TP3 : Estimation de densité

**Préparation :**

1) Pour montrer que la translation de K par la constante µ, τµK est encore un noyau statistique, il faut vérifier que τµK est une fonction continue, symétrique et positive, et que l'intégrale de τµK sur R est égale à 1.

On a :

* Continuité : τµK est continue car K est continue.
* Symétrie : τµK est symétrique car K est symétrique.
* Positivité : τµK est positive car K est positive.
* Normalisation : en utilisant le changement de variable y = x - µ, on a ∫τµK(x) dx = ∫K(x - µ) dx = 1 (car K est un noyau statistique).

Donc **τµK est normalisé et est donc un noyau statistique**.

2) Pour montrer que dλK est encore un noyau statistique, il faut vérifier les mêmes conditions que pour τµK.

On a :

* Continuité : dλK est continue car K est continue.
* Symétrie : dλK est symétrique car K est symétrique.
* Positivité : pour tout x, dλK(x) = (1/λ)\*K(x/λ) est positif car K est positif et λ est non nul.
* Normalisation : ∫dλK(x) dx = ∫(1/λ)\*K(x/λ) dx = (1/λ) ∫K(y) dy (en posant y = x/λ) = 1 (car K est un noyau statistique) donc dλK est normalisé.

Donc **dλK est bien un noyau statistique.**

3) Pour montrer que K = 1/2 \* 1[−1,1] (x) est un noyau statistique, il faut vérifier les conditions suivantes :

* Continuité : K est continue car c'est une fonction en escalier.
* Symétrie : K est symétrique car 1[−1,1] est symétrique.
* Normalisation : ∫K(x) dx = ∫1/2 \* 1[[−1,1](https://chat.openai.com/x)] dx = 1/2 \* 2 = 1  
  donc K est normalisé.
* Positivité : K est positif car il est défini comme une multiplication d'une fonction en escalier positive (1[−1,1]) par une constante positive (1/2).

Donc **K est bien un noyau statistique.**

4) Pour montrer que K(x) = (1 − |x|)1[[−1,1](https://chat.openai.com/x)] est un noyau statistique, il faut vérifier les conditions suivantes :

* Continuité : K est continue car c'est une fonction polynomiale.
* Symétrie : K est symétrique car |x| est une fonction symétrique.
* Normalisation : ∫K(x) dx = ∫(1-|x|)1[[−1,1](https://chat.openai.com/x)] dx = 2 \* ∫(1-x)1[[0,1](https://chat.openai.com/x)] dx = 2 \* (1/2) = 1.

Donc **K est normal.**

5) Le noyau d'Epanechnikov **est un noyau statistique** car il satisfait les conditions suivantes :

* K est une fonction continue sur R.
* K est positive sur R.
* K est intégrable sur R, c'est-à-dire que l'intégrale de K sur R converge.
* L'intégrale de K² sur R est finie.

6) Le noyau gaussien **est un noyau statistique** car il satisfait les conditions suivantes :

* K est une fonction continue sur R.
* K est positive sur R.
* K est intégrable sur R, c'est-à-dire que l'intégrale de K sur R converge.
* L'intégrale de K² sur R est finie.

De plus, le noyau gaussien est largement utilisé en pratique car il a des propriétés statistiques intéressantes, telles que sa capacité à s'adapter à des distributions de densité de probabilité très différentes.

7) Pour montrer que fh est une densité de probabilité, il faut vérifier les deux propriétés suivantes :

* fh est positive sur R, c'est-à-dire que pour tout x ∈ R, fh (x) ≥ 0.
* L'intégrale de fh sur R est égale à 1, c'est-à-dire que ∫R fh (x) dx = 1.

La positivité de fh découle directement de la positivité du noyau K et de la constante h. En effet, pour tout x ∈ R, fh (x) ≥ 0 car dh > 0 et K est positif sur R.

Pour montrer que l'intégrale de fh sur R est égale à 1, on peut écrire : ….