolios basado en métodos robustos con el método clásico a través de las rentabilidades. Este mismo procedimiento se hace para 450, pero donde los rendimientos *in sample* son 300 y los *out sample* son 150.

4 Resultados

4.1. Análisis de las series temporales de rendimientos

En la Figura 4-1 se ilustra la serie temporal de los precios diarios de la criptomoneda Bitcoin. Se observa un comportamiento creciente leve en los primeros años, pero a mitad del año 2017 este crecimiento es mucho más grande, llegando a un máximo cercano a los 20.000 dolares. A finales del año 2017 e inicios del 2018 el precio empieza a disminuir hasta un valor cercano a los 8.000 dolares.

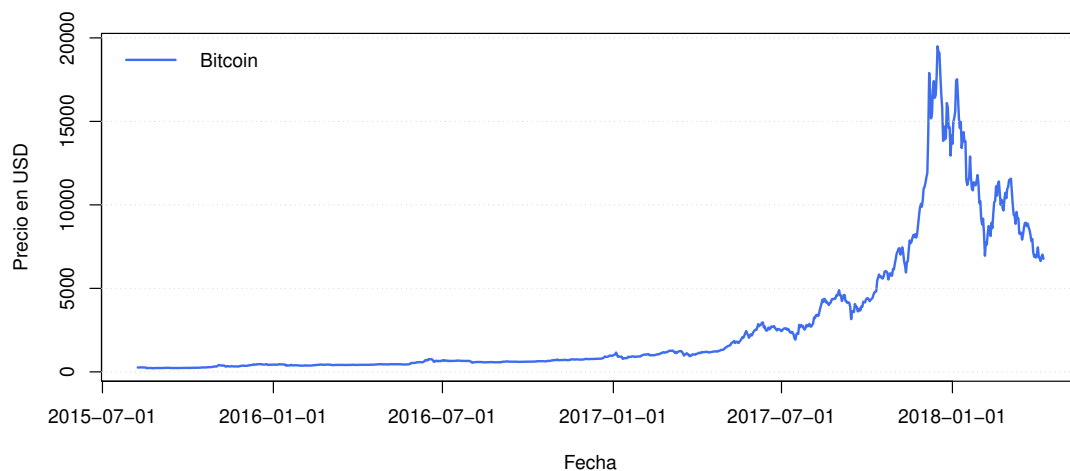


Figura 4-1: Precios diarios de Bitcoin 2015 - 2018

La Figura 4-2 muestra que los precios diarios de las criptomonedas Ethereum, Litecoin, Monero y Dash tienen el mismo comportamiento de crecimiento y decrecimiento que Bitcoin. Sin embargo, el precio de Ethereum y de Dash es notablemente mayor al de Litecoin y Monero. Para el primer par de criptomonedas, Ethereum alcanza un máximo cercano a los 1500 dolares y Dash alcanza un precio por encima de este valor, mientras que el segundo par de criptomonedas, ambas no superan los 500 dolares.

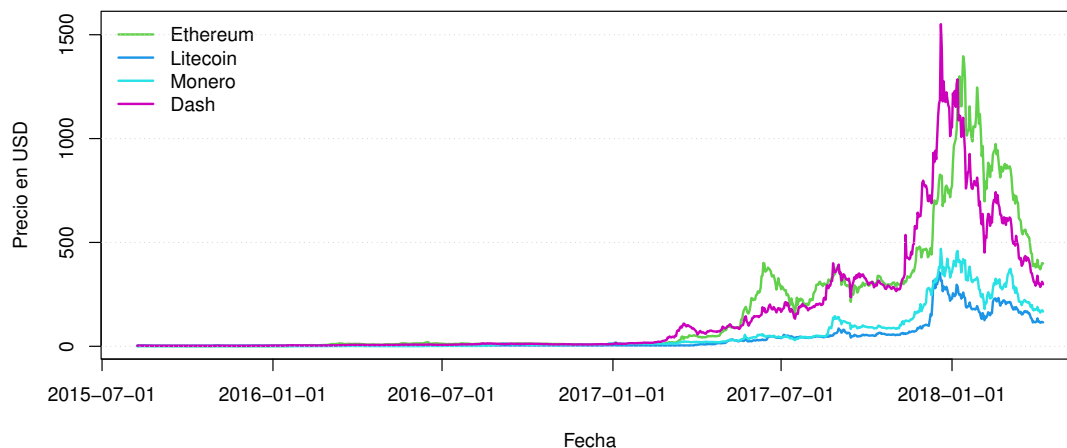


Figura 4-2: Precios diarios de Ethereum, Litecoin, Monero y Dash 2015 - 2018

En la Figura 4-3 se puede observar que las criptomonedas Ripple y NEM tuvieron un primer crecimiento a mitad de 2017 que se mantuvo constante hasta finales del mismo año, cuyo precio no superó los 0.5 dolares. Finalizando el año 2017 e iniciando el año 2018 todas las criptomonedas tuvieron un mayor crecimiento. Sin embargo, sólo Ripple y NEM superaron el precio de un dolar. Estas criptomonedas empiezan a disminuir sus precios en los meses posteriores.

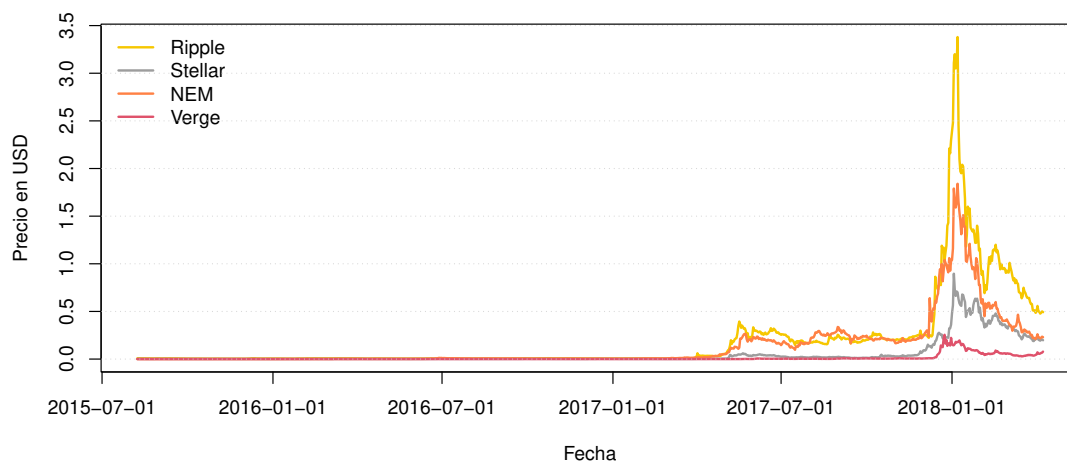


Figura 4-3: Precios diarios de Ripple, Stellar, NEM y Verge 2015 - 2018

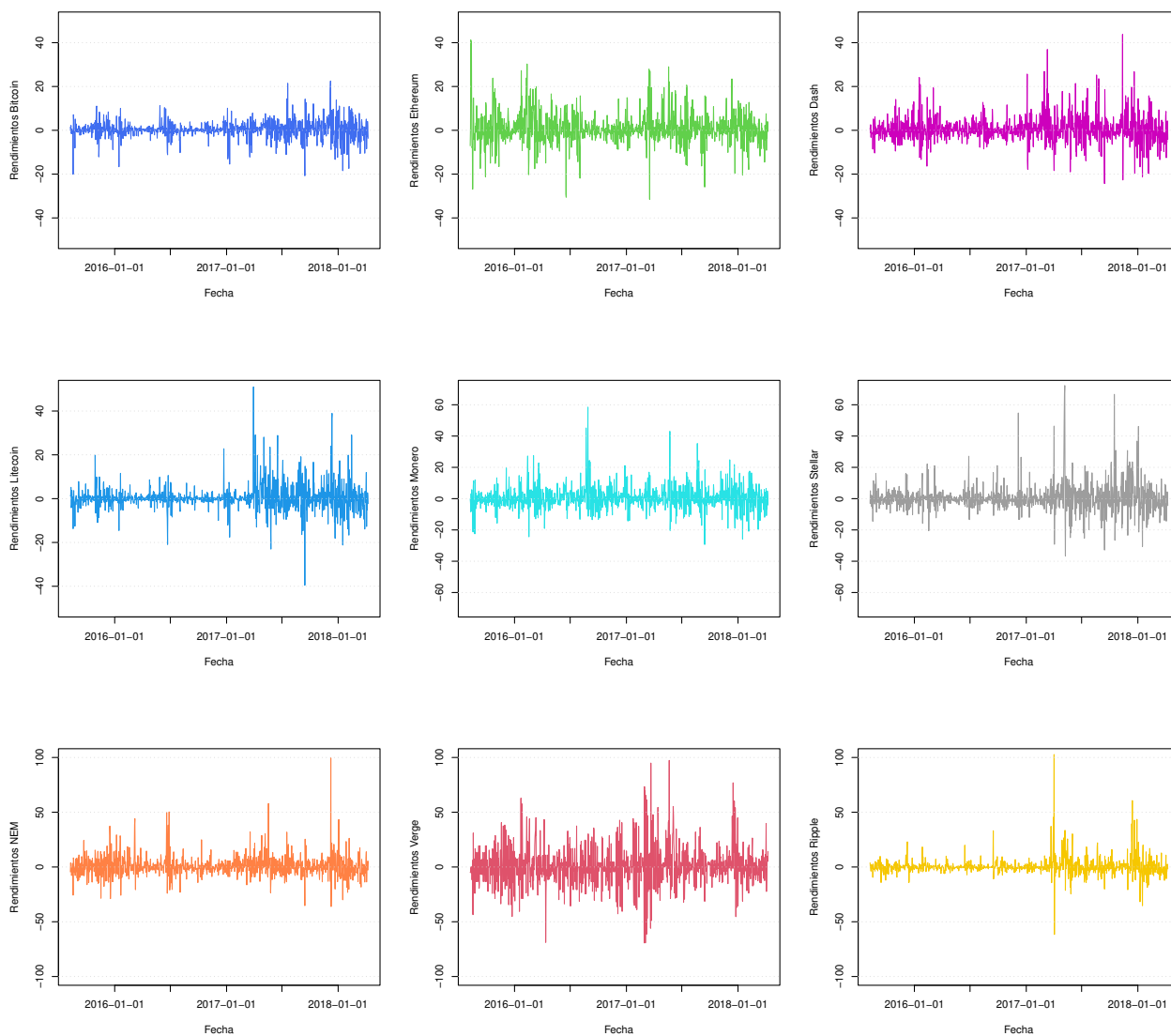


Figura 4-4: Rendimientos logarítmicos de las criptomonedas

Analizando la serie de rendimientos de las criptomonedas, se puede observar en la Figura 4-4 que los rendimientos logarítmicos de todas las criptomonedas muestran una agrupación de la volatilidad. En otras palabras, la desviación que presentan los rendimientos respecto a su media es muy cambiante. Esto es más pronunciado en la segunda mitad del período analizado para las criptomonedas Bitcoin, Dash, Litecoin, Monero, Stellar y Ripple, es decir, del segundo trimestre del 2017 en adelante. Por otra parte, las criptomonedas Ethereum, NEM y Verge presentaron una volatilidad en todo el periodo de analisis.

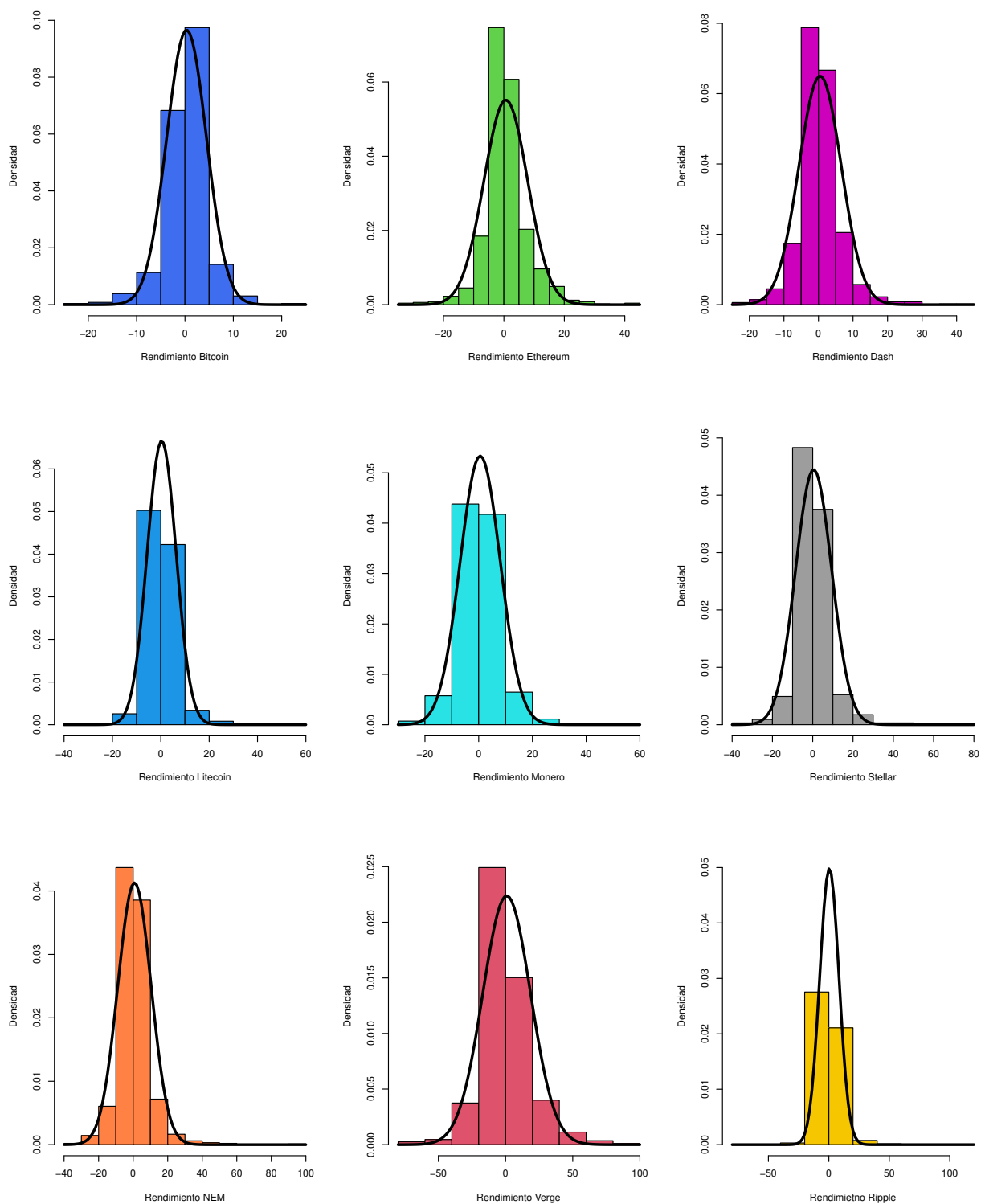


Figura 4-5: Histograma de los rendimientos logarítmicos de las criptomonedas

En la Figura 4-5 se muestra que la forma de la distribución de los rendimientos logarítmicos de las criptomonedas son “picudas” o leptocúrticas, ya que presentan un alto grado de concentración alrededor de la media. Esta forma de la distribución de los rendimientos de las criptomonedas es más evidente en las criptomonedas Bitcoin, Litecoin, NEM y Ripple.

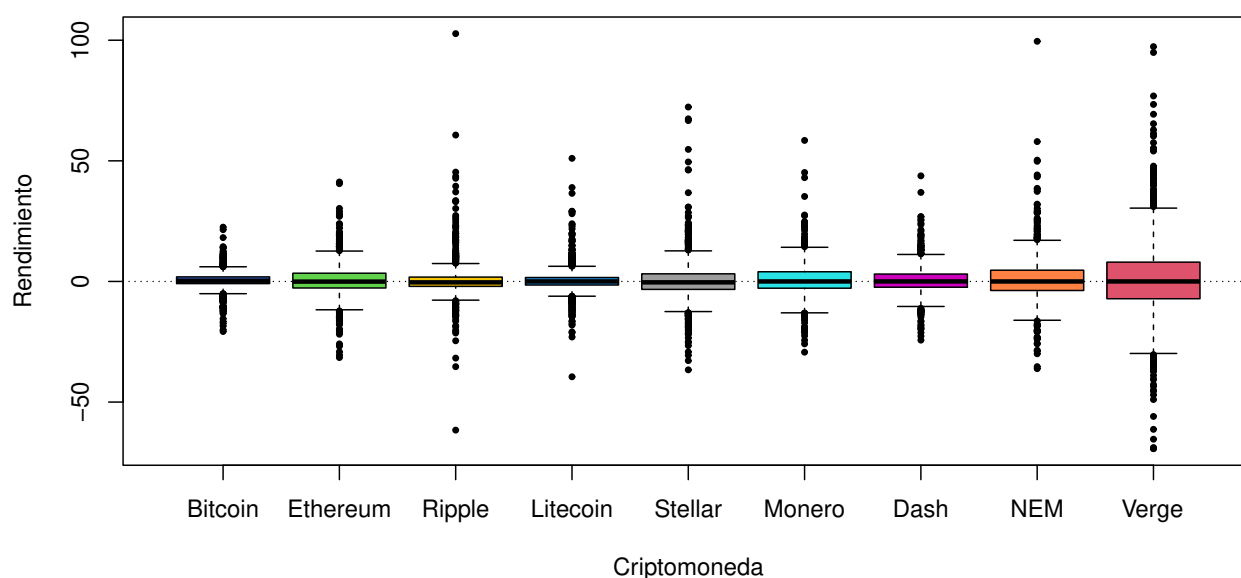


Figura 4-6: Boxplot de los rendimientos logarítmicos de las criptomonedas

La Figura 4-6 muestra que la mayoría de los rendimientos logarítmicos de las criptomonedas están sesgadas hacia la derecha, es decir que la forma de la distribución de los rendimientos es asimétrica. Siendo más evidente este comportamiento en las criptomonedas Ripple, Stellar y NEM ya que son aquellas que presentan valores muy atípicos hacia la derecha.

En la Figura 4-7 se puede notar como las colas de las distribuciones de los rendimientos logarítmicos de las criptomonedas son más pesadas en comparación con la distribución normal. Esto indica que la probabilidad de obtener valores extremos en la distribución empírica de los rendimientos es más grande en la distribución de los rendimientos que lo que predice una distribución normal.

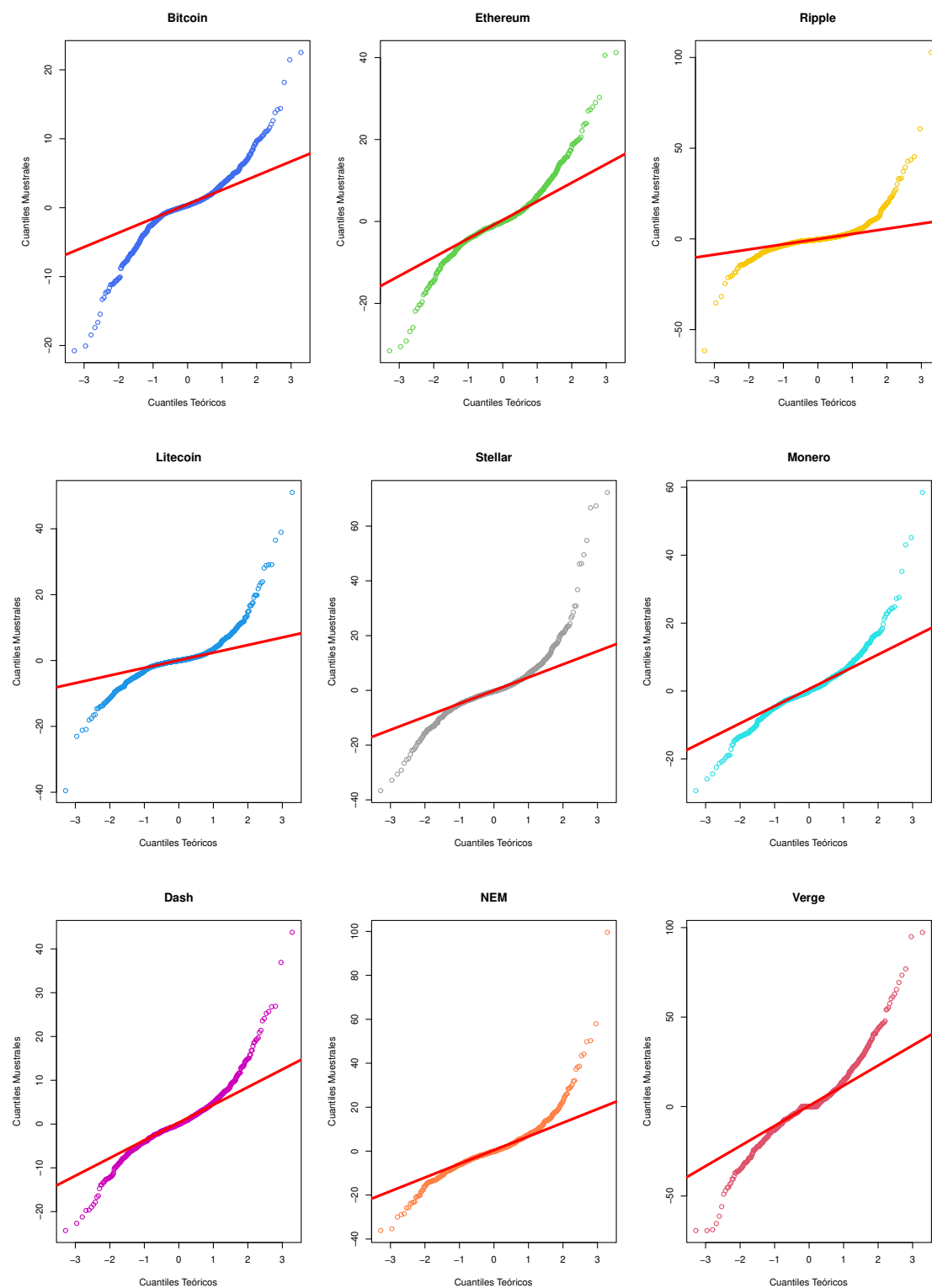


Figura 4-7: QQ-plots de los rendimientos logarítmicos de las criptomonedas

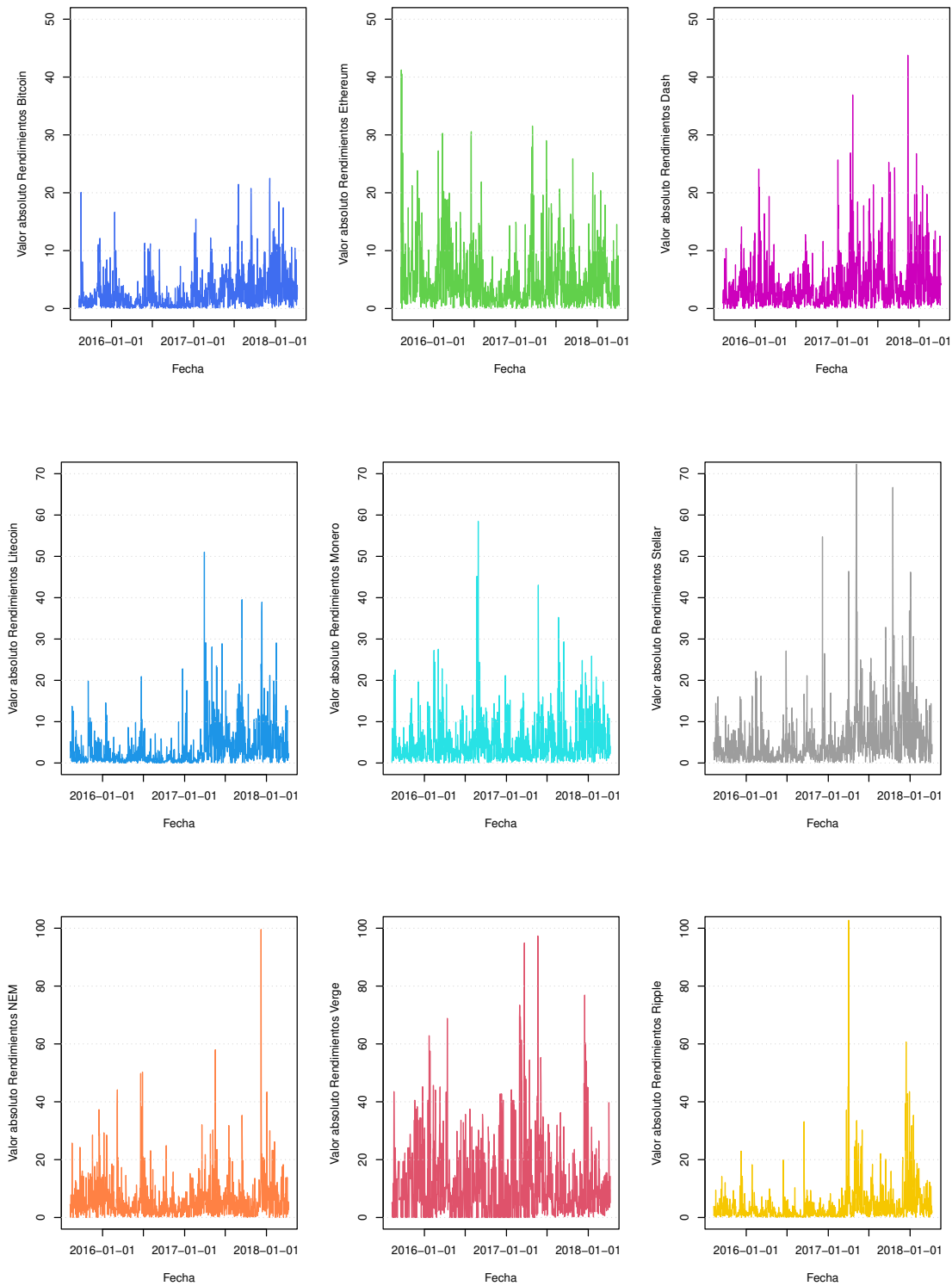


Figura 4-8: Rendimientos logarítmicos absolutos de las criptomonedas

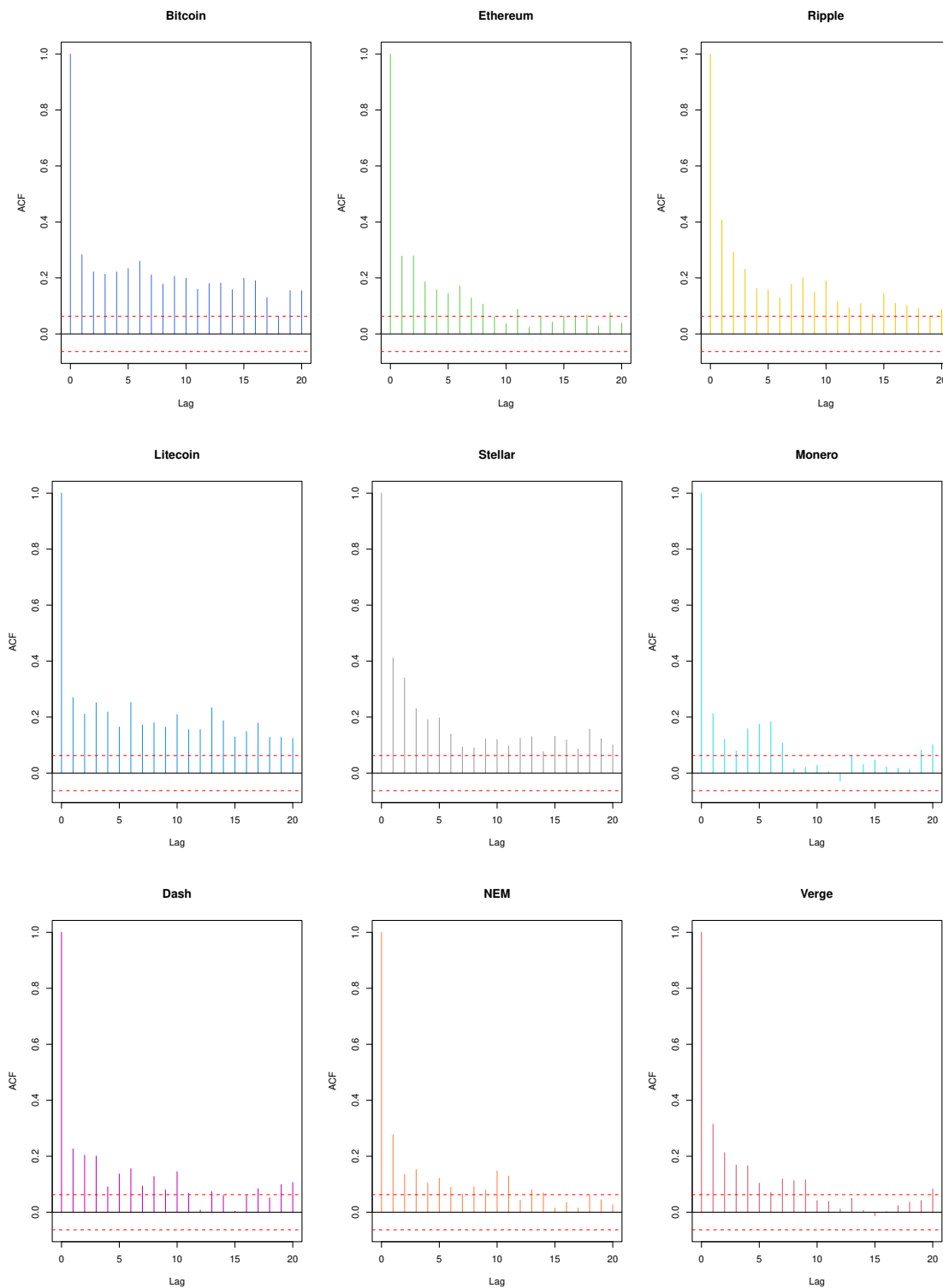


Figura 4-9: ACF de los Rendimientos logarítmicos absolutos de las criptomonedas

En la Figura 4-8 se observa a través del valor absoluto de los rendimientos, que la volatilidad

de las series de los rendimientos de las criptomonedas no es constante a través del periodo de estudio. Además, la volatilidad se agrupa (cluster de volatilidad), debido a que los acontecimientos de gran volatilidad tienden a estar seguidos de periodos de alta volatilidad y en el caso opuesto sucede lo mismo. Este gráfico de la serie temporal confirma de manera más precisa lo que ya se comentaba en la Figura 4-5. En primer lugar, la existencia de una agrupación de volatilidad; y en segundo lugar, que los rendimientos son más volátiles en la segunda mitad del periodo de la muestra.

La función de autocorrelación del valor absoluto de los rendimientos es una forma simple de estudiar la relación lineal entre la volatilidad de diferentes periodos. La Figura 4-9 muestra la presencia de correlación entre periodos de la volatilidad de los rendimientos logarítmicos de las criptomonedas. En pocas palabras, la volatilidad de un periodo determinado se relacionada con los valores pasados de ésta. La relación empieza a desaparecer a medida que los rezagos aumentan. Es decir que existe volatilidad agrupada. Este comportamiento se presenta más notoriamente en las criptomonedas Ethereum, Ripple, Stellar, Monero, Dash, Nem y Verge ya que la correlación disminuye más rápidamente en los primeros 10 rezagos. Caso contrario pasa con las criptomendas Bitcoin y Litecoin, ya que la correlación de la volatilidad es constante en los primeros 10 rezagos y disminuye más lenta que las criptomonedas anteriores.

Después de realizada la inspección visual de las características de las series temporales de los rendimientos, se procede a corroborar lo anterior con un resumen estadístico con el fin de tener un mejor comprensión de dichas características.

Tabla 4-1: Resumen estadístico de los rendimientos logarítmicos de las criptomonedas

	Bitcoin	Ethereum	Ripple	Litecoin	Stellar	Monero	Dash	NEM	Verge
Mínimo	-20.75	-31.55	-61.63	-39.52	-36.64	-29.32	-24.32	-36.15	-69.31
Máximo	22.51	41.23	102.74	51.03	72.31	58.46	43.77	99.56	97.33
Media	0.33	0.64	0.42	0.35	0.45	0.57	0.47	0.76	0.84
Desv. Estandar	4.13	7.23	8.00	5.99	8.97	7.48	6.14	9.66	17.82
Custosis	4.91	4.37	38.64	13.17	14.41	7.18	6.14	15.16	3.78
Asimetría	-0.28	0.53	3.11	1.41	2.07	1.08	0.93	1.92	0.56

Según la Tabla 4-1, las criptomonedas que tuvieron la mayor pérdida fueron Verge y Ripple con un 69.31 %. y 61.63 % respectivamente. Los mayores rendimientos lo obtuvieron Ripple, NEM y Verge con un 102.74 %, 99.56 y 97.33 % respectivamente. También, se puede ver que las criptomonedas con mayor y menor rendimiento promedio fueron las mismas que obtuvieron el mayor y menor riesgo. Verge con un rendimiento promedio de 0.84 % y un riesgo de 17.82 %, a diferencia de Bitcoin que obtuvo un rendimiento promedio de 0.33 % y un riesgo

del 4.14 %

Ahora, evaluando la forma de la distribución de los rendimientos a través del exceso de curtosis, se puede evidenciar que todas las criptomonedas presentan un exceso de curtosis positiva corroborando lo analizado en la Figura 4-5, donde Ripple es la criptomoneda que presenta mayor exceso de curtosis siendo esta de 38.64.

Siguiendo con la evaluación de la forma de la distribución de los rendimientos pero, a través de la asimetría, se puede ver que la distribución de frecuencia de las criptomonedas es asimétrica y, en donde sólo Bitcoin tiene asimetría negativa siendo de -0.28. Esto va en línea con lo analizado en la Figura 4-6.

Como se esperaba, el análisis descriptivo reforzó la evidencia a favor de la no-normalidad de los rendimientos logarítmicos de las criptomonedas. Desde el caso de la curtosis, observándose que las distribuciones muestrales de los rendimientos son leptocúrticas (dado que la curtosis es superior al de una distribución normal la cual es de 3) y así mismo, desde la asimetría mirando que la forma de la distribución de los rendimientos es asimétrica positiva.

Sin embargo, para tener una mayor certeza si la distribución de los rendimientos logarítmicos de las criptomonedas no es normal, se procedió a realizar la prueba de normalidad Shapiro Wilk, donde la hipótesis nula es que los rendimientos se distribuyen normal para un nivel de significancia $\alpha = 0,05$. Pero el *valor - p* de todas las criptomonedas fue despreciable, es decir que $\text{valor} - p < \alpha$, entonces la hipótesis nula es rechazada, concluyéndose que los rendimientos de las criptomonedas no vienen de una distribución normal, reafirmando así lo analizado en la Figura 4-7.

4.2. Portafolios de Mínima Varianza

En la Figura 4-10 se puede apreciar como quedaron compuestos los portafolios encontrados con cada uno de los métodos de estimación de la matriz de covarianza. El primer portafolio construido que utilizó el método de estimación por Máxima Verosimilitud (Portafolio ML), se puede notar que de las nueve criptomonedas que se tienen para invertir, sólo se consideraron cinco. Algo que se puede evidenciar es que casi $\frac{2}{3}$ de la inversión está destinada a Bitcoin, lo cual es coherente con el objetivo del portafolio de minimizar el riesgo debido a que esta es la criptomoneda de menor riesgo individual. El portafolio lo terminan de componer Dash con 14,4 %, seguida de Ripple con 10,4 %, Ethereum con un 9,3 % y por último Litecoin con un 2,3 %. El portafolio que utilizó el método de estimación del Determinante de Mínima Covarianza (Portafolio MCD), tomó en cuenta para invertir seis de las nueve criptomonedas disponibles, donde es evidente que Bitcoin y Ripple tienen los mayores porcentajes de inversión, cada uno con un 45,3 % y 32,4 % respectivamente. El portafolio se terminó de

constituir con Litecoin y Dash con un 9,5 % y 8,8 % de inversión, seguidos de Ethereum con un porcentaje del 4 % y por último Verge que sólo tuvo un porcentaje de inversión del 0,1 %. El portafolio que utilizó como medida de estimación de la matriz de

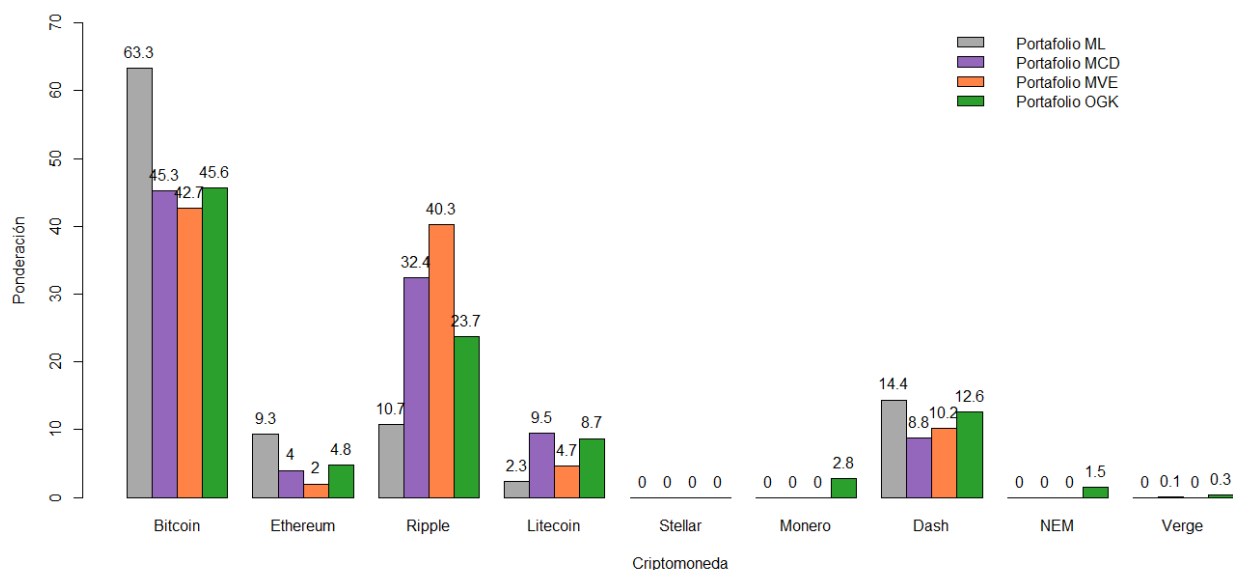


Figura 4-10: Composición de los portafolios

covarianza el método de Elipsoide de Volumen Mínimo, al igual que el portafolio MCD, le da un mayor porcentaje de inversión a Bitcoin y Ripple, cada uno con un 42,7 % y 40,3 % respectivamente. Le sigue Dash con un porcentaje de inversión del 10,2 % y finalizan la composición de la cartera Litecoin y Ethereum con un 4,2 % y 2 % respectivamente. A diferencia de los portafolios anteriores, el portafolio que utilizó la estimación de la matriz de covarianza por el método Ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettenring (Portafolio OGK) no tuvo en cuenta solo a Stellar. Además, este portafolio con respecto a las criptomonedas con mayor porcentaje de inversión, comparte similitud con los portafolios MCD y MVE, ya que Bitcoin, seguido de Ripple son los que poseen estas características, cada uno con un porcentaje de inversión de 45,6 % y 23,7 % respectivamente. El portafolio se termina de conformar asignándoles un porcentaje del 12,6 % a Dash, seguido de Litecoin y Ethereum cada uno con un porcentaje de 8,7 % y 4,8 %. A Monero y NEM les corresponde un porcentaje de inversión del 2,8 % y 1,5 %, finalizando así la conformación del portafolio con Verge con un porcentaje de inversión de 0,3 %.

Después de haber analizado cada una de las composiciones de los portafolios de inversión, se procede a realizar el análisis comparativo de los rendimientos esperados y riesgo de los portafolios.

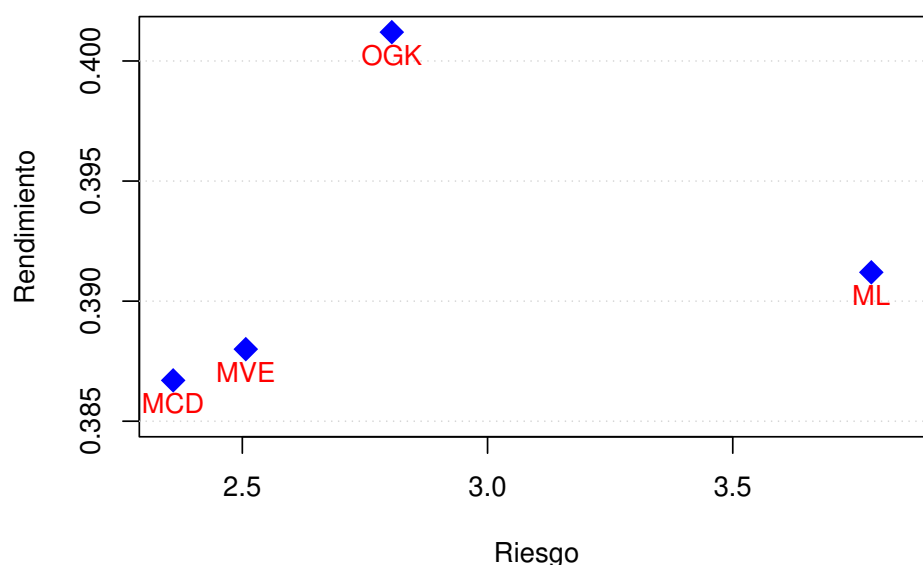


Figura 4-11: Riesgo-rendimiento de los portafolios construidos

Tabla 4-2: Comparación de los portafolios

Métodos de Estimación	Rendimiento portafolio	Riesgo portafolio	Ratio Sharpe
Máxima Verosimilitud	0.3912	3.7825	0.1034
Determinante de Covarianza Mínima	0.3867	2.3590	0.1639
Elipsoide de Volumen Mínimo	0.3880	2.5071	0.1548
Ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettenring	0.4012	2.8048	0.1430

De acuerdo con la Figura 4-11, el portafolio con el mayor rendimiento esperado fue aquel que utilizó el método del estimador Ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettenring (OGK), ya que dicho portafolio tuvo un rendimiento esperado del 0,4012 % como se observa en la Tabla 4-2. El portafolio que utilizó el método del Determinante de Covarianza Mínima (MCD) tiene el menor riesgo, que es del 2,3590 % y a su vez, tiene el menor rendimiento esperado, siendo éste del 0,3867 % en comparación con los otros métodos de estimación seguido del portafolio que utilizó el método de estimación de Elipsoide de Volumen Mínimo. Caso contrario pasa con el portafolio que usó el método de Máxima Verosimilitud (ML), ya que este cuenta con el mayor riesgo entre todos los portafolios, con un 3,7825 % y su rendimiento no es superior al portafolio que utilizó el método del estimador Ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettenring (OGK). Con respecto al ratio Sharpe, se puede ver que los portafolios que

usaron los métodos de estimación robustos son aquellos que presentan mayor rendimiento, según el riesgo asumido, en comparación con el método de máxima verosimilitud, siendo el método del Determinante de Covarianza Mínima el que presenta mayor porcentaje, con un 0,1639 %, seguido del método de Elipsoide de Volumen Mínimo y el estimador Ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettenring, cada uno con un 0,1548 % y 0,1430 % respectivamente.

4.3. Comparación de los métodos robustos con el método máxima verosimilitud usando Backtesting

4.3.1. Totalidad de rendimientos históricos

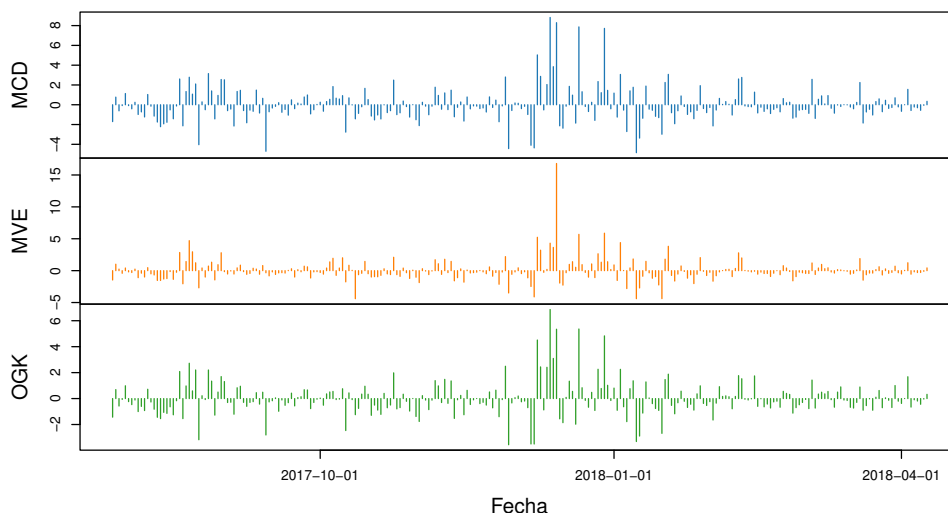


Figura 4-12: Rendimiento relativo de los portafolios robustos para los 975 registros

Tabla 4-3: Estadísticas descriptivas de los excesos de rendimiento para los 975 registros

Métodos de Estimación	Mín	Q_1	Mediana	Media	Q_3	Máx
Determinante de Covarianza Mínima	-4.8445	-0.8080	-0.2288	-0.01218	0.6436	8.8241
Elipsoide de Volumen Mínimo	-4.4007	-0.6366	-0.2212	0.0203	0.4202	16.8019
Ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettenring	-3.5589	-0.684	-0.1417	-0.0145	0.5025	6.8629

La Figura 4-12, muestra que el exceso de rendimiento del backtesting de los portafolios que usaron el método del Determinante de mínima varianza (MCD) y el estimador Ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettenring (OGK), es menor en la mayor parte del periodo analizado

comparado con el método de máxima verosimilitud, a pesar de que tienen unos picos en los periodos de alta volatilidad que se dan a finales de 2017 e inicio de 2018. Sin embargo, el método del Elipsoide de volumen mínimo (MVE) si tiene a lo largo del periodo de análisis un exceso de rendimiento un poco mayor en comparación con el método de máxima verosimilitud, especialmente en los periodos de alta volatilidad. Esto se puede ver de forma evidente en la Tabla 4-3 donde dicho método presenta el mayor exceso de rendimiento relativo máximo de entre los demás métodos que son comparados con el de máxima verosimilitud siendo de 16,8019 %. Además de que es el único que presenta un exceso de rendimiento relativo medio mayor que el de máxima verosimilitud, el cual es del 0,0203 %.

4.3.2. Últimos 450 rendimientos históricos

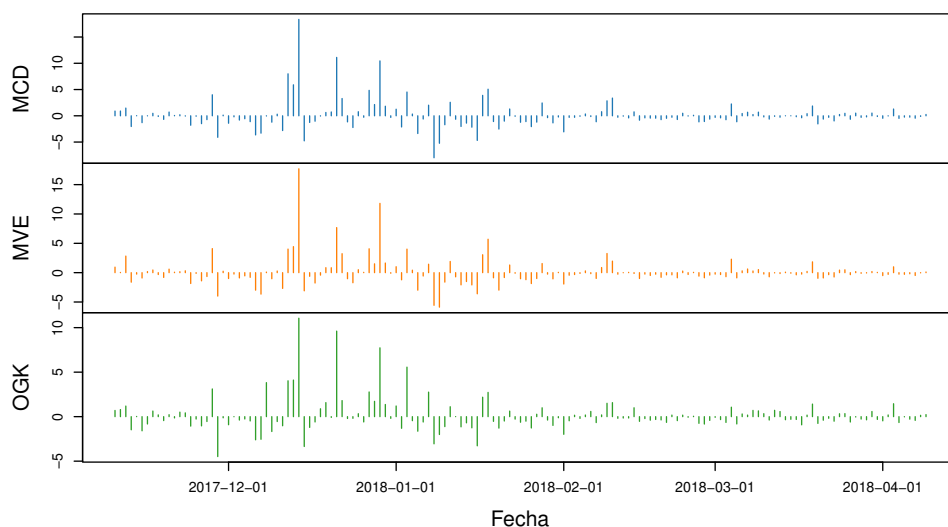


Figura 4-13: Rendimiento relativo de los portafolios robustos para los 450 registros

Tabla 4-4: Estadísticas descriptivas de los excesos de rendimiento para los 450 registros

Métodos de Estimación	Mín	Q_1	Mediana	Media	Q_3	Máx
Determinante de Covarianza Mínima	-7.9882	-1.0230	-0.2575	0.08	0.4715	18.3557
Elipsoide de Volumen Mínimo	-5.8761	-0.8714	-0.2440	0.0710	0.301	17.6955
Ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettenring	-4.4830	-0.5977	-0.1970	0.1391	0.4670	11.0592

Realizando el backtesting en un periodo que se asemeja más a la realidad de las criptomonedas debido a la presencia de alta volatilidad, se puede ver en la Figura 4-13 el exceso

de rendimiento de los portafolios que usaron el método de estimación robusta es mayor en comparación con el método máxima verosimilitud, no sólo en los días de mayor volatilidad sino también durante el periodo analizado. Esto se puede ver mejor en la Tabla **4-4**, donde el exceso de rendimiento relativo medio es positivo para todas los portafolios que usaron los métodos de estimación robusta. Entre estos, el exceso de rendimiento relativo del estimador de Elipsoide de volumen mínimo (MVE) es el menos favorable, presentando la media (0,0710 %) más baja. Por el contrario, el estimador Ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettenring (OGK) es el más favorable, ya que presenta el exceso de rendimiento relativo medio más alto, siendo del 0,1391 %.

5 Conclusiones y recomendaciones

5.1. Conclusiones

En el análisis de las series temporales de rendimientos, se observó que las criptomonedas utilizadas en este proyecto de investigación exhiben características similares a las series de rendimientos de activos tradicionales, lo cual refuerza el hecho de usarlas como activos de inversión. Así mismo, dentro de sus características, el análisis descriptivo fortaleció la evidencia de que los rendimientos no se distribuyen de manera normal. Esto se observó desde los resultados arrojados con respecto al exceso de curtosis, ya que muestran que dichas distribuciones son “picudas” o leptocúrtica, en comparación a la curtosis de una distribución normal. De igual forma se observó que la forma de las distribuciones de los rendimientos presentan asimetría.

Analizando los portafolios de mínima varianza construidos usando los diferentes métodos de estimación para la matriz de covarianza y usando toda la muestra de rendimientos, se evidenció que la criptomoneda Bitcoin sobresalió en todos los portafolios ya que se llevó el mayor porcentaje de inversión debido a que individualmente es la de menor riesgo, haciendo que su inclusión en portafolios con criptomonedas sea necesaria para disminuir el riesgo del portafolio. Por otro lado, realizando la comparación de los cuatro portafolios construidos, se obtuvo que aquellos portafolios que usaron los estimadores robustos fueron los mejores en términos del riesgo asumido ya que en comparación con el estimador clásico, son significativamente menores. Lo anterior ocurre debido a que como se había mencionado anteriormente, los métodos de estimación robustos reducen el error de estimación de la matriz de covarianza causado por rendimientos atípicos. Además entre estos portafolios, el que utilizó el estimador Ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettering (OGK) presenta mayor rendimiento esperado.

En la evaluación del comportamiento de las rentabilidades de los portafolios que usaron los métodos de estimación robustos en comparación con el método de estimación clásico, a través del procedimiento de ventana móvil con la totalidad de rendimientos, sólo el portafolio que usó el método de estimación de Elipsoide de volumen mínimo obtuvo una mayor rentabilidad comparado a los demás portafolios. Sin embargo, realizando el mismo procedimiento pero esta vez con los últimos 450 rendimientos, todos los portafolios que usaron los métodos robustos fueron los más rentables. Esta diferencia durante los dos procedimientos de ventana móvil radica en que antes del gran auge que tienen las criptomonedas, éstas no presentaban precios

tan significativamente “inestables” como lo empezaron a presentar después, lo cual hace que se presenten valores atípicos en la series de rendimientos y por tanto, los portafolios que usaron los estimadores robustos se vieron menos influenciados. Particularmente el portafolio que utilizó el estimador Ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettering (OGK) fue el más rentable.

5.2. Recomendaciones

- Invertir en portafolios de criptomonedas cuya estimación de la matriz de covarianza se realice a través del Estimador Ortogonalizado de Gnanadesikan y Kettering (OGK) ya que primero, el portafolio reduce el riesgo de la inversión, y segundo, va a generar una mayor rentabilidad, permitiendo a los inversionistas que quieran incursionar en este mercado sin arriesgarse demasiado, obtener mayores ganancias en comparación con los portafolios contruidos con el método de Máxima Verosimilitud, teniendo la certeza de que el riesgo asumido de dicha inversión va a ser bajo.
- Realizar este mismo estudio con un periodo de tiempo más extenso, si es posible escoger la fecha más actual, de esta manera se podría observar de forma significativa las grandes fluctuaciones que tienen los precios de las criptomonedas y por ende sus altas volatilidades.
- Realizar optimización robusta a los portafolios de inversión ya que dicha optimización incorpora directamente los errores de la estimación.

Bibliografía

- Baur, D. G., Hong, K. and Lee, A. D. (2018), ‘Bitcoin: Medium of exchange or speculative assets?’, *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money* **54**, 177–189.
- Betancourt Bejarano, K., García Díaz, C. M. and Lozano Riaño, V. (2013), ‘Teoría de markowitz con metodología ewma para la toma de decisión sobre cómo invertir su dinero’, *Atlantic Review of Economics* **1**.
- Boiko, V., Ye, T., Kononenko, R. Y. and Goncharov, D. (2021), ‘The optimization of the cryptocurrency portfolio in view of the risks’, *Journal of Management Information and Decision Sciences*. 2021. Vol. 24. № 4. . 1-9. .
- Brauneis, A. and Mestel, R. (2019), ‘Cryptocurrency-portfolios in a mean-variance framework’, *Finance Research Letters* **28**, 259–264.
- Cadena Díaz, P. A., Rincón León, H. A. et al. (2018), ‘¿ qué son las criptomonedas?’.
- Campbell, J. Y., Lo, A. W., MacKinlay, A. C. and Whitelaw, R. F. (1998), ‘The econometrics of financial markets’, *Macroeconomic Dynamics* **2**(4), 559–562.
- Cavello Serna, M. A., Coronel Salazar, A. W. and Terrones Alcántara, R. J. (2018), ‘Las criptomonedas: una estrategia de inversión’.
- Chan, S., Chu, J., Nadarajah, S. and Osterrieder, J. (2017), ‘A statistical analysis of cryptocurrencies’, *Journal of Risk and Financial Management* **10**(2), 12.
- Chipoco, A. M. V. (2015), *Portafolios óptimos bajo estimadores robustos clásicos y bayesianos con aplicaciones al mercado peruano de acciones*, Pontificia Universidad Católica del Perú-CENTRUM Católica (Peru).
- Colle, R. (2018), ‘La identidad digital en la internet futura con blockchain’, *Santiago de Chile: Asociación Chilena de Investigadores en Comunicación* .
- Condori, P. P. C. (2021), ‘Diversificación de carteras de inversión con criptomonedas’, *Qui-pukamayoc* **29**(60), 51–60.
- Cont, R. (2001), ‘Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues’, *Quantitative finance* **1**(2), 223.

- Corbet, S., Meegan, A., Larkin, C., Lucey, B. and Yarovaya, L. (2018), ‘Exploring the dynamic relationships between cryptocurrencies and other financial assets’, *Economics Letters* **165**, 28–34.
- DeMiguel, V. and Nogales, F. J. (2009), ‘Portfolio selection with robust estimation’, *Operations research* **57**(3), 560–577.
- García-Moreno García, M. d. I. B. et al. (2016), ‘Modelos de optimización de redes de distribución’.
- García, O. G. S. I. O. (2008), El modelo de Markowitz en la teoría de portafolios de inversión, PhD thesis, Instituto Politécnico Nacional.
- Gutiérrez-Sepúlveda, D., Laniado, H. and Medina-Hurtado, S. (2018), ‘Estimación robusta de la matriz de covarianza para la selección óptima de portafolios de inversión’, *DYNA* **85**(207), 328–336.
- Hubert, M., Rousseeuw, P. J. and Verdonck, T. (2012), ‘A deterministic algorithm for robust location and scatter’, *Journal of Computational and Graphical Statistics* **21**(3), 618–637.
- Kaldor, N. (1961), Capital accumulation and economic growth, in ‘The theory of capital’, Springer, pp. 177–222.
- Kim, D. and Francis, J. C. (2013), *Modern portfolio theory: Foundations, analysis, and new developments*, John Wiley & Sons.
- Kumar, M. P. and Kumara, N. M. (2021), ‘Market capitalization: Pre and post covid-19 analysis’, *Materials Today: Proceedings* **37**, 2553–2557.
- Lauprete, G., Samarov, A. and Welsch, R. (2003), Robust portfolio optimization, in ‘Developments in robust statistics’, Springer, pp. 235–245.
- Ledoit, O. and Wolf, M. (2003), ‘Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection’, *Journal of empirical finance* **10**(5), 603–621.
- Liu, W. (2019), ‘Portfolio diversification across cryptocurrencies’, *Finance Research Letters* **29**, 200–205.
- López-Herrera, F., Trejo, L. G. M. and de la Torre Torre, O. V. (2020), ‘Desempeño de ocho de las criptomonedas de mayor capitalización de mercado’, *Estocástica: finanzas y riesgo* **10**(1), 103–128.
- Markowitz, H. (1952), ‘Portfolio selection’, *The Journal of Finance* **7**(1), 77–91.
URL: <http://www.jstor.org/stable/2975974>

- Maronna, R. A. and Zamar, R. H. (2002), ‘Robust estimates of location and dispersion for high-dimensional datasets’, *Technometrics* **44**(4), 307–317.
- Medina, L. Á. (2003), ‘Aplicación de la teoría del portafolio en el mercado accionario colombiano’, *Cuadernos de economía* **22**(39), 129–168.
- Milkau, U. and Bott, J. (2018), ‘Digital currencies and the concept of money as a social agreement’, *Journal of Payments Strategy & Systems* **12**(3), 213–231.
- Mittnik, S., Fabozzi, F. J., Focardi, S. M., Rachev, S. T. and Jašić, T. (2007), *Financial econometrics: from basics to advanced modeling techniques*, John Wiley & Sons.
- Parra-Polanía, J. A., Arango-Arango, C. A., Bernal-Ramírez, J., Gómez-González, J. E., Gómez-Pineda, J. G., León-Rincón, C. E., Machado-Franco, C. L., Osorio-Rodríguez, D. E., Rojas Parra, D. M., Suárez-Ariza, N. F. et al. (2019), ‘Criptoactivos: análisis y revisión de literatura’, *Revista Ensayos Sobre Política Económica*; No. 92, noviembre 2019. Pág.: 1-37.
- Pfaff, B. (2016), *Financial risk modelling and portfolio optimization with R*, John Wiley & Sons.
- Platanakis, E. and Urquhart, A. (2019), ‘Portfolio management with cryptocurrencies: The role of estimation risk’, *Economics Letters* **177**, 76–80.
- Rousseeuw, P. J. (1984), ‘Least median of squares regression’, *Journal of the American statistical association* **79**(388), 871–880.
- Rousseeuw, P. J. and Leroy, A. M. (1987), *Robust regression and outlier detection*, John Wiley & sons.
- Ruppert, D. and Matteson, D. S. (2011), *Statistics and data analysis for financial engineering*, Vol. 13, Springer.
- Sun, X., Liu, M. and Sima, Z. (2020), ‘A novel cryptocurrency price trend forecasting model based on lightgbm’, *Finance Research Letters* **32**, 101084.
- Todorov, V. and Filzmoser, P. (2010), ‘An object-oriented framework for robust multivariate analysis’, *Journal of Statistical Software* **32**, 1–47.
- Van Aelst, S. and Rousseeuw, P. (2009), ‘Minimum volume ellipsoid’, *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics* **1**(1), 71–82.
- Wang, B. and Liu, D. (2011), Rolling horizon procedure for large-scale equipment replacement problems with multiple alternatives, in ‘2011 Chinese Control and Decision Conference (CCDC)’, IEEE, pp. 2741–2746.

- Würtz, D., Chalabi, Y., Chen, W. and Ellis, A. (2009), *Portfolio optimization with R/Rmetrics*, Rmetrics.
- Yohai, V. J. and Zamar, R. H. (1988), ‘High breakdown-point estimates of regression by means of the minimization of an efficient scale’, *Journal of the American statistical association* **83**(402), 406–413.
- Zhang, W., Wang, P., Li, X. and Shen, D. (2018), ‘Some stylized facts of the cryptocurrency market’, *Applied Economics* **50**(55), 5950–5965.