Bretagnolles Mathieu, Peloutier Yannis

TP3 : Estimation de densité

Préparation :

1) Pour montrer que la translation de K par la constante μ, $\tau_\mu K$ est encore un noyau statistique, il faut vérifier que $\tau_\mu K$ est une fonction continue, symétrique et positive, et que l'intégrale de $\tau_\mu K$ sur R est égale à 1.

On a :

- Continuité : $\tau_\mu K$ est continue car K est continue.
- Symétrie : $\tau_\mu K$ est symétrique car K est symétrique.
- Positivité : $\tau_\mu K$ est positive car K est positive.
- Normalisation : en utilisant le changement de variable y = x - μ, on a $\int \tau_\mu K(x)\, dx = \int K(x - \mu)\, dx$ = 1 (car K est un noyau statistique).x

Donc **$\tau_\mu K$ est normalisé et est donc un noyau statistique**.

2) Pour montrer que $d_\lambda K$ est encore un noyau statistique, il faut vérifier les mêmes conditions que pour $\tau_\mu K$.

On a :

- Continuité : $d_\lambda K$ est continue car K est continue.
- Symétrie : $d_\lambda K$ est symétrique car K est symétrique.
- Positivité : pour tout x, $d_\lambda K(x) = (1/\lambda)*K(x/\lambda)$ est positif car K est positif et λ est non nul.
- Normalisation : $\int d_\lambda K(x)\, dx = \int (1/\lambda)*K(x/\lambda)\, dx = (1/\lambda) \int K(y)\, dy$ (en posant y = x/λ) = 1 (car K est un noyau statistique) donc $d_\lambda K$ est normalisé.

Donc **$d_\lambda K$ est bien un noyau statistique.**

3) Pour montrer que $K = 1/2 * 1_{[-1,1]}(x)$ est un noyau statistique, il faut vérifier les conditions suivantes :

- Continuité : K est continue car c'est une fonction en escalier.
- Symétrie : K est symétrique car $1_{[-1,1]}$ est symétrique.
- Normalisation : $\int K(x)\, dx = \int 1/2 * 1_{[-1,1]}\, dx = 1/2 * 2 = 1$
  donc K est normalisé.
- Positivité : K est positif car il est défini comme une multiplication d'une fonction en escalier positive ($1_{[-1,1]}$) par une constante positive (1/2).

Donc **K est bien un noyau statistique.**

4) Pour montrer que $K(x) = (1 - |x|)1_{[-1,1]}$ est un noyau statistique, il faut vérifier les conditions suivantes :

- Continuité : K est continue car c'est une fonction polynomiale.
- Symétrie : K est symétrique car $|x|$ est une fonction symétrique.
- Normalisation : $\int K(x)\,dx = \int(1-|x|)1_{[-1,1]}\,dx = 2 * \int(1-x)1_{[0,1]}\,dx = 2 * (1/2) = 1$.

Donc **<u>K est normal.</u>**

5) Le noyau d'Epanechnikov **<u>est un noyau statistique</u>** car il satisfait les conditions suivantes :

- K est une fonction continue sur R.
- K est positive sur R.
- K est intégrable sur R, c'est-à-dire que l'intégrale de K sur R converge.
- L'intégrale de K^2 sur R est finie.

6) Le noyau gaussien **<u>est un noyau statistique</u>** car il satisfait les conditions suivantes :

- K est une fonction continue sur R.
- K est positive sur R.
- K est intégrable sur R, c'est-à-dire que l'intégrale de K sur R converge.
- L'intégrale de K^2 sur R est finie.

De plus, le noyau gaussien est largement utilisé en pratique car il a des propriétés statistiques intéressantes, telles que sa capacité à s'adapter à des distributions de densité de probabilité très différentes.

7) Pour montrer que f_h est une densité de probabilité, il faut vérifier les deux propriétés suivantes :

- f_h est positive sur R, c'est-à-dire que pour tout $x \in R$, $f_h(x) \geq 0$.
- L'intégrale de f_h sur R est égale à 1, c'est-à-dire que $\int R\, f_h(x)\,dx = 1$.

La positivité de f_h découle directement de la positivité du noyau K et de la constante h. En effet, pour tout $x \in R$, $f_h(x) \geq 0$ car $dh > 0$ et K est positif sur R.

Pour montrer que l'intégrale de f_h sur R est égale à 1, on peut écrire : ….