МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЕТ

к лабораторной работе №4 по дисциплине

«Дифференциальные уравнения»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.
Б9121-01.03.02сп(1)
Бабак И. А. ____________
(Ф.И.О.) *подпись*
« 11 » июня 2023 г.

г. Владивосток

2023

Содержание

1. Введение

В этой лабораторной работе мы будем определять характеристику линейных уравнений, решать задачи Коши и даже писать на лучшем языке в мире: «C++».

2. Задание 1: Дать характеристику и найти общее решение

2.1. Постановка задачи

Для следующих линейных дифференциальных уравнений дать характеристику и найти общее решение:

1. $x(u'' - u)\sin x + 2(xu' + u)\cos x + 2u'\sin x = e^x$
2. $r'' - 3r'\cot\theta + 3r\csc^2\theta = 2r$
3. $(t-1)^2\ddot{u} - t^2\dot{u} + 2tu = 2\ddot{u} - 3\dot{u} + 2u$
4. $(t+3)^2\ddot{x} + 5(t+3)\dot{x} + 8x = 8\sinh\ln(t+3)$
5. $r^{IV} - 6r''' - 3r'' + 96r' - 208r = 0$

2.2. Решение

1. $x(u'' - u)\sin x + 2(xu' + u)\cos x + 2u'\sin x = e^x$

   Характеристика уравнения: Неоднородное, неприведённое линейное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами.

   Общее решение: $ux = \csc x(C_1 + C_2 x + e^x)$

2. $r'' - 3r'\cot\theta + 3r\csc^2\theta = 2r$

   Характеристика уравнения: Однородное, приведённое линейное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами.

   Общее решение: $r = \sin\theta\,(C_1 + C_2\cos\theta)$

3. $(t-1)^2\ddot{u} - t^2\dot{u} + 2tu = 2\ddot{u} - 3\dot{u} + 2u$

Характеристика уравнения: Однородное, неприведённое линейное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами.

Общее решение: $u = C_1(t^2 - 1) + C_2 e^t$

4. $(t+3)^2\ddot{x} + 5(t+3)\dot{x} + 8x = 8\sinh\ln(t+3)$

   Характеристика уравнения: Неднородное, неприведённое линейное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами.

   Общее решение:
   $$x = \frac{C_1 \sin\big(2\ln(t+3)\big) + C_2 \cos\big(2\ln(t+3)\big)}{(t+3)^2} + \frac{4t^2 + 24t}{13(t+3)} + \frac{128}{65(t+3)}$$

5. $r^{IV} - 6r''' - 3r'' + 96r' - 208r = 0$

   Характеристика уравнения: Однородное, приведённое линейное уравнение 4-го порядка с постоянными коэффициентами.

   Общее решение $r = C_1 e^{-4\theta} + C_2 e^{4\theta} + C_3 e^{3\theta}\sin 2x + C_4 e^{3\theta}\cos 2x$

3. Задание 2: Решить задачи Коши

3.1. Постановка задачи

Для заданных уравнений указать тип в простой форме. Найти общее решение. Найти частное решение, удовлетворяющее заданным условиям. Построить график решения:

1. $yy'' + y'^2 = 2e^y(1 + xy'); \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
2. $y'' = \sqrt{1 + y'^2}; \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 0$

3.2. Решение

1. $$\begin{cases} yy'' + y'^2 = 2e^y(1 + xy') \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

   Тип уравнения: Вполне интегрируемое уравнение.

   Общее решение: $yy' = 2xe^y + C_1$

   Частное решение: $-e^{-y}(y + 1) = x^2 - 1$

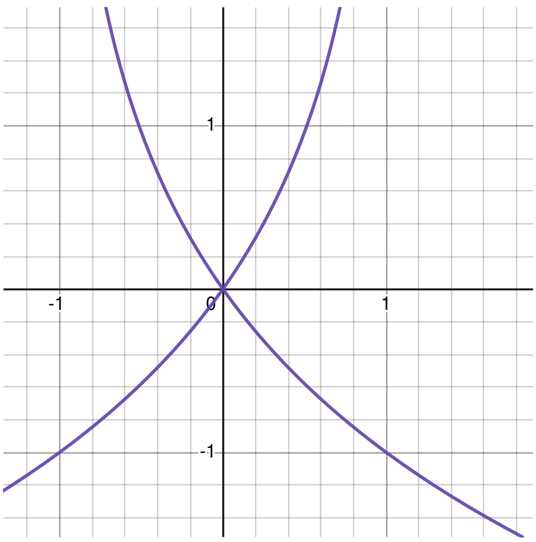

Рис. 1: График решения уравнения (1)

2. $\begin{cases} y'' = \sqrt{1 + y'^2} \\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0 \end{cases}$

Тип уравнения: Допускающее понижение порядка, несодержащее аргумент и искомую функцию.

Общее решение: $y = \cosh(x + C_1) + C_2$

Частное решение: $y = \cosh(x - 1)$

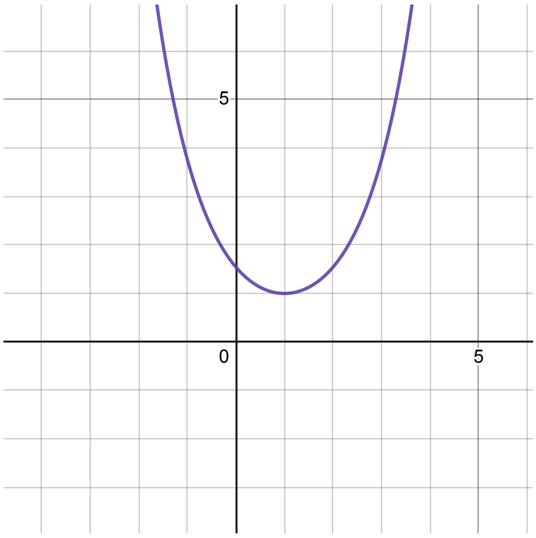

Рис. 2: График решения уравнения (2)

4. Задание 3: Решение уравнения методом Эйлера

4.1. Постановка задачи

Построить графики поведения и фазового решения модели осциллятора Ван дер Поля при заданном параметре μ. Свести уравнение к системе уравнений первого порядка. Проанализировать поведение решения системы при разных шагах метода Эйлера:

$$y'' - \mu \cdot (1 - y^2)y' + y = 0; \quad \mu = 1.49$$
$$y(0) = 0.56,\ y'(0) = 0.22;$$

Реализацию программы провести на языке «C++».

4.2. Решение

Сведём уравнение второго порядка к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y' = u, \\ u' - \mu \cdot (1 - y^2)u + y = 0, \end{cases} \quad \begin{aligned} &y(0) = 0.56, \\ &u(0) = 0.22, \\ &\mu = 1.49; \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие шаги: $0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ 0.0001$

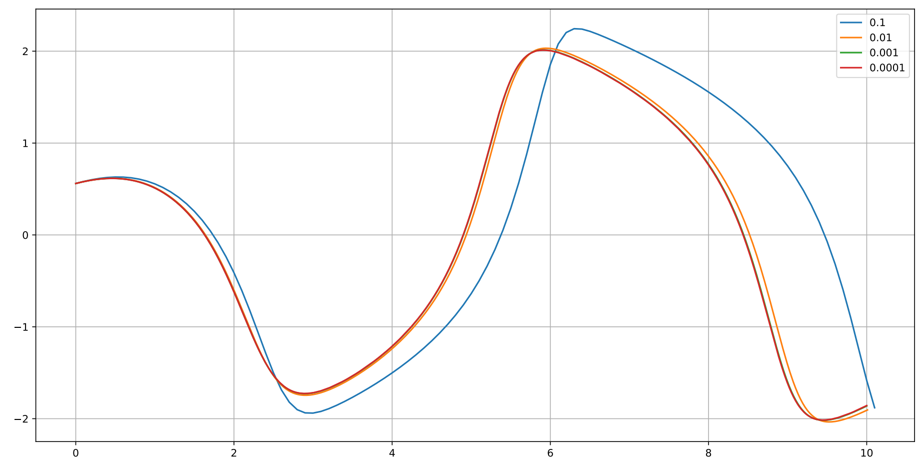

Рис. 3: Графики $y(x)$ при заданных h

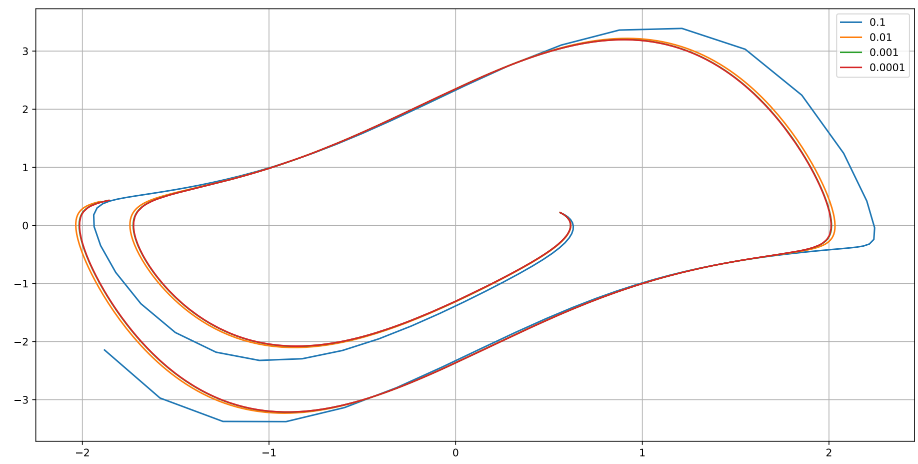

Рис. 4: Графики фазового решения при заданных h

Исходя из рисунков, можем заключить, что разница между решениями при шагах 0.001 и 0.0001 не значительна и не видна на графике без должного увеличения. Решение сходится.

```
#include <fstream>
#include <string>
#include <vector>
#include <cmath>

double der_y(double u) {
```

```cpp
    return u;
}

double der_u(double y, double u, double mu) {
    return mu * (1 - std::pow(y, 2)) * u - y;
}

std::vector<std::vector<double>>
euler(double x_0, double y_0, double u_0, double h, double x_n, double mu) {
    std::vector<double> xs = {x_0};
    std::vector<double> ys = {y_0};
    std::vector<double> us = {u_0};

    while (x_0 < x_n) {
        double y = y_0 + h*der_y(u_0);
        double u = u_0 + h*der_u(y_0, u_0, mu);
        x_0 += h;
        y_0 = y;
        u_0 = u;
        xs.push_back(x_0);
        ys.push_back(y_0);
        us.push_back(u_0);
    }
    return std::vector<std::vector<double>> {xs, ys, us};
}

int main() {
    const double MU = 1.49;
    double x_0 = 0;
    double y_0 = 0.56;
    double u_0 = 0.22;
    double h = 0.1;
    std::ofstream fout1;
    std::ofstream fout2;

    for (int i = 1; i < 5; ++i) {
        auto result = euler(x_0, y_0, u_0, h, 10, MU);
        fout1.open("y(x)" + std::to_string(i) + ".txt");
        fout2.open("u(y)" + std::to_string(i) + ".txt");
        for (size_t i = 0; i < result[0].size(); ++i) {
```

```
            fout1 << result[0][i] << ";␣" << result[1][i] << std::endl;
            fout2 << result[1][i] << ";␣" << result[2][i] << std::endl;
        }
        fout1.close();
        fout2.close();
        h /= 10;
    }

    return 0;
}
```

Листинг 1: Код программы

5. Заключение: Рецепт шарлотки

5.1. Вам понадобятся:

1. Яблоки – 6-8 шт. (некрупных),
2. Яйца – 3 шт.,
3. Сахар – 200 г,
4. Мука – 150 г,
5. Разрыхлитель – 0,5 пакетика (1 ч.л.),
6. Масло сливочное (для смазывания формы) – около 1 ч. л.,

5.2. Процесс приготовления:

1. Яйца хорошо взбить с сахаром.
2. Муку смешать с разрыхлителем и просеять. Муку понемногу добавить в яичную массу, перемешать до однородности. Получится тесто, как на оладьи.
3. Форму смазать маслом. Разогреть духовку. Яблоки очистить, нарезать дольками.
4. Выложить часть яблок в форму. Вылить тесто на яблоки. Сверху выложить оставшиеся яблоки.
5. Выпекать шарлотку в разогретой духовке примерно 30 минут (или до румяности) при температуре 180 градусов.