МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЕТ

к лабораторной работе по дисциплине

«Дифференциальные уравнения»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.

Б9121-01.03.02сп(1)

Бабак И. А. ____________
(Ф.И.О.) *подпись*

« 22 » мая 20 23 г.

г. Владивосток

2023

Содержание

1. Введение

В этой лабораторной работе будем решать дифференциальные уравнения, определять их типы и давать характеристику (внезапно). А также решим уравнения методом Эйлера.

2. Задание 1: решить уравнения

2.1. Постановка задачи

Для следующих дифференциальных уравнений указать вид, дать характеристику и найти общее решение с помощью программ компьютерной математики:

1. $y \ln t = \dot{y} \cdot \ln t^t - \tan \dot{y} \cdot \ln t^{\dot{y}}$
2. $\sqrt{1 - \dot{x}^2} = \dot{x} - \sqrt{t}$
3. $\dot{u}^2 - \dfrac{1 + \sin 2t}{e^{2u}} = 0$
4. $u'^3 = 1 + u$
5. $y = 2xy' + \ln y'$

2.2. Решение

1. $y \ln t = \dot{y} \cdot \ln t^t - \tan \dot{y} \cdot \ln t^{\dot{y}}$

   $y = \dot{y}t - \dot{y} \cdot \tan \dot{y}$

   Вид уравнения: $F(t,\ y,\ \dot{y}) = 0.$

   Характеристика уравнения: Уравнение Клеро.

   Общее решение: $y = C(t - \tan C)$

   Особое решение:

   $$\begin{cases} t = \tan p + p \cdot \sec^2 p \\ y = p(t - \tan p) \end{cases}$$

2. $\sqrt{1 - \dot{x}^2} = \dot{x} - \sqrt{t}$

   Вид уравнения: $F(t,\ \dot{x}) = 0$

Характеристика уравнения: Неразрешённое относительно производной, не содержащее функции.

Общее решение: $\left(3x + C - t^{\frac{3}{2}}\right)^2 = (2-t)^3$

3. $\dot{u}^2 - \dfrac{1 + \sin 2t}{e^{2u}} = 0$

   Вид уравнения: $F(t,\ u,\ \dot{u}) = 0$

   Характеристика уравнения: Полное неразрешённое относительно производной, приводящееся к уравнению с разделяющимися переменными

   Общее решение: $(e^u + C)^2 = 1 - \sin 2t$

4. $u'^3 = 1 + u$

   Вид уравнения: $F(u,\ u') = 0$

   Характеристика уравнения: Неразрешённое относительно производной, не содержащее аргумента.

   Общее решение: $27(u+1)^2 = 8(t+C)^3$

5. $y = 2xy' + \ln y'$

   Вид уравнения: $F(x, y, y') = 0$

   Характеристика уравнения: Уравнение Лагранжа.

   Общее решение: $\begin{cases} x = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{1}{p} \\ y = 2xp + \ln p \end{cases}$

3. Задание 2: решить методом Эйлера

3.1. Постановка задачи

Разрешить следующие уравнения относительно производной и, используя метод Эйлера, найти значение функции в точке. Нарисовать график искомой функции. Реализацию решения проводить на языке «Python»:

1. $\sin\left(e^{2x}y' + \ln\left(x^2 + y^2 + \sec xy\right)\right) = 1 + \tan xy; \quad y(0) = -\frac{\pi}{3},\ y(1) = ?$
2. $xy' - y^2 \cdot e^{-y^2} = \sin \pi x; \quad y(1) = \ln 2,\ y(\pi) = ?$

3.2. Решение

1. $\sin\left(e^{2x}y' + \ln\left(x^2 + y^2 + \sec xy\right)\right) = 1 + \tan xy; \quad y(0) = -\frac{\pi}{3},\ y(1) = ?$

   Разрешённое уравнение:

   $$y' = \frac{\arcsin(1 + \tan xy) - \ln(x^2 + y^2 + \sec xy)}{e^{2x}}$$

   Значение функции: $y(1) \approx -1.091995$

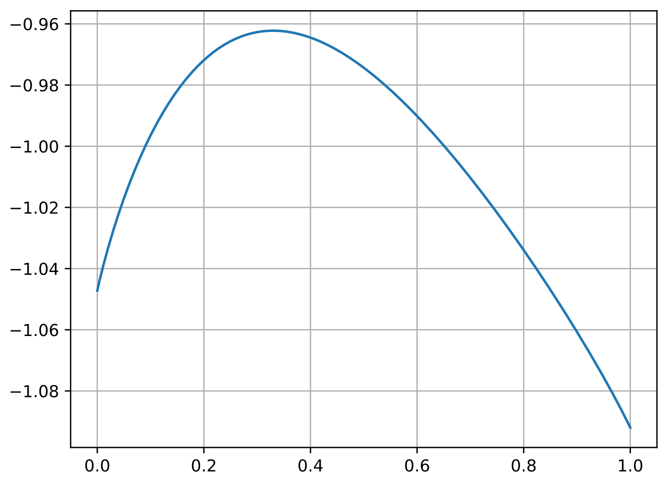

Рис. 1: График решения уравнения (1)

Код программы:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def derivative(x, y):
    return (np.arcsin(1 + np.tan(x*y)) - np.log(x**2 + y**2 + 1 / np.cos(x
        *y))) / np.exp(2*x)

y_0 = -np.pi / 3
```

```
x_0 = 0
x_n = 1
h = 0.00001

xs = [x_0]
ys = [y_0]
while x_0 <= x_n:
    y_0 = derivative(x_0, y_0) * h + y_0
    x_0 += h
    xs.append(x_0)
    ys.append(y_0)

print(f'y(1):{y_0}')
plt.plot(xs, ys)
plt.grid(True)
plt.show()
```

2. $xy' - y^2 \cdot e^{-y^2} = \sin \pi x; \quad y(1) = \ln 2, \; y(\pi) = ?$

Разрешённое уравнение: $y' = \dfrac{\sin \pi x + y^2 \cdot e^{-y^2}}{x}$

Значение функции: $y(\pi) \approx 0.78586$

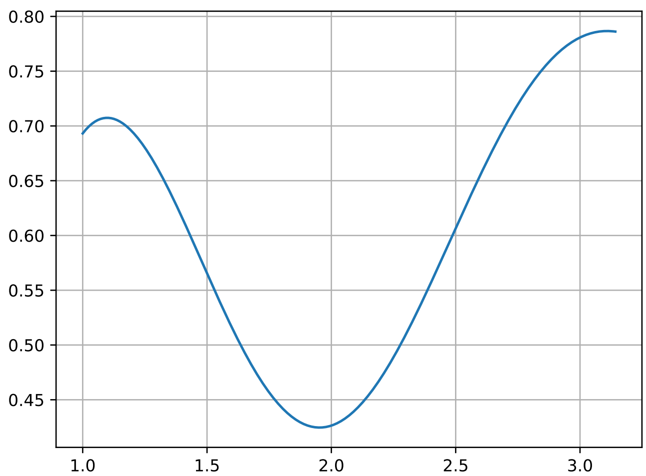

Рис. 2: График решения уравнения (2)

Код программы:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def derivative(x, y):
    return (np.sin(np.pi * x) + y**2 * np.exp(-y**2)) / x

y_0 = np.log(2)
x_0 = 1
x_n = np.pi
h = 0.00001

xs = [x_0]
ys = [y_0]
while x_0 <= x_n:
    y_0 = derivative(x_0, y_0) * h + y_0
    x_0 += h
    xs.append(x_0)
    ys.append(y_0)

print(f'y(pi):{y_0}')
plt.plot(xs, ys)
plt.grid(True)
plt.show()
```

4. Задание 3: решить уравнения

4.1. Постановка задачи

Для следующих дифференциальных уравнений определить тип, дать характеристику и найти общее решение с помощью программ компьютерной математики:

1. $\theta^2 \ln\theta \cdot (r'^2 - rr'') + r^2 \ln r = 2\theta r r'$

2. $\ddot{x} + e^{2x} = 0$

3. $t u \ddot{u} + u\dot{u} \cdot \ln u = t\dot{u}^2 + u\dot{u} \cdot \ln \dot{u}$

4.2. Решение

1. $\theta^2 \ln\theta \cdot (r'^2 - rr'') + r^2 \ln r = 2\theta r r'$

   Тип уравнения: Допускающее понижение порядка.

   Характеристика уравнения: Вполне интегрируемое уравнение.

   Общее решение: $\ln r \ln\theta = C_2\theta + C_1$

2. $\ddot{x} + e^{2x} = 0$

   Тип уравнения: Допускающее понижение порядка.

   Характеристика уравнения: Не содержащее независимую переменную.

   Общее решение: $e^{2x} = C_1^2 \operatorname{sech}^2(C_2 + tC_1)$

3. $t u \ddot{u} + u\dot{u} \cdot \ln u = t\dot{u}^2 + u\dot{u} \cdot \ln\dot{u}$

   Тип уравнения: Допускающее понижение порядка.

   Характеристика уравнения: приводящееся к интегрируемому заменой $z(t) = \dfrac{\dot{u}}{u}$

   Общее решение: $u = C_2 e^{C_1 e^t}$

5. Заключение

В ходе лабораторной работы были выполнены поставленные задачи: уравнения решены, типы определены, характеристики даны. Рамен.