

Methoden der stochastischen Optimierung

Dirk Roos^{2*} & Christian Bucher^{1,2}

¹ Institut für Strukturmechanik, Bauhaus-Universität Weimar

² DYNARDO – Dynamic Software and Engineering GmbH, Weimar

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit gibt im ersten Teil einen Überblick über State-Of-The-Art-Methoden der stochastischen Optimierung. Die Möglichkeiten und Einsatzgebiete dieser Verfahren für die zuverlässige bzw. robuste Auslegung eines Designs in einer multidisziplinären Optimierung unter Berücksichtigung unvermeidbarer Streuungen der Design-Parameter und der realen Nutzungsbedingungen werden vorgestellt. Dabei werden die möglichen Methoden der zuverlässigkeitsorientierten und der robusten Optimierung diskutiert.

Darüber hinaus werden neue und effektive Ansätze für die stochastische Optimierung vorgestellt. Die vorgestellte genetische Programmierung in Kombination mit dem Zuverlässigkeitsverfahren erster Ordnung ermöglicht eine zuverlässigkeitsorientierte Optimierung für viele Optimierungsparameter mit bis zu 50 streuenden Eingangsgrößen. Ein weiterer Ansatz erläutert eine Möglichkeit der zuverlässigkeitsbasierten Optimierung mittels adaptiven Approximationsmethoden. Die vorgestellten Antwortflächenverfahren erlauben eine kostengünstige Analyse für kleine Design- und Zufallsräume.

Keywords: Stochastische Optimierung, robuste Optimierung, Genetische Programmierung, zuverlässigkeitsorientierte Optimierung, Approximationsmethoden

*Kontakt: Dr.-Ing. Dirk Roos, DYNARDO – Dynamic Software and Engineering GmbH, Luthergasse 1d, D-99423 Weimar, E-Mail: dirk.roos@dynardo.de

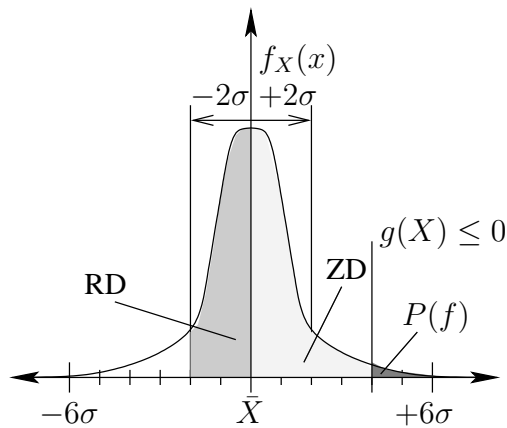


Abbildung 1: Standard-Normalverteilung $f_X(x)$ mit 2-Sigma- und 6-Sigma-Level und Abgrenzung zwischen robusten Design (RD) und zuverlässigen Design (ZD) (Sigma-Level $\geq \pm 2\sigma$) in Abhängigkeit eines gewählten Grenzzustandes $g(X) \leq 0$.

Sigma-Level	Variation in Prozent	Ausfallwahrscheinlichkeit $P(f)$
$\pm 1\sigma$	68.26	$3.17 \cdot 10^{-1}$
$\pm 2\sigma$	95.46	$4.54 \cdot 10^{-2}$
$\pm 3\sigma$	99.73	$2.7 \cdot 10^{-3}$
$\pm 4\sigma$	99.9937	$6.3 \cdot 10^{-5}$
$\pm 5\sigma$	99.999943	$5.7 \cdot 10^{-7}$
$\pm 6\sigma$	99.9999998	$2.0 \cdot 10^{-9}$

Abbildung 2: Sigma-Level als Variation der Standard-Normalverteilung und Ausfallwahrscheinlichkeit $P(f)$.

1 Einleitung

1.1 Stochastische Optimierung

Die Methoden der multidisziplinären Optimierung besitzen eine große Bedeutung im virtuellen Entwicklungsprozess zur Verbesserung der Design-Eigenschaften und zur Reduzierung der Herstellungskosten. Die Anwendung der deterministischen Optimierung kann aber u.U. zu nicht-robusten Designs führen, da die i.A. immer auftretenden Unsicherheiten nicht berücksichtigt werden können. Darüber hinaus führt häufig eine multidisziplinäre deterministische Optimierung an die Grenzen der Design-Parameter, so dass kein oder nur ein sehr kleiner Toleranzbereich gegenüber den Unsicherheiten im Design, in der Herstellung und in der Nutzung vorhanden ist.

In der stochastische Optimierung werden die Streuungen der Design-Parameter und eventuell zusätzlicher stochastischer Parameter berücksichtigt. Das betrachtete Wahrscheinlichkeitsniveau reicht dabei vom 1- bis 2-Sigma-Level bis hin zum 6-Sigma-Level (vgl. dazu auch Koch u. a. (2004)). Dabei bezeichnet "Sigma" die Standardabweichung σ . Für eine Standard-Normalverteilung (Abb. 1) ergeben sich in Abhängigkeit des jeweiligen Sigma-Level die zugehörigen Ausfallwahrscheinlichkeiten der Abb. 2. In Abhängigkeit der Sigma-Level ist es innerhalb der stochastische Optimierung sinnvoll zwischen der robusten Optimierung und der zuverlässigkeitsorientierten Optimierung zu unterscheiden.

1.2 Robuste Optimierung

Die optimierten Designs im Sigma-Level $\leq \pm 2\sigma$ werden als robustes Design (RD) charakterisiert. Ziel der Methoden der robusten Optimierung (z.B. Hwang u. a. (2001); Ben-Tal und Nemirovski (2002); Doltsinis und Kang (2004)) ist das Auffinden eines Designs mit minimaler Varianz der streuenden Modellantworten um die Mittelwerte der Design-Parameter (vgl. dazu Byrne und Taguchi (1987); Phadke (1989)).

Andere Ansätze zur Bewertung der Design-Robustheit wie z.B. die lineare Approxi-

mation "streuender" Solver-Antworten (vgl. dazu z.B. [Abspoel u. a. \(2001\)](#)) oder aber die Varianzabschätzung in der genetischen Programmierung, z.B. in [Pictet u. a. \(1996\)](#); [Branke \(1998\)](#), unabhängig von gegebenen Parameterverteilungen sollen im Folgendem nicht Gegenstand der Betrachtung sein, da diese Methoden im engeren Sinne nicht zu den stochastische Optimierungsverfahren zählen.

1.3 Zuverlässigkeitsorientierte Optimierung

In der zuverlässigkeitsorientierten Optimierung kann das Optimierungsproblem erweitert werden durch zusätzliche stochastische Restriktionen, durch die vorgegebene Ausfallwahrscheinlichkeiten nicht überschritten werden können. Desweiteren kann auch die Ausfallwahrscheinlichkeit selbst in die Zielfunktion integriert werden. Häufig wird dabei die Suche nach dem Optimum mittels einer deterministischen Optimierung verknüpft durch die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit z.B. mit der Methode der zweiten Momente erster Ordnung¹ (z.B. [Melchers \(2001\)](#)). Erfolgversprechender ist u.U. eine Kombination mit den Zuverlässigkeitsverfahren erster und zweiter Ordnung² (z.B. [Choi u. a. \(2001\)](#); [Allen u. a. \(2004\)](#); [Allen und Maute \(2004\)](#)).

Da bei der Bewertung der einzelnen Designs innerhalb der deterministischen Optimierung eine Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit durchzuführen ist, ist in diesem Zusammenhang besonders darauf zu achten, dass diese Berechnung möglichst kostengünstig durchgeführt werden kann. Beispielsweise kann die deterministische Optimierung für glatte und gut skalierte Zielfunktionen und wenigen kontinuierlichen Design-Parameter und die, in dieser Iterationsschleife ablaufende Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit (z.B. durch FORM), durch eine gradientenbasierte Programmierung (z.B. Sequential Quadratic Programming, vgl. [Schittkowski \(1985\)](#)) erfolgen. In [Kharmanda u. a. \(2002\)](#) wird versucht den numerischen Aufwand dieser beiden, ineinander verschachtelten Iterationen dadurch zu verringern, indem die deterministische Zielfunktion und die Suche nach dem Punkt größter Wahrscheinlichkeitsdichte auf der Grenzzustandsfunktion innerhalb von FORM, durch eine einzige Zielfunktion in einem hybriden Design-Raum ersetzt wird. Dadurch wird allerdings der Design-Raum für die gradientenbasierte Programmierung vergrößert.

1.4 Approximationsmethoden

Approximationsmethoden die gleichzeitig den Design-Raum und den Raum der zufälligen Parameter mit einem Metamodell annähern werden häufig in der zuverlässigkeitsorientierten Optimierung angewendet, so z.B. in [Choi u. a. \(2004\)](#); [Youn u. a. \(2004\)](#); [Yang und Gu \(2004\)](#); [Rais-Rohani und Singh \(2004\)](#). Erfolgreiche Industrieanwendungen dafür findet man z.B. bei [Youn und Choi \(2004\)](#).

Eine lineare Approximation der Grenzzustandsfunktion als Nebenbedingung des Optimierungsproblems wird in [Royset und Polak \(2004\)](#) vorgenommen. Eine Verbesserung des Optimierungsergebnisses wird in [Royset u. a. \(2003\)](#) durch eine Berücksichtigung der Gradienten der Grenzzustandsfunktion versucht.

Aber auch in der robusten Optimierung (vgl. dazu [Chen u. a. \(2004\)](#); [Wilson u. a. \(2001\)](#)), daher dem Auffinden robuster Designs werden verschiedene Approximationsmodelle wie globale polynomiale Approximationen und Kriging-Modelle in Verbindung mit

¹engl.: first-order second-moment analysis (FOSM)

²engl.: first and second order reliability methods (FORM/SORM)

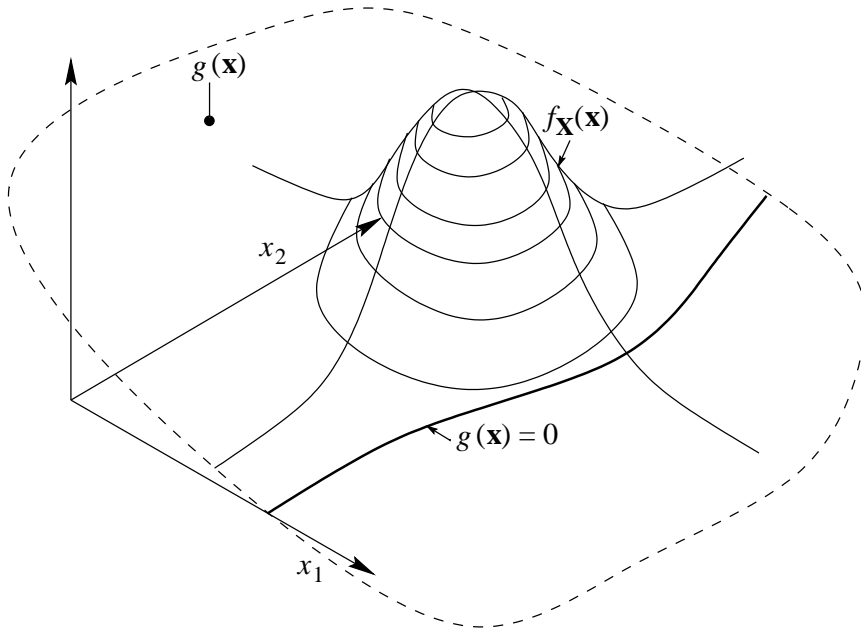


Abbildung 3: $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$: Gemeinsame Dichtefunktion der Basisvariablen, $g(\mathbf{x})$: Funktion der Modellantwort, $g(\mathbf{x}) = 0$: Grenzzustandsfunktion.

einer geeigneten Varianzbestimmung der Parameter für nur wenige zufällige Variablen sowie Optimierungsvariablen ($n \leq 10$) verwendet.

2 Stochastische Optimierung

2.1 Einführung

2.1.1 Zuverlässigkeitsorientierte Optimierung

In der zuverlässigkeitsorientierten Optimierung wird häufig das Optimierungsproblem erweitert durch zusätzliche stochastische Restriktionen. Ein mathematisches Modell für ein solches Optimierungsproblem kann in Abhängigkeit der n_r zufälligen Parameter \mathbf{X} , deren Realisierungen \mathbf{x} , den n_d Design-Parametern $\mathbf{d} = E[\mathbf{X}]$ allgemein definiert werden als

$$\begin{aligned}
 & f(d_1, d_2, \dots, d_{n_d}) \rightarrow \min \\
 & g_k(d_1, d_2, \dots, d_{n_d}) = 0; \quad k = 1, m_e \\
 & h_l(d_1, d_2, \dots, d_{n_d}) \geq 0; \quad l = 1, m_u \\
 & d_i \in [d_l, d_u] \subset \mathbb{R}^{n_d} \\
 & d_l \leq d_i \leq d_u \\
 & d_i = E[X_i]
 \end{aligned} \tag{1}$$

mit den zusätzlichen m_g stochastischen Restriktionen

$$\int_{g_j(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - P(\mathbf{X} : g_j(\mathbf{X}) \leq 0) \leq 0; \quad j = 1, m_g \tag{2}$$

und der gemeinsamen Dichtefunktion der Zufallsvariablen $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ und der m_g Grenzzustandsfunktionen $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$ (vgl. Abb. 3).

Die Gleichung (1) definiert das deterministische Optimierungsproblem in Abhängigkeit der Mittelwerte der Design-Parameter $\mathbf{d} = E[\mathbf{X}]$. Die zusätzlichen stochastischen Restriktionen der Gleichung (2) erfordern die Berechnung der jeweiligen Ausfallwahrscheinlichkeiten durch die Anwendung der Methoden der Zuverlässigkeitsanalyse und sind anschließend als zusätzliche Nebenbedingungen in dem Optimierungsproblem (1) einzuführen.

Weiterhin kann auch die Zielfunktion durch zusätzliche Kriterien wie z.B. der Forderung nach einer möglichst kleinen Ausfallwahrscheinlichkeit $P(f)$

$$f(d_1, d_2, \dots, d_{n_d}, P(f)) \rightarrow \min \quad (3)$$

mit

$$P(f) = \int_{g_j(\mathbf{x}) \leq 0}^{n_r} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4)$$

erweitert werden.

2.1.2 Robuste Optimierung

In der robusten Optimierung wird häufig die Zielfunktion (1) durch die zusätzliche Forderung nach möglichst kleinen Varianzen $\sigma_{X_i}^2$

$$f(d_1, d_2, \dots, d_{n_d}, \sigma_{X_1}^2, \sigma_{X_2}^2, \dots, \sigma_{X_{n_r}}^2) \rightarrow \min \quad (5)$$

mit

$$\sigma_{X_i}^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M (x_i^k - \mu_{X_i})^2$$

erweitert.

2.2 Genetische Programmierung in Kombination mit dem Zuverlässigkeitsverfahren erster Ordnung (FORM)

Für eine Vielzahl von strukturellen Optimierungsproblemen bestehen erhebliche Zweifel an der Präzision von Eingangsdaten. Die Abweichungen von den Soll- bzw. Nennwerten kann oft sinnvoll durch Zufallsvariablen beschrieben werden. Speziell für Probleme, bei denen keine Überschneidung zwischen Entwurfsvariablen und stochastischen Variablen gegeben ist, können vollständig verschiedene Strategien für die Optimierung und die stochastische Analyse eingesetzt werden, um problemspezifisch die Vorteile geschickt ausnutzen zu können.

Genetische Verfahren kommen sinnvollerweise zum Einsatz, wenn die Abhängigkeit der Zielfunktion und/oder der Restriktionen von den Entwurfsparametern nicht differenzierbar oder sogar unstetig ist. Darüber hinaus kann die Genetik bei Problemen, die durch nicht einfach zusammenhängende Gebiete ("Inseln") charakterisiert sind, gute Ergebnisse erzielen.

Da typischerweise die Versagenswahrscheinlichkeiten brauchbar entworfener Systeme klein sind, muss ein Zuverlässigkeitsverfahren angewandt werden, das diese Werte mit vertretbarem Aufwand liefert. Für Probleme, bei denen die Restriktionen (die i.A. die Versagenswahrscheinlichkeit in irgendeiner Form enthalten) differenzierbar von den stochastischen Variablen abhängen, kann mit Erfolg die Zuverlässigkeitsmethode erster Ordnung (FORM) (Rackwitz und Fießler (1978)) eingesetzt werden.

In diesem Zusammenhang ist zu beachten, dass genetische Algorithmen i.a. die Restriktionen in der Form von Straftermen implementieren, und somit der Auswahl eines geeigneten Penalty-Verfahrens eine gewisse Bedeutung zukommt.

2.3 Adaptive Antwortflächenverfahren im Design- und im Raum der zufälligen Parameter

2.3.1 Einleitung

Die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit mit Hilfe der Methoden der Zuverlässigkeitsanalyse erfordert, dass die Funktion der Modellantwort $g(\mathbf{X})$ implizit berechnet wird, zum Beispiel durch nichtlineare Strukturanalysen für jede Realisation der Zufallsvariablen. Die Analysen bilden jedoch den Hauptanteil am Berechnungsaufwand der Zuverlässigkeitsanalyse und der multidisziplinären Optimierung. Es liegt daher nahe, die Funktion der Modellantwort durch eine geeignete Approximationsfunktion (Antwortfläche³) $\tilde{g}(\mathbf{X})$ anzunähern. Dadurch ist für die Auswertung des Versagenskriteriums nach der Gleichung (2) nur noch von Interesse, ob eine Realisation der Basisvariablen innerhalb oder außerhalb des von $\tilde{g}(\mathbf{X}) = 0$ gebildeten Raumes ist – die nichtlineare Analyse kann dann entfallen.

Die üblichen globalen Approximationsverfahren der Funktion der Modellantwort $g(\mathbf{x})$ mit Polynomen niedriger Ordnung weisen den entscheidenden Nachteil des Modellfehlers auf, d.h. stark nichtlineare Funktionen $g(\mathbf{x})$ können nur mit zum Teil beträchtlichen Fehlern angenähert werden. Andererseits neigen Polynome höherer Ordnung dazu, zwischen den Stützstellen zu oszillieren, was die Annäherung völlig unbrauchbar machen kann. Die polynomiale Approximation der Modellantwortfunktion durch Regression kann das Approximationsergebnis unbrauchbar machen.

Für die Anwendung in der Zuverlässigkeitsanalyse müssen die Approximationsverfahren flexibel genug sein um stark nichtlineare Modellantwortfunktionen beliebig genau annähern zu können. Gesucht sind also Verfahren, die in der Anzahl der verarbeitbaren Stützstellen nicht begrenzt sind und diese dann genau und robust approximieren können, d.h. einen geringen Schätzfehler aufweisen.

Bei allen Methoden, die dem Antwortflächenverfahren zuzuordnen sind, ist die erforderliche Anzahl an Stützstellen proportional mindestens zum Quadrat der Anzahl der Zufallsvariablen, so dass Aufgabenstellungen mit mehr als $n_d = 10$ Design-Parametern und $n_r = 10$ Zufallsvariablen nicht mehr effektiv gelöst werden können.

2.3.2 Globale polynomiale Approximation

Ursprünglich waren die ersten Anwendungsbereiche des Antwortflächenverfahrens in den Wirtschaftswissenschaften und in der Chemie zu finden. Dabei besteht die grundsätzliche Annahme darin, dass die zu approximierende Antwort eines physikalischen, chemischen oder biologischen Experiments $g(\mathbf{x})$ eine Funktion der Realisationen der Basisvariablen

$$g(\mathbf{x}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

darstellt und dass es eine approximative Repräsentation von $g(\mathbf{x})$ z.B. in der Form von n -dimensionalen Polynomen niedriger Ordnung

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_{ijk} x_i x_j x_k + \dots + \epsilon$$

gibt. Häufig wird zur Approximation in der Optimierung (vgl. [Box und Draper \(1987\)](#) und [Myers \(1971\)](#)) und in der Zuverlässigkeitsanalyse (vgl. [Faravelli \(1986\)](#); [Engelund](#)

³engl.: response surface

und Rackwitz (1992); Rajashekhar und Ellingwod (1993)) ein Polynom zweiter Ordnung verwendet:

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j + \epsilon \quad (6)$$

In der Gleichung (6) ist ϵ ein zufälliger Approximationsfehler. Aufgrund der Symmetrie $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ sind die Koeffizienten durch insgesamt

$$p = 1 + n + \frac{n(n+1)}{2}$$

Stützstellen auf der Funktion $g(\mathbf{x})$ eindeutig bestimmbar. Das Vorzeichen des Koeffizienten β_0 bestimmt, ob im Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ Versagen der Struktur vorliegt oder nicht.

Methode der minimalen Fehlerquadrate Sind mehr Antworten $y_k(\mathbf{x})$ bekannt, als zur Bestimmung der p Koeffizienten benötigt werden, d.h. $k = 1, 2, \dots, m > p$, kann versucht werden, den Fehler ϵ zu minimieren (siehe dazu Box und Draper (1987) und Myers (1971)). Ist z.B. die k -te Antwort in einem quadratisch approximierten Fall mit zwei Basisvariablen

$$y_k = \beta_0 + \beta_1 x_{1k} + \beta_2 x_{2k} + \beta_{11} x_{1k}^2 + \beta_{22} x_{2k}^2 + 2\beta_{12} x_{1k} x_{2k} + \epsilon_k$$

was in Matrixschreibweise

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (7)$$

ergibt, mit

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}; \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_m \end{bmatrix}; \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ 2\beta_{12} \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{11}^2 & x_{21}^2 & x_{11}x_{21} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{12}^2 & x_{22}^2 & x_{12}x_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1m} & x_{2m} & x_{1m}^2 & x_{2m}^2 & x_{1m}x_{2m} \end{bmatrix}$$

so kann eine Schätzung der Koeffizienten $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ dadurch erfolgen, dass ein Minimum der Fehlerquadrate

$$S = \sum_{k=1}^m \epsilon_k^2 = \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon} \rightarrow \min$$

gefordert wird. Unter Berücksichtigung der Beziehung (7) erhält man S zu

$$S(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \rightarrow \min \quad (8)$$

Die Entwicklung der rechten Seite von (8) liefert

$$\begin{aligned} S(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - (\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + (\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \rightarrow \min \end{aligned}$$

S nimmt ein Minimum an, wenn die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial S(\hat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} = -2\mathbf{X}^T \mathbf{y} + 2(\mathbf{X}^T \mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} = 0 \quad (9)$$

zu Null werden. Damit entsteht aus der Beziehung (9) ein lineares Gleichungssystem zur Abschätzung der Koeffizienten $\hat{\boldsymbol{\beta}}$

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

Ist $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ nicht singulär, errechnet sich $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ aus

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

Die Schätzwerte der Antwort ergeben sich somit zu

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

Varianz-Analyse Die Varianz-Analyse⁴ liefert eine Bewertung des Anpassungsfehlers der Regressions-Analyse. Die wesentlichen Elemente seien hier kurz dargestellt. Der Gesamtfehler S_T setzt sich aus dem Fehler der Schätzung S_R und einem Modellfehler S_M zusammen. Die Summe über die Quadrate der Residuen berechnet sich aus

$$S_R = \sum_{k=1}^m (y_k - \hat{y}_k)^2 = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$$

Für die Berechnung des Fehlers S_M wird angenommen, dass die Antwortfunktion

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

bekannt ist. In diesem Fall ergibt sich ein Modellfehler zu

$$S_M = \sum_{k=1}^m (\hat{y}_k - \eta_k)^2 = (\hat{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\eta})^T (\hat{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\eta})$$

Somit ist der Anpassungsfehler

$$S_T = S_R + S_M = (\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta})^T (\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta})$$

Eine ausführliche Darstellung der Varianz-Analyse kann z.B. in [Box und Draper \(1987\)](#) nachgelesen werden.

Problematisch bei der Verwendung der globalen Antwortflächenverfahren ist, dass eine polynomiale Approximation bei stark nichtlinearen Funktionen der Modellantworten versagt (Modellfehler). Durch die Ermittlung der Koeffizienten mittels Regression werden die eigentlich exakt ermittelten Stützstellen nur näherungsweise interpoliert (Schätzfehler). Der dabei entstehende Anpassungsfehler kann unter Umständen das Approximationsergebnis, insbesondere für die anschließende Zuverlässigkeitsanalyse unbrauchbar machen (siehe dazu z.B. die Untersuchungen und Beispiele von [Engelund und Rackwitz \(1992\)](#)).

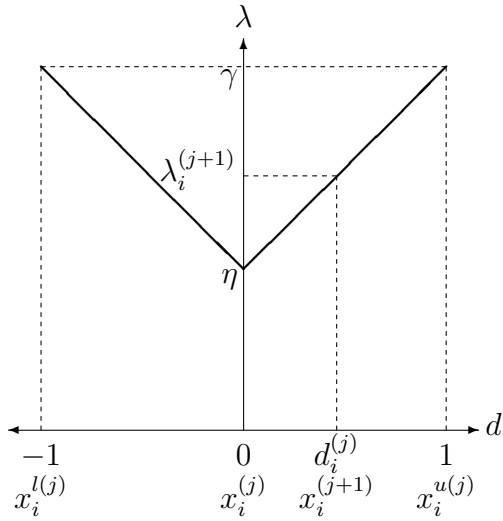


Abbildung 4: Funktion der Kontraktionsrate in Abhängigkeit vom Bewegungsindikator.

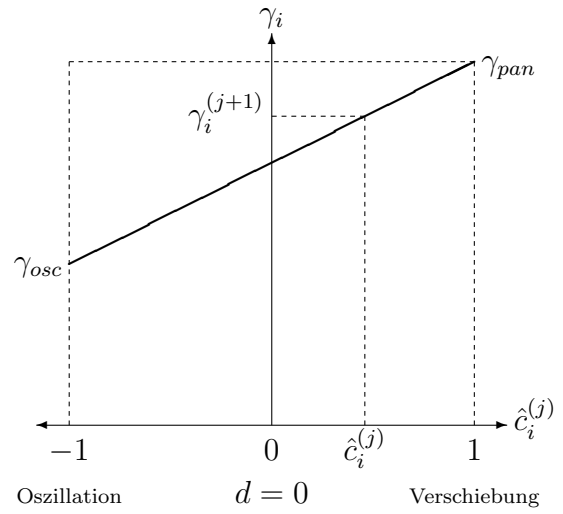


Abbildung 5: Funktion der Kontraktionsparameter in Abhängigkeit vom normalisierten Oszillationsindikator.

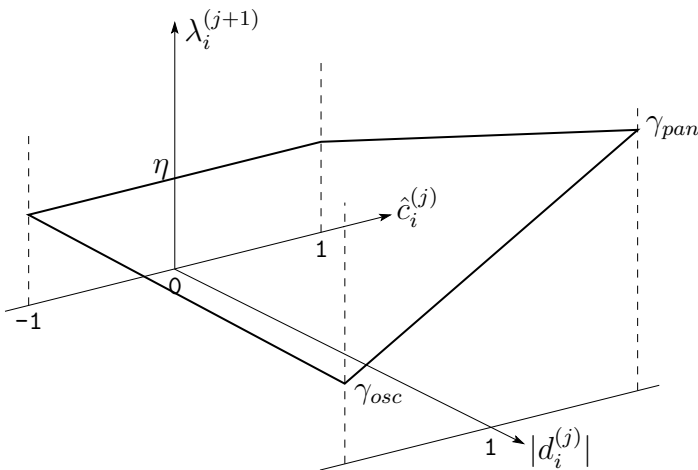


Abbildung 6: Funktionale Abhängigkeit von λ_i zu Bewegungs- und Oszillationsindikator mit zugehörigen Verfahrensparametern γ_{pan} , γ_{osc} und η .

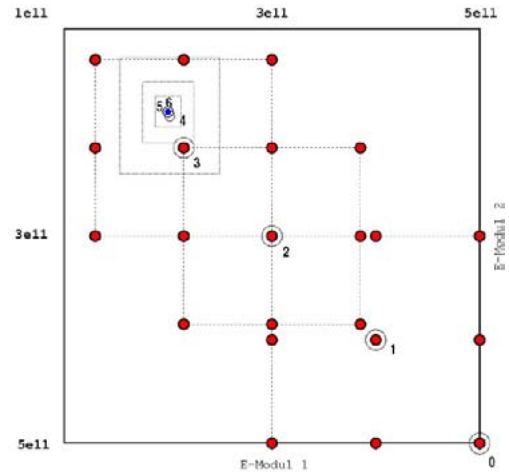


Abbildung 7: Sequentielle Änderung des Subparameterraumes bei dem adaptiven lokalen polynomialen Antwortflächenverfahren.

2.3.3 Adaptives Antwortflächenverfahren

Adaptive Antwortflächenverfahren, werden in der multidisziplinären Optimierung mit großen Erfolg eingesetzt. Es existieren zahlreiche Varianten einer adaptiven lokalen polynomialen Approximation, so z.B. in [Etman u. a. \(1996\)](#); [Toropov \(1998\)](#); [Abspoel u. a. \(2001\)](#); [Stander und Craig \(2002\)](#); [Kurtaran u. a. \(2002\)](#). Dabei unterscheiden sich die Verfahren nur geringfügig in Teilbereichen der einzelnen Bewegungsgrenzen-Strategien, durch die die Grenzen des Subparameterraumes $x_i^{l(j)}, x_i^{u(j)}$ für ein Optimierungsschritt j begrenzt werden. Diese Grenzen stellen Approximations- und Optimierungsschranken dar. Das Ziel des Verfahren ist es, diese Grenzen so in dem Design-Parameterraum zu verschieben, dass mit der letzten Iteration das globale Optimum der lokal approximierten Zielfunktion annähernd gefunden wird (vgl. Abb. 7).

Ausgehend von einem Startdesign $\mathbf{x}^{(0)}$, dass den Zentrumschwerpunkt und somit die Position der Startregion festlegt, werden die Grenzen $x_i^{l(0)}$ und $x_i^{u(0)}$

$$x_i^{l(0)} = x_i^{(0)} - \gamma_{start} r_i^{(0)} \quad \text{und} \quad x_i^{u(0)} = x_i^{(0)} + \gamma_{start} r_i^{(0)} \quad i = 1, \dots, n$$

der Startregion berechnet. Darin ist $r_i^{(0)}$ eine globale Bereichsgröße der i -ten Parameterdimension und γ_{start} ein Faktor zwischen 0 und 1, der das Verhältnis zwischen globaler Bereichsgröße und Größe der Subregion definiert.

Bevorzugte Stützstellenentwürfe sind das Koshal-Design bzw. das D-optimale Design. Zur Suche des Optimums auf der approximierten Zielfunktion, können i.A. Standardverfahren der nichtlinearen Programmierung angewendet werden.

Die Verschiebung des Subbereiches ergibt sich aus dem Verschiebungsvektor

$$\Delta x_i^{(j)} = x_i^{(j)} - x_i^{(j-1)}$$

des Startdesign (Optimum des vorhergehenden Subbereiches) zum aktuell gefundenen Optimum. Ein Bewegungsindikator

$$d_i^{(j)} = \frac{2\Delta x_i^{(j)}}{r_i^{(j)}} \quad \text{mit} \quad d_i^{(j)} \in [-1; 1] .$$

legt dabei die relative Bewegungsrichtung, bezogen auf das vorherige Startdesign (Optimum), fest.

Die Kontraktionsrate $\lambda_i^{(j)}$ definiert das Verhältnis

$$\begin{aligned} r_i^{(j)} &= \lambda_i^{(j)} r_i^{(j-1)} \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, p; \quad j = 1, \dots, n\text{-Iterationen} \\ x_i^{l(j)} &= x_i^{(j)} - \frac{1}{2} r_i^{(j)} \\ x_i^{u(j)} &= x_i^{(j)} + \frac{1}{2} r_i^{(j)} \end{aligned}$$

der Größe der vorherigen $(j-1)$ -ten Subregion $r_i^{(j-1)}$ zur Größe der j -ten Subregion $r_i^{(j)}$.

Für die Bestimmung von $\lambda_i^{(j)}$ wird i.A. eine lineare Betragsfunktion (siehe Abb. 4)

$$\lambda_i^{(j)} = \eta + |d_i^{(j)}| (\gamma - \eta)$$

gewählt, die in Abhängigkeit vom Betrag des Bewegungsindikator $|d_i^{(j)}|$ beschreibbar ist. Der Zoomparameter η und der Kontraktionsparameter γ legen hierbei die Grenzwerte

⁴engl.: analysis of variance (ANOVA)

fest, zwischen denen sich die Kontraktionsrate λ_i linear verändert. Die Standardwerte dieser beiden Parameter betragen $\eta = 0.5$ und $\gamma = 1.0$.

Damit die sequentielle Suche nicht zwischen zwei Subbereichen oszilliert, wird ein normalisierter Oszillationsindikator

$$\hat{c}_i^{(j)} = \sqrt{|c_i^{(j)}|} \text{sign}(c_i^{(j)}) .$$

mit dämpfenden Einfluss eingeführt. Abbildung 5 stellt den linearen Zusammenhang

$$\gamma_i^{(j+1)} = \frac{1}{2} \left[\gamma_{pan} \left(1 + \hat{c}_i^{(j)} \right) + \gamma_{osc} \left(1 - \hat{c}_i^{(j)} \right) \right]$$

von Kontraktionsparameter zum normalisierten Oszillationsindikator dar. Die Bestimmung von λ_i ist somit eine lineare Funktion und abhängig vom Bewegungs- und Oszillationsindikator, sowie von den drei Parametern η , γ_{pan} und γ_{osc} . In der Abbildung 6 ist dieser Zusammenhang graphisch verdeutlicht.

2.3.4 Moving-Least-Square-Approximation

In der zuverlässigkeitsorientierten Optimierung müssen die Ausfallwahrscheinlichkeiten

$$P(f_j) = \int_{g_j(\mathbf{x}) \leq 0}^{n_r} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

in den zusätzlichen stochastischen Restriktionen der Gleichung (2) und in der erweiterten Zielfunktion (3) mit Hilfe der Zuverlässigkeitsanalyse berechnet werden.

Für Aufgabenstellungen mit nur wenigen zufälligen Parametern ($n_r \leq 10$) können dafür i.A. sehr effizient Antwortflächenverfahren eingesetzt werden. Allerdings ist bei der Weiterverwendung des vorgestellten sequentiellen Stützstellenentwurfs im Zusammenhang mit einer globalen polynomialen Approximation zu beachten, dass der gesuchte Punkt höchster Wahrscheinlichkeitsdichte auf der Grenzzustandsfunktion nicht mit ausreichender Genauigkeit gefunden werden kann. Die Modellvarianz kann nicht durch die Hinzunahme neuer Stützstellen, sondern nur die Reduzierung der Modellraumgröße reduziert werden. Für die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeiten oder aber auch der Varianzen der Antwortfunktionen kann eine Verkleinerung der Modellraumgröße nicht vorgenommen werden, da der Einfluss aller möglichen Variationen der zufälligen Parameter im gesamten Raum gesucht wird.

Moving-Least-Square-Approximation dagegen erlauben eine lokale Modellverbesserung durch die Hinzunahme von weiteren Stützstellen im gesamten Modellraum. Die Moving-Least-Square-Approximation kann formuliert werden als

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_b} h_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (10)$$

mit der Anzahl der Basisterme n_b , dem Vektor der Basisfunktionen \mathbf{h} und den zugehörigen Vektor der Koeffizienten \mathbf{a} . Lancaster und Salkauskas (1986) formulieren die lokale Moving-Least-Square-Approximation als

$$\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^{n_b} h_i(\mathbf{x}_j) a_i(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^T(\mathbf{x}_j) \mathbf{a}(\mathbf{x})$$

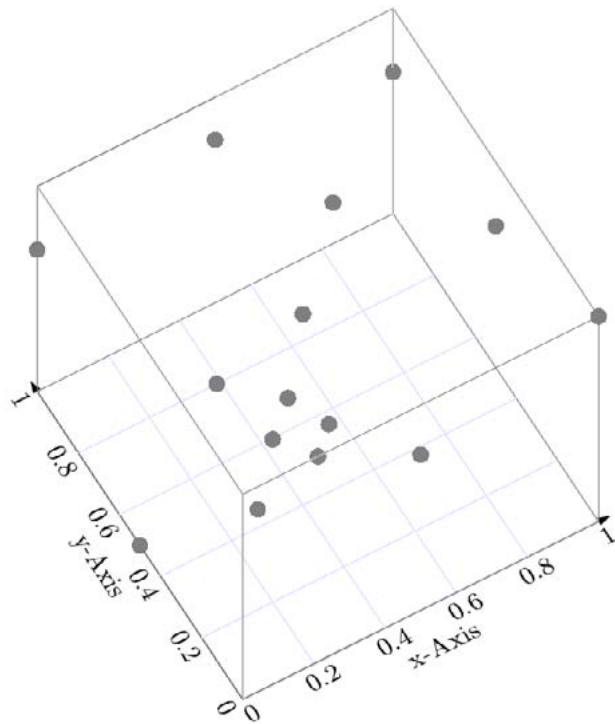


Abbildung 8: Beispiel für ausgewählte Stützstellen in der x - y -Ebene und zugehörige Modellantworten $z(x, y)$.

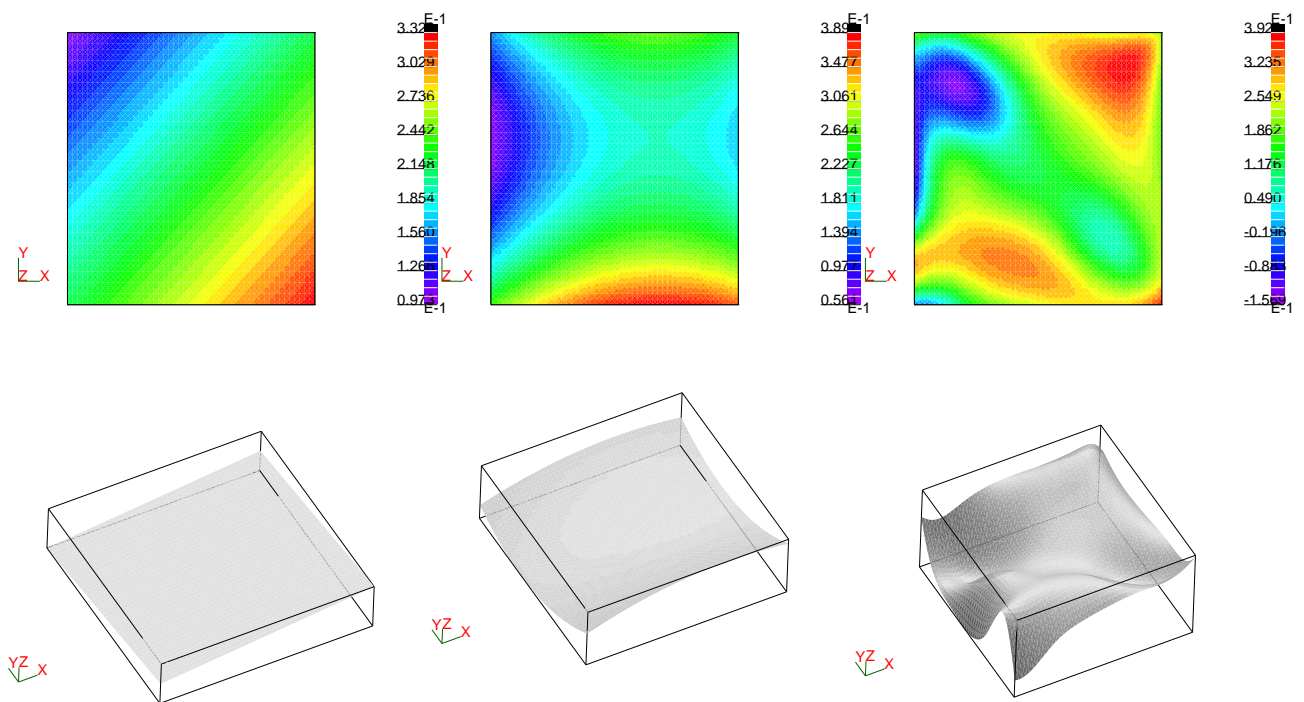


Abbildung 9: Approximationsfunktion $\hat{g}(x, y)$ infolge einer linearen Regression.

Abbildung 10: Approximationspolynom zweiter Ordnung $\hat{g}(x, y)$ infolge einer quadratischen Regression.

Abbildung 11: Approximationsfunktion $\hat{g}(x, y)$ infolge einer Moving-Least-Square-Approximation.

mit $j = 1, \dots, n_s$ Stützstellen. Die Berechnung des Koeffizientenvektors \mathbf{a} erfolgt durch eine Minimierung der gewichteten Fehlerquadrate

$$\begin{aligned}
S(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^{n_s} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) (\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) - \hat{g}(\mathbf{x}_j))^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n_s} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \left(\sum_{i=1}^{n_b} h_i(\mathbf{x}_j) a_i(\mathbf{x}) - \hat{g}(\mathbf{x}_j) \right)^2 \\
&= (\mathbf{H}\mathbf{a} - \mathbf{g})^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) (\mathbf{H}\mathbf{a} - \mathbf{g}) \rightarrow \min
\end{aligned} \tag{11}$$

mit der Wichtungsfunktion $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$ und

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} &= [g(\mathbf{x}_1) \quad g(\mathbf{x}_2) \quad \dots \quad g(\mathbf{x}_{n_s})]^T \\
\mathbf{H} &= [\mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}_2) \quad \dots \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}_{n_s})]^T \\
\mathbf{W}(\mathbf{x}) &= \text{diag}[w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \quad w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \quad \dots \quad w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n_s})]
\end{aligned}$$

$S(\mathbf{x})$ nimmt ein Minimum an, wenn die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{a}} = 0$$

zu Null werden. Damit entsteht aus der Beziehung (11) ein lineares Gleichungssystem zur Abschätzung des Koeffizientenvektors \mathbf{a}

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{g} \tag{12}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(\mathbf{x}) &= \mathbf{H}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{H} \\
\mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \mathbf{H}^T \mathbf{W}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

Damit die Basisfunktionsmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ nicht singulär ist, müssen immer ausreichend viele n_s -Nachbarstützstellen in der Nähe von \mathbf{x} betrachtet werden, daher die Anzahl der Stützstellen muss mindestens so groß sein wie Anzahl der Basisterme ist. Die Bestimmungsgleichung (12) in (10) eingesetzt ergibt die Approximationsfunktion

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}^T(\mathbf{x}) \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{g}$$

Eine möglichst gute lokale Approximationgüte bedingt, dass die Wichtungsfunktion nur innerhalb eines kleinen Teilgebietes $\Omega_s \subset \Omega$ größer als Null $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) > 0$ und eine monoton fallende Funktion in $w(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|)$ ist, damit der Einfluss weit entfernter Stützstellen gering ausfällt. Eine gleichmäßige Wichtung wird durch die Symmetriebedingung $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) = w(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|)$ gewährleistet. Eine gebräuchliche Wichtung ist eine z.B. die Verwendung einer Exponentialfunktion

$$w\left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|}{D}\right) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|}{D\alpha}\right)^2} & \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\| \leq 1 \\ 0 & \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\| > 1 \end{cases}$$

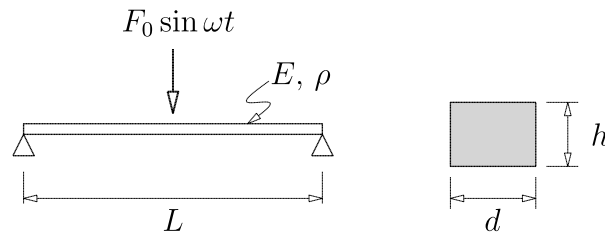


Abbildung 12: Balken mit rechteckigem Querschnitt

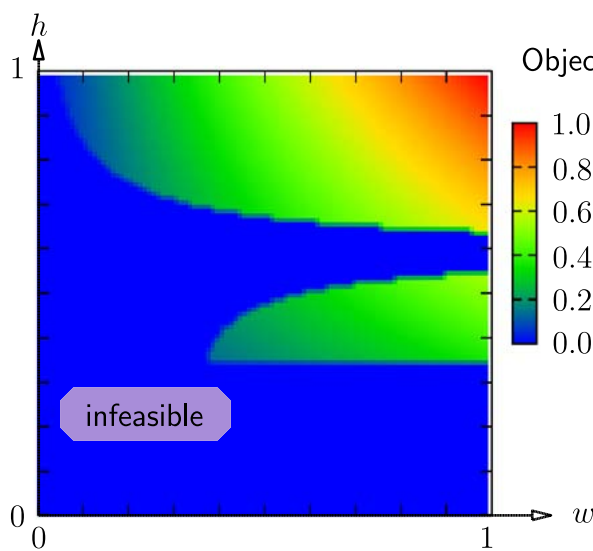


Abbildung 13: Zielfunktion und zulässiger Bereich

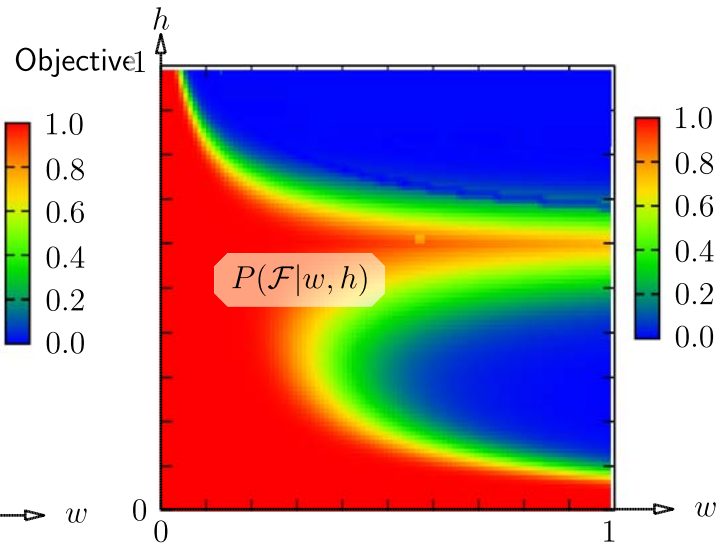


Abbildung 14: Bedingte Versagenswahrscheinlichkeit abhängig von d und h

3 Anwendungsbeispiel

Ein klassisches Optimierungsproblem für Strukturelemente stellt sich zum Ziel, die Masse zu minimieren und dabei Verformungs- bzw. Festigkeitsrestriktionen einzuhalten. Für den dargestellten einfachen Balken mit einem rechteckigen Querschnitt (d , h) unter der Wirkung seines Eigengewichtes und eine harmonischen Last $F(t)$ soll die Masse minimiert werden unter folgenden Restriktionen:

- Die Mittendurchbiegung w_g unter Eigengewicht ist kleiner als 5 mm .
- Die zusätzliche Mittendurchbiegung w_d unter der dynamischen Last $F(t)$ ist kleiner 10 mm

Für angenommene Werte von $F_0 = 20\text{ kN}$, $\omega = 60\text{ rad/s}$, $E = 3 \cdot 10^{10}\text{ N/m}^2$, $\rho = 2500\text{ kg/m}^3$, $L = 10\text{ m}$ und $g = 9.81\text{ m/s}^2$ sind die Zielfunktion (d.i. die Querschnittsfläche) und der zulässige Bereich in Abb. 13 dargestellt. Diese Darstellung zeigt, dass zwei getrennte zulässige Gebiete bestehen. Für einen gradientenbasierten Optimierer bestehen generell Schwierigkeiten, die Gebietsgrenzen zu überwinden, und das globale Optimum zu lokalisieren.

Der Einsatz genetischer Optimierungsverfahren bietet sich daher an. Darüber hinaus sind in vielen Anwendungsfällen - speziell aus der Strukturmechanik - die kennzeichnenden Parameter mit stochastischen Unsicherheiten behaftet. Im vorliegenden Beispiel wird angenommen, dass die dynamische Lastamplitude F_0 und die Anregungskreisfrequenz ω

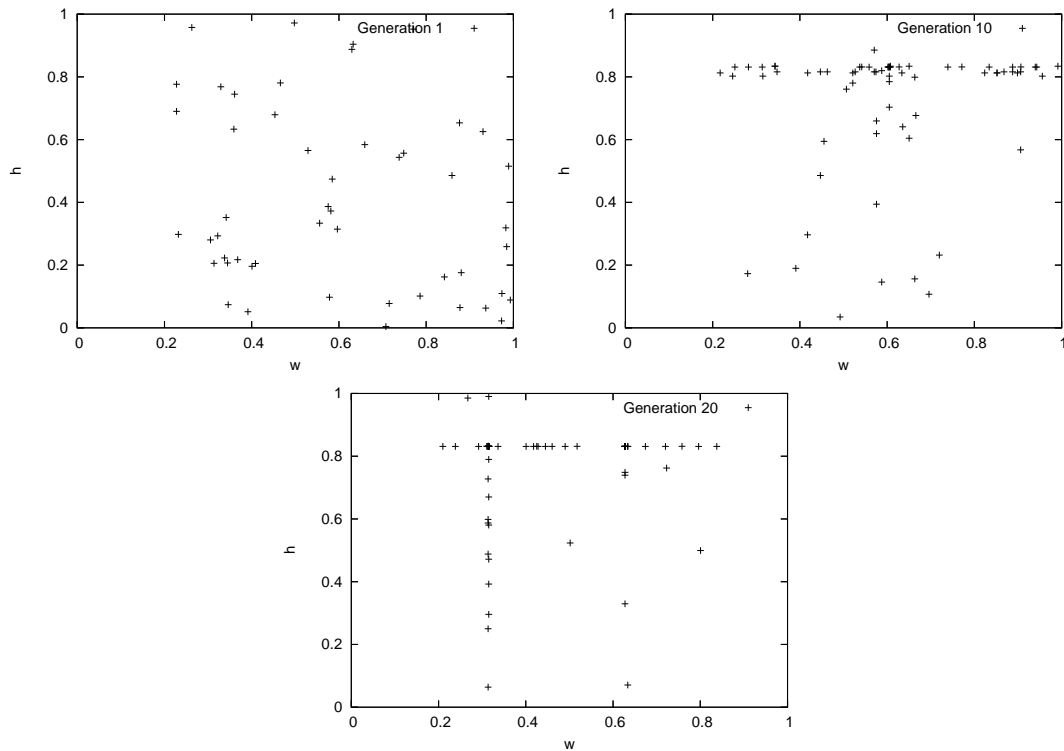


Abbildung 15: Entwicklung der Population in der Genetik

Zufallsvariable mit einer Normalverteilung sind. Die Mittelwerte sind gleich den o.a. Nennwerten, beide Variationskoeffizienten wurden mit 10% angenommen. Damit ergibt sich, dass die Restriktion aus der dynamischen Belastung nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit < 1 erfüllt werden kann. Abb. 14 zeigt die Wahrscheinlichkeit des Verletzens der Dynamikrestriktion (d.i. die bedingte Versagenswahrscheinlichkeit $P(\mathcal{F}|w, h)$) als Funktion der Entwurfsparameter w und h .

Für die nun folgende Optimierung wurde als Restriktion gefordert, dass die bedingte Versagenswahrscheinlichkeit $< 1\%$ sein soll. Im Rahmen der Genetik wurden Designs mit einer höheren Versagenswahrscheinlichkeit durch einen Strafterm, dessen Größe S unabhängig von $P(\mathcal{F})$ ist, bestraft. Die Zielfunktion ist somit

$$L = h \cdot w + SH[P(\mathcal{F}) - 0.01] \quad (13)$$

In dieser Gleichung ist $H[\cdot]$ die Heavyside-Funktion. Die Strafgröße S wurde mit dem Wert 100 angenommen. Ein Genetiklauf mit 30 Generation zu je 50 Individuen erbrachte folgendes bestes Individuum: $h = 0.90617$, $w = 0.78035$. Die Versagenswahrscheinlichkeit war in diesem Fall 0.38%, also deutlich unterhalb der Schranke von 1%. Abb. 15 illustriert den Verlauf der Genetik durch Darstellung der Populationen der ersten, zehnten und 20. Generation. Die Konzentration auf Bereiche mit akzeptabler Versagenswahrscheinlichkeit ist gut erkennbar.

Literatur

- ABSPOEL, S. J. ; ETMAN, L. F. P. ; VERVOORT, J. ; ROOIJ, R. A. ; SCHOOF, A. J. G. ;
ROODA, J. E.: Simulation based optimization of stochastic systems with integer design
variables by sequential multipoint linear approximation. In: *Struct Multidisc Optim*
(2001), Nr. 22, S. 125 – 138
- ALLEN, M. ; MAUTE, K.: Reliability-based design optimization of aeroelastic structures.
In: *Struct Multidisc Optim* (2004), Nr. 27, S. 228 – 242
- ALLEN, Matthew ; RAULLI, Michael ; MAUTE, Kurt ; FRANGOPOL, Dan M.: Reliability-
based analysis and design optimization of electrostatically actuated MEMS. In: *Com-
puters and Structures* (2004), Nr. 82, S. 1007 – 1020
- BEN-TAL, Aharon ; NEMIROVSKI, Arkadi: Robust optimization – methodology and ap-
plications. In: *Math. Program.* (2002), Nr. Ser. B 92, S. 453 – 480
- BOX, G. E. P. ; DRAPER, N. R.: *Empirical Model Building and Response Surfaces*. New
York, USA : John Wiley and Sons, 1987
- BRANKE, Juergen: Creating robust solutions by means of an evolutionary algorithm. In:
*A.E. Eiben, T. Bäck, M. Schoenhauer, and H.-P. Schwefel, editors, Parallel Problem
Solving from Nature* 1498 (1998), S. 119–128
- BYRNE, D.M. ; TAGUCHI, S.: The Taguchi Approach to Parameter Design. In: *40th
Annual Quality Congress Transactions*. Milwaukee, Wisconsin : American Society for
Quality Control, 1987, S. 19 – 26
- CHEN, Wei ; RUICHEN, Jin ; SUDJANTO, Agus: Analytical variance-based global sensi-
tivity analysis in simulation-based design under uncertainty. In: *Proceedings of DETC'04,
ASME 2004 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Informati-
on in Engineering Conference*. Salt Lake City, Utah USA, September 28 – October 2
2004
- CHOI, K. K. ; TU, J. ; PARK, Y. H.: Extensions of design potential concept for reliability-
based design optimization to nonsmooth and extreme cases. In: *Struct Multidisc Optim*
(2001), Nr. 22, S. 335 – 350
- CHOI, K. K. ; YOUN, Byung D. ; YANG, Ren-Jye: Moving Least Square Method for
Reliability-Based Design Optimization. The University of Iowa : Center for Computer-
Aided Design and Department of Mechanical Engineering. – Forschungsbericht. – URL
<http://www.icaen.uiowa.edu/~byoun/WCSM0-4.pdf>
- DOLTSINIS, Ioannis ; KANG, Zhan: Robust design of structures using optimization me-
thods. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* (2004), Nr. 193, S. 2221 – 2237
- ENGELUND, S. ; RACKWITZ, R.: Experiences with Experimental Design Schemes for
Failure Surface Estimation and Reliability. In: LIN, Y. K. (Hrsg.): *ASCE Specialty
Conference on Probabilistic Mechanics and Structural and Geotechnical Reliability*. New
York, USA : Proceedings, 6th ASCE, 1992, S. 244 – 247
- ETMAN, L.F.P. ; ADRIAENS, J.M.T.A. ; SLAGMAAT, M.T.P. van ; SCHOOF, A.J.G.: Cras-
hworthiness Design Optimization using Multipoint Sequential Linear Programming. In:
Structural Optimization 12 (1996), S. 222–228

- FARAVELLI, L.: *Response Surface Approach for Reliability Analysis*. PaviaItaly : Pubblicazione n. 160, Dipartimento di Meccanica Strutturale Dell' Università di Pavia, 1986
- HWANG, K.-H. ; LEE, K.-W. ; PARK, G.-J.: Robust optimization of an automobile rear-view mirror for vibration reduction. In: *Struct Multidisc Optim* (2001), Nr. 21, S. 300 – 308
- KHARMANDA, G. ; MOHAMED, A. ; LEMAIRE, M.: Efficient reliability-based design optimization using a hybrid space with application to finite element analysis. In: *Struct Multidisc Optim* (2002), Nr. 24, S. 233 – 245
- KOCH, P. N. ; YANG, R.-J. ; GU, L.: Design for six sigma through robust optimization. In: *Struct Multidisc Optim* (2004), Nr. 26, S. 235 – 248
- KURTARAN, H. ; ESKANDARIAN, A. ; MARZOUGUI, D. ; BEDEWI, N.E.: Crashworthiness design optimization using successive response surface approximations. In: *Computational Mechanics* 29 (2002), S. 409–421
- LANCASTER, P. ; SALKAUSKAS, K.: *Curve and surface fitting; an introduction*. London : Academic Press, 1986
- MELCHERS, R. E.: Optimality-criteria-based probabilistic structural design. In: *Struct Multidisc Optim* (2001), Nr. 23, S. 34 – 39
- MYERS, R. H.: *Response Surface Methodology*. Boston, USA : Allyn and Bacon Inc., 1971
- PHADKE, M.S.: *Quality Engineering using Robust Design*. New Jersey : Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989
- PICTET, Olivier V. ; DACOROGNA, Michel M. ; DAVÉ, Rakhal D. ; CHOPARD, Bati-en ; SCHIRRU, Roberto ; TOMASSINI, Marco: *Genetic Algorithms with collective sharing for Robust Optimization in Financial Applications*. 1996. – OVP.1995-02-06, http://www.olsen.ch/research/307_ga_pase95.pdf
- RACKWITZ, R. ; FIESSLER, B.: Structural reliability under combined random load sequences. In: *Computers and Structures* 9 (1978), S. 489—494
- RAIS-ROHANI, M. ; SINGH, M. N.: Comparison of global and local response surface techniques in reliability-based optimization of composite structures. In: *Struct Multidisc Optim* (2004), Nr. 26, S. 333 – 345
- RAJASHEKHAR, M. R. ; ELLINGWOD, B. R.: *A new look at the response surface approach fo reliability analysis*. Vol. 12, No. 1. Structural Safety, 1993
- ROYSET, J. O. ; KIUREGHIAN, A. D. ; POLAK, E.: Successive approximations for the solution of optimal design problems with probabilistic objective and constraints. In: DER-KIUREGHIAN (Hrsg.) ; MADANAT (Hrsg.) ; PESTANA (Hrsg.): *Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering*. Ninth International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering (ICASP9) : Millpress, Rotterdam, July 6-9 2003, S. 1049 – 1056
- ROYSET, J. O. ; POLAK, E.: Reliability-based optimal design using sample average approximations. In: *Probabilistic Engineering Mechanics* (2004), Nr. 19, S. 331 – 343

- SCHITTKOWSKI, K.: NLPQL: A FORTRAN Subroutine for Solving Constrained Nonlinear Programming Problems. In: *Ann Oper Res* 5 (1985), S. 485 – 500
- STANDER, N. ; CRAIG, K.J.: On the robustness of a simple domain reduction scheme for simulation-based optimization. In: *Eng. Comput.* 19 (2002), Nr. 4, S. 431–50
- TOROPOV, V. V.: Development of MARS – Multipoint Approximation Method Based on the Response Surface Fitting. In: *AIAA-98-4769* (1998)
- WILSON, Benjamin ; CAPPELLERI, David ; SIMPSON, Timothy W. ; FRECKER, Mary: Efficient Pareto Frontier Exploration using Surrogate Approximations. In: *Optimization and Engineering* (2001), Nr. 2, S. 31 – 50
- YANG, R. J. ; GU, L.: Experience with approximate reliability-based optimization. In: *Struct Multidisc Optim* (2004), Nr. 26, S. 152 – 159
- YOUN, B. D. ; CHOI, K. K. ; YANG, R. J. ; GU, L.: Reliability-based design optimization for crashworthiness of vehicle side impacts. In: *Struct Multidisc Optim* (2004), Nr. 26, S. 272 – 283
- YOUN, Byeng D. ; CHOI, Kyung K.: A new response surface methodology for reliability-based design optimization. In: *Computers and Structures* (2004), Nr. 82, S. 241 – 256