КОНГРУАНЦИОННЫЕ РЕШЕТКИ КОНЕЧНЫХ АЛГЕБРЫ

ДИССЕРТАЦИЯ, ПРЕДСТАВЛЕННАЯ В ВЫСШЕЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ГАВАЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ В МАНОА ПРИ ЧАСТИЧНОМ ВЫПОЛНЕНИИ
ТРЕБОВАНИЯ К СТЕПЕНИ

ДОКТОР ФИЛОСОФИИ

В

МАТЕМАТИКА

МАЙ 2012 ГОДА

К
Уильям Дж. ДеМео

Диссертационный комитет:

Ральф Фриз, председатель
Уильям Лампе
JB Nation
Питер
Джипсен Ник Кайзер

БЛАГОДАРНОСТИ

Во-первых, я хотел бы поблагодарить моего консультанта Ральфа Фриза за его терпение, поддержку и экспертное руководство. ance, без которого я не смог бы закончить эту диссертацию. Далее я благодарю членов моего диссертационный комитет Питер Джипсен, Билл Лампе и JB Nation. Все они добились значительных успехов. вклад в эту работу. Билл Лампе, в частности, познакомил меня с прекрасным предмет универсальной алгебры.

Я благодарю Ника Кайзера за согласие выступить в качестве представителя университета по моей диссертации. комитета, а также за продолжительные встречи по темам, не связанным с его областью знаний (хотя Подозреваю, что он понимает гораздо больше, чем показывает).

Ряд других профессоров сыграли значительную роль в моей математической подготовке. Среди них, Я хотел бы особенно поблагодарить Рона Брауна, Тома Крэйвена, Эрика Гюнтнера, Бьёрна Кьос-Ханссена, Тома Рэмси и Уэйн Смит. Майк Хилден был достаточно любезен, чтобы провести мой экзамен по французскому языку. и я благодарю его за помощь в преодолении этого незначительного препятствия и за то, что он не установил слишком высокую планку.

Математический факультет Гавайского университета щедро поддержал меня. докторскую программу, и за это я ему благодарен. Я также хотел бы поблагодарить других членов отдел, сыгравший жизненно важную роль в моем продвижении по программе; в частности, я благодарю Сьюзан Хасегава, Ширли Кикилой и Трой Людвик.

Я благодарю Фонд ARCS Гонолулу за щедрую поддержку меня с Сарой Энн. Премия Мартина за выдающиеся исследования в области математики, а также Организации аспирантов. Гавайского университета за поддержку, предоставив мне грант на поездку.

Я выражаю глубочайшую признательность Хеён Шин, моему величайшему источнику вдохновения, моей сестренке. тер, Би Джей Кейси, и моим родителям, Биллу и Бените ДеМео, а также Барбаре и Теду Терри, чьи вклад в эту диссертацию неизмерим. Их моральная поддержка и поощрение кажутся неограниченно и независимо от их понимания или оценки моей работы.

Наконец, я посвящаю эту диссертацию моей матери, Барбаре Андерсон Терри, за ее безоговорочную любовь и поддержка, за ее терпение и за то, что она вдохновила меня делать хорошую работу. Я обязан ей всем.

АБСТРАКТНЫЙ

Важная и давняя открытая проблема универсальной алгебры: каждая ли конечная решетка изоморфна конгруэнц-решетке конечной алгебры. Пока эта проблема не будет решена, наши понимание конечных алгебр является неполным, поскольку для произвольной конечной алгебры мы не можем сказать существуют ли какие-либо ограничения на форму ее решетки конгруэнций. Если мы найдем конечную решетку которое не встречается в решётке конгруэнций конечной алгебры (как многие подозревают), то мы может, наконец, заявить, что такие ограничения действительно существуют.

Согласно хорошо известному результату Палфи и Пудлака, проблема была бы решена, если бы мы могли доказать существование конечной решетки, которая не является решеткой конгруэнции действия транзитивной группы, или, эквивалентно, не является интервалом в решетке подгрупп конечной группы. Таким образом, проблема Характеристика решеток конгруэнций конечных алгебр тесно связана с проблемой характеризации интервалы в решетках подгрупп.

В данной работе мы рассмотрим ряд методов нахождения конечной алгебры с заданным сравнением. решетке, включая поиск интервалов в решетках подгрупп. Мы также рассмотрим методы доказательства что алгебры с заданной решеткой конгруэнций существуют без их фактического построения. Объединив эти хорошо известные методы с новым методом, который мы разработали, и при значительной помощи компьютера таких программ, как UACalc и GAP, мы доказываем, что за одним возможным исключением каждая решетка с большинство семи элементов изоморфно конгруэнц-решетке конечной алгебры. Таким образом, мы имеем определил уникальную наименьшую решетку, для которой не существует известного представления. Мы рассматриваем это в деталях исключительную решетку и доказать результаты, характеризующие класс алгебр, которые могли бы возможно, представляют эту решетку.

В заключение мы рассмотрим наиболее интересные, по нашему мнению, открытые вопросы, связанные с этой проблемой. и обсудить возможности будущей работы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Я Фон 1

II. Представления на конечных решетках. 16

III Приложение 103

СПИСОК НОВЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

СПИСОК РИСУНКОВ

СПИСОК СИМВОЛОВ

2 {0, 1}, или двухэлементная решетка
3 {0, 1, 2}, или трехэлементная решетка
н набор {0, 1, . . . , n 1}, или цепочка из n элементов
ω натуральные числа {0, 1, 2, . . . }
целые числа, {. . . , 1, 0, 1, . . . }
ZQ рациональные числа
F произвольное поле
А, Б, С, . . . универсальные алгебры
A = A, F — алгебра с универсумом A и операциями F
Clo(A) клон термальных операций A
Pol(A) клон полиномиальных операций A
Poln(A) множество n-арных членов Pol(A).
Aut(A) группа автоморфизмов A
Inn(A) внутренние автоморфизмы A
Out(A) внешний из автоморфизмов A
End(A) моноид эндоморфизмов A
Hom(A, B) множество гомоморфизмов из A в B
Con (A) решетка отношений сравнения A
Sub(A) решетка подалгебр A
SgA(X) — подвселенная A, порожденная множеством X A.
CgA(X) — сравнение A, порожденное множеством X A × A.
Eq(X) решетка отношений эквивалентности на множестве X
XX - набор унарных отображений множества X в себя.
ker f ядро функции f, {(x, y) | e(x) = e(y)}
ID(X) идемпотентные убывающие функции в XX
частичный порядок, определенный на ID(X) формулой f g ker f ker g
K класс алгебр
H(K) класс гомоморфных образов алгебр из K
S(K) класс подалгебр алгебр в K
P(K) класс прямых произведений алгебр из K
Pfi(K) класс конечных прямых произведений алгебр из K
V — многообразие или эквациональный класс алгебр.
V(A) многообразие, порожденное A (таким образом, V(A) = HSP(A)
V(K) многообразие, порожденное классом K
FV (X) свободная алгебра в многообразии V над порождающим множеством X
L0 класс конечных решеток
L1 класс решеток, изоморфных подрешеткам решеток конечных разбиений
L2 — класс решеток, изоморфных сильным конгруэнц-решеткам конечных частичных алгебр.
L3 — класс решеток, изоморфных конгруэнц-решеткам конечных алгебр.
L4 — класс решеток, изоморфных интервалам в решетках подгрупп конечных групп.
L5 — класс решеток, изоморфных решеткам подгрупп конечных групп.

Часть I

Фон

ГЛАВА 1
ВВЕДЕНИЕ

Начнем с неформального обзора некоторых основных объектов исследования. Это поможет исправить обозначения и мотивировать наше обсуждение. (Термины, выделенные курсивом, определены более формально в последующих разделах. или в приложении.) Затем мы представляем проблему, которая является основной темой этой диссертации, - проблема представления на конечной решетке (FLRP). В последующих разделах мы даем дополнительные обозначения и алгебраические предпосылки и суммировать хорошо известные результаты, касающиеся FLRP. В финале В разделе этой главы мы приводим список новых результатов данной диссертации.

1.1 Мотивация и постановка проблемы

Среди самых основных объектов изучения во всей математике — алгебры. Алгебра $A = A, F$ состоит из непустого множества A и набора операций F; наиболее важными примерами являются решетки, группы, кольца и модули. Чтобы понять конкретную алгебру A, мы часто изучаем ее представления, являющиеся гомоморфизмами A в некоторую другую алгебру B. Очень важный Особенностью такого гомоморфизма φ является его ядро, которое мы определяем как множество $\{(x, y) \quad A^2 \mid \varphi(x) = \varphi(y)\}$. Это отношение конгруэнтности алгебры A, которое говорит нам, как A «редуцируется», когда представлен своим образом под φ в B.

Таким образом, каждый гомоморфизм порождает отношение конгруэнтности, и множество Con A всех конгруэнтностей силовые отношения алгебры A образуют решетку. Например, если A является группой, Con A изоморфна решетке нормальных подгрупп группы A.[1] Каждому сравнению θ Con A существует соответствует естественному гомоморфизму A на A/θ, ядром которого является θ. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между Con A и естественными гомоморфизмами, а также форма Con A предоставляет полезную информацию об алгебре и ее представлениях. Например, Con A сообщает нам можно ли и как A разложить как произведение более простых алгебр или вложить в него.

Тогда, учитывая произвольную алгебру, мы должны знать, существуют ли априори какие-либо ограничения от возможной формы его решетки конгруэнтности. Знаменитый результат Гретцера и Шмидта гласит, что таких ограничений (по сути) нет. Действительно, в [18] доказано, что каждая (алгебраическая) решётка является решетка конгруэнций некоторой алгебры. Более того, как доказывает Жиры Тума в [45], метод Грютцера-Шмидта

---

[1] В этом контексте под «ядром» гомоморфизма φ обычно понимают нормальную подгруппу $\{a \quad A \mid \varphi(a) = e\}$, тогда как это единственный класс конгруэнтности ядра, как мы его определили.

Теорема остается верной, если мы ограничимся интервалами в решетках подгрупп. То есть каждая алгебраическая решетка изоморфна интервалу в решетке подгрупп (бесконечной) группы.

Теперь предположим, что мы ограничим наше внимание конечными алгебрами. Учитывая произвольную конечную алгебру, это естественно задаться вопросом, существуют ли какие-либо ограничения (кроме конечности) на форму ее сравнения решетка. Если окажется, что по произвольной конечной решетке L всегда можно найти конечную алгебру A которая имеет L в качестве решетки конгруэнтности, то, по-видимому, таких ограничений нет.

Решетку назовем конечно представимой или просто представимой, если она изоморфна конгруэнции решетка конечной алгебры, и решение о том, представима ли каждая конечная решетка, известно как проблема представления на конечной решетке (FLRP). По причинам, упомянутым выше, это является фундаментальным вопрос современной алгебры, и тот факт, что он остается без ответа, весьма примечателен.

1.2 Предварительные сведения по универсальной алгебре

Теперь мы опишем более подробно некоторые алгебраические объекты, которые играют центральную роль в нашей работе. A более полное введение в этот материал можно найти в книгах и статьях, перечисленных в разделе Библиография. В частности, основными источниками литературы по данной работе являются: [26], [32], [12], [38], и [20]. Две превосходные обзорные статьи по проблеме представления на конечной решетке — это [29] и [30].

Сначала несколько слов об обозначениях. Обсуждая универсальные алгебры, такие как A = A, F, мы обозначьте алгебры жирным шрифтом, как в A, B, . . . , и зарезервируйте символы A, B, . . . для вселенные этих алгебр. Однако это соглашение становится утомительным и неудобным, если строго соблюдается для всех алгебр, и мы часто ссылаемся на алгебру по ее вселенной. Для Например, мы часто используем L, когда говорим о решетке L = L, , , и обычно говорим о «решетке L = L, , ». решетку отношений конгруэнтности Con A, F», хотя правильнее было бы назвать Con A, F вселенную (множество) и используйте Con A = Con A, F, , для обозначения решетки (алгебры). Конечно мы будем свободно допускать такого рода злоупотребления, когда говорим о группах, предпочитая использовать G, когда относясь к группе G = G, ·, ^{1}, 1. Иногда мы используем более точное обозначение Eq(X), чтобы обозначаем решетку отношений эквивалентности на множестве X, но чаще мы будем к ней обращаться решетка по ее вселенной, Eq(X). Это никогда не было источником путаницы.

Символ операции f — это объект, которому присвоена арность, которую мы обозначаем a(f). Набор символы операции F называются типом подобия. Алгеброй типа подобия F называется пара A = A, F^A состоящее из множества A, которое мы называем вселенной A, и множества F^A = {e^A : f F} операций на A, которые являются функциями $f^A : A^{a(f)} \quad A$ арности $a(f)$. Иногда только набор операций вступает в обсуждение абстрактно, и становится ненужным обращаться к символам конкретных операций. В таких случаях мы часто обозначаем алгебру через A, ...

Обратите внимание, что символ f – подобно символу операции +, который используется для обозначения сложения в некоторых алгебры – это абстрактный символ операции, который, кроме своей арности, не имеет конкретного значения. прикреплен к нему. Мы используем обозначение f^A чтобы обозначить, что мы присвоили символу операции определенное интерпретацию как операцию в алгебре A. При этом, когда существует только одна алгебра В рассматриваемом случае кажется педантично присоединять к каждой операции верхний индекс A. В таком случаях, когда не может возникнуть путаницы, мы позволяем символу операции f обозначать конкретную операцию интерпретируется в алгебре. Кроме того, если F — набор операций (или символов операций) A, мы позволяем

$F_n \quad F$ обозначает n-арные операции (или символы операций) оператора A.

Пусть A и B — множества, и пусть $\varphi: A \quad B$ — любое отображение. Будем говорить, что пара $(a_0, a_1) \quad A^2$ принадлежит ядру φ, и мы пишем $(a_0, a_1) \quad \ker\varphi$ при условии, что $\varphi(a_0) = \varphi(a_1)$. Это легко проверяется что kerφ — отношение эквивалентности на множестве A. Если θ — отношение эквивалентности на множестве A, то a/θ обозначает класс эквивалентности, содержащий a; то есть $a/\theta := \{a' € A \mid (a, a') \quad \theta\}$. Набор всего классы эквивалентности θ в A обозначаются A/θ. То есть $A/\theta = \{a/\theta \mid a € A\}$.

Пусть $A = A, F^A$ и $B = B, F^Б$ — алгебры одного типа подобия. Гомоморфизм от A до B — это функция $\varphi: A \quad B$, которая учитывает интерпретацию операции есть, если $f \quad F$, скажем, $n = a(f)$, и если $a_1, \ldots, a_n \quad A$, то $\varphi(f^A(a_1, \ldots, a_n))$ = символы. То $f^B(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$. Отношение конгруэнтности A — это ядро гомоморфизма, определенного на A. Обозначим множество всех отношений конгруэнтности A через Con A. Таким образом, $\theta \quad$ Con A тогда и только тогда, когда $\theta = \ker\varphi$ для некоторого гомоморфизма $\varphi: A \quad B$. Легко проверить, что это эквивалентно следующее: $\theta \quad$ Con A тогда и только тогда, когда $\theta \quad$ Eq(A) и для всех n

$$(a_i ,\cdot)^{a'}_{\text{я}} \ \theta \ (0 \quad i < n) \quad (f(a_0, \ldots, a_{n\ 1}), f(a'_0, \ldots, a'_{n\ 1})) \quad \theta, \tag{1.2.1}$$

для всех $f \quad F_n$ и всех $a_0, \ldots, a_{н-1}, a'_0, \ldots, a'_{n\ 1} \quad A$. Эквивалентно, Con A = Eq(A) $\quad$ Sub(A × A).

Учитывая отношение конгруэнтности $\theta \quad$ Con A, факторалгебра A/θ является алгеброй с универсумом $A/\theta = \{a/\theta \mid a \quad A\}$ и операции $\{f^{A/\theta} \mid f \quad F\}$ определяется следующим образом:

$$f^{A/\theta}(a_1/\theta, \ldots, a_n/\theta) = f^A(a_1, \ldots, a_n)/\theta, \text{ где } n = a(f).$$

Частичная алгебра — это множество A (вселенная) вместе с набором частичных операций, то есть операций которая может быть определена только для части Вселенной. Сильное отношение конгруэнтности частичной алгебры A — отношение эквивалентности θ Eq(A) со следующим свойством: для каждой (частичной) операции f A, если f k-ичная, если (xi , yi) θ (1 я k), и если f(x1, ..., xk) существует, то f(y1, ..., yk) существует, и (f(x1, ..., xk), f(y1, ..., yk)) θ. О частичных алгебрах нам придется сказать очень мало, но они появляются ниже в нашем обзоре важных результатов, связанных с FLRP.

Пусть A = A, . . . — алгебра с конгруэнтной решеткой Con A, ... Напомним, что клон на непустое множество A — это множество операций над A, содержащее операции проецирования и замкнутое относительно композиции. Клон термальных операций алгебры A, обозначаемый Clo(A), является наименьшим клон на A, содержащий основные операции A. Клон полиномиальных операций A, обозначаемый by Pol(A), является клоном, созданным базовыми операциями A и постоянными унарными отображениями на A. Множество n-арных членов Pol(A) обозначается Poln(A).

Под унарной алгеброй мы понимаем алгебру с любым числом унарных операций2. В нашей работе, как нас в первую очередь интересуют конгруэнтные решетки, мы можем ограничить наше внимание однонарными алгебрами всякий раз, когда это полезно или удобно, как показывает следующий результат (ср. теорему 4.18 из [26]).

Лемма 1.2.1. Если F — множество операций над A, то

Con A, F = Con A, F′ ,

где F ' – это любой из Pol(A), Pol1(A) или набор базовых трансляций (операций в Pol1(A), полученных от F, фиксируя все координаты, кроме одной).

Решетка, образованная всеми подгруппами группы G, обозначаемая Sub(G), называется решеткой подгрупп группы G. Это полная решетка: любое количество подгрупп Hi имеет пересечение (наибольшую нижнюю границу) Привет , а именно их пересечение Привет , и соединение (наименьшая верхняя граница) Hi , а именно подгруппа порождается их объединением. Обозначим группу, порожденную подгруппами {Hi : i I}, через Hi : i I, когда I бесконечно, и по H0, H1, . . . , Hn 1, иначе. Поскольку полная решетка алгебраичны тогда и только тогда, когда каждый элемент является объединением компактных элементов, мы видим, что решетки подгрупп всегда алгебраичны. Мы упоминаем эти факты ввиду их общей важности, но напоминаем читателю, что все группы в этой работе конечны.

2Обратите внимание, что некоторые авторы оставляют этот термин для алгебр с одной унарной операцией и используют термин мультиунарный. алгебра, когда речь идет о том, что мы называем унарной алгеброй.

1.3 Обзор хорошо известных результатов

Значительные шаги к решению проблемы FLRP были сделаны многими видными исследователями, в том числе Майкл Ашбахер, Уолтер Фейт, Ханс Курцвейл, Адреа Луккини, Ральф Маккензи, Раймунд Неттер, Питер Пальфи, Павел Пудлак, Джон Сноу и Джири Тума, и это лишь некоторые из них. У нас будет повод обсудить и применить в дальнейшем ряд их результатов. Здесь мы лишь упомянем некоторые из основные моменты примерно в хронологическом порядке.

В своей книге «Универсальная алгебра» [19] 1968 года Джордж Грэтцер определяет следующие классы решеток:

- L0 = класс конечных решеток;
- L1 = класс решеток, изоморфных подрешеткам конечных решеток с разбиениями;
- L2 = класс решеток, изоморфных решеткам сильных конгруэнций конечных частичных алгебр;
- L3 = класс решеток, изоморфных конгруэнц-решеткам конечных алгебр.

Очевидно, L0 L1 L2 L3. Гретцер спрашивает ([19], проб. 13, с. 116), имеет ли место равенство в каждый случай. Является ли L0 = L1 конечной версией вопроса, который Гаррет Биркгоф задал 1935. В [6] Биркгоф задается вопросом, изоморфна ли каждая решетка подрешетке некоторого разбиения. решетка. Уитмен [47] ответил на этот вопрос утвердительно в 1946 г., но его доказательство вкладывает каждую конечную решетку в счетной бесконечной решетке разбиений. Тем не менее, результат Уитмена также доказывает, что не существует нетривиальный закон, который выполняется в решетке подгрупп каждой группы. То есть,

Теорема 1.3.1 (Уитмен [47]). Каждая решетка изоморфна подрешетке решетки подгрупп какой-то группы.

Подтверждение того, что L0 = L1, пришло только в конце 1970-х годов, когда Павел Пудлак и Джиры Тума опубликовали работу [35], в которой они доказывают, что любую конечную решетку можно вложить в конечное разбиение решетку, тем самым разрешив этот важный и давно открытый вопрос. Этот результат также дает следующий конечный аналог результата Уитмена:

Теорема 1.3.2 (Пудлак-Тума [35]). Любая конечная решетка изоморфна подрешетке подгруппы решетка некоторой конечной группы.

Если ограничиться дистрибутивными решетками, аналог ФЛРП относительно прост. К Роберту Дилворту уже в 1930-х годах было известно, что каждая конечная дистрибутивная решетка является конгруэнтная решетка конечной решетки.[3] (Действительно, если мы допускаем представления бесконечными алгебрами –

---

[3] Об этом упоминается в [7] без доказательства.

чего, как правило, в данной работе мы не делаем – тогда конгруэнтные решетки модулярных решеток уже учитывать все распределительные решетки. Это показано Э.Т. Шмидтом в [40] и расширено Ральфом. Фриз, который показывает в [15], что достаточно конечно порожденных модулярных решеток.)[4]

Решетка L называется сильно представимой, если всякий раз, когда L изоморфна остовной подрешетке[5] L0 Eq(X) для некоторого X, то существует алгебра X, . . . решетка конгруэнтности которой равна L0.

Теорема 1.3.3 (Берман [5], Квакенбуш и Волк [36]). Любая конечная дистрибутивная решетка является сильно представительный.

(Краткое доказательство этого результата мы даем в разделе 3.3.3.) Берман также доказывает, что если Ap — конечная частичная унарная алгебра с сильной конгруэнтной решеткой ConsAp, то существует конечная унарная алгебра A с Con A = ConsAp. Следовательно, по лемме 1.2.1 L2 = L3. Поскольку наше внимание сосредоточено главным образом на том, L0 = L3, мы не будем больше говорить о частичных алгебрах, заметим лишь, что результаты Пудлака Тума и Берман подразумевают, что L0 = L3 выполняется тогда и только тогда, когда выполняется L1 = L2 .

Далее упомянем еще один глубокий результат Пудлака и Тума, доказывающий существование конпредставления решетки Грюенса для большого класса решеток.

Теорема 1.3.4 (Пудлак и Тума [34]). Пусть L — конечная решетка такая, что и L, и ее сравнение решетки имеют одинаковое число соединяемых неприводимых элементов. Тогда L представима.

Обратите внимание, что конечные дистрибутивные решетки удовлетворяют предположению теоремы 1.3.4, так что это еще дает еще одно доказательство представимости таких решеток.

Теперь обратимся к решеткам подгрупп конечных групп и их связи с ФЛРП. Изучение решеток подгрупп имеет долгую историю, начиная с работы Рихарда Дедекинда [10] в 1877 году, в том числе Статья Ады Роттлендер [39] 1928 года, а затем многочисленные важные работы Рейнхольда. Баер, Эйстейн Оре, Кенкичи Ивасава, Леонид Ефимович Садовский, Мичио Судзуки, Джованни Захер, Марио Курцио, Федерико Менегаццо, Роланд Шмидт, Стюарт Стоунхьюер, Джорджио Бусетто и многие другие. Книга Роланда Шмидта [41] дает исчерпывающее изложение этой работы.

Предположим, что H — подгруппа группы G (обозначается HG). Под интервальной подрешеткой [H, G] будем понимать подрешетка Sub(G), заданная формулой:

[H, G] := {K | Гонконг},

---

[4] Оказывается, конечные дистрибутивные решетки представимы как конгруэнц-решетки других ограниченных классов. алгебр. Подробнее об этом мы поговорим ниже, а за более подробной информацией отсылаем читателя к [28].

[5] Под остовной подрешеткой ограниченной решетки L0 будем понимать подрешетку L L0 , имеющую одинаковые вершину и низ как Л0. То есть 1L = 1L0 и 0L = 0L0 .

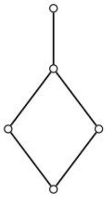
То есть [H, G] — это решетка подгрупп группы G, содержащая H.[6]

Определим следующие классы решеток:

- L4 = класс решеток, изоморфных интервалам в решетках подгрупп конечных групп;
- L5 = класс решеток, изоморфных решеткам подгрупп конечных групп.

Напомним, что L3 — класс всех решеток, изоморфных конгруэнц-решеткам конечных алгебр, — известен как класс представимых решеток. Мы полностью придерживаемся этой конвенции и, более того, мы назовем решёточную группу представимой, если она принадлежит L4.

Очевидно, L4 L5, поскольку Sub(G) сама является интервалом [1, G]. Тем более, что найти решетку несложно. то есть в L4 , но не в L5, поэтому включение строгое. Например, не существует группы G, для которой Sub(G) изоморфна решетке, показанной ниже.



Чтобы убедиться в этом, заметим, что если G имеет единственную максимальную подгруппу H, то существует g G \ H, и мы должно иметь g = G. Таким образом, если Sub(G) имеет единственный коатом, то G циклическая и решетки подгрупп циклических групп самодуальны, в отличие от решетки, показанной выше. Однако эта решетка принадлежит L4. Например, это фильтр выше H = C3 в решетке подгрупп G = C3 × (C3 C4).

На протяжении всей диссертации нам еще предстоит сказать об интервалах в решетках подгрупп. Возможно Самым полезным фактом для нашей работы является следующий:

Каждый интервал в решетке подгрупп является решеткой конгруэнций конечной алгебры. (1.3.1)

В частности, как мы объясним ниже в главе 4, если G/H, G — алгебра, состоящая из группы G, действующий на левые (правые) смежные классы подгруппы HG левым (правым) умножением, то Con G/H, G = [H, G]. Таким образом, мы видим, что L3 L4.

Выполняется ли обратное к (1.3.1) – и, следовательно, L3 = L4 – вопрос открытый. В другими словами, неизвестно, каждая ли конгруэнц-решетка конечной алгебры изоморфна

---

[6] Читатель может ожидать путаницы, возникающей из-за противоречия между нашими обозначениями и устоявшимися обозначениями для подгруппы коммутаторов: [H, G] := {hgh 1g 1 | h H, g G}, которым нам тоже придется воспользоваться. Однако мы обнаружили, что контекст всегда ясно дает понять, какое значение имеется в виду. В любом случае мы часто говорим об «интервале [H, G]» или «коммутаторе [H, G]».

интервал в решетке подгрупп конечной группы. Однако неожиданный и глубокий результат, связанный с этот вопрос был доказан в 1980 году Питером Палфи и Павлом Пудлаком. В [32] они доказывают

Теорема 1.3.5. Следующие утверждения эквивалентны:

(i) Любая конечная решетка изоморфна конгруэнц-решетке конечной алгебры.

(ii) Любая конечная решетка изоморфна конгруэнц-решетке конечного транзитивного G-множества.

Как мы увидим позже (теорема 4.1.2), утверждение (ii) эквивалентно

(ii)′ Любая конечная решетка изоморфна интервалу в решетке подгрупп конечной группы.

Важно отметить, что в теореме 1.3.5 не говорится, что L3 = L4. Скорее, там говорится, что L0 = L3 тогда и только тогда, когда L0 = L4. Более того, из этого результата следует, что если мы докажем существование решетки который не изоморфен интервалу в решетке подгрупп конечной группы, то мы решили ФЛРП .

Удивительно, что проблему об общих алгебрах можно свести к задаче о такой специальный класс алгебр – конечные транзитивные G-множества. Также удивительно, учитывая все, что мы знаем о конечные группы и их действия, заключается в том, что нам еще предстоит определить, верны ли эти утверждения. или ложь. Другими словами, для произвольной конечной решетки L неизвестно, должны ли существовать — конечная группа, имеющая эту решетку как интервал в своей решетке подгрупп.

Сделаем паузу на мгновение, чтобы рассмотреть вопрос L3 = L4 в ограниченном случае конечного размера. трибутивные решетки (которые, как мы знаем, сильно представимы). Силкок [42] и Палфи [28] доказывают, что каждая конечная дистрибутивная решетка является интервалом в решетке подгрупп некоторой конечной разрешимой группы. Основной результат сформулирован ниже в виде теоремы 1.3.7, и его можно объединить со следующими простыми утверждениями. лемма об обосновании иска.

Лемма 1.3.6. Если D = {(g, g) G × G | g G}, то интервал [D, G × G] изоморфен решетка нормальных подгрупп группы G.

Теорема 1.3.7. Любая конечная дистрибутивная решетка изоморфна решетке нормальных подгрупп группы конечная разрешимая группа.

Помимо упомянутых в этом кратком введении, многие другие результаты, связанные с FLRP, были доказаны. Некоторые из них не столь важны для нашей работы, а другие будут обсуждаться в следующем разделе. Подробности см. в главе 2. Более полный обзор ФЛРП с акцентом на теорию групп можно можно найти в статьях Палфи [29] и [30].

ГЛАВА 2

ОБЗОР КОНЕЧНОЙ РЕШЕТКИ ПРЕДСТАВИТЕЛЬСТВА

В этой главе мы даем краткий обзор различных известных методов представления заданной решетки. как решетка конгруэнций конечной алгебры или доказательство существования такого представления. Позже В главах мы опишем эти методы более подробно и покажем, как их применять. В частности, в В разделе 6.2 мы используем их вместе с некоторыми новыми методами, чтобы показать, что, за одним возможным исключением, каждая решетка, содержащая не более семи элементов, изоморфна конгруэнц-решетке конечного алгебра. На протяжении всей главы мы продолжаем использовать L3 для обозначения класса конечных решеток, которые изоморфны конгруэнц-решеткам конечных алгебр. Снова назовем решетки, принадлежащие L3 представимые решетки.

2.1. Свойства замыкания класса представимых решеток

В этом разделе рассматриваются свойства замыкания класса L3. Точнее, если O — операция, которая можно применить к решетке или совокупности решеток, мы говорим, что L3 замкнут относительно O, если O(K) L3 для всех K L3. Например, если S(K) = {все подрешетки решеток из K }, то это явно неизвестно, закрыт ли L3 под S, иначе FLRP был бы решен. (Четко, Eq(X) L3 для каждого конечного множества X – возьмем алгебру как множество X без операций. Затем Con X, = Eq(X). Итак, если бы L3 была замкнута относительно S, то L3 содержала бы все конечные решетки в силу результат Пудлака и Тума, упомянутых выше; то есть L0 = L1.)

Ниже приводится список известных свойств замыкания L3 и имена тех, кто первым (или самостоятельно) доказали их. Некоторые из этих результатов мы обсудим более подробно далее в этом разделе. Класс L3 решеток, изоморфных конгруэнц-решеткам конечных алгебр, замкнут относительно

1. двойственные решетки[1] (Ганс Курцвейл [23] и Раймунд Неттер [27], 1986),
2. интервальные подрешетки (следует из Курцвейла-Неттера),
3. прямые произведения (Джир'ы Тума [45], 1986),
4. порядковые суммы (Ральф Маккензи [25], 1984; Джон Сноу [43], 2000),

---

[1] Напомним, двойственная решетка — это просто решетка, перевернутая с ног на голову, т. е. решетка, полученная переворачиванием частичный порядок исходной решетки.

5. параллельные суммы (Джон Сноу [43], 2000),

6. некоторые подрешетки решеток в L3 , а именно те, которые получаются объединением фильтра и идеал решетки в L3 (Джон Сноу [43], 2000).

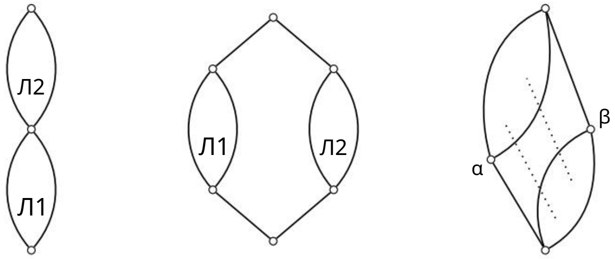


Рисунок 2.1: Порядковая (слева) и параллельная (средняя) сумма решеток L1 и L2; подрешетка и идеал β (справа). фильтра α полученный объединением

Замечания.

1. Первый результат гласит, что если L представима, то представима и двойственная к L.

2. Из п. 1 следует, что любая интервальная подрешетка представимой решетки представима. Действительно, пусть [α, β] := {θ L | α θ β} — интервал представимой решетки L = Con A. Тогда [α, 1A] = Con A/α. По 1. двойственное к ℓ := [α, 1A] представимо. Теперь возьмем фильтр выше β' в ℓ' (где β' есть образ β при дуализации), и мы получаем представление решетка, изоморфная двойственной к [α, β]. Примените 1. еще раз, и мы получим желаемое представление. из [α, β].

3. Разумеется, под прямыми произведениями мы подразумеваем конечные прямые произведения.

4.-5. Под порядковой (параллельной) суммой двух решеток L1, L2 будем понимать решетку слева (посередине) рисунка 2.1.

6. Свойство, указанное в пункте 6, очень полезно, и мы обсудим его подробнее в разделе 2.3 ниже, где мы представить очень краткое доказательство этого результата. Он снова появится в разделе 6, когда мы докажем существование представлений малых решеток.

Вопрос о том, замкнут ли класс L3 относительно гомоморфных образов, остается открытым.

2.2 Двойственные решетки: теорема Курцвейла и Неттера

Как упоминалось выше, класс L3 – решетки, изоморфные конгруэнц-решеткам конечных алгебр – замкнуто относительно дуализации. То есть, если L представимо, то и двойственное к L представимо. Это было доказано. в 1986 г. Раймундом Неттером [27], обобщающим идею своего советника Ганса Курцвейла [23]. Хотя Статья Курцвейла действительно появилась (на немецком языке), неясно, была ли когда-либо опубликована статья Неттера. В этом разделе мы представляем доказательство их результата. Аргументация требует изрядной техники, но это хорошая идея, и она того стоит.[2]

Если G — группа, а X — множество, то множество {f | X G} функций из X в G обозначается через ГX. Это группа с бинарной операцией (f, g) f ·g, где для каждого x X (f ·g)(x) = f(x)g(x) есть просто умножение в группе G. Идентичность группы GX — это, конечно, постоянное отображение f(x) = 1G для всех x X.

Пусть X — конечное полностью упорядоченное множество с отношением порядка , и рассмотрим множество XX функций отображение X в себя. Подмножество XX, состоящее из функций, которые являются одновременно идемпотентными и уменьшение[3] будет обозначаться ID(X). То есть,

$$ID(X) = \{f \quad X^{\text{Икс}} \mid ж^2 = f \text{ и } xf(x)\ x\}.$$

Определим частичный порядок на множестве ID(X) формулой

$$ж \quad г \quad \text{кер } f \text{ кер } г, \tag{2.2.1}$$

где ker f = {(x, y) | f(x) = f(y)}. Легко видеть, что f g выполняется тогда и только тогда, когда gf = g. Более того, при таком частичном упорядочении ID(X) представляет собой решетку, изоморфную Eq(X) (т.е. отображение Θ: Eq(X) ID(X), заданное формулой Θ(α) = fα, где fα(x) = min{y X | (x, y) α}.)

Предположим, S — конечная неабелева простая группа, и рассмотрим S n, прямую степень n копий группы. S. Элемент Sn можно рассматривать как карту множества n = {0, 1, . . . , n 1} в S. Таким образом, если x = (x0, x1, . . ., xn 1) S n , тогда под ker x мы понимаем отношение (i, j) ker x тогда и только тогда, когда xi = xj . Множество постоянных отображений представляет собой подгруппу D < Sn , иногда называемая диагональной подгруппой; то есть, D знак равно {(s, s, . . . , s) | s S} S n.

---

[2] О главном аргументе, использованном в доказательстве, мы узнали из слайдов серии из трех лекций, прочитанных Питером Палфи. в 2009 году [31]. Палфи отдает должное Курцвейлу и Неттеру за аргументацию.

[3] Когда мы говорим, что отображение f убывает, мы имеем в виду f(x) x для всех x. (Мы не имеем в виду, что xy подразумевает f(y) x.)

Для каждого f ID(n) определим

$$K_f = \{(x_{f(0)}, x_{f(1)}, ..., x_{f(n \quad 1)}) \mid x_{f(i)} \quad S, i = 0, 1, . . . , n \quad 1\}.$$

Тогда D Kf S n и Kf — множество отображений Kf = {xf S n | x € S n}; то есть композиции задано отображение f n n, за которым следует любой x Sn . Таким образом, Kf = {y S n | кер ф кер y}. Например, если f = (0, 0, 2, 3, 2) ID(5), тогда ker f = |0, 1|2, 4|3| и Kf — подгруппа всех (y0, y1, ..., y4) S 5

имея y0 = y1 и y2 = y4. То есть Kf = {(x0, x0, x2, x3, x2) | x € S 5}.

Лемма 2.2.1. Отображение f Kf является двойственным решеточным изоморфизмом уравнения Eq(n) на интервал подрешетка [D, Sn] Sub(S n).

Доказательство. Это ясно, поскольку ID(n) упорядочен согласно (2.2.1), и мы имеем f h тогда и только тогда, когда Kh = {y C п | ker h ker y} {y S n | кер ж кер y} = Kf . ☐

Теорема 2.2.2 (Курцвейл [23], Неттер [27]). Если конечная решетка L представима (как сравнение решетка конечной алгебры), то и двойственная решетка L ' .

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что L конкретно представляется как L = Con n, F. По лемме 1.2.1 далее можно считать, что F состоит из унарных операций: F n n. Как указано выше, пусть S — неабелева простая группа и D — диагональная подгруппа в Sn . Тогда унарный алгебры S n/D, Sn — транзитивное Sn -множество, которое (по теореме 4.1.2 ниже) имеет решетку конгруэнтности изоморфен интервалу [D, Sn]. По лемме 2.2.1 это двойственная решетка Eq(n). То есть, Con S n/D, Sn = (Eq(n))′ .

Теперь каждая операция φ F порождает операцию над Sn по композиции:

$$\hat{\varphi}(s) = \hat{\varphi}(s_0, s_1 ..., s_{n \quad 1}) = (s_{\varphi(0)}, s_{\varphi(1)} ..., s_{\varphi(n \quad 1)}).$$

Таким образом, φ индуцирует операцию на S n/D, поскольку для d = (d, d,..., d) D и s S n у нас есть sd = (s0d, s1d,..., sn 1d) и ˆφ(sd) = (sφ(0)d, sφ(1)d, ..., sφ(n 1)d) = ˆφ(s)d, поэтому ˆφ(sD) = ˆφ(s)D. Наконец, добавим набор операций Fˆ = {φˆ | ? _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ Fˆ тогда и только тогда, когда оно соответствует разбиению на n, инвариантному относительно F.

☐

2.3 Объединение фильтра и идеала

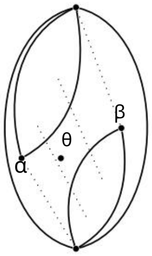
Лемма в этом разделе была первоначально доказана Джоном Сноу с использованием примитивных положительных формул. Поскольку он предоставляет такой полезный инструмент для доказательства того, что некоторые конечные решетки представимы в виде конгруэнтных решеток мы даем собственное прямое доказательство следующего результата. В главе 6 мы используем это лемма, доказывающая существование представлений ряда малых решеток.

Прежде чем сформулировать лемму, нам понадобится пара определений. (О них речь пойдет подробнее подробности в разделе 3.2.) Учитывая соотношение θ X × X, мы говорим, что отображение f : Xn X соблюдает θ и будем писать f(θ) θ при условии, что из (xi , yi) θ следует (f(x1, ..., xn), f(y1, ..., yn)) θ. Для набора L Eq(X) отношений эквивалентности определим

λ(L) = {f XX : (θ L) f(θ) θ},

которое представляет собой набор всех унарных отображений на X, которые соблюдают все отношения в L.

Лемма 2.3.1. Пусть X — конечное множество. Если L Eq(X) представима и L0 L — подрешетка с Вселенная α β где α = {x L | α x} и β = {x L | x β} для некоторых α, β L, то L0 является представительным.



Л0 Л

Доказательство. Предположим, что L0 2, в противном случае результат тривиален. Поскольку L Eq(X) представимо, мы имеем L = ConX, λ(L) (см. раздел 3.2). Возьмем произвольное θ L \ L0. Поскольку θ /ε α , Есть пара (a, b) α \ θ. Поскольку θ /ε β , существует пара (u, v) θ \ β. Определим h XX следующим образом:

ч(x) = а, x € и/β,
б, в противном случае.

Тогда βker h = (u/β) 2 ((u/β) c) ^{2} , где (u/β) c обозначает дополнение класса β, содержащее ты. Следовательно, h соблюдает каждое γ β. Более того, (a, b) γ для всех γ α, поэтому h соблюдает все γ выше α. Это доказывает, что h λ(L0). Теперь θ было произвольным, поэтому мы доказали, что для любого θ L \ L0 существует функция из λ(L0) , которая уважает каждое γ α β = L0, но нарушает θ. Наконец, поскольку L0 L, имеем λ(L) λ(L0). Объединив эти наблюдения, мы видим, что каждый θ Eq(X) \ L0 нарушается некоторой функцией из λ(L0). Следовательно, L0 = Con X, λ(L0). □

2.4 Порядковые суммы

Следующая теорема является следствием конструкции произведения сдвига Маккензи [25].

Теорема 2.4.1. Если Л1, . . . , Ln L3 — совокупность представимых решеток, то порядковая сумма и присоединенная порядковая сумма, показанная на рис. 2.4, представимы.

Более прямое доказательство теоремы 2.4.1 следует аргументам Джона Сноу в [43]. Как Как отмечалось выше, Джиры Тума доказал, что класс конечных представимых решеток замкнут относительно прямого продукты. Таким образом, если L1 и L2 представимы, то представимы и L1 × L2. Теперь заметим, что примыкающий порядковая сумма L1 и L2 является объединением, α β , фильтра и идеала в решетке L1 × L2, где α знак равно β знак равно 1L1 × 0L2 . Следовательно, по лемме 2.3.1 присоединенная порядковая сумма представима. Тривиальный Аргумент индукции доказывает результат для присоединенных порядковых сумм n решеток. Тот же результат для порядковые суммы (рис. 2.4 слева) следуют, поскольку двухэлементная решетка очевидно представима.

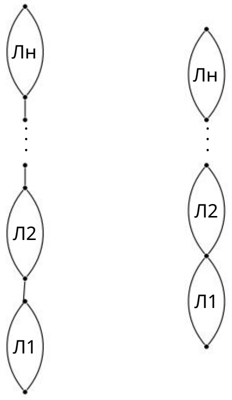


Рисунок 2.2: Порядковая сумма (слева) и присоединенная порядковая сумма (справа) решеток L1, . . . , Лн.

Часть II

Конечные решетчатые представления.

ГЛАВА 3
БЕТОННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

В этой главе мы представляем стратегию, которая оказалась очень полезной для демонстрации того, что данное решетка представима как конгруэнц-решетка конечной алгебры. Мы называем это методом замыкания, и он стал особенно полезен с появлением мощных компьютеров, способных искать такие представления. Здесь, как и выше, Eq(X) обозначает решетку отношений эквивалентности на X. Иногда мы злоупотребляем обозначениями и понимаем под Eq(X) решетку разбиений множества X. Этого никогда не было. вызвало проблемы, поскольку эти две решетки изоморфны.

3.1 Конкретные и абстрактные представления

Как объясняет Бьярни Йонссон в [21], существует два типа задач представления конгруэнтности. решетки, конкретное и абстрактное. Проблема конкретного представления спрашивает, является ли конкретное семейство отношений эквивалентности на множестве A равно Con A для некоторой алгебры A с универсумом A. Абстрактная проблема представления спрашивает, изоморфна ли данная решетка Con A для некоторых алгебра A.

Эти две проблемы тесно связаны между собой, а после публикации в 1980 г. из [35], в которой Павел Пудлак и Жиры Тума доказывают, что любую конечную решетку можно вложить как опорная подрешетка[1] решетки Eq(X) отношений эквивалентности на конечном множестве X. Учитывая это В результате мы видим, что даже если наша цель — решить проблему абстрактного представления для некоторых (абстрактных) решетку L, то мы можем вложить L в уравнение (X) при L = L0 Eq(X) для некоторого конечного множества X, а затем попробовать решить конкретную проблему представления L0.

Здесь необходимо внести пояснение. Термин «представительство» стал несколько злоупотреблять литература по проблеме представления на конечной решетке. С одной стороны, для конечной решетки L, если существует конечная алгебра A такая, что L = Con A, то L называется представимой решеткой. На с другой стороны, если для подрешетки L0 Eq(X) L0 = L, то L0 иногда называют конкретной представление решетки L (независимо от того, является ли она конгруэнтной решеткой алгебры). Ниже мы определит понятие закрытого конкретного представления, и если у нас есть этот особый вид конкретного представления представление данной решетки, то эта решетка действительно представима в первом смысле.

---

[1] Напомним, под остовной подрешеткой ограниченной решетки L0 будем понимать подрешетку L L0 , имеющую ту же вершину и внизу как L0. То есть 1L = 1L0 и 0L = 0L0 .

Как мы увидим ниже, существует множество примеров, в которых то или иное конкретное представление L0 Eq(X) группы L не является конгруэнц-решеткой конечной алгебры. (На самом деле мы опишем общие ситуациях, в которых мы можем гарантировать, что не существует нетривиальных[2] операций, которые соблюдают отношения эквивалентности L0.) Это не означает, что L /ε L3. Это может просто означать, что L0 не является «правильное» конкретное представление L, и, возможно, мы сможем найти какое-то другое уравнение L = L1 Eq(X), такое что L1 = Con X, λ(L1).

3.2 Метод закрытия

Идея, описанная в этом разделе, впервые появилась в книге «Темы универсальной алгебры» [21], стр. 174–174. 175, где Йонссон утверждает, что «эти или родственные результаты были открыты независимо по крайней мере тремя различные вечеринки летом и осенью 1970 года: Стэнли Беррис, Генри Крапо, Алан Дэй, Деннис Хиггс и Уоррен Николс в Университете Ватерлоо, авторы Р. Квакенбуш и Б. Волк. в Университете Манитобы и Б. Йонссоном в Университете Вандербильта».

Пусть XX обозначает множество всех (унарных) отображений множества X в себя, и пусть Eq(X) обозначает решетка отношений эквивалентности на множестве X. Если θ Eq(X) и h XX, мы пишем h(θ) θ и говорим что «h соблюдает θ» тогда и только тогда, когда для всех (x, y) X2 (x, y) θ влечет (h(x), h(y)) θ. Если h(θ) θ, мы иногда говорим, что «h нарушает θ».

Для L Eq(X) определим

$$\lambda(L) = \{h \quad X^{Икс} : (\quad \theta \quad L)\ h(\theta) \quad \theta\}.$$

Для H XX определим

$$\rho(H) = \{\theta \quad Eq(X) \mid (\quad h \quad H)\ h(\theta) \quad \theta\}.$$

Отображение ρλ является оператором замыкания на Sub[Eq(X)]. То есть ρλ

- идемпотент:[3] ρλρλ = ρλ;
- обширный: L ρλ(L) для любого L Eq(X);
- сохранение порядка: ρλ(L) ρλ(L0), если L L0.

Учитывая L Eq(X), если ρλ(L) = L, то мы говорим, что L является замкнутой подрешеткой уравнения Eq(X), и в этом случае мы

---

[2] Под нетривиальной функцией будем понимать функцию, не являющуюся постоянной и не тождественной.

[3] Действительно, ρλρ = ρ и λρλ = λ.

явно есть

$$L = \mathrm{Con}\ X, \lambda(L).$$

Это предполагает следующую стратегию решения проблемы представления для заданного абстрактного конечного решетка L: найти конкретное представление L = L0 Eq(X), вычислить λ(L0), вычислить ρλ(L0), и определим, является ли ρλ(L0) = L0. Если да, то мы решили проблему абстрактного представления. для L, найдя замкнутое конкретное представление или просто замкнутое представление L0. Мы называем эта стратегия – метод закрытия.

Сформулируем теперь без доказательства хорошо известную теорему, показывающую, что конечная решетка представляет Задача формулировки может быть сформулирована в терминах замкнутых конкретных представлений (см. [21]).

Теорема 3.2.1. Если L Eq(X), то L = Con A для некоторой алгебры A = X, F тогда и только тогда, когда L закрыто.

В остальных разделах этой главы мы рассмотрим различные аспекты метода замыкания. и доказать некоторые результаты об этом. Позже, в разделе 6.2, мы применим его к задаче нахождения замкнутые представления всех решеток малого порядка. Однако прежде чем продолжить, мы введем немного другая настройка, чем та, что была представлена выше, и которую мы нашли особенно полезной для реализация метода замыкания на компьютере. Вместо рассмотрения множества эквивалентностей отношений на конечном множестве, мы работаем с множеством идемпотентных убывающих отображений. Они были представлены выше в разделе 2.2, но для удобства мы кратко рассмотрим определения здесь.

Для полностью упорядоченного множества X пусть множество ID(X) = {f XX : f^2 = f и f(x) x} частично упорядочен по следующим образом:

$$ж \quad г \quad кер\ f\ кер\ г.$$

Как отмечалось выше, это превращает ID(X) в решетку, изоморфную Eq(X). Определим отношение R на XX × ID(X) следующим образом:

$$(h, f) \quad R \quad (\quad (x, y) \quad \ker f)\ (h(x), h(y)) \quad \ker f.$$

Если h R f, мы говорим, что h соблюдает f.

Пусть F = P(ID(X)) и H = P(XX) частично упорядочены путем включения множества, и определим отображает $\lambda : F \quad H$ и $\rho : H \quad F$ следующим образом:

$$\lambda(F) = \{h \quad XX : \quad f \quad F, hR f\} (F \quad F)$$

$$\rho(H) = \{f \quad ID(X) : \quad h \quad H, h R f\} (H \quad H)$$

Пара (λ, ρ) определяет соответствие Галуа между ID(X) и XX. То есть λ и ρ являются отображения антитонов такие, что $\lambda\rho$ idH и $\rho\lambda$ idF . В частности, для любого множества F F имеем F $\rho\lambda(F)$. Все эти утверждения являются тривиальными проверками, и из них следует несколько простых следствий:

1. $\rho\lambda\rho = \rho$ и $\lambda\rho\lambda = \lambda$,
2. $\rho\lambda$ и $\lambda\rho$ идемпотентны.

Поскольку отображение $\rho\lambda$ из F в себя идемпотентно, обширно и сохраняет порядок, оно является замыканием оператор на F, и мы говорим, что множество F F замкнуто тогда и только тогда, когда $\rho\lambda(F) = F$. Эквивалентно, F замкнуто тогда и только тогда, когда $F = \rho(H)$ для некоторого H H .

3.3 Суперплохие представления

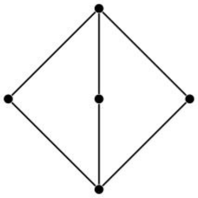
В этом разделе мы опишем то, что в некотором смысле является наихудшим видом конкретного представления. Учитывая абстрактной конечной решетке L может случиться так, что при вычислении замыкания конкретного представления Если L = L0 Eq(X), мы находим, что $\rho\lambda(L0)$ — это все уравнение Eq(X). Такой L0 назовем плотной подрешеткой уравнения (X) или, говоря в просторечии, суперплохого представления L.

В более общем смысле, если A и B являются подмножествами ID(X), мы говорим, что A плотно в B тогда и только тогда, когда $\rho\lambda(A)$ B. Если L — конечная решетка и существует вложение L = L0 Eq(X) такое, что $\rho\lambda(L0) = Eq(X)$, будем говорить, что L плотно вкладывается в Eq(X).

3.3.1 Плотность

Один из первых вопросов, которые мы задали, касался 5-элементной модульной решетки, обозначаемой M3 (иногда называется бриллиантом; см. рисунок 3.3.1). Мы спросили, для каких множеств X существует решетка эквивалентности отношения на X содержат плотную подрешетку M3 . Ответ даёт

Предложение 3.3.1. Решетка Eq(X) содержит собственную плотную подрешетку M3 тогда и только тогда, когда |X| 5.



M3

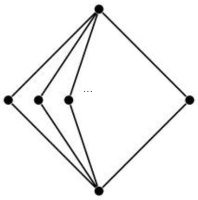
Рисунок 3.1: 5-элементная нераспределительная решетка M3.

По сути, это говорит о том, что, когда |X| 5 решетка эквивалентностей на X содержит оболочку алмаз L, обладающий тем свойством, что каждая нетривиальная операция в XX нарушает некоторую эквивалентность отношение во вселенной L из L. Таким образом, замыкание ρλ(L) представляет собой все уравнение (X). Джон Сноу доказал это для |X| странный. Используя ту же технику (и некоторые довольно утомительные вычисления), мы убедились, что результат справедлив для |X| даже также.

Прежде чем перейти к следующему результату, заметим, что необходимая часть предыдущего утверждения равна очевидный. Ибо, если |X| 2, то уравнение (X) не имеет подрешетки M3 . Если |X| = 3, то Eq(X) само является M3. Это можно проверить непосредственно (путем вычисления всех возможностей), что при |X| = 4, уравнение(X) имеет один замкнутый Подрешетка M3 и пять подрешеток M3 , которые не являются ни замкнутыми, ни плотными.

Для простоты обозначений пусть Eq(n) обозначает множество отношений эквивалентности на n-элементном множестве, а пусть Mn обозначает (n + 2)-элементную решетку высоты два (рис. 3.2).

Рисунок 3.2: (n + 2)-элементная решетка высотой 2, Mn.



Мин.

Предложение 3.3.2. При n = 1 уравнение (2n + 1) содержит плотное Mn+2.

Таким образом, каждое Mn может быть плотно вложено в уравнение (X) для некоторого конечного множества X.

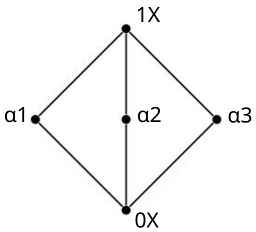
Доказательство. (эскиз) Начнем с примера Сноу плотной подрешетки M3 уравнения (X), где X =

{0, 1, 2, 3, 4}. Определите три раздела X,

$$\alpha 1 = |0, 1 |2, 3 |4 |, \alpha 2 = |0 |1, 2 |3, 4 |, \alpha 3 = |0, 2, 4 |1, 3 |,$$

пусть L = {0X, α1, α2, α3, 1X} и пусть L = L, , обозначают подрешетку уравнения (X), порожденную три эквивалентности α1, α2, α3 (рис. 3.3).

Рисунок 3.3: Решетка L = {0X, α1, α2, α3, 1X}; , .



Очевидно, L = M3, и нетрудно показать, что единственные унарные отображения, соблюдающие все эквивалентности в L — константы и единица. Другими словами, множество λ(L) XX состоит из шести тривиальных карты XX в. Следовательно, ρλ(L) = Eq(X).

Теперь заметим, что если мы присоединим эквивалентность $\alpha 4 = |0, 3 |1, 4 |2 |$ к L мы получаем M4, который мы обозначим через L(α4). Очевидно, что λ(L) λ(L(α4)), поскольку добавление дополнительных эквивалентностей лишь сужает множество функции, соблюдающие все эквивалентности. Следовательно, Eq(X) = ρλ(L) ρλ(L(α4)), поэтому L(α4) — плотная Подрешетка M4 уравнения (5).

Аналогично, полагая X = {0, 1, . . . , 6} и

$$\alpha 1 = |0, 1 |2, 3 |4, 5 |6 |, \alpha 2 = |0 |1, 2 |3, 4 |5, 6 |, \alpha 3 = |0, 2, 4, 6 |1, 3 , 5 |,$$

подрешетка L = {0X, α1, α2, α3, 1X}, , является плотной M3 в уравнении (X). Примыкание перегородок

$$\alpha 4 = |0, 3 |2, 5 |1, 6 |4 | \text{ и } \alpha 5 = |0, 5 |1, 4 |3, 6 |2 |$$

приводит к плотному M5 в уравнении (X). Действуя индуктивно, когда $|X| = 2n+1$ имеется n+1 разделов вида $\alpha i = |xi0 |xi1 , xi2 | \cdots |xi2n \quad 1 , xi2n |$ и один из вида $\alpha n+2 = |evens |odds |$, с следующие свойства:

1. α_i $\alpha_j = 0_X$,

2. α_i $\alpha_j = 1_X$,

3. решетка, порожденная α_{n+2} и хотя бы двумя другими α_i , плотна в уравнении (X).

□

3.3.2 Неплотность

Результаты этого раздела дают достаточные условия, при которых решетка не может быть плотно вложенной. в решетке отношений эквивалентности. Эти результаты требуют некоторой стандартной терминологии, которой мы располагаем. еще не представлено, поэтому мы начнем раздел с этих предварительных сведений. Как всегда, мы будем иметь дело только с конечными решетками L = L, , , и мы используем 0_L = L для обозначения нижней части L и 1_L = L для обозначения обозначим верх.

Если L = L, , — решетка, непустое подмножество I L называется идеалом в L, если

(i) I — нижнее множество: если α I и β α, то β I;

(ii) I замкнуто относительно конечных соединений: α, β I влечет α β I.

Фильтр решетки определяется двойственным образом как непустое множество, замкнутое относительно конечных пересечений. Ан идеал или фильтр называется собственным, если он не равен всему L. Наименьший идеал, содержащий данный элемент α является главным идеалом, а α называется главным элементом или генератором идеала. ситуации. Главный идеал, порожденный α, определяется и обозначается α = {θ L | θ α}. в этой Аналогично, = {θ L | θ α} — главный фильтр, порожденный α. Идеал, который я назвал простым идеалом при условии, что из α β I следует α I или β I для всех α, β L. Эквивалентно, простой идеал — это идеал теоретико-множественное дополнение которого является фильтром. Поскольку мы требуем, чтобы идеалы (фильтры) были непустыми, каждый простой фильтр (идеальный) обязательно является правильным. Элемент называется встречным простым, если он является генератором главный первичный идеал. Эквивалентно, α L \ {1_L} является простым, если для всех β, γ L выполнено β γ α подразумевает β α или γ α. Соединение простое определяется двояко.

Лемма 3.3.3. Предположим, что L = L, , — полная 0, 1-решетка. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) Существует элемент α L \ {0_L} такой, что {γ L : γ α} < 1_L.

(ii) Существует элемент α L \ {1_L} такой, что {γ L : γ α} > 0_L.

(iii) L является объединением собственного главного идеала и собственного главного фильтра.

Доказательство. (i) (ii): предположим, что α L \ {0L} таково, что элемент α ' = {γ : γ α} строго ниже 1L и рассмотрим {γ : γ α ʼ}. Если β α ', тогда β /ε {γ : γ α}, поэтому β α. Поэтому, {γ : γ α ʼ} α > 0L. Таким образом, α ' L \ {1L} таково, что {γ : γ α ʼ} > 0L , поэтому (ii) выполнено.

(iii). (ii) (iii): пусть α < 1L таково, что β = {γ : γ α} > 0L. Тогда L = α β удовлетворяет что L = α β для некоторых α > 0L, β < 1L. Тогда {γ L : γ α} β (iii) (i): предположим, ; т.е. γ α γ β. Следовательно, {γ : γ α} β < 1L, поэтому (i) выполнено. $\square$

Лемма 3.3.4. Если L 2 — подрешетка уравнения (X), удовлетворяющая условиям леммы 3.3.3, то λ(L) содержит нетривиальную унарную функцию.

Доказательство. Предположим, что L 2 — подрешетка уравнения (X), удовлетворяющая условию (i) леммы. Мы должны покажите, что существует нетривиальный (т. е. непостоянный и нееденичный) h XX , который соответствует каждому θ L. По условию (i) существует элемент α L \ {0L} такой, что β = {γ L : γ α} находится строго ниже

1л. Поскольку α > 0L, существует пара (u, v) различных элементов X, связанных α. Поскольку β < 1L, существует класс β-эквивалентности B X. Определим h XX следующим образом:

$$ч(x) = \begin{array}{ll} ты, & x € B, \\ в, & x /e Б. \end{array} \qquad (3.3.1)$$

Тогда h не является постоянным, поскольку = B = X; h не тождественно, поскольку L 2; ч уважает все выше α и все, что ниже β, и, следовательно, h λ(α β) = λ(L). $\square$

Теорема 3.3.5. Если L 2 — решетка, удовлетворяющая условиям леммы 3.3.3, и X — любое множество, тогда L не может быть плотно вложено в уравнение (X).

Доказательство. Теорема утверждает, что для любого вложения L = L0 Eq(X) такой решетки L0 не является плотным в уравнении (X); т.е. ρλ(L0) Eq(X). Чтобы доказать, что это следует из леммы 3.3.4, нам необходимо проверить справедливость следующее утверждение: если 2 L Eq(X) и существует нетривиальная унарная функция h λ(L), то ρλ(L) Eq(X).

Если h XX — любая нетривиальная унарная функция, то существуют элементы {x, y, u, v} из X такие, что x = y и h(x) = u = v = h(y). Мы можем предположить, что X имеет как минимум три различных элемента, поскольку L 2. Следует рассмотреть два случая. В первом случае h просто меняет местами x и y. В этом случае x = v и y = u и h(v) = u, h(u) = v. Должен существовать третий элемент X, скажем, w /ε {u, v}. Если h(w) = u, тогда h нарушает любую эквивалентность, которая помещает v, w в один и тот же блок и помещает u и h(w) в отдельные блоки. Если h(w) = v, то h нарушает любую эквивалентность, которая помещает u, w в один и тот же блок, а v и h(w) в отдельных блоках. Во втором рассматриваемом случае {x, u, v} — это три различных элемента. В этом В этом случае h нарушает каждое соотношение, которое помещает x, y в один и тот же блок, а u и v — в отдельные блоки.

Таким образом, мы доказали, что ρλ(L) Eq(X) всякий раз, когда λ(L) содержит нетривиальную унарную функцию.

□

Следствие 3.3.6. Если L 2 — конечная решетка с простым элементом и X — любое множество, то L не может быть плотно вложено в уравнение (X).

Замечание. Тот же результат верен, если мы предположим, что решетка имеет простой элемент соединения.

Доказательство. Из определения Meet Prime ясно, что решетка, удовлетворяющая условиям следствие также удовлетворяет условиям леммы 3.3.3, поэтому результат следует из теоремы 3.3.5. □

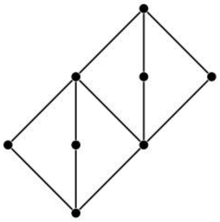
Решетка называется встречно-полураспределительной, если она удовлетворяет закону встречи-полураспределения:

SD : α β = α γ α (β γ) = α β.

Следствие 3.3.7. Если L 2 — конечная встречно-полудистрибутивная решетка и X — любое множество, то L не может быть плотно вложено в уравнение (X).

Доказательство. Мы доказываем, что каждая конечная встреча-полудистрибутивная решетка L содержит встречный простой элемент. Тогда результат будет следовать из следствия 3.3.6. Поскольку L конечна, существует атом α L. Если α α — единственный атом, тогда α тривиально просто. Предположим, что β γ . Тогда (β γ) α = α, и β α α влечет β α {0L, α}. Аналогично для γ. Если оба β α = 0L = γ α, то из SD следует (β γ) α = 0L, противоречие. □

Обратное следствие 3.3.6 неверно. То есть существует конечная решетка L 2, не имеющая пересечений. простой элемент, который не может быть плотно вложен в некоторое уравнение (X). Решетка M3,3, показанная ниже, представляет собой пример. Он не имеет встречающегося простого элемента, но удовлетворяет условиям леммы 3.3.3. Таким образом, по теореме 3.3.5 M3,3 не плотно вложима.



M3,3

Рисунок 3.4: Решетка M3,3.

3.3.3 Дистрибутивные решетки

Решетка L называется сильно представимой в виде конгруэнц-решетки, если L = L0 Eq(X) для некоторого X, то существует алгебра, основанная на X, решетка конгруэнтности которой равна L0.

Теорема 3.3.8 (Берман [5], Квакенбуш и Волк [36]). Любая конечная дистрибутивная решетка является сильно представительный.

Примечание. Согласно приведенной выше теореме 3.2.1 результат Бермана, Квакенбуша и Волка гласит, что если L конечная дистрибутивная решетка, то любое вложение L = L0 Eq(X) замкнуто. Следующее доказательство лишь немного короче оригинала в [36], а методы аналогичны.

Доказательство. Без ограничения общности предположим, что L Eq(X). Зафиксируем θ Eq(X) \ L и определим θ = {γ Л | γ θ} и θ = {γ L | γ θ}. Пусть α — неприводимое в L объединение ниже θ , а не ниже θ . Обратите внимание, что α не ниже θ. Пусть β = {γ L | γα}. Если бы β было выше θ, то β было бы выше θ^*, и поэтому β будет выше α. Но α — простое число, поэтому β не выше θ.

Выберем (u, v) α \ θ и заметим, что u = v. Выберем (x, y) θ \ β и заметим, что x = y. Пусть Б будет β-блок y и определим h XX , как в (3.3.1). Тогда ясно, что h нарушает θ, h соблюдает все элементы множеств α = {γ L : α γ} и β β = {γ L : γ β}, и L = α . Поскольку θ было произвольный элемент из Eq(X) \ L, мы можем построить такой h = hθ для каждого θ Eq(X) \ L. Пусть H = {hθ : θ Eq(X) \ L} и пусть A — алгебра X, H . Тогда L = Con(A). □

3.4 Выводы и открытые вопросы

JB Nation обнаружила примеры плотно расположенных двукрылых пятиугольников, ни один из которых не решетки плотно вкраплены. Затем Джон Сноу спросил, являются ли какие-либо из подрешеток закрытыми вложениями.

В общем, мы могли бы задать следующий вопрос: существуют ли замкнутые подрешетки плотных вложений?

Еще один вопрос, на который мы не ответили, — верно ли обратное утверждение теоремы 3.3.5, но это кажется маловероятным. Скорее, мы ожидаем, что существует конечная решетка, которая не является ни плотно вложимой, ни ни объединение собственного главного идеала и собственного главного фильтра.

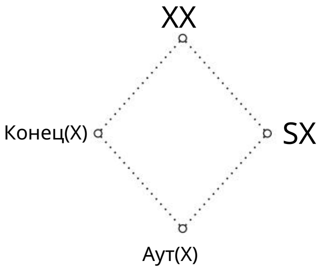
Наконец, отметим, что даже если ограничиться одним из меньших классов конечных решеток упомянутые выше – удовлетворяющие условиям леммы 3.3.3 или следствия 3.3.6, либо конечные встречаются полудистрибутивные решетки – пока неизвестно, представима ли каждая решетка этого класса как решетка конгруэнций конечной алгебры.

ГЛАВА 4

КОНГРУЕНЦИОННЫЕ РЕШЕТКИ ГРУППОВЫХ ДЕЙСТВИЙ

Пусть X — конечное множество, и рассмотрим множество XX всех отображений X в себя, которое, будучи наделено с композицией отображений и тождественным отображением образует моноид XX, , idX. Субмоноид SX всех биективных отображений в XX является группой, симметричной группой на X. Когда базовый набор Более сложно или для большей выразительности мы обозначаем симметрическую группу на X через Sym(X). Когда базовый набор не важен, мы обычно пишем Sn для обозначения симметричной группы на n-элементе набор.

Если мы определили некоторое множество F основных операций над X, так что X = X, F — алгебра, тогда два других важных субмоноида XX — это End(X), набор отображений в XX , которые учитывают все операции в F и Aut(X) — набор биективных отображений в XX , которые учитывают все операции в F. очевидно из определения, что Aut(X) = SX End(X) и Aut(X) является субмоноидом End(X) и подгруппа SX. Эти четыре фундаментальных моноида, связанные с алгеброй X, и их относительный порядок включения показан на диаграмме ниже.



Для конечной группы G и алгебры X = X, F представлением G на X является группа гомоморфизм из G в Aut(X). То есть представление G — это отображение φ: G Aut(X) что удовлетворяет условию φ(g1g2) = φ(g1) φ(g2), где (как и выше) обозначает композицию отображений в Aut(X).

4.1. Транзитивные G-множества

Из сказанного выше мы видим, что представление определяет действие группы G на множестве X следующим образом: gx¯ = φ(g)(x). Если G¯ = φ[G] Aut(X) обозначает образ G относительно φ, мы называем алгебру X, G¯ a G-комплект.[1] Действие называется транзитивным, если для каждой пары x, y X существует такой g G, что ¯gx = y.

---

[1] В более общем смысле G-множество иногда определяют как пару (X, φ), где φ — гомоморфизм группы в симметрическую группу SX, см., например, [44].

Представление φ называется точным, если оно является мономорфизмом, и в этом случае G изоморфно ее образ под φ, который является подгруппой Aut(X). В этом случае мы также говорим, что группа действует честно, и назовем это группой перестановок. Группа, действующая транзитивно на некотором множестве, называется транзитивная группа. Однако без указания множества этот термин теряет смысл, поскольку каждая группа действует транзитивно на одних множествах и нетранзитивно на других. Представление φ называется транзитивным, если результирующее действие транзитивно. Наконец, мы определяем степень действия группы на множестве X как мощность X.

Когда говорят о представлении некоторого объекта, почти всегда имеют в виду два особых случая. конечная группа. Это так называемые

- линейные представления, где X = X, +, , , 0, 1, F — конечномерное векторное пространство над поле F, поэтому Aut(X) — множество обратимых матриц с элементами из F;

- представления перестановок, где X = X — просто набор, поэтому Aut(X) = SX.

Для нас наиболее важным представлением группы G является ее действие на множестве смежных классов группы G. подгруппа. То есть для любой подгруппы HG мы определяем транзитивное представление перестановок группы G: который мы будем обозначать λˆH. В частности, λˆH — гомоморфизм группы из G в симметрическую группа Sym(G/H) подстановок на множестве G/H = {H, x1H, x2H, . . . } левых смежных классов H в G. Действие представляет собой простое умножение слева на элементы G. То есть λˆH(g)(xH) = gxH. Ясно, что λˆH(g1g2) = λˆH(g1)λˆH (g2) для всех g1, g2 G, поэтому λˆH — гомоморфизм. Каждый xH — это точка в множество G/H, а точечный стабилизатор xH в G определяется равенством GxH = {g G | gxH = xH}. Уведомление что

$$GxH = \{g \quad G \mid \text{Икс}^{1} gxH = H\} = xGHx^{1} = xHx \quad 1 = Hx \quad ,$$

где GH = {g G | gH = H} — точечный стабилизатор H в G. Таким образом, ядро гомоморфизма λˆH есть

$$\ker \hat{\lambda} H = \{g \quad G \mid \quad x \quad G, gxH = xH\} = \bigcap_{x\varepsilon G} GxH = \bigcap_{x\varepsilon G} xHx \quad 1 = \bigcap_{x\varepsilon G} \text{ЧАС}^{\text{Икс}} .$$

Обратите внимание, что ker λˆH — это наибольшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H, также известная как ядро группы H. в G, которую мы обозначим через

$$\text{ядро}G(H) = \bigcap_{x\varepsilon G} Xx .$$

Если подгруппа H оказалась безъядерной, т. е. coreG(H) = 1, то λˆH : G Sym(G/H) является вложением, поэтому λˆH является точным представлением; G действует точно на G/H. Следовательно, группа G, будучи изоморфна подгруппе Sym(G/H), сама является группой перестановок.

Другие определения, относящиеся к G-множествам, будут вводиться по мере необходимости и в приложении, и мы Предположим, что читатель уже знаком с ними. Однако отметим еще одно важное понятие. прежде чем продолжить, поскольку это может привести к путанице. Под примитивной группой мы подразумеваем группу содержащая максимальную подгруппу без ядра. Это определение не является типичным для группы учебники теории, но мы считаем, что так лучше. (Обоснование см. в разделе A.1 приложения.)

4.1.1 Теоремы об изоморфизме G-множеств

Выше мы видели, что действие группы на смежных классах подгруппы H является транзитивной перестановкой представление, и представление является точным, когда H не имеет ядра. Первая теорема в этом В разделе говорится, что каждое транзитивное представление перестановки имеет эту форму. (На самом деле, как мы и будем см. лемму 4.2.1 ниже, каждое представление перестановки, транзитивное или нет, может быть рассматривается как действие на смежных классах.)

Во-первых, нам нужны дополнительные обозначения. Для G-множества A = A, G и любого элемента a A множество Ga = {g G | ga = a} всех элементов группы G, которые фиксируют a, является подгруппой группы G, называемой стабилизатором группы a. в Г.

Теорема 4.1.1 (1-я теорема об изоморфизме G-множеств). Если A = A, G¯ транзитивное G-множество, то A изоморфно G-множеству

Γ := G/Ga, {λˆ Γ : g G}

для любого a A.

Доказательство. Предположим, что A = A, G¯ — транзитивное G-множество, поэтому A = {ga¯ | g G} для любого a A. Операции G-множества Γ определяются для каждого g G и каждого смежного класса xGa G/Ga формулой λˆ g(xGa) = gxGa.

Обозначим через GΛ G-множество G, {λg : g G}, т. е. группу G, действующую на себя левым мультипликация. Зафиксируем a A и определим φa : G A как φa(x) = x(a) для каждого x G. Тогда φa — это гомоморфизм из GΛ в A, т. е. φa соблюдает операции:2

$$\varphi a(\lambda g(x)) = \varphi a(gx) = gx(a) = \overline{g \cdot x}(a) = \overline{g}\varphi a(\overline{x}).$$

Более того, поскольку A транзитивна, φa(G) = {ga¯ | g G} = A, поэтому φa — эпиморфизм. Поэтому, GΛ / kerφa = A. Для завершения доказательства просто проверяем, что две алгебры GΛ / kerφa и Г идентичны.3 ☐

Следующая теорема показывает, почему интервалы решеток подгрупп так важны для нашей работы.

Теорема 4.1.2 (2-я теорема об изоморфизме G-множеств). Пусть A = A, G — транзитивное G-множество, и зафиксируем a A. Тогда решетка Con A изоморфна интервалу [Ga, G] в решетке подгрупп группы G.

Доказательство. Для каждого θ Con A пусть Hθ = {g G | (g(a), a) θ}, и для каждого H [Ga, G] пусть (b, c) θH означают, что существуют g G и h H такие, что gh(a) = b и g(a) = c. Если g1, g2 Hθ, то

$$(g2(a), a) \quad \theta \quad (g_2^{1} g2(a), g_2^{1}(a)) = (a, g_2^{1}(a)) \quad \theta,$$

так (г $_2^{1}$(a), a) θ по симметрии. Следовательно, (g1g $_2^{1}$(a), g1(a)) θ, поэтому (g1g $_2^{1}$(a),(a)) θ, по транзитивность. Таким образом, Hθ — подгруппа группы G и, очевидно, Ga Hθ. Также легко видеть, что θH является конгруэнтность A. Равенство HθH = H тривиально следует из определений. С другой стороны (b, c) θHθ тогда и только тогда, когда существуют g, h G, для которых (h(a), a) θ и b = gh(a), и c = g(a). Поскольку группа G транзитивна, она эквивалентна тому, что (b, c) θ. Следовательно, θHθ = θ. Наконец, Hθ Hφ тогда и только тогда, когда если θ φ, то θ Hθ — изоморфизм между Con A и [Ga, G]. ☐

Поскольку предыдущая теорема играет центральную роль в нашей работе, мы предлагаем альтернативное утверждение это. Эту версию обычно можно найти в учебниках по теории групп (например, [12]). Сохранение этих двоих Альтернативные точки зрения могут быть полезны.

---

[2] В общем случае, если A = A, F и B = B, F — две алгебры одного и того же типа подобия, то φ : A B — это гомоморфизм обеспечен

$$\varphi(f\ A(a1, \ldots, an)) = f\ B(\varphi(a1), \ldots, \varphi(an))$$

всякий раз, когда fA является n-арной операцией A, fB является соответствующей n-арной операцией B и a1, . . . , an — произвольные элементы A. (Обратите внимание, что между операциями двух алгебр одного и того же типа подобия предполагается взаимно однозначное соответствие, которое требуется для того, чтобы определение гомоморфизма имело смысл.)

[3] Действительно, ker φa = {(x, y) G2 | φa(x) = φa(y)}, а вселенная GΛ / ker φa — это G/ ker φa = {x/ ker φa | x € G}. где для каждого x G

$$x/ \ker \varphi a = \{y \quad G \mid (x, y) \quad \ker \varphi a\} = \{y \quad G \mid \varphi a(x) = \varphi a(y)\} = \{y \quad G \mid \overline{x}(a) = \overline{y}(a)\}$$
$$= \{y \quad G \mid idA(a) = x \quad \overline{1y(a)}\} = \{y \quad G \mid \text{Икс} \quad {}^{1}y \quad Ga\} = xGa.$$

Это в точности элементы G/Ga, поэтому вселенные GΛ / ker φa и Г одинаковы, как и их операции (умножение слева на g G).

Теорема 4.1.3 (2-я теорема об изоморфизме G-множеств, версия 2). Пусть A = A, G¯ — транзитивное G-множество и пусть a A. Пусть B — множество всех блоков B, где a B. Пусть [Ga, G] Sub(G) обозначает множество все подгруппы группы G, содержащие Ga. Тогда существует биекция Ψ : B [Ga, G], заданная формулой Ψ(B) = G(B), с обратным отображением Φ : [Ga, G] B, заданным формулой Φ(H) = Ha = {ha | h H}. Отображение Ψ есть сохраняющий порядок в том смысле, что если B1, B2 B, то B1 B2 Ψ(B1) Ψ(B2).

Коротко говоря, ЧУ-множество B, порядково-изоморфно ЧУ-множеству [Ga, G], .

Следствие 4.1.4. Пусть G действует транзитивно на множестве, имеющем хотя бы две точки. Тогда G примитивна, если и только если каждый стабилизатор Ga является максимальной подгруппой группы G.

Поскольку все точечные стабилизаторы транзитивной группы сопряжены, только один стабилизатор является максимальным. когда все стабилизаторы максимальны. В частности, регулярная группа подстановок является примитивной, если и только если он имеет простую степень.

Далее мы опишем (с точностью до эквивалентности) все транзитивные представления подстановок данной группы. G. Мы называем два представления (или действия) эквивалентными, если соответствующие G-множества изоморфны. Из вышеизложенного следует, что каждое транзитивное перестановочное представление группы G эквивалентно λˆH для некоторой подгруппы H G. Следующая лемма 4 показывает, что нам достаточно рассмотреть только одну представитель H каждого из классов сопряженности подгрупп.

Лемма 4.1.5. Предположим, G действует транзитивно на двух множествах, A и B. Зафиксируем a A и пусть Ga — стабилизатор поперечной устойчивости (под первое действие). Тогда эти два действия эквивалентны тогда и только тогда, когда подгруппа Ga также является стабилизатором относительно второго действия некоторой точки b B.

Описанные выше точечные стабилизаторы действия λˆH являются сопряженными к H в G. Поэтому из леммы следует, что для любых двух подгрупп H, KG представления λˆH и λˆK эквивалентны. Это происходит именно тогда, когда K = xHx 1 для некоторого x G. Следовательно, транзитивные перестановочные представления группы G задаются с точностью до эквивалентности посредством λˆKi , когда Ki пробегает множество представителей классов сопряженности подгрупп Г.

4.1.2 Теорема об изоморфизме M-множеств

Естественно задаться вопросом, справедливы ли две теоремы предыдущего подраздела в более общем плане для унарная алгебра X, M, где M — моноид (а не группа подстановок). Мы называем таких

---

[4] Лемма 1.6Б из [12].

алгебра X, M - M-множество, и хотя мы увидим, что аналога 2-му G-множеству нет

Теорема изоморфизма, мы имеем

Теорема 4.1.6 (1-я теорема об изоморфизме M-множеств). Если X, M — транзитивное M-множество, то для любого при фиксированном x X отображение φx : M X, определенное равенством φx(m) = mx, является эпиморфизмом M-множеств. Более того, (транзитивное) M-множество M/kerφx, M изоморфно X, M.

Доказательство. По транзитивности для каждого y X существует m M такой, что φx(m) = mx = y, поэтому φx принадлежит. Кроме того, φx является гомоморфизмом M-множества M, M на M-множество X, M, поскольку для всех m, m1 M,

$$\varphi x(m \quad m1) = m(m1x) = m\varphi x(m1).$$

По обычной теореме об изоморфизме

$$M/ \ker\varphi x, M \quad = X, M \tag{4.1.1}$$

где

$$\ker\varphi x = \{(m1, m2) \quad M2 \mid \varphi x(m1) = \varphi x(m2)\} = \{(m1, m2) \quad M2 \mid m1x = m2x\}.$$

Заметим, что поскольку X, M — транзитивное M-множество, M-множество M/kerφx, M также должно быть транзитивным, в противном случае (4.1.1) не удастся.

Для верности проверим, что M/kerφx, M действительно транзитивно. Пусть m1/ kerφx, m2/ kerφx — любые два kerφx-класса M. Мы должны показать, что существует m3 M такое, что m3[m1/ kerφx] = м2/ kerφx. Пусть φx(m1) = y1 и φx(m2) = y2. Пусть m3 M — отображение, переводящее y1 в y2, (существование гарантировано транзитивностью X, M). Тогда для всех m m1/ kerφx имеем m3mx = m3y1 = y2, поэтому m3m m2/ kerφx. Поэтому,

$$m3[m1/ \ker\varphi x] \quad m2/ \ker\varphi x.$$

По тому же рассуждению существует m' 3 M такой, что

$$м'_3 [m2/ \ker\varphi x] \quad m1/ \ker\varphi x.$$

По мощности m3[m1/ kerφx] = m2/ kerφx. □

Аналогом 2-й теоремы об изоморфизме G-множеств для моноидов было бы то, что [Mx, M] = Con X, M должно выполняться для транзитивного M-множества X, M. Следуя следующему контрпримеру, мы видим что это неверно: рассмотрим моноид M, состоящий из тождественного и постоянного отображений. Конечно, X, M — транзитивное M-множество и Con X, M = Eq(X). Однако для x X стабилизатор Mx = {m M : mx = x}, который представляет собой набор, содержащий тождественное отображение на X и константу функция, которая отображает все точки в x. Таким образом, решетка [Mx, M] субмоноидов M выше Mx — это просто решетка подмножеств M, содержащих единицу и постоянное отображение x. Это дистрибутив решетке, поэтому она не может быть изоморфна Con X, M = Eq(X).

4.2. Нетранзитивные G-множества

Проблема характеристики конгруэнц-решеток интранзитивных G-множеств кажется открытой. В этой секции мы докажем несколько результатов, которые помогут определить форму конгруэнтных решеток непереходных G-наборы. В [11] мы используем эти и другие результаты, чтобы показать, что для многих решеток минимальное представление поскольку решетка конгруэнции интранзитивного G-множества невозможна.5

В предыдущем разделе мы рассматривали транзитивные, или однопорожденные, G-множества. В теореме 4.1.1 мы представил хорошо известный результат о том, что транзитивное G-множество Ω, G с универсумом Ω изоморфно G-множество G/H, G, где Вселенная теперь представляет собой совокупность смежных классов подгруппы H = Gω – стабилизатор точки ω Ω. Затем теорема 4.1.2 дала нам точное описание формы конгруэнтная решетка: Con G/H, G = [H, G]. Естественно задаться вопросом, являются ли результаты, аналогичные этим, справедливы для нетранзитивных G-множеств.

В этом разделе мы сначала докажем, что произвольное (интранзитивное) G-множество Ω, G изоморфно G-множеству вида G1/H1 · · · Gr/Hr, G, где Hi Gi = G. Этот результат хорошо известен и появляется как теорема 3.4 в [26]. Тем не менее мы приведем краткое доказательство и опишем изоморфизм G-множеств. явно.6 Далее доказывается лемма, которая, наряду с первой, дает характеристику решетка конгруэнций произвольного G-множества. Почти наверняка этот простой результат также хорошо известно, но, насколько мне известно, оно больше нигде не печатается7.

---

[5] Другими словами, если существует представление такой решетки как решетка конгруэнций алгебры (минимального мощность), то алгебра должна быть транзитивным G-множеством.

[6] Такое явное описание полезно, когда мы работаем с такими алгебрами на компьютере, например , с помощью универсального алгебраического калькулятора или GAP .

[7] Я благодарю Александра Хюлпке за то, что он обратил внимание на описанный ниже частный случай второй леммы.

На протяжении всего этого раздела мы придерживаемся соглашения, согласно которому группы действуют слева, поэтому мы будем обозначаем действие g G на элемент ω Ω через g : ω gω, и мы используем Gω для обозначения орбиту ω относительно этого действия, т. е. Gω = {gω | g G}. Наконец, напоминаем читателю, что все рассматриваемые группы конечны.

Наша первая лемма показывает, что даже в нетранзитивном случае мы можем взять вселенную произвольной G-множество является набором смежных классов группы G.

Лемма 4.2.1. Каждое G-множество Ω, G изоморфно G-множеству во вселенной вида G1/H1 · · · Gr/Hr, где Hi Gi = G и Gi/Hi — множество левых смежных классов Hi в Gi, для каждого 1 я р,

Доказательство. Предположим, что Ω = Ω, G — произвольное G-множество, и пусть Ωi , G, 1 я r, быть минимальным подалгебры Ω. То есть каждая Ωi является орбитой, скажем, Ωi = Gωi , и Ω = Gω1 · · · Gωr — непересекающаяся союз. За каждый 1 я r, пусть Gi — изоморфная копия G, где, скажем, φi : Gi = G в качестве изоморфизм. Четко,

Привет := {x Gi | φi(x)ωi = ωi} = {g G | gωi = ωi} = Gωi .

Обратите внимание, что Gi/Hi , G = Gωi , G, где G действует на Gi/Hi ожидаемым образом: для g G и xHi Gi/Hi , действие g : xHi φ я 1 (g)xПривет .

Определим ψ : G1/H1 · · · Gr/Hr Ω равенством ψ(xHi) = ψi(x)ωi . Эта карта четко определена. Ибо, если ′Hj , Hi тогда i = j и x 1x ′ xHi = x , и легко проверить, что x 1x ′ Hi выполняется тогда и только тогда, когда если φi(x ′)ωi = φi(x)ωi . Таким образом, ψ(xHi) = ψ(x ′Hj).

Теперь рассмотрим G-множество G1/H1 · · · Gr/Hr, G с тем же действием, что и выше: g(xHi) = φ я 1 (ж)(xHi). Мы утверждаем, что ψ является изоморфизмом G-множеств G1/H1 · · · Gr/Hr, G на Ω, G. Это очевидно, является биекцией.8 Проверим, что ψ соблюдает интерпретацию действия G: Fix g G и x Gi . Тогда, поскольку φi — гомоморфизм,

ψ(φ я 1 (g)(xHi)) = φi(φ я 1 (g)x)ωi = φi(φ я 1 (g)) ψi(x)ωi = gψ(xHi).

□

Предыдущая лемма показывает, что мы всегда можем считать вселенную нетранзитивного G-множества

8Определим ζ : Ω G1/H1 · · · Gr/Hr равенством ζ(gωi) = ψ ψζ = idΩ, а ζψ я 1 (g)Привет , проверьте, что эта карта четко определена, и обратите внимание, что — тождество на G1/H1 · · · Gr/Hr.

дизъюнктное объединение множеств смежных классов подгрупп стабилизаторов. Теперь мы воспользуемся этим фактом для описания структуры решетки конгруэнций произвольного G-множества.

Как и выше, пусть Ω = Ω, G — G-множество с универсумом $\Omega = G\omega_1 \quad \cdots \quad G\omega_r$, где каждое $G\omega_i$, Г является минимальной подалгеброй. Рассмотрим разбиение τ Eq(Ω), заданное формулой $\tau = |G\omega_1 |G\omega_2| \cdots |G\omega_r|$. Ясно, что это отношение конгруэнтности, поскольку действие каждого g G фиксирует каждый блок. Мы называем τ конгруэнтность нетранзитивности. Понятно, что мы можем объединить два или более блоков τ и новый больший блок. блок по-прежнему сохранится для каждого g G. Таким образом, интервал выше τ в решетке конгруэнций Ω изоморфна решетке разбиений множества размера r. То есть,

$$[\tau, 1_\Omega] := \{\theta \quad \mathrm{Con}\ \Omega \mid \tau\ \theta\ 1_\Omega\} \quad = \mathrm{Eq}(r). \tag{4.2.1}$$

Другой очевидный факт состоит в том, что интервал ниже τ в Con Ω равен

$$[0_{Ом}, \tau] \quad = \underset{я\,=\,1}{\overset{р}{}} \quad \mathrm{Con}\ (G\omega_i , G). \tag{4.2.2}$$

Поскольку каждая минимальная алгебра $G\omega_i$, G = G_i/H_i , G транзитивна, имеем Con ($G\omega_i$, G) = [H_i , G_i]. Таким образом, структура той части Con Ω, которая сравнима с конгруэнцией нетранзитивности, имеет вид явно описываемое (4.2.1) и (4.2.2).

Наш следующий результат описывает сравнения, несравнимые с сравнениями нетранзитивности. энция. Описание ведется в терминах блоков сравнений, расположенных ниже сравнения нетранзитивности. Таким образом, лемма не дает хорошей абстрактной характеристики формы Con Ω в терминах форму Sub(G), как это было в транзитивном случае. Однако, помимо полезности для вычислений сравнений, этот результат можно использовать в определенных ситуациях для того, чтобы сделать выводы об общем форму Con Ω, основанную на структуре подгрупп G (например, с использованием комбинаторных аргументов включая индекс подгрупп группы G). Подробнее об этом мы скажем ниже.

Хотя доказательство леммы 4.2.2 элементарно, оно несколько усложняется, если представить его полностью. общность. Поэтому мы начнем с обсуждения простейшего частного случая нетранзитивного G-множества, когда есть такая, которая имеет всего две минимальные подалгебры. Предположим, что Ω = Ω, G = $\Omega_1 \quad \Omega_2$, G — G-множество с $\Omega_i = G\omega_i$ для некоторого $\omega_i \quad \Omega_i$, i = 1, 2. Для каждого подмножества Λ Ω, для каждого g G, пусть $g\Lambda := \{g\omega \mid \omega \quad \Lambda\}$, и определим множественный стабилизатор Λ в G как подгруппу

$$\mathrm{Stab}_G(\Lambda) := \{g \quad G \mid g\omega \quad \Lambda \ \text{ для всех } \omega \quad \Lambda\}.$$

Как и выше, назовем сравнение τ = |Ω1 |Ω2| конгруэнтность нетранзитивности. Зафиксируем сравнение τ0 строго ниже τ, и для каждого i = 1, 2 пусть Λ i = ωi/τ0 обозначает блок τ0 , содержащий ωi . Затем существует сравнение θ выше τ0 с блоком Λ 1 Λ 2 тогда и только тогда, когда StabG(Λ 1) = StabG(Λ 2). (Мы проверим это утверждение ниже, когда мы докажем его в более общем виде в лемме 4.2.2.) Это характеризует все сравнения в Con Ω, несравнимые с сравнением нетранзитивности τ в терминах сравнения ниже τ.

Пусть Ω = Ω1 · · · Ωr, G — G-множество с минимальными подалгебрами Ωi = Gωi , для некоторого ωi Ωi ,

1 я р. Пусть τ = |Ω1 |Ω2| · · · |Омр| — сравнение нетранзитивности и зафиксируем τ0 < τ в Con Ω. Для каждого

1 я r, пусть Λ i = ωi/τ0 обозначает блок τ0 , содержащий ωi , и пусть Ti = {gi,0=1, gi,1, . . . , ги,ни } — трансверсаль G/StabG(Λ i).9

Важно отметить, что блоки τ0 — это gi,kΛ i , где 1 ир и 0 к ни . Это показано на следующей диаграмме, где блоки τ0 появляются под блоками τ, к которым они принадлежат.

τ = | Ом1 | Ом2 | ··· | Омр |

τ0 = Λ 1 |g1,1Λ 1| · · · |g1,n1Λ 1 Λ 2 |g2,1Λ 2| · · · |g2,n2Λ 2 · · · Λ r|gr,1Λ r| · · · |gr,nrΛ r |

Должно быть очевидно, что блоки τ0 такие же, как указано выше, но поскольку это играет такую роль важную роль в приведенной ниже лемме, мы проверим ее явно: если Λ i Ωi — блок τ0, то так же gΛ i для всех g G, и либо gΛ i Λ i = , либо gΛ i = Λ i . Если Λ ′ Ωi также является блоком τ0, то Λ ' = g ′Λ i для некоторого g' G = StabG(Λ i) gi,1StabG(Λ i) gi,niStabG(Λ i), скажем, g ' gi,jStabG(Λ i). Тогда g i,j g1 ' StabG(Λ i), поэтому g i,j1 g ′Λ i = Λ i . Следовательно, g′Λ i = gi ,jΛ i .

Другое очевидное, но важное следствие: если T1 = {g1,0=1, g1,1, . . . , g1,n1} является трансверсалью G/Stab(Λ 1), а если Stab(Λ 1) = Stab(Λ j), то T1 также является трансверсалью G/Stab(Λ j), поэтому блоки τ0 в Ωj можно записать как g1,kΛ j , где 0 k n1 .

Лемма 4.2.2. Учитывая подмножество {i1, . . . , im} {1, . . . , r} существует θ Con Ω с блоком Λ i1 · · · Λ im тогда и только тогда, когда StabG(Λ i1) = · · · = StabG(Λ im). Например,

$$\theta = \tau 0 \quad \overset{ни1}{\underset{к=0}{}} (gi1k\Lambda\ i1 \quad \cdots \quad gi1k\Lambda\ im)^{2} . \qquad (4.2.3)$$

9Здесь G/StabG(Λ i) обозначает множество правых смежных классов StabG(Λ i) в G, а трансверсалью называется множество, содержащее один элемент из каждого смежного класса.

Замечания. Индексный набор {i1, . . . , im} идентифицирует подалгебры, из которых можно выбрать блоки, которые будут объединиться в новое сравнение θ. Число блоков τ0 , пересекающих подалгебру Ωij

что является длиной трансверсали G/StabG(Λ ij). Следовательно, nij = |G : StabG(Λ ij)|. это Нидж ,

Как отмечалось выше, если StabG(Λ i1) = StabG(Λ im), то можно считать трансверсали T1 =

{gi11, . . . , gi1ni1 } и Tm = {gim1, . . . , гимним } одинаковы. В приведенном ниже доказательстве мы будем использовать T для обозначения этой общей трансверсали.

Доказательство. ( ) Предположим, что существует сравнение θ Con Ω с блоком Λ i1 · · · Λ im. Предположим, есть существует 1 j < km такой, что StabG(Λ ij) = StabG(Λ ik). Не ограничивая общности, предположим g StabG(Λ ij) \ StabG(Λ ik), поэтому gΛ ij = Λ ij и существует x Λ ik такой, что gx /ε Λ ik . Из конечно, gΩik = Ωik , поэтому мы должны иметь gx /ε Λ i1 · · · Λ im. Таким образом, выбирая любой y Λ ij , мы имеют (x, y) θ, а (gx, gy) / θ, что противоречит θ Con Ω. Следовательно, должно быть так, что StabG(Λ i1) = · · · = StabG(Λ im).

( ) Предположим StabG(Λ i1) = · · · = StabG(Λ im). Пусть θ — отношение, определенное в (4.2.3). Мы будем докажите, что θ Con Ω. Легко видеть, что θ — отношение эквивалентности, поэтому нам просто нужно проверить gθ θ; т. е. мы доказываем ((x, y) θ) (g G) (gx, gy) θ.

Зафиксируем (x, y) θ, скажем, x gi1kΛ ij и y gi1kΛ iℓ , для некоторого 0 к ни1 , 1 j < ℓ м. Для каждого g G имеем g gi1kΛ ij = gi1sΛ ij для некоторого gi1s T . Таким образом, g i1s g gi1k 1 StabG(Λ ij). Аналогично, g gi1kΛ iℓ = gi1tΛ iℓ для некоторого gi1t T , поэтому г 1 i1t g gi1k StabG(Λ iℓ). Это и гипотеза StabG(Λ ij) = StabG(Λ iℓ) вместе влечет за собой gi1sStabG(Λ ij) = gi1tStabG(Λ ij), поэтому gi1s = gi1t, поскольку оба они являются элементами трансверсали StabG(Λ ij). Таким образом, мы показали, что действие g G отображает пары блоков с одинаковыми стабилизаторами в один и тот же блок θ; то есть g gi1kΛ ij = gi1sΛ ij θ gi1tΛ iℓ знак равно г gi1kΛ iℓ . □

ГЛАВА 5

СВОЙСТВА, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЕ ИНТЕРВАЛЬНУЮ ПОДРЕШЕТКУ

5.1 Введение

Для конечной решетки L выражение L = [H, G] означает, что «существуют конечные группы H < G такие, что что L изоморфен интервалу {K | HKG} в решетке подгрупп группы G». Группа G – это называется почти простым, если G имеет нормальную подгруппу SG, которая неабелева, простая и имеет тривиальную централизатор CG(S) = 1. Если HG, то ядро H в G, обозначаемое coreG(H), является наибольшим нормальным подгруппа G, содержащаяся в H; оно определяется формулой coreG(H) = $_{g \varepsilon G}$ грт-1 . Подгруппа HG, для которой coreG(H) = 1 называется бесядерной в G. Если любую конечную решетку можно представить в виде сравнения решетки конечной алгебры, мы говорим, что ФЛРП имеет положительный ответ.

Если предположить, что ФЛРП имеет положительный ответ, то для каждой конечной решетки L существует конечная группа G, имеющая L как верхний интервал в Sub(G). В этой главе мы рассматриваем следующий вопрос: Учитывая конечную решетку L, что мы можем сказать о конечной группе G, у которой L является верхним интервалом в своей решетке подгрупп? Идя еще дальше, мы рассматриваем некоторые конечные наборы конечных чисел. решётки спрашивают, какие свойства мы можем доказать о группе G, если предположим, что она обладает всеми этими свойствами. решетки как верхние интервалы в решетке своих подгрупп. В этом и следующем разделах мы рассмотрим эти вопросы несколько неформально, чтобы мотивировать такой подход. В разделе 5.3 мы вводим новый формализм для реализуемых свойств групп интервальных подрешеток.

Одним из простых выводов, вытекающих из этого исследования, является следующее наблюдение:

Предложение 5.1.1. Пусть L — конечный набор конечных решеток. Если ФЛРП даст положительный ответ, тогда существует конечная группа G такая, что каждая решетка Li L является верхним интервалом Li = [Hi , G] Sub(G) с Hi без ядра в G.

С помощью конструкции «парашюта», описанной в следующем разделе, мы увидим, что единственный нетривиальной частью этого предложения является вывод о том, что все Hi свободны от ядер в G. Однако это будет легко следовать из леммы 5.2.4 ниже.

Прежде чем продолжить, возможно, стоит остановиться и рассмотреть то, что кажется поразительным последствием. утверждения, приведенного выше: если у ФЛРП есть положительный ответ, то, что бы мы ни считали своим конечный набор L - например, мы могли бы взять L как все конечные решетки с не более чем N элементами.

для некоторого большого N < ω – мы всегда можем найти одну конечную группу G такую, что каждая решетка в L – верхний интервал в Sub(G); при этом (по лемме 5.2.4) мы можем считать подгруппу Hi в нижняя часть каждого интервала свободна от стержня. В результате в одной конечной группе G должно быть столько точные представления, G Sym(G/Hi) с Con G/Hi , Г = Ли , одно такое представление для каждый отдельный Li L .

5.2 Парашютные решетки

Как упоминалось выше, в 1980 году Палфи и Пудлак опубликовали следующий поразительный результат:

Теорема 5.2.1 (Палфи-Пудлак [32]). Следующие утверждения эквивалентны:

(A) Любая конечная решетка изоморфна конгруэнц-решетке конечной алгебры.

(B) Любая конечная решетка изоморфна интервалу в решетке подгрупп конечной группы.

В [32] также отмечен важный факт, что (B) эквивалентно:

(B') Всякая конечная решетка изоморфна конгруэнц-решетке конечного транзитивного G-множества.

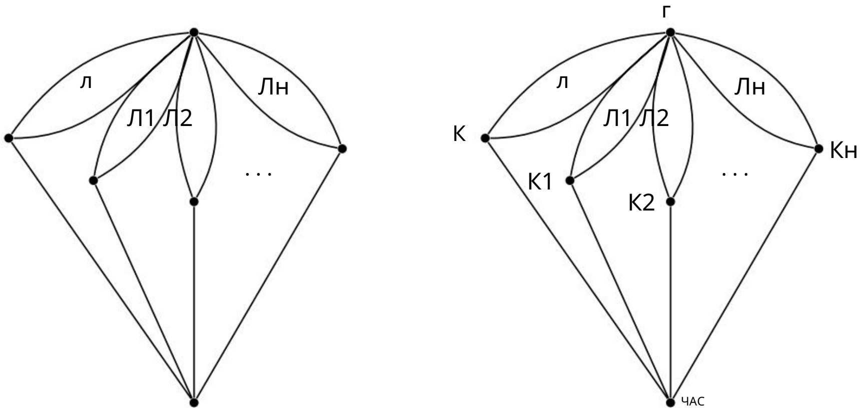
В литературе имеется ряд примеров следующей ситуации: конкретная конечная решетка рассмотрено и показано, что если такая решетка является интервалом в решетке подгрупп конечного группа, то эта группа должна иметь определенную форму или обладать определенными свойствами. Поскольку количество таких результаты растут, становится все более полезным помнить следующее простое наблюдение:

Лемма 5.2.2. Пусть G1, . . . , Gn — классы групп и предположим, что для каждого i {1, . . . , н} там существует конечная решетка Li такая, что Li = [H, G] только если G Gi. Тогда (B) эквивалентно

(C) Для каждой конечной решетки L существует конечная группа G $\overset{н}{\underset{я = 1}{}}$ Gi такой, что L = [H, G].

Доказательство. Очевидно, (C) влечет за собой (Б). Предположим, что (B) выполнено, и пусть L — любая конечная решетка. Предполагать Г1, . . . , Gn и L1, . . . , Ln удовлетворяют условиям леммы. Построим новую решетку P = P(L, L1, ..., Ln) , как показано на рисунке 5.1 (а). Согласно (B) существуют конечные группы HG такие, что P = [Ч, Г]. Пусть K, K1, . . . , Kn — подгруппы группы G, которые покрывают H и удовлетворяют условиям L = [K, G], а Li = [Ki , G], i = 1, . . . , n (рисунок 5.1 (б)). Таким образом, L является интервалом в решетке подгрупп группы G, и поскольку Li = [Ki , G], по условию мы должны иметь G Gi . Это верно для всех 1 in, поэтому G $\overset{н}{\underset{я = 1}{}}$ Ги , что доказывает, что (B) влечет (C). □

Рисунок 5.1: Конструкция парашюта.



(а) (б)

Примеры. Как обычно, обозначим через An и Sn знакопеременные и симметрические группы из n букв. Кроме того, будут полезны следующие обозначения:

- G = класс всех конечных групп;
- S = класс всех конечных разрешимых групп;
- Ги = n<ω {An, Sn} = знакопеременные или симметрические группы, также известные как «гигантские» группы.

Легко найти решетку L со свойством, что из L = [H, G] следует G /ε S. Мы увидим пример такой решетки в разделе 6.3. (Другой пример см. в [29].) В своей диссертации [4] Альберто Базиль доказывает результат, из которого следует, что 1M6 = [H, G] только в том случае, если G /ε Gi. Учитывая эти примеры и По лемме 5.2.2 ясно, что (B) выполнено тогда и только тогда, когда для каждой конечной решетки L существуют конечные группы HG такая, что L = [H, G] и G неразрешима, не знакоперемена и не симметрична.

Теперь, если нашей целью является решение проблемы представления на конечной решетке, лемма 5.2.2 подсказывает следующий путь к отрицательному решению: Найдите примеры решеток Li , которые накладывают ограничения на G, для которого может выполняться Li = [H, G], скажем, G Gi , и в конце концов достичь я Gi = (в этот момент мы сделано).

Нам хотелось бы обобщить лемму 5.2.2, поскольку найти

---

[1] Напомним, Mn обозначает (n + 2)-элементную решетку с n атомами.

класс групп Gi и решетка Li со следующим свойством:

Если Li = [H, G] с H без ядер в G, то G Gi . ( )

Это естественным образом приводит к следующему вопросу: даны класс групп G и конечная решетка L удовлетворительно ( ), когда мы сможем спокойно отказаться от предостережения «с H без ядра в G» и вернуться к условие леммы 5.2.2? Существует очень простое достаточное условие, касающееся класса G с "=" {G G | G /ε G }. (Напомним, если K — класс алгебр, то H(K) — класс гомоморфных изображения членов K.)

Лемма 5.2.3. Пусть G — класс групп и L — конечная решетка такая, что

L = [H, G] с H без ядра G G , (5.2.1)

и предположим, что H(Gc) = Gc . Затем,

L = [Ч, G] G G . (5.2.2)

Доказательство. Предположим, что L удовлетворяет (5.2.1) и H(Gc) = Gc , т. е. Gc замкнута относительно гомоморфных образов. (Для групп это означает, что если G Gc и NG, то G/N Gc .) Если (5.2.2) неверно, то существует конечный группа G Gc такая , что L = [H, G]. Пусть N = coreG(H). Тогда L = [H/N, G/N] и H/N не имеет ядра в G/N, так что по условию (5.2.1) G/N G . Но G/N Gc , поскольку Gc замкнута относительно гомоморфного изображений. ☐

Примеры. Как упоминалось выше, существует решетка L со свойством, что из L = [H, G] следует G неразрешима, поэтому пусть G = Sc . Тогда Gc = S замкнута относительно гомоморфных образов. Для во втором примере выше у нас есть G = Gic , так что G c = n<ω{An, Sn}. Этот класс также закрыт под гомоморфные изображения. Из леммы 5.2.3 следует, что эти примеры не требуют бесядерного гипотеза. Напротив, рассмотрим следующий результат Кёлера [22]: если n 1 не является степенью числа простое, тогда[2]

Mn = [H, G] с H без ядер G подпрямо неприводима.

---

[2] Напомним, что для групп подпрямо неприводимая группа эквивалентна наличию единственной минимальной нормальной подгруппы.

Лемма 5.2.3 в этом случае неприменима, поскольку G с , класс подпрямо приводимых групп есть заведомо не замкнуто относительно гомоморфных образов3.

Хотя лемма 5.2.3 кажется полезным наблюдением, последний пример выше показывает, что обобщенная версия леммы 5.2.2 – версия, основанная на гипотезе ( ), – будет более мощной, поскольку это позволило бы нам наложить на G большие ограничения, подобные тем, которые подразумеваются результатами Кёлера. и другие. К счастью, конструкция «парашюта», использованная при доказательстве леммы 5.2.2, работает и в более общий случай, с лишь тривиальной модификацией гипотез – а именно, решетки Li должны не быть двухэлементными цепочками (что почти само собой разумеется в данном контексте). (Напомним, 2 обозначает двухэлементную цепь.)

Лемма 5.2.4. Пусть G1, . . . , Gn — классы групп и предположим, что для каждого i {1, . . . , n} есть конечная решетка Li 2, удовлетворяющая следующим условиям:

Если Li = [H, G] и H не имеет ядер в G, то G Gi . ( )

Тогда (B) эквивалентно

(C) Для каждой конечной решетки L существует конечная группа G $\overset{н}{\underset{я = 1}{}}$ Gi такой, что L = [H, G].

Доказательство. Очевидно, (C) влечет за собой (Б). Предположим (B) и пусть L — любая конечная решетка. Предположим, G1, . . . ,Гн Ln удовлетворяет ( ) и Li 2 для всех i. Заметим, что без потери общности можно предположить, что и L1, . . . , что n = 2. Если n = 1, просто добавьте один из приведенных выше примеров, чтобы получить n = 2. Назовите это дополнительным класс групп G2. Тогда в конце рассуждений мы получим G G1 G2 и, следовательно, G G1, что и является сформулированным заключением теоремы в случае n = 1.

Построим решетку P = P(L, L1, ..., Ln) так же, как при доказательстве леммы 5.2.2. Согласно (B) существуют конечные группы HG такие, что P = [H, G], и без ограничения общности можно считать, что H без ядра4 в G. Пусть K, K1, . . . , Kn — подгруппы группы G, которые покрывают H и удовлетворяют условиям L = [K, G], и Li = [Ki , G], 1 я n, как на рисунке 5.1 (б). Таким образом, L — верхний интервал в подгруппе решетку группы G, и осталось показать, что G $\overset{н}{\underset{я = 1}{}}$ Ги . Это будет следовать из ( ), как только мы докажем, что каждое Ki не имеет ядра в G. Сейчас мы дадим простое прямое доказательство этого факта, но заметим, что оно также следует из леммы 5.4.3 ниже, а также из более общего результата о LP-решетках. (См., например, Бёрнер [8].)

---

[3] Каждая алгебра и, в частности, каждая группа G имеет подпрямое разложение на подпрямо неприводимые GG/N1 × · · · × G/Nn. Таким образом, всегда будут существовать гомоморфные образы G/Ni, подпрямо неприводимые.

[4] Это стандарт. Ибо, если P = [H, G] с N := coreG(H) = 1, то P = [H/N, G/N].

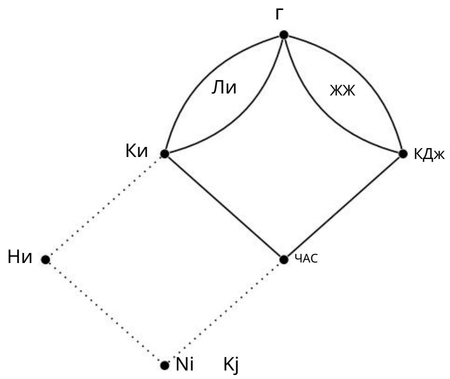


Рисунок 5.2: Невозможность нетривиального ядра Ni = coreG(Ki) в парашютной решетке.

Для каждого i {1, . . . , n}, пусть Ni = coreG(Ki). Докажем, что Ni = 1 для всех i. Предположим, на некоторого i и рассмотрим любой Kj с j = i. 5 Набросок обратного: Ni = 1 для решетка рассматриваемых подгрупп показана на рис. 5.2. Обратите внимание, что NiKj = G. Ибо Ni не ниже H, поскольку H не содержит ядра, поэтому NiH = Ki, поэтому NiKj выше Ki и Kj . Теперь ясно, Ni Kj Kj, а из стандартной теоремы об изоморфизме следует

Kj/(Ni Kj) = NiKj/Ni = G/Ni .

В частности, под этой перепиской мы имеем,

[Ni Kj , Kj] H NiH = Ki [Ni , G],

откуда следует, что интервалы [Ki , G] и [H, Kj] должны быть изоморфны как решетки. Однако, по конструкции H — максимальная подгруппа в Kj, поэтому имеем [H, Kj] = 2 Li = [Ki , G]. Этот противоречие доказывает, что coreG(Ki) = 1 для всех 1 в, как заявлено. ☐

5.3 ISLE-свойства групп

Предыдущий раздел мотивирует изучение того, что мы называем реализуемой интервальной подрешеткой (ISLE). свойства групп. В этом разделе мы формализуем это понятие, а также некоторые понятия. представленные выше, и мы резюмируем все, что мы о них доказали. Подведем итоги некоторыми

---

[5] Здесь мы используем n 2; хотя, если n = 1, мы могли бы использовать K вместо Kj , но тогда нам нужно было бы предположить, что L 2.

предположения, которые лягут в основу будущих исследований.

Под теоретико-групповым классом или классом групп мы подразумеваем замкнутую совокупность G групп. при изоморфизме: если G0 G и G1 = G0, то G1 G . Теоретико-групповое свойство, или просто свойство групп — это свойство P такое, что если группа G0 обладает свойством P и G1 = G0, то G1 обладает свойством P.[6] Таким образом, если GP обозначает совокупность групп с теоретико-групповым свойством P, то GP — класс групп, а принадлежность к классу групп — теоретико-групповое свойство. Поэтому нам нет необходимости различать свойство групп и класс групп, который обладать этим свойством. Группа класса G называется G -группой, а группа со свойством P называется G -группой. называется P-группой. Иногда мы пишем GP, чтобы указать, что G является P-группой.

Мы говорим, что теоретико-групповое свойство (или класс) P является реализуемым на интервальной подрешетке (ISLE), если существует решетка L такая, что из L = [H, G] следует, что G — P-группа. (Конвенцией согласовано в начале этой главы из обозначения L = [H, G] неявно следует, что G — конечная группа; таким образом, класс G всех конечных групп тривиально является классом ISLE .) Мы говорим, что свойство (или класс) P является реализуемой интервальной подрешеткой без ядра (cf-ISLE), если существует решетка L такая, что если L = [H, G] если H не имеет ядра в G, то G является P-группой.

Очевидно, что если P ISLE, то он также cf-ISLE, и лемма 5.2.3 выше дает достаточное условие чтобы имело место обратное. Формально переформулируем это следующим образом:

Лемма 5.2.3′ . Если P является cf-ISLE и если G c П = {G G | GP} замкнут относительно гомоморфных образов, H(G c П) = G c П , тогда P — ОСТРОВ.

Как мы отметили в предыдущем разделе, есть два примера классов ISLE :

- G0 = Sc = конечные неразрешимые группы;
- G1 = (Gi) c = конечные негигантские группы, {G G | (n < ω) (G = An и G = Sn)};

Следующие классы относятся как минимум к cf-ISLE: [7]

- G2 = конечные подпрямо неприводимые группы;
- G3 = конечные группы, не имеющие нетривиальных абелевых нормальных подгрупп.
- G4 = {G G | CG(M) = 1 для минимальной нормальной подгруппы MG}

---

[6] Кажется, не существует единого стандартного определения класса теории групп. Хотя некоторые авторы (например, [13], [3]) используют определение, данное здесь, другие (например, [37], [38]) требуют, чтобы теоретико-групповой класс содержал группы порядка 1.

[7] Символы, которые мы используем для обозначения этих классов, не являются стандартными.

Заметим, что G4 G2 G3 G0.

Учитывая два (теоретико-групповых) свойства P1,P2, мы пишем P1 P2 , чтобы обозначить это свойство P1. подразумевает свойство P2. Другими словами, G P1 только в том случае, если G P2. Таким образом, обеспечивает естественную частичную упорядочить любой заданный набор свойств следующим образом:

$$П1\ П2 \quad П1 \quad П2 \quad ГП1 \quad ГП2\ ,$$

где GPi = {G G | Г Пи}. Следующее является очевидным следствием конструкции парашюта.

Следствие 5.3.1. Если P = {Pi | i I } — набор свойств (cf-)ISLE, то P — это (cf-)ISLE.

Примечание: конъюнкция P соответствует классу {G G | (i I)G Pi}.

Из вышеизложенного ясно, что если бы разрешимость была свойством ISLE , то мы имели бы решение ФЛРП . Но разрешимость явно не ОСТРОВА. Ведь если L = [H, G], то для любого неразрешимой группе K, то L = [H × K, G× K], и, конечно, G× K неразрешима. Заметьте, однако, что H × K не является свободным от ядра, поэтому более интересный вопрос, который следует задать, может заключаться в том, является ли разрешимость cf-ISLE собственность. Следующая лемма доказывает, что это не так.

Лемма 5.3.2. Пусть P — свойство cf-ISLE , и пусть L — конечная решетка такая, что L = [H, G] с H без ядра подразумевает GP. Предположим также, что существует группа G, свидетельствующая об этом; то есть G имеет подгруппа H без ядра такая, что L = [H, G]. Тогда для любой конечной неабелевой простой группы S существует группа сплетения вида W = S U¯, которая также является P-группой.

Доказательство. Мы дважды применим идею Курцвейла (см. теорему 2.2.2). Зафиксируйте конечную неабелеву простую группу. S, и предположим, что индекс H в G равен |G : H| = н. Тогда действие G на смежные классы H индуцирует автоморфизм группы Sn перестановкой координат. Обозначим это представление через φ : G Aut(S n), и пусть образ G есть φ(G) = G¯ Aut(S n). Полупрямой продукт (или сплетенный продукт) под этой акцией находится группа

$$U := S \quad \varphi\ G = S^{н} \quad \varphi\ G = S^{н} \quad \bar{G} = S \quad \bar{G},$$

с умножением, заданным

$$(s1, ..., sn, x)(t1, ..., tn, y) = (s1tx(1), ..., sntx(n)\ , xy),$$

для Си, ti S и x, y G¯. Появляется иллюстрация решетки подгрупп такого сплетения.

на рисунке 5.3. Двойственная решетка L' является верхним интервалом в решетке подгрупп этой группы, а именно:

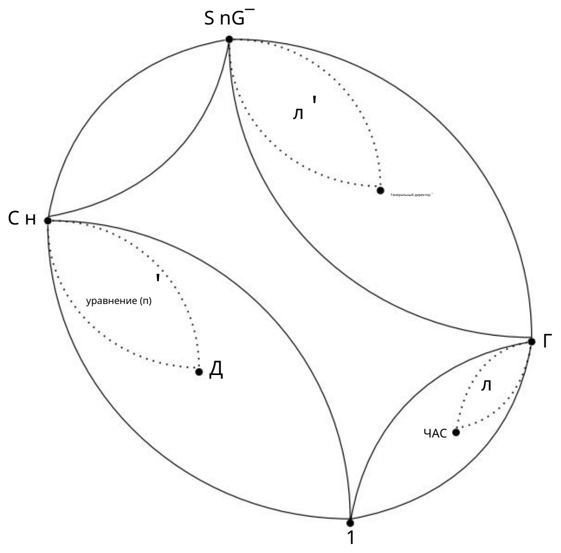


Рисунок 5.3: Представление двойственной решетки, представимой группой.

л ' = [Д G, U]. (Как обычно, D обозначает диагональную подгруппу группы Sn .) Важно отметить, что если H не имеет ядер в G (что эквивалентно, если kerφ = 1), то предыдущая конструкция приводит к подгруппа D G¯ бесядерна в U. (Доказательство этого факта мы отложим.)

Теперь, если мы повторим предыдущую процедуру, при этом H1 := D G¯ обозначает подгруппу (без ядра) U такой, что L ' = [H1, U], то находим, что L = L « = [D1 U, S м U¯], где m = |U : H1|. 8 Если предположить, что D1 U¯ бесядерно в W = S m U¯, то по исходному предположению следует, что W должна быть P-группой.

Для завершения доказательства проверим, что, начиная с подгруппы HG без ядра в группе Курцвейля Только что описанная конструкция приводит к появлению подгруппы без ядра D G ¯ U. Пусть N = coreU (D G ¯). Тогда для всех n = (d, . . ., d, x) N и для всех u = (t1, . . ., tn, g) U имеем unu 1 N. В в частности, мы можем выбрать t1 = t2, все остальные tk различны и g = 1. Тогда

unu 1 = (t1, . . . , tn, 1)(d, . . . , d, x)(t 1 , 1 . . . , t 1 n , 1) = (t1d t 1 x(1), . . . , tnd t 1 x(n) , 1) N.

Следовательно, t1d t 1 x(1) = · · · = tnd t 1 x(n) . Поскольку t1 = t2 и все остальные tk различны, ясно, что x должен

---

[8] Здесь мы используем D1 для обозначения диагональной подгруппы Sm , чтобы отличить ее от D, диагональной подгруппы Sn .

стабилизировать набор {1, 2}. Конечно, тот же аргумент применим в случае $t1 = t3$ со всеми остальными tk различны[9], поэтому мы заключаем, что x также стабилизирует множество {1, 3}. Следовательно, $x(i) = i$ для $i = 1, 2, 3$. Поскольку тот же аргумент работает для всех i, мы видим, что $n = (d,..., d, x)$ N влечет x kerφ = 1. Это ставит N ниже D × 1, и единственной нормальной подгруппой U, лежащей ниже D × 1, является тривиальная подгруппа. □

Изложенный выше результат позволяет заключить, что любой класс групп, не включающий в себя сплетение произведения вида S G для всех конечных простых групп S не могут быть классом cf-ISLE .

Завершим этот раздел следующими двумя эквивалентными гипотезами:

Гипотеза 5.1. Если P является свойством (cf-)ISLE, то ¬P не является свойством (cf-)ISLE.

Гипотеза 5.2. Если G — класс (cf-)ISLE, то G c не является классом (cf-)ISLE.

Пара решеток, свидетельствующих о несостоятельности любой из этих гипотез, могла бы решить проблему FLRP. Более именно, если G — класс, а L0 и L1 — решетки такие, что

$$L0 = [H, G] \quad G \quad G \text{ и } L1 = [H, G] \quad G \quad G^{c}$$

Тогда парашютная решетка P(L0, L1) не является интервалом в решетке подгрупп конечной группы.

5.4 Правило Дедекинда

Мы доказываем еще несколько лемм, которые приводят к дополнительным ограничениям на любую группу, не имеющую тривиальная решетка парашюта как верхний интервал в решетке своих подгрупп. Нам понадобится следующее стандартная теорема[10] , которую мы называем правилом Дедекинда:

Теорема 5.4.1 (правило Дедекинда). Пусть G — группа, и пусть A, B и C — подгруппы G с А Б. Тогда

$$A(C \quad B) = AC \quad B, \qquad \text{и} \tag{5.4.1}$$

$$(C \quad B)A = CA \quad B. \tag{5.4.2}$$

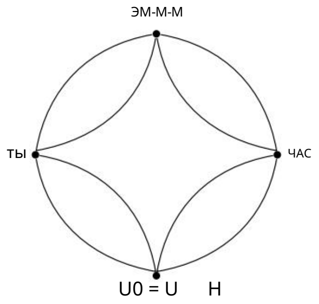
---

[9] Заметим, что мы можем быть уверены, что |G : H| = n > 2, поскольку |G : H| = 2 будет означать HG, что противоречит тому, что H является без ядра в G.

[10] См., например, стр. 122 книги Роуза «Курс теории групп» [38].

Наша следующая лемма (лемма 5.4.2) представляет собой небольшую вариацию стандартного результата, который мы считаем очень полезным. Стандартный результат по сути является частью (ii) леммы 5.4.2. Конечно, часть (i) леммы также корректна. известно, хотя мы не видели его где-либо еще. Мы увидим, что стандартный результат является мощным достаточно, чтобы ответить на все наши вопросы о парашютных решетках, но позже, в разделе 6.3, мы сделаем использование (i) в ситуации, когда (ii) не применяется.

Для формулировки леммы 5.4.2 нам потребуются новые обозначения. Пусть U и H — подгруппы группы, пусть U0 := U H и рассмотрим интервал [U0, U] := {V | U0 ВУ}. В общем, когда мы пишем UH мы имеем в виду набор {э-э | u U, h H}, и мы пишем U V или U, H для обозначения группы, порожденной U и H. Очевидно, UH U, H. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда U и H перестановочны, т. е. UH = HU. В любом случае часто бывает полезно визуализировать часть решетки подгрупп U, H, как показано ниже.



Напомним, что из обычной теоремы об изоморфизме групп следует, что если H — нормальная подгруппа группы U, H, то интервал [H,U, H] изоморфен интервалу [U H, U]. Цель Следующая лемма состоит в том, чтобы связать эти два интервала в тех случаях, когда мы отказываемся от предположения HU, H и добавить предположение UH = U, H.

Если две подгруппы U и H перестановочны, то мы определяем

[У0, У] ЧАС := {V [U0, U] | VH = HV }, (5.4.3)

которая состоит из тех подгрупп V в [U0, U], которые перестановочны с H.

Если H нормализует U (что означает UH = HU), то мы определяем

[U0, U]H := {V [U0, U] | H NG(V)}, (5.4.4)

где G := UH. Это множество, состоящее из тех подгрупп V из [U0, U], которые нормализованы по H. Последние иногда называют H-инвариантными подгруппами. Обратите внимание, что даже определение [U0, U]H мы должны иметь H NG(U), и в этом случае, как мы увидим ниже, две подрешетки совпадают:

[U0, U]H = [U0, U] H.

Наконец мы готовы сформулировать основной результат, касающийся множеств, определенных в (5.4.3) и (5.4.4) (когда они существуют) до интервала [H, UH].

Лемма 5.4.2. Предположим, что U и H — перестановочные подгруппы группы. Пусть U0 := U H. Тогда

(i) [H, UH] = [U0, U] ЧАС [У0, У].

(ii) Если U UH, то [U0, U]H = [U0, U] ЧАС [У0, У].

(iii) Если H UH, то [U0, U]H = [U0, U] ЧАС = [U0, U].

Замечания. Поскольку G = UH — группа, условие (ii) эквивалентно H NG(U), и

гипотеза (iii) эквивалентна U NG(H). Часть (i) леммы гласит, что когда две подгруппы

перестановкой, мы можем отождествить интервал над любой из них с подрешеткой подгрупп

ниже других, которые переставляются с первыми. Часть (ii) аналогична, за исключением того, что мы определяем интервал выше

H с подрешеткой H-инвариантных подгрупп ниже U. Как только мы доказали (i), доказательство (iii)

тривиально следует из стандартной теоремы об изоморфизме групп, поэтому мы опускаем детали.

Доказательство. Чтобы доказать (i), покажем, что следующие отображения являются изоморфизмами обратного порядка:

φ : [H, UH] X U X [U0, U] ЧАС (5.4.5)

ψ : [U0, U] ЧАС V VH [H, UH].

Затем мы покажем, что [U0, U] ЧАС является подрешеткой в [U0, U], т. е. [U0, U] ЧАС [У0, У].

Зафиксируйте X [H, UH]. Мы утверждаем, что U X [U0, U] H. Действительно,

(U X)H = UH X = HU X = H(U X).

Первое равенство выполнено по (5.4.2), поскольку HX, второе — по предположению, а третье — по (5.4.1). Это

доказывает, что U X [U0, U] H. Более того, по первому равенству ψ φ(X) = (U X)H =

UH X = X, поэтому ψ φ — тождество на [H, UH].

Если V [U0, U] H, то из VH = HV влечет VH [H, UH]. Кроме того, ψ ψ — тождество на [U0, U] H,

поскольку φ ψ(V) = VH U = V (H U) = V U0 = V , согласно (5.4.1). Это доказывает, что φ и ψ являются обратными

друг от друга на указанных множествах, и легко видеть, что они сохраняют порядок: XY следует U XU Y , и из VW следует VHW H. Следовательно, ψ и ψ имеют обратный порядок изоморфизмы.

Для завершения доказательства (i) покажем, что [U0, U]$^{\text{ЧАС}}$ является подрешеткой [U0, U]. Предположим, V1 и V2 являются подгруппами в [U0, U], которые перестановочны с H. Легко видеть, что их объединение V1 V2 = V1, V2 также перестановочно с H, поэтому мы просто проверяем, что их пересечение перестановочно с H. Зафиксируем x V1 V2 и h H. Покажем xh = h ′x ′ для некоторого h′ H, x′ V1 V2. Поскольку V1 и V2 переставляются с H, имеем xh = h1v1 и xh = h2v2 для некоторых h1, h2 € H, v1 € V1, v2 € V2. Следовательно, h1v1 = h2v2, откуда следует v1 = h_1^{1} h2v2 HV2, поэтому v1 принадлежит V1 HV2. Обратите внимание, что V1 HV2 находится ниже обоих V1 и U HV2 = ψ(V2) = V2. Следовательно, v1 V1 HV2 V1 V2, и мы доказали, что xh = h1v1 для h1 H и v1 V1 V2, что и требовалось.

Для доказательства (ii), предполагая UG, покажем, что если U0 VU, то VH = HV тогда и только тогда, когда H NG(V). Если H NG(V), то VH = HV (даже когда UG). Предположим, VH = HV. Мы должны показать (v V) (h H) hvh 1 V . Зафиксируем v V, h H. Тогда hv = v ′h ′ для некоторых v′ V, h′ H, поскольку VH = HV. Следовательно, v ′h ′h 1 = hvh 1 = u для некоторого u U, поскольку H NG(U). Это доказывает что hvh 1 VH U = V (H U) = V U0 = V , по желанию. □

Далее мы докажем, что любая группа, имеющая нетривиальную парашютную решетку в качестве верхнего интервала в решетка ее подгрупп должна обладать некоторыми весьма специальными свойствами.

Лемма 5.4.3. Пусть P = P(L1, . . ., Ln) c n 2 и |Li | > 2 для всех i и предположим, что P = [H, G], с H без ядра в G.

(i) Если 1 = NG, то NH = G.

(ii) Если M — минимальная нормальная подгруппа группы G, то CG(M) = 1.

(iii) G подпрямо неприводима.

(iv) G неразрешима.

Замечание. Если подгруппа MG абелева, то M CG(M), поэтому из (ii) следует, что минимальная нормаль подгруппа (следовательно, каждая нормальная подгруппа) группы G должна быть неабелевой.

Доказательство. (i) Пусть 1 = NG. Тогда NH, поскольку H лишена ядер в G. Следовательно, H < NH. Как в разделе 5.2 мы обозначим через Ki подгруппы группы G, соответствующие атомам группы P. Тогда H покрывается каждым Ки , так что Kj NH для некоторого 1 j n. Предположим в порядке от противного, что

NH < G. По предположению n 2 и |Li | > 2. Таким образом, для любого i = j Ki Y < Z < G для некоторые подгруппы Y и Z, удовлетворяющие (NH) Z = H и (NH) Y = G. Кроме того, (NH)Y = NY — группа, поэтому (NH)Y = NH Y = G. Но тогда по правилу Дедекинда имеем

Y = HY = ((NH) Z)Y = (NH)Y Z = G Z = Z,

вопреки Y < Z. Это противоречие доказывает, что NH = G.

(ii) Если CG(M) = 1, то (i) влечет CG(M)H = G, поскольку CG(M) NG(M) = G. Рассмотрим любой H < K < G. Тогда 1 < M K < M (строго, по лемме 5.4.2). Теперь M K нормализовано H и централизовано (следовательно, нормализовано) CG(M). (Действительно, CG(M) централизует каждую подгруппу M.) Следовательно, M K CG(M)H = G, что противоречит минимальности M.

(iii) Докажем, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу. Пусть M — минимальная[11] нормаль подгруппа группы G и пусть NG — любая нормальная подгруппа, не содержащая M. Покажем, что N = 1. Поскольку обе подгруппы нормальны, коммутатор [12] M и N лежит в пересечении M N, что тривиально в силу минимальности M. Таким образом, M и N централизуют друг друга. В частности, N CG(M) = 1 согласно (ii).

(iv) Пусть M′ обозначает коммутатор M. Как отмечалось выше, M неабелев, поэтому M′ = 1. Кроме того, M' MG и M' является характеристической подгруппой M (т. е. M' , инвариантной относительно Aut(M)). Следовательно, M′ G, и, поскольку M — минимальная нормальная подгруппа в G, имеем M′ = M. Таким образом, M является неразрешима, поэтому G неразрешима. ☐

Замечание. Из (i) следует, что если P — нетривиальная парашютная решетка такая, что P = [H, G], где H — без ядер, то coreG(X) = 1 для любого HX < G. Это дает второй способ завершить доказательство. леммы 5.2.4.

Подводя итог тому, что мы имеем на данный момент, из приведенных выше лемм следует, что (B) выполняется тогда и только тогда, когда каждое конечная решетка — это интервал [H, G] с H без ядер в G, где

(i) G неразрешима, неальтернирована и несимметрична;

(ii) G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу M, которая удовлетворяет условиям MH = G и CG(M) = 1; в

---

[11] Если G проста, то M = G; «минимальный» предполагает нетривиальность.

[12] Коммутатором M и N является подгруппа, порожденная множеством {mnm 1n 1 | m € M, n € N}. Коммутатором M является подгруппа, порожденная {aba 1 b 1 : a, b M}. Коммутатор n-й степени M, обозначаемый M(n) , определяется рекурсивно как коммутатор M(n 1). Группа M разрешима, если M(n) = 1 для некоторого n N.

в частности, M неабелева и $\mathrm{core}_G(X) = 1$ для всех $HX < G$.

Наконец, отметим, что теорема 4.3.A Диксона и Мортимера [12] описывает структуру единственная минимальная нормальная подгруппа следующим образом:

(iii) $M = T_0 \times \cdots \times T_r \quad 1$, где T_i — простые минимальные нормальные подгруппы группы M, сопряженные (при сопряжении элементами из G). Таким образом, M — прямая степень простой группы T.

Фактически, когда $C_G(M) = 1$, как в нашем приложении, мы можем указать эти сопряжения более точно. Пусть T — любая минимальная нормальная подгруппа группы M. Обратите внимание, что T проста. Пусть $N = N_H(T) = \{h \quad H \mid T^{\text{час}} = T\}$ — нормализатор T в H. Тогда доказательство следующей леммы является рутинным, поэтому мы его опускаем.

Лемма 5.4.4. Если $H/N = \{N, h_1N, \ldots, h_k \quad 1N\}$ — полный набор левых смежных классов N в H, тогда $k = r$ и $M = T_0 \times \cdots \times T_r \quad 1 = T \times T h_1 \times T h_r \quad 1$.

Мы завершаем эту главу, отмечая, что другие исследователи, такие как Баддели, Бёрнер и Люкchini доказали аналогичные результаты для более общего случая квазипримитивных групп подстановок. В в частности, наше доказательство леммы 5.4.3 (i) использует тот же аргумент, что и в [8], где он используется для доказательства леммы 2.4: если $L = [H, G]$ — LP-решетка,[13] тогда G должна быть квазипримитивной перестановкой группа. Заметим, что парашютные решетки, в которых каждая панель L_i имеет $|L_i| > 2$, являются LP-решетками, поэтому Лемма 5.4.3 следует из теорем Баддели, Бёрнера, Луккини и др. (ср. [2], [8]).

Однако основная цель конструкции парашюта, помимо обеспечения быстрого маршрута к Лемма 5.4.3 призвана продемонстрировать естественный способ вставки произвольных конечных решеток L_i в качестве верхних интервалов. $[K_i, G]$ в $\mathrm{Sub}[G]$, с K_i без ядер в G. Затем, как только мы докажем специальные свойства групп G для где $L_i = [K_i, G]$ (K_i без ядер), то каждая конечная решетка L должна быть верхним интервалом $L = [K, G]$ для некоторого G, удовлетворяющего всем этим свойствам, при условии, что FLRP имеет положительный ответ. Это формирует основу и мотивацию идеи свойств (cf-)ISLE, как обсуждалось в разделе 5.3.

---

[13] ЛП-решетка — это такая решетка, в которой каждый элемент, кроме 0 и 1, является немодульным элементом.

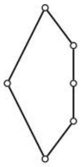
ГЛАВА 6

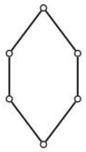
РЕШЕТКИ, СОДЕРЖАЩИЕ МАКСИМАЛЬНО СЕМЬ ЭЛЕМЕНТОВ

6.1 Введение

Весной 2011 года наш исследовательский семинар посчастливилось посетить Питер Джипсен, который инициировал проект каталогизации каждой малой конечной решетки L, для которой существует известная конечная алгебра A с Con A = L. Хорошо известно, что все решетки, содержащие не более шести элементов, представимы. На самом деле их можно найти как интервалы в решетках подгрупп конечных групп, но этот факт не был известно до недавнего времени.

К 1996 году Ясуо Вататани нашел каждую шестиэлементную решетку, за исключением двух, ниже как интервалы в решетках подгрупп конечных групп. См. [46].





Затем, в 2008 году, Михаэль Ашбахер в [1] показал, как построить некоторые (очень большие) скрученные группы сплетений, у которых указанные выше решетки являются интервалами в решетках своих подгрупп. Примечание что, хотя найти групповые представления показанных решеток было, по-видимому, довольно сложно выше, их довольно легко представить конкретно в виде решеток конгруэнций очень малых конечных алгебры. Возьмем, к примеру, набор X = {0, 1, . . . , 6} и рассмотрим решетку L Eq(X), порожденную по перегородкам

|0, 3, 4 |1, 6 |2, 5 | и |0, 6 |1, 5 |2 |3 |4 | |0, 6 |1, 4, 5 |2 |3 | |0, 6 |1, 4, 5 |2, 3 |.

Это конкретное представление решетки слева выше оказывается замкнутым: ρλ(L) = L, поэтому равна конгруэнтной решетке Con X, λ(L).

В этой главе мы доказываем два основных результата. Первое - это

Теорема 6.1.1. Любая конечная решетка, содержащая не более семи элементов, за одним возможным исключением, является представима в виде решетки конгруэнций конечной алгебры.

Второй результат касается единственного возможного исключения из этой теоремы — семиэлементной решетки. который мы называем L7. Этому посвящен раздел 6.3. Как мы объясним ниже, если L7 представим в виде конгруэнтной решетки конечной алгебры, то она должна появиться как интервал в решетке подгрупп конечная группа.[1] Наш основной результат, теорема 6.3.1, накладывает на такую группу довольно сильные ограничения. Наша мотивация — применить эту новую теорему вместе с некоторыми хорошо известными теоремами, классифицирующими конечные группы, чтобы в конечном итоге либо найти такую группу, либо доказать, что ее не существует. Это приложение станет фокус будущих исследований.

6.2 Семиэлементные решетки

В этом разделе мы покажем, что, за одним возможным исключением (обсуждаемым в следующем разделе), каждая решетка содержащая не более семи элементов, представима в виде решетки конгруэнций конечной алгебры. Есть 53 решетки, содержащие не более семи элементов.[2] Представления для большинства из этих решеток можно найти довольно легко, применив методы, описанные в предыдущих главах. Самым простым, конечно, является дистрибутивные решетки, которые, как мы знаем, представимы по теореме 1.3.3. Обнаружено, что некоторые другие быть представимым путем поиска (с помощью компьютера) замкнутых конкретных представлений L Eq(X) над некоторое небольшое множество X, скажем $|X| < 8$. Третьи находятся путем проверки того, что они получены применением операции, при которых L3 замкнут (п. 2.1). Например, решетка слева на рис. 6.1 — это порядковая сумма двух копий дистрибутивной решетки 2 × 2. Справа от того же рисунка изображена параллельная сумма дистрибутивных решеток 2 и 3.

Рисунок 6.1: Порядковая сумма 2 × 2 сама с собой (слева) и параллельная сумма 2 и 3 (справа).

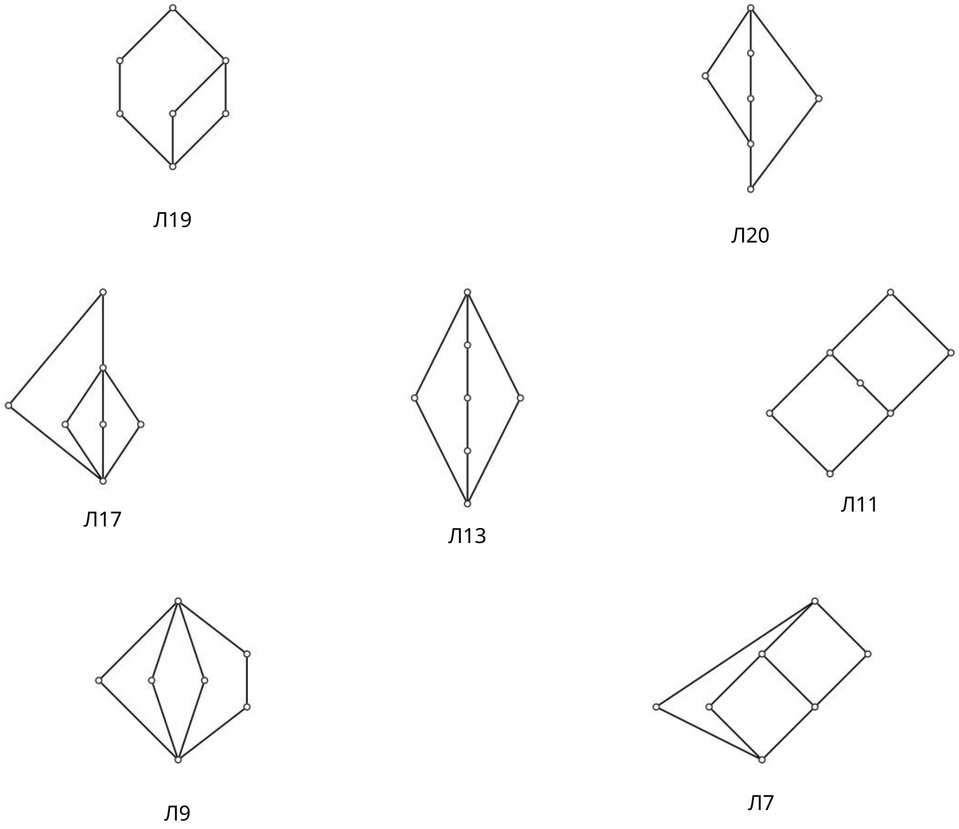
Используя эти методы, нетрудно было найти или, по крайней мере, доказать существование решётки конгруэнций. изображения всех семиэлементных решеток, за исключением семи решеток, представленных на рис. 6.2,

---

[1] Обратите внимание, что результат Палфи и Пудлака не утверждает, что каждая представимая решетка изоморфна интервалу в решетке подгрупп конечной группы. Скорее, это утверждение обо всем классе представимых решеток. Однако для некоторых решеток, таких как описанная в разделе 6.3, мы можем доказать, что она принадлежит L3 тогда и только тогда, когда она принадлежит L4.

[2] Диаграммы Хассе всех решеток, содержащих не более семи элементов, показаны здесь http://db.tt/2qJUkoaG. или изменить-изначально здесь http://math.chapman.edu/~jipsen/mathposters/lattices7.pdf (любезно предоставлено Питером Джипсеном).

плюс их двойники. Четыре из этих семи самодвойственны, поэтому всего имеется десять решеток, для которых представительство найти не так-то просто.[3]



Л19 Л20

Л17 Л13 Л11

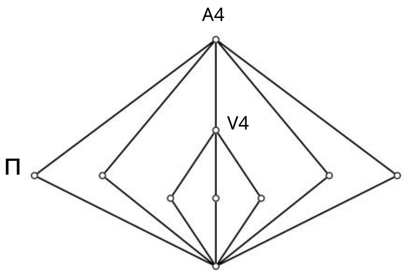
Л9 Л7

Рисунок 6.2: Семиэлементные решетки без очевидного представления конгруэнтной решетки.

Теперь мы докажем существование представлений решетки конгруэнций для всех, кроме последнего. Первые два, L19 и L20 были найдены методом замыкания с помощью Sage путем поиска. для замкнутых конкретных представлений в решетке разбиения (8). Что касается L17, напомним, что решетка Sub(A4) подгрупп группы A4 (группы всех четных перестановок четырехэлементного множества) есть решетка, показанная ниже.

---

[3] Имена этих решеток не соответствуют ни одному устоявшемуся соглашению об именах.



Здесь V4 обозначает подгруппу четырех Клейна, а P обозначает одну из четырех силовских 3-подгрупп группы A4.

Конечно, Sub(A4) — это конгруэнц-решетка алгебры перестановок, состоящая из A4, действующего регулярно на себя путем умножения. Теперь заметим, что L17 = P V 4 , союз фильтра и идеала представимой решетки. Следовательно, L17 представима.

Вопрос о том, означает ли существование такого «представления идеи-фильтра», что решетка, о которой идет речь, также является интервалом в подгруппе, решетка кажется открытой. Хотя в настоящее время В этом случае мы обнаружили, что L17 имеет групповое представление. Действительно, группа G = (A4 × A4) C2 имеет подгруппу H = S3 такую, что [H, G] = L17.

Теперь, согласно результату Курцвейла-Неттера, двойственный L17 также представим. Явно, поскольку L17 представим на наборе из 12 элементов (элементы A4) с помощью метода идеального фильтра[4], двойственного к L17 можно вложить над диагональной подгруппой 12-й степени простой группы: L'_{17} [Д, C12] = (Уравнение (12))' . Затем, добавив операции из исходного представления L17 , как описано в В доказательстве теоремы 2.2.2 имеем алгебру с универсумом S 12/D и решеткой конгруэнций, изоморфной от 5 до $Л'_{17}$.

Решетка L13 является интервалом в решетке подгрупп. В частности, поиск GAP показывает, что Группа[6] G = (C2 × C2 × C2 × C2) A5 имеет подгруппу H = A4 такую, что [H, G] = L13. Индекс есть |G : H| = 80, поэтому действие G на смежных классах G/H является алгеброй во вселенной, состоящей из 80 элементов.

Хотя мы не обнаружили L11 как интервал в решетке подгрупп, мы обнаружили, что пятиугольник N5 — верхний интервал в решетке подгрупп групп G = ((C3 × C3) Q8) C3 и G = (A4 × A4) C2. [7] В каждой из этих групп существует подгруппа H < G (индекса 36) с [H, G] = N5. Пусть [H, G] = {H, α, β, γ, G} = N5. (См. рис. 6.3.) Конечно, Sub(G) является сравнением

---

[4] Обратите внимание, что метод «фильтр плюс идеал» добавляет только операции к алгебре, исходная решетка которой была конгруэнтной решеткой, оставляя вселенную неизменной. Таким образом, фильтро-идеальная подрешетка представляет собой решетку конгруэнций алгебры с тем же числом элементов, что и исходная алгебра.

[5] Кстати, поскольку L17 также представима как интервал над подгруппой (с индексом 48), мы могли бы применить вместо этого метод Курцвейла-Неттера, используя это представление. Тогда мы получили бы групповое представление двойственного (а именно, верхний интервал в группе вида S G, где G = (A4 × A4) C2). 48

[6] В GAP это SmallGroup(960,11358).

[7] Q8 обозначает группу кватернионов из восьми элементов.

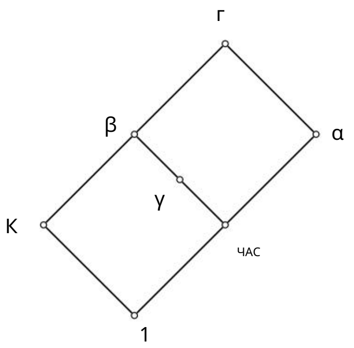


Рисунок 6.3: Решетка L11 представлена как объединение фильтра и идеала в решетке подгрупп группы G. Два варианта G, которые работают: SmallGroup(216,153) = ((C3 × C3) Q8) C3 и SmallGroup(288,1025) = (A4 × A4) C2.

решетке, поэтому если существует подгруппа K 1 ниже β, а не ниже γ, то L11 = K H . Действительно, существует такая подгруппа K.

Помимо простых случаев, которые мы лишь кратко рассмотрели в начале этого раздела, существуют остаются всего лишь две семиэлементные решетки, для которых мы еще не описали представление. Эти представляют собой решетки внизу рисунка 6.2. Находя представление L9, получившее название «тройной крыло пятиугольника» было довольно сложной задачей. Это породило идею расширения конечных алгебр, которую мы подробно опишите в следующей главе (гл. 7). Здесь мы лишь упомянем основную идею применительно к именно эта решетка. Поскольку цель состоит в том, чтобы найти алгебру с решеткой конгруэнций L9, мы начнем с алгебра, имеющая конгруэнтную решетку M4 , то есть решетку из шести элементов высоты два с четырьмя атомы (которые также являются коатомами). Затем мы расширяем алгебру, добавляя элементы во Вселенную и добавление определенных операций так, чтобы вновь расширенная алгебра имела почти ту же решетку конгруэнтности как оригинал, за исключением того, что один из атомов был удвоен. То есть полученная решетка конгруэнтности изоморфен L9. Этот пример и мощные методы, возникшие на его основе, описаны в Глава 7.

Пока неизвестно, представима ли окончательная решетка, представленная на рис. 6.2, в виде решетка конгруэнций конечной алгебры. Таким образом, L7 — единственная наименьшая решетка, для которой не существует известное представление. Это тема следующего раздела.

6.3. Исключительная решетка из семи элементов.

В этом разделе мы рассмотрим L7, последнюю решетку из семи элементов, представленную на рис. 6.2. Пока что мы не могут найти конечную алгебру, имеющую конгруэнц-решетку, изоморфную L7, и это наименьшая решетка, для которой мы не нашли такого представления.

Предположим, что A — конечная алгебра с Con A = L7, и пусть A имеет минимальную мощность среди те алгебры, которые имеют конгруэнц-решетку, изоморфную L7. Тогда A должно быть изоморфно a транзитивное G-множество. (Этот факт будет доказан в будущей статье [11].) Следовательно, если L7 представима, мы можем предположить, что существует конечная группа G с подгруппой без ядра H < G такая, что L7 изоморфна интервальной подрешетке [H, G] Sub(G). В этом разделе мы представляем некоторые ограничения на возможные группы, для которых это может произойти.

Первое ограничение, которое легче всего соблюдать, состоит в том, что G должен действовать примитивно на смежных классах одной из ее максимальных подгрупп. Это предполагает возможность описания G в терминах Теорема О'Нэна-Скотта, характеризующая примитивные группы подстановок. Цель состоит в том, чтобы в конечном итоге найдите достаточно ограничений на G, чтобы исключить все конечные группы. Пока мы этого не добились цель. Однако новые результаты в этом разделе сводят возможности к очень специальным подклассам классификационная теорема О'Нэна-Скотта. Это открывает путь для будущих исследований, сосредоточив внимание на этих подклассы при поиске группового представления L7 или доказательстве того, что его не существует.

Основным результатом этого раздела является следующее:

Теорема 6.3.1. Предположим, что H < G — конечные группы с coreG(H) = 1, и пусть L7 = [H, G]. Тогда справедливо следующее.

(i) G — примитивная группа перестановок.

(ii) Если N G, то CG(N) = 1.

(iii) G не содержит нетривиальной абелевой нормальной подгруппы.

(iv) G неразрешима.

(v) G подпрямо неприводима.

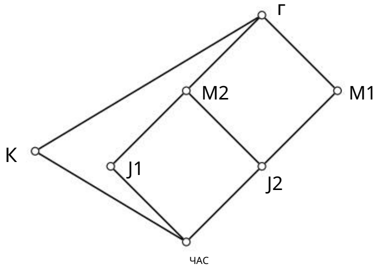
(vi) За возможным исключением не более чем одной максимальной подгруппы, все собственные подгруппы в интервал [H, G] свободны от ядра.

---

[8] Напомним, что ядром подгруппы X группы G является наибольшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в X. Это обозначается по coreG(X). Мы говорим, что X не имеет ядра в G, если coreG(X) = 1.

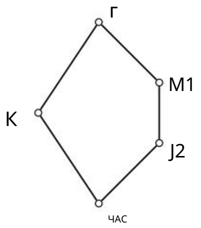
Замечание. Очевидно, что (ii) (iii) (iv) и (ii) (v), но мы включаем эти простые следствия в формулировке результата для акцента; ибо, хотя тяжелая работа будет заключаться в доказательстве (ii) и (vi) нашей основной целью является пара ограничений (iii) и (v), которые позволяют исключить ряд типы О'Нэна-Скотта, описывающие примитивные группы перестановок. (Раздел A.2.1 содержит подробное описание описание этих типов.)

Предположим, что выполнены условия приведенной выше теоремы. В частности, в этом разделе все группы конечны, H — подгруппа без ядра в G и [H, G] = L7. Обозначьте семь подгрупп группы G в интервал [H, G], как показано на следующей диаграмме:



Ярлыки выбраны с целью помочь нам запомнить, к каким подгруппам они относятся: максимальная подгруппа M2 покрывает две подгруппы в интервале [H, G], а J2 покрывается двумя подгруппы Г.

Теперь мы докажем предыдущую теорему с помощью ряда утверждений. Первое, на что следует обратить внимание интервала [H, G] состоит в том, что K является немодулярным элементом интервала. Это означает, что существует охватывающая пятиугольная (N5) подрешетка отрезка с K как несравнимым собственным элементом. (См., например, диаграмму ниже.)



Используя это свойство немодулярности K, легко доказать следующее

Утверждение 6.1. K — подгруппа без ядра в G.

Доказательство. Пусть N := coreG(K). Если NX для некоторого X {M1, M2, J1, J2}, то N < X K = H, поэтому N = 1 (поскольку H не имеет ядра). Если NX для всех X {M1, M2, J1, J2}, то N J2 = G. Но тогда

Правило Дедекинда приводит к следующему противоречию:

$$J2\ M1 \quad J2 = J2(N \quad M1) = J2N \quad M1 = G \quad M1 = M1.$$

Следовательно, H = 1. ☐

Заметим, что (i) теоремы следует из п. 6.1. Поскольку K не имеет ядра, G действует точно на классы G/K умножением справа. Поскольку K — максимальная подгруппа, действие примитивно.

Следующее утверждение лишь немного сложнее предыдущего, поскольку требует более общего подхода. следствие правила Дедекинда, которое мы установили выше в лемме 5.4.2 (i).

Утверждение 6.2. J1 и J2 — подгруппы без ядра в G.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если NG, то подгруппа NH переставляет[9] любую подгруппу, содержащую H. Чтобы увидеть это, позвольте HXG и обратите внимание, что

$$NHX = NX = XN = XHN = XNH,$$

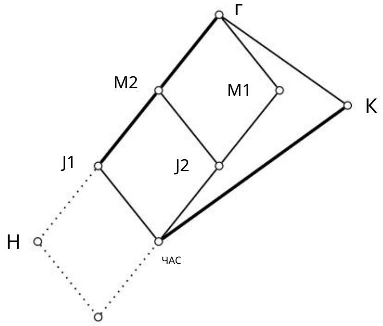
поскольку HX и N G.

Предположим, что 1 = N J1 для некоторого N G. Тогда NH = J1, поэтому J1 и K — перестановочные подгруппы. Поскольку J1K = G и J1 K = H, из леммы 5.4.2 следует

$$[J1, G] \quad = [H, K]^{J1} := \{X \quad [H, K] \mid J1X = XJ1\}.$$

Но это невозможно, поскольку $[H, K]^{J1}$ [H, K] = 2, а [J1, G] = 3. Это доказывает, что coreG(J1) = 1.

Интервалы, участвующие в аргументации, показаны жирными линиями на следующей диаграмме.



---

[9] Напомним, для подгрупп X и Y группы G определим множества XY = {xy | x X, y Y } и YX = {yx | x X, y Y }, и мы говорим, что X и Y являются перестановочными подгруппами (или что X и Y переставляются, или что X переставляется с Y), при условии, что два множества XY и YX совпадают, и в этом случае набор образует группа: XY = X, Y = Y X.

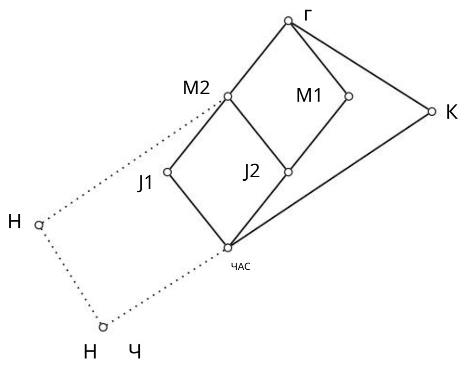


Рисунок 6.4: Диаграмма Хассе, иллюстрирующая случаи, когда M2 имеет нетривиальное ядро: 1 = N M2 для некоторого N G.

Доказательство того, что J2 не имеет ядра, аналогично. Предположим, 1 = N J2 , где N G. Тогда NH = J2

J2 и K перестановочны. Следовательно, [H, K] J2 = [J2, G] по лемме 5.4.2, что является а и подгруппы противоречие, поскольку [H, K]^{J2} [H, K] = 2, а [J2, G] = 2 × 2. □

Теперь, когда мы знаем, что K, J1, J2 не содержат ядер в G, мы используем эту информацию, чтобы доказать, что при хотя бы одна из других максимальных подгрупп, M1 или M2, не имеет ядра в G, тем самым устанавливая (vi) теорема. Мы также увидим, что G подпрямо неприводима, доказав (v). Доказательство (ii) будет то следует из тех же рассуждений, которые использовались при доказательстве леммы 5.4.2 (ii), которую мы повторяем ниже.

Утверждение 6.3. Либо M1 , либо M2 не имеют ядра в G. Если M2 имеет нетривиальное ядро и N G содержится в M2, то CG(N) = 1 и G подпрямо неприводима.

Доказательство. Предположим, что M2 имеет нетривиальное ядро. Тогда существует минимальная нормальная подгруппа 1 = N G содержится в M2. Поскольку H, J1, J2 не содержат ядер, NH = M2. Рассмотрим централизатор CG(N) числа N в Конечно, это нормальная подгруппа в G. 10 Если CG(N) = 1, то, поскольку минимальные нормальные подгруппы G. централизуют друг друга, N должна быть единственной минимальной нормальной подгруппой группы G. Кроме того, M1 должна в этом случае быть без ядра. В противном случае N M1 M2 = J2, что противоречит coreG(J2) = 1. Следовательно, в В случае CG(N) = 1 мы заключаем, что G подпрямо неприводима и M1 не имеет ядра.

Теперь мы докажем, что альтернатива CG(N) = 1 не существует. Этот случай немного сложнее и должен быть разбит на дальнейшие подслучаи, каждый из которых приводит к противоречию. В течение предположение 1 = N M2 остается в силе, поэтому полезно помнить о диаграмме, представленной на рис. 6.4.

---

[10] Централизатор нормальной подгруппы NG сам по себе нормален в G. Ибо он является ядром действия сопряжения группы G на N. Таким образом, CG(N) NG(N) = G.

Предположим, CG(N) = 1. Тогда, поскольку CG(N) G и H, J1, J2, K лишены ядра, ясно, что CG(N)H {G, M1, M2}. Мы рассматриваем каждый случай отдельно.

Случай 1. Предположим, что CG(N)H = G. Заметим, что N H < N J1 < N (строго). Подгруппа N J1 нормализуется J1 и CG(N), поэтому он нормален в CG(N)J1 CG(N)H = G, что противоречит минимальности N. Таким образом, случай CG(N)H = G не имеет места.

Случай 2: Предположим, CG(N)H = M1. Подгруппа N J1 нормализована как H, так и CG(N). Для, CG(N) централизует и, следовательно, нормализует каждую подгруппу группы N. Следовательно, N J1 нормализована. по CG(N)H = M1. Конечно, он также нормализуется J1, поэтому N J1 нормализуется множеством M1J1, поэтому он нормализуется группой, порожденной этим набором, то есть M1, J1 = G. [11] вывод состоит в том, что N J1 G. Поскольку J1 бесядерный, N J1 = 1. Но это противоречит (согласно теперь знакомо) следствие правила Дедекинда:

$$H < J1 < M2 \quad N \quad H < N \quad J1 < N \quad M2.$$

Следовательно, CG(N)H = M1 не возникает.

Случай 3. Предположим, CG(N)H = M2. Подгруппа N M1 нормализована как H, так и CG(N). Следовательно, N M1 нормализуется CG(N)H = M2. Конечно, оно также нормируется по M1, поэтому N M1 нормализуется M1, M2 = G. Вывод состоит в том, что N M1 G. Ввиду минимальности нормальной подгруппы N должно быть либо N M1 = 1, либо N M1 = N. Первое из равенства следует N J2 = 1, что противоречит строгим неравенствам правила Дедекинда:

$$H < J2 < M2 \quad N \quad H < N \quad J2 < N \quad M2, \tag{6.3.1}$$

а из последнего равенства (N M1 = N) следует, что N M1 M2 = J2 , что противоречит coreG(J2) = 1.

□

Мы доказали, что либо M1 , либо M2 не имеют ядра в G, и показали, что если M2 имеет нетривиальное ядро, то G подпрямо неприводима. Фактически мы доказали, что CG(N) = 1 для единственного в этом случае минимальная нормальная подгруппа N. Осталось доказать, что G подпрямо неприводима в

---

[11] На самом деле в этом случае множество уже является группой, поскольку M1J1 = CG(N)HJ1 = J1CG(N)H = J1M1.

случай M1 имеет нетривиальное ядро. Аргумент аналогичен предыдущему, и мы опускаем некоторые из них.

детали, которые можно проверить точно так же, как указано выше.

Утверждение 6.4. Если M1 имеет нетривиальное ядро и N G содержится в M1, то CG(N) = 1 и G

подпрямо неприводимый.

Доказательство. Если M1 имеет нетривиальное ядро, то существует минимальная нормальная подгруппа N G, содержащаяся в M1.

Выше мы доказали, что в этом случае M2 не должна иметь ядер, поэтому либо CG(N)H = G, CG(N)H = M1,

или CG(N) = 1. Первый случай легко исключается точно так же, как и в случае 1 выше. Второй случай

обрабатывается аргументом, который мы использовали в случае 3. Действительно, если предположить, что CG(N)H = M1, то N M2

нормируется как H, так и CG(N), а значит, и M1. Он также нормализуется M2, поэтому N M2 G.

Таким образом, в силу минимальности N и отсутствия ядра M2 N M2 = 1. Но тогда N J2 = 1, что приводит к

к противоречию, аналогичному (6.3.1), но с заменой M1 на M2. Следовательно, случай CG(N)H = M1

не встречается, и мы доказали, что CG(N) = 1. □

До сих пор мы доказали, что все промежуточные собственные подгруппы в интервале [H, G] не имеют ядра.

за исключением, возможно, не более одного из M1 или M2. Более того, мы доказали, что если одна из максимальных подгрупп

имеет нетривиальное ядро, то существует единственная минимальная нормальная подгруппа N G с тривиальным централизатором,

CG(N) = 1. Как объяснялось выше, G в этом случае подпрямо неприводима, поскольку минимальная нормаль

подгруппы централизуют друг друга.

Для доказательства (ii) осталось проверить только один случай, и аргументация к настоящему времени очень убедительна.

привычный.

Утверждение 6.5. Если каждая HX < G лишена ядер и N — минимальная нормальная подгруппа группы G, то

КГ(Н) = 1.

Доказательство. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда по гипотезе отсутствия ядер имеем

NH = G. Зафиксируем подгруппу H < X < G. Тогда N H < N X < N. Подгруппа N X есть

нормированные H и CG(N). Если CG(N) = 1, то CG(N)H = G по гипотезе отсутствия ядра, поэтому

N X G, что противоречит минимальности N. Следовательно, CG(N) = 1. □

Наконец, отметим, что приведенные выше утверждения в совокупности доказывают (ii) и тем самым завершают доказательство.

теоремы. Действительно, если G подпрямо неприводима с единственной минимальной нормальной подгруппой N и если

CG(N) = 1, то все нормальные подгруппы (которые обязательно лежат выше N) должны иметь тривиальные централизаторы.

6.4 Заключение

Мы завершим эту главу последним наблюдением, которое поможет нам описать тип О'Нэна-Скотта. группа, у которой L7 является интервалом в решетке подгрупп. Закончим гипотезой, которая должна стать предметом будущих исследований.

Согласно тому, что мы доказали выше, G действует примитивно на смежных классах K, а также примитивно действует на смежных классах хотя бы одного из M1 или M2. Предположим, что M1 не имеет ядер, так что G — примитивная перестановка. группы в ее действии на смежные классы группы M1 и пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Как мы видели, N имеет тривиальный централизатор, поэтому она неабелева и является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G. Теперь мы видели, что в этом случае NH M2 , поэтому из H < J2 < NH следует, что N M1 = 1. Аналогично, если бы мы начали с предположения, что M2 не имеет ядра, тогда NH M1 и H < J2 < NH были бы подразумеваем, что N M2 = 1.

Из следующего элементарного результата (см., например, [20]) мы видим, что действие N на смежных классах максимальная подгруппа Mi без ядра не является регулярной[12]. Следовательно, группа G характеризуется случаем 2 версия теоремы О'Нэна-Скотта, приведенная в приложении, раздел A.2.

Лемма 6.4.1. Если G действует транзитивно на множестве Ω со стабилизатором Gω, то подгруппа NG действует транзитивно на Ω тогда и только тогда, когда NGω = G. Кроме того, N регулярен тогда и только тогда, когда дополнительно N Gω = 1.

---

[12] Напомним, что транзитивная группа подстановок N действует регулярно на множестве Ω при условии, что стабилизирующая подгруппа N тривиальна. Эквивалентно, каждый неединичный элемент N не имеет неподвижных точек. Эквивалентно, N является регулярным на Ω тогда и только тогда, когда для каждых ω1, ω2 Ω существует единственный n N такой, что nω1 = ω2. В частности, |N| = |Ом|.

ГЛАВА 7
РАЗЛОЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ АЛГЕБРЫ

7.1 Предыстория и мотивация

В этой главе мы представляем новый подход к построению новых конечных алгебр и описываем решетки конгруэнций этих алгебр. Учитывая конечную алгебру B, . . ., пусть B1, B2, . . . , БК быть множества, которые пересекают B в определенных точках. Построим овералгебру A, FA, под которой будем понимать расширение B, . . . с универсумом A := B B1 · · · BK и некоторым множеством FA унарных операции, которые включают идемпотентные отображения e и ei , удовлетворяющие e(A) = B и ei(A) = Bi . Мы исследовать ряд таких конструкций и доказать результаты о форме нового сравнения решетки Con A, FA . Таким образом, описания некоторых новых классов конечно представимых решетки — один из наших основных вкладов. Другим, возможно, более значительным вкладом является анонс нового подхода к открытию новых классов представимых решеток.

Наш основной вклад — описание и анализ новой процедуры генерации конечных решетки, которые по построению конечно представимы. Грубо говоря, начнем с арбитража. трари конечная алгебра B := B, . . ., с известной решеткой конгруэнтности Con B, и пусть B1, B2, . . . , БК быть множествами, которые пересекают B в определенных точках. Выбор точек пересечения играет важную роль. роль, которую мы подробно опишем позже. Затем мы построим овералгебру A := A, FA, по которой мы имеем в виду расширение B с универсумом A = B B1 · · · BK и некоторым множеством FA одноместных операции, которые включают идемпотентные отображения e и ei , удовлетворяющие e(A) = B и ei(A) = Bi .

Учитывая наш интерес к упомянутой выше проблеме, важным следствием этой процедуры является — это новая (конечно представимая) решетка Con A, которую он производит. Форма этой решетки такая: Конечно, определяется формой Con B, выбором точек пересечения Bi , и унарный операции, выбранные для включения в ФА. В этой главе мы опишем ряд конструкций этого наберите и докажите некоторые результаты о форме решеток конгруэнций полученных овералгебр.

Прежде чем дать обзор этой главы, мы дадим немного предыстории исходного примера. что и послужило толчком к этой работе. Весной 2011 года нашему научному семинару повезло. достаточно, чтобы посетить Питера Джипсена, который инициировал амбициозный проект каталогизации каждой мелочи. конечная решетка L, для которой существует известная конечная алгебра A с Con A = L. Вскоре мы имели идентифицировал такие конечные представления для всех решеток седьмого порядка и меньше, за исключением двух решеток показано на рисунке 7.1. (В разделе 6.2 описаны некоторые методы, которые мы использовали для поиска представлений другие семиэлементные решетки.) Затем Ральф Фриз открыл способ построить алгебру, которая имеет вторую из них в качестве решетки конгруэнтности. Идея состоит в том, чтобы начать с алгебры B = B, . . . имея решетку конгруэнтности Con B = M4, расширим вселенную до большего множества A = B B1 B2 и затем определите правое множество FA операций над A так, чтобы решетка конгруэнции A = A, FF была быть M4 с одним «удвоенным» атомом, то есть Con A будет второй решеткой на рисунке 7.1.

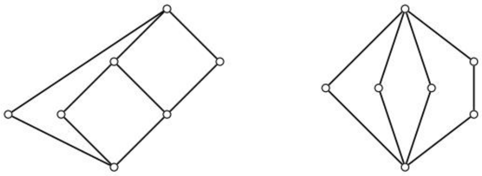


Рисунок 7.1: Решетки порядка 7 без очевидного конечного алгебраического представления.

В этой главе мы формализуем этот подход и расширяем его четырьмя способами. Первый – прямой прямое обобщение исходной конструкции овералгебры, а второе является дальнейшим расширением этих овералгебр. Третья представляет собой конструкцию, основанную на конструкции, предложенной Биллом Лампе, которая устраняет основное ограничение исходной процедуры. Наконец, мы даем обобщение третья конструкция. Для каждой из этих конструкций доказываются результаты, позволяющие описать решетки конгруэнций полученных овералгебр.

Вот краткий план остальных разделов этой главы: В разделе 7.2 мы доказываем лемму. что значительно упрощает анализ структуры вновь увеличенной решетки конгруэнций и ее отношению к исходной решетке конгруэнций. В разделе 7.3 мы определяем надалгебру, а в разделе 7.3.1 дадим формальное описание упомянутой выше исходной конструкции. Затем мы опишем Подробный оригинальный пример, прежде чем доказывать некоторые общие результаты о решетках конгруэнтности таких овералгебры. В конце раздела 7.3.1 мы опишем дальнейшее расширение набора операций определенные в первой конструкции, и завершим раздел примером, демонстрирующим полезность этих дополнительных операций. В разделе 7.3.2 представлена вторая конструкция овералгебры, которая преодолевает основное ограничение первого. Затем мы доказываем результат о структуре сравнения решетки этих овералгебр и завершим раздел еще несколькими примерами, иллюстрирующими процедуру и продемонстрировать ее полезность. В разделе 7.3.3 мы описываем конструкцию, которая далее обобщает вариант из раздела 7.3.2. В последнем разделе обсуждается влияние, которое наши результаты оказывают на основная проблема - проблема представления конечной конгруэнтной решетки - а также присущая ограничения этого подхода и завершается некоторыми открытыми вопросами и предложениями по дальнейшему развитию.

исследовать.

7.2 Лемма об вычетах

Пусть e^2 = e Pol1(A) — идемпотентный унарный многочлен, определим B := e(A) и FB := {ef |B | f Pol1(A)} и рассмотрим унарную[1] алгебру B := B, FB. Палфи и Пудлак доказывают в лемме 1 α B2 из [32], что отображение ограничения |B , определенное на Con A посредством α |B = , является решеточным эпиморфизмом Con A на Con B. В [24] Маккензи, взяв за отправную точку лемму 1, развивает основы того, что впоследствии стало теорией ручной конгруэнтности. В доказательстве конгруэнтной решетки Палфи-Пудлака лемме об эпиморфизме Маккензи вводит отображение, определенное на Con B формулой

$$β = \{(x, y) \quad A^2 \mid (ef(x), ef(y)) \quad β \text{ для всех } f \quad \mathrm{Pol1}(A)\}.$$

Нетрудно видеть, что это отображает Con B в Con A. Например, если (x, y) β и g Pol1(A), тогда для всех f Pol1(A) имеем (efg(x), efg(y)) β, поэтому (g(x), g(y)) β.

каждого β Con B пусть β = CgA(β). То есть для : Con B Con A — это порождение конгруэнтности. оператор, ограниченный множеством Con B. Следующая лемма касается трех отображений |B , , и . Третье утверждение леммы, вытекающее из первых двух, будет полезно в дальнейшем. разделы этой главы.

Лемма 7.2.1.

(i) : Con B Con A — резидуированное отображение с остатком |B .

(ii) |B : Con A Con B — результирующее отображение с остатком .

(iii) Для всех α Con A, β Con B,

$$β = α|B \quad β \qquad α\ β.$$

В частности, β |B = β = β |B .

Доказательство. Сначала напомним определение результирующего отображения. Если X и Y — частично упорядоченные множества, и если f : X Y и g : Y X — отображения, сохраняющие порядок, то следующие утверждения эквивалентны:

---

[1] В определении FB мы могли бы использовать Pol(A) вместо Pol1(A), и тогда наше обсуждение не ограничивалось бы унарными алгебрами. Однако, поскольку мы в основном занимаемся конгруэнтными решетками, мы ничего не теряем, ограничивая область применения таким образом. Кроме того, последующие разделы этой главы будут посвящены исключительно унарным алгебрам, поэтому для единообразия мы определяем B как унарную и в этом разделе.

(a) f : X Y — результирующее отображение с остаткой g : Y X;

(б) для всех x X, y Y , f(x) y тогда и только тогда, когда xg(y);

(c) g f idX и f g idY .

Определение гласит, что для каждого y Y существует единственный x X, максимальный по отношению к свойство f(x) y, а максимальный x определяется g(y). Таким образом, (i) эквивалентно

$$\beta \quad \alpha \quad \beta\ \alpha|B\ (\quad \alpha \quad \text{Con } A, \quad \beta \quad \text{Con } B). \tag{7.2.1}$$

Это легко проверить следующим образом: если β α и (x, y) β, то (x, y) β α и (x, y) B2 , так (x, y) α|B . Если β α|B , то β (α|B) CgA(α) = α.

Утверждение (ii) эквивалентно

$$\alpha|B\beta \quad \alpha\beta\ (\quad \alpha \quad \text{Con } A, \quad \beta \quad \text{Con } B). \tag{7.2.2}$$

Это также легко проверить. Действительно, предположим, что α|B β и (x, y) α. Тогда (ef(x), ef(y)) α для всех f € Pol1(A) и (ef(x), ef(y)) € B2 , следовательно,(ef(x), ef(y)) € α|B β, значит (x, y) € β. Предполагать αβ и (x, y) α|B . Тогда (x, y) α β, поэтому (ef(x), ef(y)) β для всех f Pol1(A), включая f = idA, поэтому (e(x), e(y)) β. Но (x, y) B2 , поэтому (x, y) = (e(x), e(y)) β.

Комбинируя (7.2.1) и (7.2.2), получаем утверждение (iii) леммы. ☐

Приведенная выше лемма была вдохновлена двумя подходами к доказательству леммы 1 из [32]. В оригинале бумага используется, а Маккензи использует оператор. И β , и β отображаются на β с помощью карта ограничения |B , поэтому карта ограничения действительно находится на Con B. Однако наша лемма подчеркивает тот факт, что интервал

[β , β] знак равно {α Con A | β α β}

является в точности набором сравнений, для которых α|B = β. Другими словами, прообраз β при |B есть $\beta|_Б^{1}$ = [β , β]. Этот факт играет центральную роль в развиваемой ниже теории. Тем не менее, для для полноты картины завершим этот раздел проверкой того, что лемма 1 из [32] может быть получена из леммы выше.

Следствие 7.2.2. |B : Con A Con B включен и сохраняет встречи и соединения.

Доказательство. Учитывая β Con B, каждый θ Con A в интервале [β , β] отображается в θ|B = β, поэтому | B явно на. То, что |B сохраняет соответствие, очевидно. Чтобы увидеть, что |B сохраняет объединение, обратите внимание, что для всех η, θ Con A, имеем

$$\eta|B \quad \theta|B\ (\eta \quad \theta)|B$$

поскольку |B сохраняет порядок. Противоположное неравенство следует из (7.2.2) выше. Для,

$$(\eta \quad \theta)|B\ \eta|B \quad \theta|B \quad \eta \quad \theta\ \eta|B \quad \theta|B\ ,$$

и второе неравенство выполнено, поскольку снова в силу (7.2.2)

$$\eta\ \eta|B \quad \theta|B \quad \eta|B\ \eta|B \quad \theta|B$$

и

$$\theta\ \eta|B \quad \theta|B \quad \theta|B\ \eta|B \quad \theta|B\ .$$

□

Замечание. Этот подход к доказательству леммы 1 из [32], аналогичный доказательству, приведенному в [24], не позволяет не раскрывают никакой информации о перестановочности сравнений A, в отличие от более прямого доказательство приведено в [32].

7.3 Овералгебры

В предыдущем разделе мы начали с алгебры A и рассмотрели подредукт B с универсумом. B = e(A), образ идемпотентного одноместного полинома A. В этом разделе мы начнем с фиксированного конечная алгебра B = B, . . . и рассмотрим различные способы построения овералгебры, т. е. алгебры A = A, FA имеет B как подредуктор, где B = e(A) для некоторого идемпотента e FA. Начало с конкретной конечной алгеброй B наша цель — понять, какое (конечно представимое) сравнение решетки Con A можно построить из Con B, расширив таким образом алгебру B.

7.3.1 Overалгебры I

Пусть B — конечное множество, скажем, B = {b1, b2 . . . , bn}, пусть F   BB — множество унарных отображений, переводящих B в себя и рассмотрим унарную алгебру B = B, F с универсумом B и базовыми операциями F. Когда ясность требует этого, мы называем эту совокупность операций FB. Пусть B1, B2, . . . , BK — множества одинаковых мощность как B, которые пересекают B ровно в одной точке, а именно:

B = {b1, b2, b3, . . . , бн}

B1 = {b1, b1 $_2$, б1 $_3$, . . . , б1 $_н$ }

B2 = {б $^2_1$, б2, б2 $_3$, . . . , Би2 $_н$ }

B3 = {б $^3_1$, b3 b3 2 , b3, . . . $_н$ }

⋮ (7.3.1)

БК = {б $^К_1$, . . . , бК $_К$ 1 , бК, бК К+1, . . . , бК $_н$ }.

То есть для всех 1   i < j K, имеем

|Би | = n K, B   Bi = {bi} и Bi   Bj =   .

Иногда удобно использовать метку B0 := B.

Пусть πi : B   Bi задается формулой πi(bj) = b $^я_{Дж ,}$ для i = 0, 1, 2, . . . , n и j = 1, 2, . . . , K. (Удобно включить i = 0 в это определение, и в этом случае мы полагаем π0(bj) = b $^0_{дж}$:= bj .) Отображение πi и операции F индуцируют множество Fi унарных операций на Bi   , следующим образом: каждому f   F соответствует операция f πi : Bi   Bi, определяемая f πi . Таким образом = πifπ 1 $_я$, для каждого i Bi := Bi   , Fi и B = B, F являются изоморфными алгебрами. То есть для всех i = 1, . . . , K, у нас есть

πi : B, F   = Bi   , Фи

Б   б   б ^{я} Би

Ф   ж   ж ^{πi} Фи

Сказать, что πi — изоморфизм двух неиндексированных алгебр, — значит сказать, что πi — биекция вселенные, в которых учитывается интерпретация основных операций; то есть πif(b) = f πi (πib). В в данном случае это справедливо по построению:[2] πif(b) = πif($π_я^{1}$ πib) = f πi (πib).

Пусть A = $^{K}_{я = 0}$ Bi и определим на A следующие унарные отображения:

- ek : A A — это ek($b^{дк}_{я}$) = $б^{К}_{я}$ (1 в; 0 j, k K);
- s : A A есть

$$s(x) = \begin{cases} \text{Икс,} & \text{если x B0,} \\ \text{би,} & \text{если x € Би .} \end{cases}$$

Позволять

$$FA := \{fe0 : f \quad F\} \quad \{ek : 0 \; k \; K\} \quad \{s\},$$

и определим унарную алгебру A := A, FA.

Везде отображение определяется по существу так же, как и в статье Маккензи [24].

То есть, учитывая две алгебры A = A, . . . и B = B, . . . с B = e(A) для некоторого идемпотента e Pol1(A), мы определяем : Con B Con A по формуле

$$β = \{(x, y) \quad A^{2} \mid (ef(x), ef(y)) \quad β, \quad f \quad Pol1(A)\} \; (β \quad Con\ B).$$

Пример 7.3.1. Прежде чем доказывать некоторые результаты об основной структуре конгруэнтной решетки как оверaлгебра, мы представляем оригинальный пример, открытый Ральфом Фризом, конечной алгебры с конгруэнтная решетка, изоморфная второй решетке на рис. 7.1. Рассмотрим конечную перестановку алгебра B = B, F с решеткой конгруэнций Con B = M4. (Рисунок 7.2) Существует лишь несколько небольших алгебры на выбор.[3] Рассмотрим правое регулярное S3-множество – т.е. алгебру S3 , действующую на себе путем правильного умножения. В ГАП,[4]

```
разрыв> G:=Group([(1,2), (1,2,3)]);;
разрыв> G:=Действие(G,G,OnRight);
Группа([ (1,5)(2,4)(3,6), (1,2,3)(4,5,6) ])
```

---

[2] Это обобщается на k-арные операции, если мы примем следующее соглашение: f πi (a1, . . . , ak) = πif($π_я^{1}$ (a1), . . . , $π_я^{1}$ (aк)).

[3] На самом деле их бесконечно много, но, если не считать тех, которые включают S3, C3 × C3 и (C3 × C3) C3, они довольно велики. Следующее известное нам наименьшее G-множество с конгруэнтной решеткой M4 принадлежит группе G = [((C3 × C3) C2) × ((C3 × C3) C2)] C2 , действующей на правых смежных классах группы H = Д8. Индекс в этом случае равен |G : H| = 81. (В GAP G:=SmallGroup(648,725), а H оказывается четвертым представителем класса максимальной подгруппы четвертого представителя класса максимальной подгруппы G.)

[4] Все вычислительные эксперименты, которые мы описываем в этой главе, основаны на двух программах с открытым исходным кодом: GAP [17] и Universal Algebra Calculator [16] (UACalc). Для проведения наших экспериментов мы написали небольшой набор функций GAP ; они доступны по адресу http://math.hawaii.edu/~williamdemeo/Overalgebras.html.

Мы предпочитаем использовать обозначение «0-смещение» и определяем вселенную описанного выше набора S3 как {0, 1, . . . , 5} вместо {1, 2, . . . , 6}. Таким образом, нетривиальные конгруэнтные отношения этой алгебры таковы:

```
пробел> для b в AllBlocks(G) do Print(Orbit(G,b,OnSets)-1, "\n"); од;
 [ [ 0, 1, 2 ], [ 3, 4, 5 ] ]
 [ [ 0, 3 ], [ 2, 5 ], [ 1, 4 ] ]
 [ [ 0, 4 ], [ 2, 3 ], [ 1, 5 ] ]
 [ [ 0, 5 ], [ 2, 4 ], [ 1, 3 ] ]
```

Далее мы создаем алгебру в формате UACalc , используя в качестве основных операций два генератора группы.[5]

```
разрыв> Читать("gap2uacalc.g");
разрыв> gset2uacalc([G,"S3action"]);
```

При этом создается файл UACalc , определяющий алгебру с юниверсом B = {0, 1, . . . , 5} и два базовых унарных операции g0 = (4 3 5 1 0 2) и g1 = (1 2 0 4 5 3). Эти операции являются перестановками (0, 4)(1, 3)(2, 5) и (0, 1, 2)(3, 4, 5), которые в обозначениях «1-смещение» являются генераторами (1, 5)(2, 4)(3, 6) и (1, 2, 3) (4, 5, 6) из набора S3, появляющегося в выходных данных GAP выше. На рис. 7.2 показано конгруэнтная решетка этой алгебры.

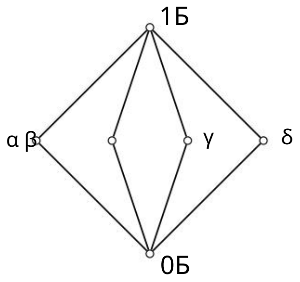


Рисунок 7.2: Решетка конгруэнций правого регулярного S3-множества, где α = |0, 1, 2 |3, 4, 5 | , β = |0, 3 |2, 5 |1, 4 | , γ = |0 , 4 |2, 3 |1, 5 | , δ = |0, 5 |2, 4 |1, 3 | .

Теперь построим овералгебру, которая «удвоит» сравнение α = CgB(0, 2) = |0, 1, 2 |3, 4, 5 | выбрав точки пересечения 0 и 2. Функция GAP Overalgebra осуществляет построение, и вызывается следующим образом:[6]

```
разрыв> Читать("Овералгебры.г");
разрыв> Овералгебра([G, [0,2]]);
```

---

[5] Программа GAP GAP2uacalc.g доступна на сайте www.uacalc.org.

[6] Файл GAP Overalgebras.g доступен по адресу http://dl.dropbox.com/u/17739547/diss/Overalgebras.g .

Это дает овералгебру с универсумом A = B0 B1 B2 = {0, 1, 2, 3, 4, 5} {0, 6, 7, 8, 9, 10} {11, 12, 2, 13, 14, 15} и следующие операции:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
e0	0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	0	1	3	4	5
e1	0	6	7	8	9	10	6	7	8	9	10	0	6	8	9	10
e2	11	12	2	13	14	15	12	2	13	14	15	11	12	13	14	15
c	0	1	2	3	4	5	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2
g0e0	4	3	5	1	0	2	3	5	1	0	2	4	3	1	0	2
g1e0	1	2	0	4	5	3	2	0	4	5	3	1	2	4	5	3

Если FA = {e0, e1, e2, s, g0e0, g1e0}, то алгебра A, FA имеет решетку конгруэнций, показанную на рис. Рисунок 7.3.

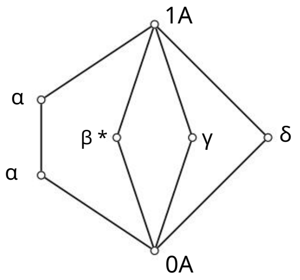


Рисунок 7.3: Решетка конгруэнций овералгебры S3-множества с точками пересечения 0 и 2.

Отношения конгруэнтности на рисунке 7.3 таковы:

α = |0, 1, 2, 6, 7, 11, 12 |3, 4, 5 |8, 9, 10, 13, 14, 15 |

$^{\alpha}$ = |0, 1, 2, 6, 7, 11, 12 |3, 4, 5 |8, 9, 10 |13, 14, 15 |

β = |0, 3, 8 |1, 4 |2, 5, 15 |6, 9 |7, 10 |11, 13 |12, 14 |

γ = |0, 4, 9 |1, 5 |2, 3, 13 |6, 10 |7, 8 |11, 14 |12, 15 |

δ = |0, 5, 10 |1, 3 |2, 4, 14 |6, 8 |7, 9, 11, 15 |12, 13 | .

Важно отметить, что результирующая решетка конгруэнций зависит от того, какой из них мы выберем. соответствие «расширению», которое контролируется нашей спецификацией точек пересечения овералгебра. Например, предположим, что мы хотим, чтобы одно из сравнений имело три блока, скажем, β = CgB(0, 3) = |0, 3 |2, 5 |1, 4 |, чтобы иметь нетривиальный прообраз β | $_{Б}^{1}$ = [β , β]. Тогда мы бы выбрали элементы 0 и 3 (или 2 и 5, или 1 и 4) как точки пересечения овералгебры. Чтобы выбрать 0 и 3, мы вызываем команду

разрыв> Овералгебра([G, [0,3]]);

В результате получается овералгебра с универсумом A = B0 B1 B2 = {0, 1, 2, 3, 4, 5} {0, 6, 7, 8, 9, 10} {11, 12, 13, 3, 14, 15} и решетка конгруэнтности показана на рисунке 7.4.

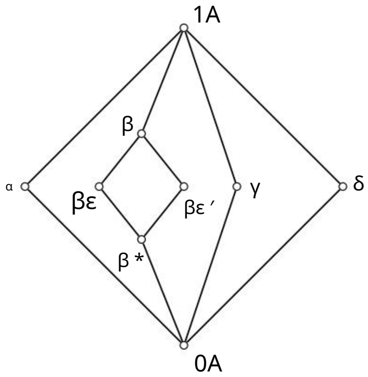


Рисунок 7.4: Решетка конгруэнций овералгебры S3 -множества с точками пересечения 0 и 3.

где

α = |0, 1, 2, 6, 7|3, 4, 5, 14, 15|8, 9, 10|11, 12, 13|

β = |0, 3, 8, 11|1, 4|2, 5|6, 9, 12, 14|7, 10, 13, 15|

βε = |0, 3, 8, 11|1, 4|2, 5|6, 9, 12, 14|7, 10|13, 15|

βε ′ = |0, 3, 8, 11|1, 4|2, 5|6, 9|7, 10, 13, 15|12, 14|

β = |0, 3, 8, 11|1, 4|2, 5|6, 9|7, 10|12, 14|13, 15|

γ = |0, 4, 9|1, 5|2, 3, 13|6, 10|7, 8|11, 14|12, 15|

δ = |0, 5, 10|1, 3, 12|2, 4|6, 8|7, 9|11, 15|13, 14|.

Теперь мы докажем две теоремы, описывающие основную структуру сравнения овералгебры. построено, как описано в начале этого раздела. В частности, теоремы объясняют, почему интервал [α , α] = 2 появляется в первом примере выше, а [β , β] = 2 × 2 появляется во втором.

Для конгруэнтного отношения β Con B пусть {bβ(1), . . . , bβ(m)} обозначают трансверсаль β; то есть полный набор представителей β-класса. Таким образом, как разбиение множества B, β имеет m классов или блоков. (Использование обозначения β(r) для индексов представителей помогает нам помнить, что bβ (r) представитель r-го блока сравнения β.) По определенным выше изоморфизмам πi

каждому β Con B соответствует отношение конгруэнтности β ^{Bi} Кон Би , и если {bβ(1), . . . , bβ(m)} –

трансверсаль β, то отображение πi также дает трансверсаль β ^{Bi} , а именно {πi(bβ(1)), . . . , πi(bβ(m))} =

β(r)^{я} би Би — это b {b }. Таким образом, r-й блок β β(1), . . . , β(m) ^{я} /βБи .

Пусть T = {b1, b2, . . . , bK} — множество связующих точек, т. е. точек, в которых множества Bi (1 ^{я} K) пересекают множество B. Пусть Tr = {b T | (b, bβ(r)) β} — множество связующих точек, находящихся в r-й класс конгруэнтности β.

Теорема 7.3.2. Для каждого β Con B

$$CgA(\beta) = \overset{K}{\underset{к=0}{}} \beta^{Бк} \overset{м}{\underset{p=1}{}} \underset{b\beta(r)/\beta}{} \underset{bjэTr}{} bj/\beta Bj^{2} \cdot \qquad (7.3.2)$$

Замечание. Прежде чем приступить к доказательству, советуем читателю рассмотреть небольшой пример:

показано на рисунках 7.5 и 7.6. Идентификация объектов справа от уравнения (7.3.2) в этих

цифры облегчат доказательство теоремы. В частности, как показывают цифры,

транзитивность требует, чтобы классы β Bj , связанные между собой связующими точками, в конечном итоге оказались в того же класса CgA(β). Это цель $\overset{м}{\underset{p=1}{}} (\cdot)^{2}$ срок.

Доказательство. Обозначим через β правую часть (7.3.2). Сначала проверим, что β Con A. Легко проверить где видим, что βявляется отношением эквивалентности, поэтому нам нужно только показать, что f(β) β для всех[7] f FA,

$$FA := \{fe0 : f \quad F\} \quad \{ek : 0 \; k \; K\} \quad \{s\}.$$

Другими словами, мы доказываем: если (x, y) β и f FA, то (f(x), f(y)) β ·

<u>Случай 1</u>: (x, y) β Bk для некоторого 0 k K.

Тогда (ei(x), ei(y)) β ^{Би} β для всех 0 i K и (fe0(x), fe0(y)) β β для всех f FB.

Также,

$$(s(x), s(y)) = \begin{cases} (x, y), & \text{если к = 0} \\ (bk, bk), & \text{если k = 0} \end{cases}$$

принадлежит β . Таким образом, (f(x), f(y)) β для всех f FA.

---

[7] Заметим, что βB0 = β.

Случай 2: (x, y) bβ(r)/β bjəTr bj/βBj 2 примерно за 1 м.

Предположим, что x € bj/βBj и y € bk/βBk для некоторых bj , bk € Tr. Тогда (e0(x), bj) β, (e0(y), bk) β и

и bj β bβ(r) β bk , так что

(e0(x), e0(y)) β. (7.3.3)

Таким образом, для всех 0 ℓ K имеем (eℓe0(x), eℓe0(y)) β Bℓ . Но обратите внимание, что eℓe0 = eℓ. Из этого также следует из (7.3.3) следует, что (fe0(x), fe0(y)) β для всех f FB. Наконец, (s(x), s(y)) = (bj , bk) β.

Единственная оставшаяся возможность для случая 2 — это x € bβ(r)/β и y € bj/βBj для некоторого bj € Tr. Так как bj Tr, то (bj , bβ(r)) β, поэтому (e0(y), bj) β, поэтому (e0(y), bβ(r)) β, поэтому (e0(x), x) = (e0(y), e0(x)) β. Следовательно, (eℓ(y), eℓ(x)) β Bℓ для всех 0 ℓ K и (fe0(y), fe0(x)) β для всех e € ФБ. Наконец, s(x) = x β bβ(r) β bj = s(y), поэтому (s(x), s(y)) β.

Мы установили, что f(β) β для всех f FA. Чтобы завершить доказательство теоремы 7.3.2, мы должен показать, что из β η Con A следует β η. Если β η Con A, то β Бк η, поскольку (x, y) β (ek(x), ek(y)) β Bk для всех 0 k K. Чтобы убедиться, что второе слагаемое в (7.3.2) принадлежит , следует (x, y) — произвольный элемент этого терма, скажем, (x, bi) β . Поскольку мы проВiои (y, bj) β Bj η, пусть наблюдается, β, βBi и β Bj являются подмножествами η, и (bi , bj) β, поэтому x βBi bi β bj β Bj y, поэтому (x, y) η.

□

Как и выше, для данного β Con B с трансверсалью {bβ(1), . . . , bβ(m)} обозначим множество связующих точек содержится в r-м блоке β по Tr; то есть,

K
Tp = {b T | (b, bβ(r)) β} = Bk bβ(r)/β.
κ=1

Предположим, что это множество Tr = {bi1 , bi2 , . . . , би|Tr| } и пусть Ir = {i1, i2, . . . , i|Tr|} — индексы этих = CgA(β) для β мы определяем β Con B. связующих точек. Также

На рисунках 7.5 и 7.6 эти объекты показаны на простом примере, в котором B0 = {b0, b1, . . . , b8}, β = |b0, b1, b2 | b3, b4, b5 | b6, b7, b8|, и два блока β содержат по две связующие точки каждый. В частности, набор связующих точек в первом блоке β равен T1 = {b0, b2}. Для второго и третьего блоков T2 = и T3 = {b6, b8}.

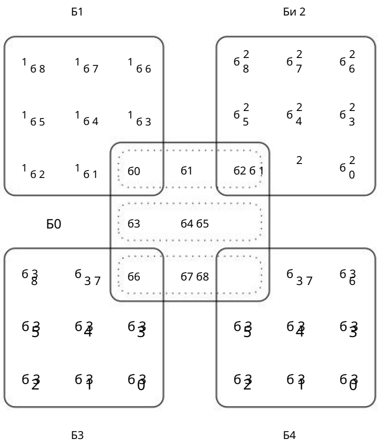


Рисунок 7.5: Вселенная A = B0 · · · B4 для простого примера; пунктирные линии окружают каждый класс конгруэнтности β.

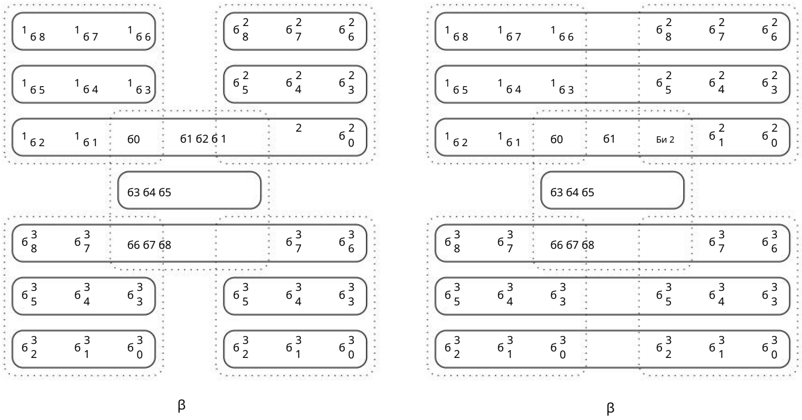


Рисунок 7.6: Сплошные линии показывают классы конгруэнтности β * (слева) и β (справа); пунктирные линии обозначают множества Bi .

Теорема 7.3.3. Для каждого β Con B

$$\beta = \beta \quad \overset{м}{\underset{r=1}{}} \; \overset{м}{\underset{(j,k)\varepsilon I\ \ell=r}{\overset{\ell=1}{}}} \quad {}^{2}_{р} \quad б_{j\ \beta(\ell)}/\beta Bj \quad б^{к}_{\beta(\ell)}/\beta Bk \ {}^{2} \ . \qquad (7.3.4)$$

Более того, интервал [β , β] Con A содержит все отношения эквивалентности A между β и β, и изоморфен (Eq|Tr|) $^{м\ 1}$; то есть,

$$[\beta \ , \beta] = \{\theta \quad Eq(A) \mid \beta \quad \theta \quad \beta\} \ = \ \overset{м}{\underset{p=1}{}} \ _{(Уравнение|Tr|)}{}^{м\ 1} \ . \qquad (7.3.5)$$

Замечание. Блоки, содержащие только одну связующую точку, т.е. те, для которых |Tr| = 1, ничего не вносите в прямое произведение в (7.3.5). Кроме того, для некоторого 1 rm мы можем иметь Tr = , и в этом случае мы соглашаемся чтобы позволить Eq|Tr| = уравнение(0) := 1.

Доказательство. Обозначим через β правую часть (7.3.4). Легко видеть, что β — отношение эквивалентности на A. Чтобы убедиться, что это также отношение конгруэнтности, мы докажем f(β) β для всех f FA. Исправить (x, y) β. Если (x, y) β , тогда (f(x), f(y)) β выполнено для всех f FA, как в теореме 7.3.2. Предполагать b j (x, y) / β , скажем, x $_{β (ℓ)}$ /βBj и y b $^{к}_{β (ℓ)}$ /βBk для некоторых j, k Ir, 1 rm и ℓ = r. Тогда x и y находятся в ℓ-ых блоках соответствующих вселенных субредуктов, Bj и Bk, поэтому для каждого 0 i K (ei(x), ei(y)) β ^{Би}. В частности, (e0(x), e0(y)) β, поэтому (ge0(x), ge0(y)) β для всех g FB. Также, (s(x), s(y)) = (bj , bk) T $^{2}_{р}$ β. Это доказывает, что для каждого f FA имеем (f(x), f(y)) β. (В на самом деле (f(x), f(y)) β .) Следовательно, β Con A.

Теперь заметьте, что β|B = β. Следовательно, по лемме об вычетах из раздела 7.2 имеем β β. К доказав обратное включение, предположим (x, y) / β и покажем (x, y) / β. Без ограничения общности предположим, что x b j β(p) /βBj и y b $^{к}_{β(q)}$ /βBk , для некоторого 1 p, qm и 1 j, k K + 1. Если p = q, тогда (j, k) / I $^{2}_{р}$ для всех 1 rm (иначе (x, y) β), поэтому (e0s(x), e0s(y)) = (e0(bj), e0(bk)) = (bj , bk) / β, поэтому (x, y) / β. Если p = q, то e0(x) bβ(p)/β и e0(y) bβ(q)/β – различные β-классы – поэтому (e0(x), e0(y)) / β, поэтому (x, y) / β.

Чтобы доказать (7.3.5), сначала заметим, что каждое отношение эквивалентности θ на A такое, что β θ β, удовлетворяет условию f(θ) θ для всех f FA и, следовательно, является конгруэнцией A. Действительно, при доказательстве β = β выше мы увидел, что f(β) β для всех f FA, а значит, тем более f(θ) β для всех отношений эквивалентности θ β. Поэтому,

$$[β , β] = \{θ \quad Eq(A) \mid β \quad θ \quad β\}.$$

Для завершения доказательства нам необходимо показать, что этот интервал изоморфен решетке $^{м}_{r=1(уравнение |Tr|)}$ $^{м \;\; 1}$.

Учитывать,

$$β/β = \{(x/β , y/β) \quad (A/β)^{2} \mid (x, y) \quad β\}.$$

Пусть N — количество блоков β/β (которое, конечно, совпадает с количеством блоков β).

Пусть для 1 k N xk/β — представитель k-го блока β/β . Пусть Bk = (xk/β)/(β/β) обозначим этот блок; то есть,

$$Bk = \{y/β \quad A/β \mid (xk/β , y/β) \quad β/β \}.$$

Затем,

$$\overset{H}{\underset{к=1}{}} \mathrm{Eq}(Bk) \quad = \{\theta \quad \mathrm{Eq}(A) \mid \beta \qquad \theta \quad \beta\} = [\beta \quad , \beta].$$

Изоморфизм задается отображениями:

$$\overset{H}{\underset{к=1}{}} \mathrm{Eq}(Bk) \quad \eta \qquad \overset{H}{\underset{к=1}{}} \eta k \quad [\beta \quad , \beta]$$

$$[\beta \quad , \beta] \quad \theta \qquad \overset{H}{\underset{к=1}{}} \theta \quad B2_{к} \in \overset{H}{\underset{к=1}{}} \text{уравнение (Бк),}$$

где ηk обозначает проекцию η на ее k-ю координату.

Теперь r-й β-класс B0, обозначаемый bβ(r)/β, имеет |Tr| связующие точки, поэтому существуют |Tr| множества, Bi1 , Bi2 , . . . , Би|Тр| , каждый из которых пересекает B0 в отдельной связующей точке в bβ(r)/β; то есть,

$$Bij \quad b\beta(r)/\beta = \{bij\} \qquad (bij \quad Tr).$$

(См. рис. 7.6.) Блок Bk группы β/β имеет единственный элемент, если он содержит bβ(r)/β. В противном случае это имеет |Tr| элементы, а именно,

$$я1\ б\ \beta(\ell)/\beta Bi2\ ,\ bi2_{\beta(\ell)} \beta Bi2\ , \ldots, \beta(\ell) \quad би|Tr| /\beta Bi\ |Tr|\ / \quad ,$$

примерно на 1 ℓ м; ℓ = р. Таким образом, для каждого 1 rm имеется m 1 таких блоков |Tr|-элементов, поэтому

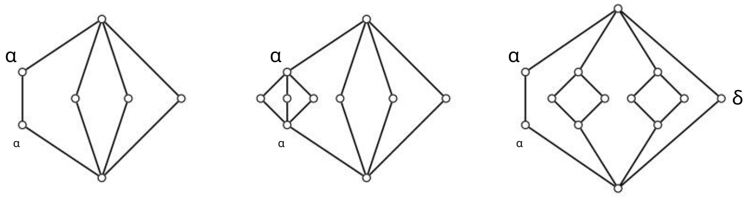
$$\overset{H}{\underset{к=1}{}} \text{уравнение(Бк)} \;=\; \overset{м}{\underset{р=1}{}} (\text{Уравнение}\,|Tr|)^{м \quad 1} .$$

☐

Опишем теперь ситуацию, в которой предыдущая конструкция наиболее полезна. Здесь и в в дальнейшем вместо уравнения (2) мы обычно пишем 2 для обозначения двухэлементной решетки. Учитывая конечное решётка конгруэнций Con B и пара (x, y) B2 , содержащая (x, , пусть β Con B — единственное наименьшее сравнение y). Тогда β = CgB(x, y), и если мы построим надалгебру, как описано выше, используя {x, y} в качестве связующих точек, то по теореме 7.3.3 интервал всех θ Con A, для которых θ|B = β, будет быть [β , β] = Eq(2)m 1 = 2 $^{м \quad 1}$, где m — количество классов конгруэнтности в β. Кроме того, поскольку β наименьшего сравнения, содержащего (x, y), мы можем быть уверены, что для всех θ β интервал [θ , θ] равен тривиально; то есть θ = θ. Наконец, для каждого θ > β мы будем иметь [θ , θ] = 2 $^{г-1}$, где r — количество классы конгруэнтности θ.

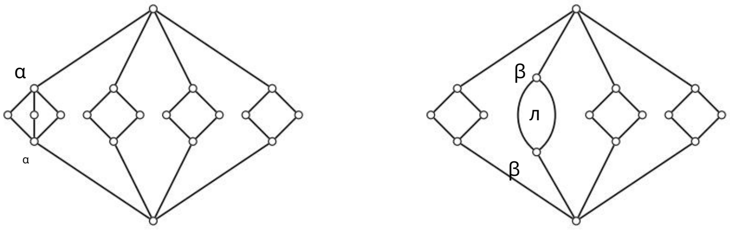
Пример 7.3.4. С помощью приведенных выше теорем мы можем объяснить форму решеток конгруэнций Пример 7.3.1. Возвращаясь к этому примеру, с базовой алгеброй B, равной правому регулярному S3-множеству, теперь мы покажем некоторые другие решетки конгруэнтности, которые возникают в результате простого изменения набора связующих точек, T. Напомним, отношения в Con B таковы: α = |0, 1, 2|3, 4, 5|, β = |0, 3|2, 5|1, 4|, γ = |0, 4|2, 3 |1, 5| и δ = |0, 5|2, 4|1, 3|.

Как ясно показывают теоремы 7.3.2 и 7.3.3, выбор T равным {0, 1}, {0, 1, 2} или {0, 2, 3} дает конгруэнтные решетки, изображенные на рис. 7.7. На рис. 7.8 показаны решетки конгруэнций, полученные в результате варианты T = {0, 1, 2, 3} и T = {0, 2, 3, 5}.



T = {0, 1}	T = {0, 1, 2}	T = {0, 2, 3}

Рисунок 7.7: Решетки конгруэнций овералгебр S3-множества для различного выбора T связующих точек. , набор



T = {0, 1, 2, 3}	T = {0, 2, 3, 5}

Рисунок 7.8: Решетки конгруэнций овералгебр S3-множества при различных вариантах выбора T ; Л = 2 ^{2} × 2 ^{2}.

Поскольку β = |0, 3|2, 5|1, 4|, когда T = {0, 2, 3, 5}, интервал [β , β] равен 2 ^{2} 2× 2 . На рисунке 7.8 мы обозначим это абстрактно через L, вместо того, чтобы рисовать все 16 точек этого интервала.

Далее рассмотрим ситуацию, изображенную на последней решетке конгруэнций на рис. 7.8, где L = $2^{2} \times 2^{2}$, и предположим, что мы предпочитаем, чтобы все остальные |B -прообразы были тривиальными: [β , β] = $2^{2} \times 2^{2}$; α "=" α; γ = γ; δ = δ. Другими словами, мы ищем конечное алгебраическое представление решетки, показанной на рис. 7.9. Этого легко добиться, добавив больше операций в описанную выше конструкцию надалгебры.

В самом деле, можно ввести дополнительные операции так, что если β = CgB(x, y), то θ = θ для

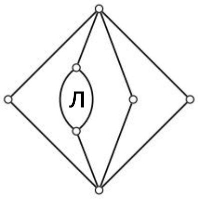


Рисунок 7.9: Решетка, которая мотивирует дальнейшее расширение набора основных операций в овералгебре.

все θ Con B с θ β. Теперь мы опишем эти операции и сформулируем это утверждение более формально как Предложение 7.3.5 ниже.

Начнем с описанной выше конструкции овералгебры. Предположим, что β = CgB(x, y) имеет трансверсаl {bβ(1), . . . , bβ(m)}, и для каждого 1 rm пусть

$$Tp = \{b \quad T \mid (b, b\beta(r)) \quad \beta\} = \{bi1 , bi2 , . . . , би|Tr| \}$$

быть связующими точками, содержащимися в r-м блоке β, как указано выше. Пусть Ir = {i1, i2, . . . , i|Tr|} – индексы этих связующих точек. Тогда {Bi : i Ir} — это совокупность субредуктивных вселенных, пересекающих r-й β-блок B. Для каждой 1 rm определим операцию sr : A A следующим образом:

$$cp(x) = \begin{cases} би & \text{если x Bi для некоторого i Ir,} \\ \text{x иначе.} & \end{cases}$$

Определите все остальные операции, как указано выше, и позвольте

$$FA := \{fe0 : f \quad F\} \quad \{ek : 0 k K\} \quad \{sr : 0 rm\},$$

где s0 := s было определено ранее. Наконец, пусть A := A, FA и определим θ и θ, как указано выше.

Предложение 7.3.5. Для каждого θ Con B

1. если θ β = 0B, то θ = θ;
2. если θ β, то [θ , θ] = $^{н}_{r=1}$(Eq|T bθ(r)/θ|) $^{n\ 1}$, где nm — число конгруэнтностей классы θ.

Первую часть предложения легко доказать, учитывая дополнительные операции sr, 1 r m. Вторая часть следует из теоремы 7.3.3.

Обратите внимание, что выше Tr было определено как T bβ(r)/β, поэтому T = $_{p=1}^{м}$ Tr – разбиение связи точек, и именно на этом разбиении основано наше определение дополнительных операций sr . A модифицированная версия функции GAP , использованная выше для построения оверменгебр, позволяет пользователю указать произвольное разделение связующих точек, и дополнительные операции будут определены соответствующим образом. Для Например, чтобы основывать выбор и разделение связующих точек на сравнении β в примере выше, мы вызываем следующую команду:

```
разрыв> ОвералгебраXO([ G, [[0,3], [2,5]] ]);
```

Полученная овералгебра имеет конгруэнтную решетку, изоморфную решетке на рис. 7.9, причем L = 2 2 2 × 2 . Сходным образом,

```
разрыв> ОвералгебраXO([ G, [[0,1,2], [3,4,5]] ]);
```

образует овералгебру с решеткой конгруэнций, изоморфной решетке на рис. 7.9, но с L = уравнение(3) × уравнение(3).

Кстати, с помощью дополнительных операций sr мы не ограничены в количестве термины появляются в прямом продукте. Например,

```
разрыв> ОвералгебраXO([ G, [[0,1,2], [0,1,2], [3,4,5]] ]);
```

создает овералгебру с конгруэнтной решеткой из 130 элементов, подобную той, что изображена на рис. 7.9, с L = Eq(3) × Eq(3) × Eq(3), а

```
разрыв> OveralgebraXO([ G, [[0,3], [0,3], [0,3], [0,3]] ]);
```

дает конгруэнц-решетку из 261 элемента с L = 2^{16}.

Мы завершаем этот подраздел результатом, описывающим один из способов добавления еще большего количества операций в овералгебру в случае, если мы хотим исключить некоторые сравнения из [β , β], не затрагивая сравнения вне этого интервала. В следующем утверждении мы предполагаем, что базовая алгебра B = B, G транзитивное G-множество.

Утверждение 7.1. Рассмотрим набор отображений g : A A, определенный для каждого g StabGT := {g G | gb = b b T } по правилам

$$g|Bi = eg(bi)ge0 \quad (i = 1,...,n).$$

Тогда для каждого θ Con A

$$g(θ) θ \text{ только в том случае, если } β < θ < β. \qquad (7.3.6)$$

Конечно, эти g-отображения могут быть не единственными функциями в AA , обладающими указанным свойством в (7.3.6). Кроме того, вообще говоря, даже со всем набором отображений g, определенным выше, мы не можем быть способен исключить каждое β < θ < β. На самом деле легко построить примеры, в которых существуют < θ < β такой, что g(θ) θ для любого g AA. β *

7.3.2 Overалгебры II

В предыдущем разделе мы описали процедуру построения overалгебры A из B такой, что при некоторое главное сравнение β Con B и для всех β θ < 1B прообраз $\theta|_{Б}^{1}$ = [θ , θ] Con A нетривиален. В этом разделе мы начнем с неглавного сравнения β Con B и зададим вопрос если можно построить overалгебру A такую, что $\theta|_{Б}^{1}$ Con A нетривиален тогда и только тогда, когда β θ < 1B. Чтобы ответить на этот вопрос, опишем теперь конструкцию надалгебры, основанную на конструкция, предложенная Биллом Лампе.

Пусть B = B; F — конечная алгебра, и предположим, что

$$\beta = Cg^B((a1, b1),\dots,(aK, bK))$$

для некоторого a1, . . . , aк, b1, . . . , bK B. Пусть B = B0, B1, B2, . . . , BK+1 — множества мощности |B| = n которые пересекаются следующим образом:

$$B0 \quad B1 = \{a1\} = \{a_1^1\},$$

$$Bi \quad Bi+1 = \{b\ i\} = \{a^{я}\ _{i+1}^{я+1}\}\ \text{для}\ 1\ i < K,$$

$$BK \quad BK+1 = \{b_K^K\} = \{a_1^{K+1}\}.$$

Все остальные перекрестки пусты. (См. рисунок 7.10.)

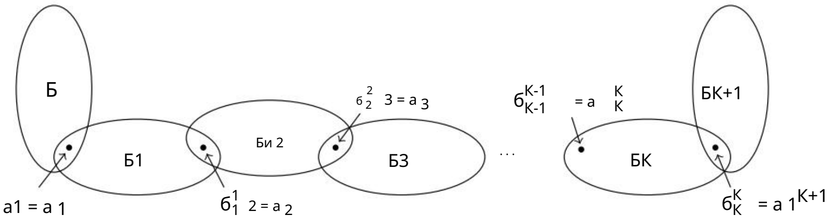


Рисунок 7.10: Вселенная overалгебры.

Для 0 i, j K + 1 пусть Si,j : Bi Bj — биекция Si,j (x ^{я}) = x $_{дж}$. Положим A := B0 · · · BK+1, и определим следующие функции в AA:

$$e0(x) = \begin{cases} x, & x € B0, \\ a1, & x \quad Bj , 1 j K, \\ SK+1,0(x), x & BK+1; \end{cases}$$

$$эй(x) = \begin{cases} {}^{я}{}_{я , \_} & x \quad Bj , j < i, \\ x, x \quad Bi & , \\ 6\,{}^{я}_{я ,} & x \quad Bj , j > i; \end{cases} \qquad (1 \quad я K),$$

$$eK+1(x) = \begin{cases} S0,K+1(x), x & B0, \\ и^{K+1}_{1} \; , & x \quad Bj , 1 j K, \\ Икс, & x € BK+1. \end{cases}$$

Используя эти отображения, мы определяем множество FA операций над A следующим образом: пусть qi,j = Si,j ei для 0 i, j K+1 и определим8

$$FA := \{fe0 : f \quad F\} \quad \{qi,0 : 0 i K + 1\} \quad \{q0,j : 1 j K + 1\}.$$

Овералгеброй в этом разделе называется унарная алгебра A := A, FA.

Теорема 7.3.6. Предположим, что A = A, FA — надалгебра, основанная на конгруэнтном отношении β = CgB((a1, b1),...,(aK, bK)), как описано выше, и определим

$$β \;\; "=" \sum_{j=0}^{K+1} β\, Bj \quad (a1/β \quad a^{1}_{1}/βB1 \quad a^{2}_{2}/βB2 \quad \cdots \quad a \;\; K\, K/βBK \quad a^{K+1}_{1} \;\; /βBK+1\,)^{2}.$$

Тогда β = CgA(β).

Если β имеет трансверсаль {a1, c1, c2, . . . , см 1}, тогда

$$β = β \sum_{я\,=\,1}^{м\quad 1} (ci/β \quad c^{K+1}_{я} \;\; /βBK+1\,)^{2}. \qquad (7.3.7)$$

---

[8] Если бы мы включили qi,j для всех 0 i, j K + 1, результирующая овералгебра имела бы ту же решетку конгруэнтности как A, FA, но использование сокращенного набора операций упрощает доказательства.

Более того, [β , β] = $2^{м \quad 1}$.

Доказательство. Ясно, что β — отношение эквивалентности на A, поэтому сначала проверим, что f(β) β для всех f FA. Это установит, что β Con A. После этого мы покажем, что из β η Con A следует β * η, что докажет, что β является наименьшей конгруэнцией A, содержащей β, как утверждается в первая часть теоремы.

Зафиксировать (x, y) β . Чтобы доказать, что (f(x), f(y)) β , рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: (x, y) β Bj для некоторого 0 j K + 1.

В этом случае легко проверить, что (qi,0(x), qi,0(y)) β и (q0,i(x), q0,i(y)) β Би для всех 0 i K + 1. Например, если (x, y) β Bj с 1 j K, то (q0,i(x), q0,i(y)) = (a $^{я}_{1}$, ай) и (qi,0(x), qi,0(y)) — это либо (bi , bi) , либо (ai , ai) в зависимости от того, находится ли i ниже или выше j соответственно. Если i = j, то (qi,0(x), qi,0(y)) — пара из B2 , соответствующая (x, y) β Bj , итак (qi,0(x), qi,0(y)) β. Особый случай — это (q0,0(x), q0,0(y)) β. Теперь, поскольку q0,0 = e0, имеем (fe0(x), fe0(y)) β для всех e € ФБ. В целом из сказанного выше следует, что (f(x), f(y)) β для всех f FA.

Случай 2: (x, y) B2 , где B := a1/β a $^{1}_{1}$/βB1 · · · a K K/βBK a $^{K+1}_{1}$ /βBK+1 .

Заметим, что e0(B) = a1/β. Следовательно, (e0(x), e0(y)) β, поэтому (fe0(x), fe0(y)) β для всех f FB. Также,

$$q0,k(B) = S0,ke0(B) = S0,k(a1/β) = a^{K}_{1}/βBk ,$$

который представляет собой один блок β . Аналогично, ek(B) = a $^{K}_{K}$ /βBk , так

$$qk,0(B) = Sk,0ek(B) = Sk,0(a^{K}_{k}/βBk) = ak/β.$$

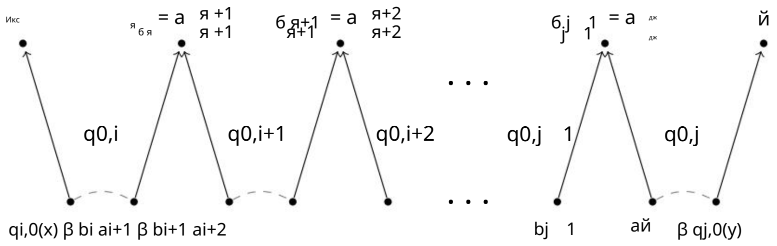
Следовательно, (x, y) B2 влечет (f(x), f(y)) β для всех f FA.

Таким образом, мы установили, что β является конгруэнцией A, содержащей β. Сейчас мы покажем, что это то наименьшее такое сравнение. Действительно, предположим, что β η Con A и зафиксировали (x, y) β Если (x, y) β Bj , для некоторого 0 j K + 1 тогда (qj,0(x), qj,0(y)) β η, поэтому (x, y) = (q0,j qj,0(x), q0,j qj,0(y)) η.

Если вместо (x, y) β Bj , имеем (x, y) B2 , тогда без ограничения общности x a $^{я}_{я}$/βBi и j y a j /βBj для некоторого 0 i < j K + 1. Мы обсудим только случай 1 i < j K, так как другой случаи могут быть рассмотрены аналогичным образом. Поскольку x $^{я}_{ая}$/βBi = b $^{я}_{я}$/βBi имеем (qi,0(x), bi) β. Сходным образом, (aj , qj,0(y)) β. Таким образом, мы получаем следующую диаграмму[9]

---

[9] Диаграмма иллюстрирует случай 1 i < j K, где i + 1 < j. В случае j = i + 1 диаграмма еще проще.



Поскольку β η Con A и q0,k FA для каждого k, из диаграммы ясно видно, что (x, y) должно принадлежат η.

Для доказательства (7.3.7) обозначим через β правую часть. То есть,

$$\beta := \beta \mathop{\quad}\limits_{я\,=\,1}^{м\quad 1} (ci/\beta \quad c^{K+1}_{я} \;/\beta BK+1\,)^{2} .$$

Ясно, что β Eq(A), поэтому мы проверяем β Con A, доказывая, что f(β) β для всех f FA. Исправить (x, y) β. Если (x, y) β , тогда (f(x), f(y)) β для всех f FA по первой части теоремы. Так предположим, что (x, y) (ci/β $c^{K+1}_{я}$ /βBK+1) ^{2}, для некоторых 1 im 1. Для простоты записи определим

$$Ci := ci/\beta \quad c^{K+1}_{я} \;/\beta BK+1 .$$

Тогда, поскольку e0(Ci) = ci/β, имеем (e0(x), e0(y)) β, поэтому (fe0(x), fe0(y)) β для всех f FB. Также, для 0 k K + 1 имеем[10]

$$q0,k(Ci) = S0,k(ci/\beta) = c^{к}_{я} \;/\beta Bk .$$

Следовательно, q0,k(Ci) находится в одном блоке β , поэтому (q0,k(x), q0,k(y)) β . Кроме того, для 1 k K имеем ek(ci/β) = {a$^{к}_{к}$} и ek(c$^{K+1}_{я}$ /βBK+1) = {b$^{к}_{к}$}, так

$$qk,0(Ci) = Sk,0(\{a^{к}_{к} , bk\ k\}) = \{ak, bk\} \quad ak/\beta,$$

а при k = K + 1 имеем eK+1(Ci) = c$^{K+1}_{я}$ /βBK+1 , так

$$qK+1,0(Ci) = SK+1,0(c^{K+1}_{я} \;/\beta BK+1\,) = ci/\beta.$$

Кроме того, случаи, включающие i = 0 и/или j = K + 1, могут быть обработаны аналогичным образом.

[10] По $c^{0}_{я}$ /βB0 мы имеем в виду, конечно, ci/β.

Таким образом, для всех 0 k K + 1 имеем (qk,0(x), qk,0(y)) β . Это доказывает, что (f(x), f(y)) β β выполняется для всех f FA, поэтому β Con A.

Далее заметим, что β|B = β, поэтому по лемме об вычете из раздела 7.2 β β. Таким образом, чтобы

Для доказательства (7.3.7) достаточно показать, что из (x, y) / β следует (x, y) / β. Это прямолинейно и просто.

Аналогично рассуждению, которое мы использовали для проверки аналогичного факта при доказательстве теоремы 7.3.3. Тем не менее,

мы проверяем большинство случаев и опускаем лишь несколько частных случаев, которые легко проверить.

Предположим, что (x, y) / β, и предположим, что x $c^{дж}_{п}$ /βBj и y c $^{к}_{д}$ /βBk для некоторого 0 jk K + 1 и

1 п, qм 1. Если j = 0 и k = K + 1, то p = q (иначе (x, y) β). Следовательно, e0(x) cp/β

и e0(y) cq/β, поэтому (e0(x), e0(y)) /β, поэтому (x, y) /β. Если p = q, то j = k (иначе (x, y) β).

Таким образом,

(ej (x), ej (y)) = (x, bj) (qj,0(x), qj,0(y)) = (qj,0(x), bj);

(ek(x), ek(y)) = (a $^{К}_{k}$, y) (qk,0(x), qk,0(y)) = (ak, qk,0(y)).

Одна из пар справа не принадлежит β. Ибо если оба находятся в β, то

x = q0,j qj,0(x) β q0,j (bj) = b j $_{дж}$ = a $^{j+1}_{j+1}$ β ···

· · · β a $^{к}_{к}$ = q0,k(ak) β q0,kqk,0(y) = y,

что противоречит (x, y) / β, поэтому мы должны иметь либо (qj,0(x), qj,0(y)) / β, либо (qk,0(x), qk,0(y)) €/β. /βBk ,

Следовательно, поскольку e0qi,0 = qi,0, мы видим, что (x, y) / β. Остальные случаи, например, x a1/β, y c $^{к}_{д}$

можно проверить аналогично.

Осталось доказать, что [β , β] = 2 $^{м 1}$, но это легко следует из первой части доказательства:

где мы видели, что (f(x), f(y)) β для всех f FA и для всех (x, y) β. Это подразумевает, что все

отношения эквивалентности на A, находящиеся выше β и ниже β, фактически являются отношениями конгруэнтности A.

Форма этого интервала отношений эквивалентности даже проще, чем форма аналогичного интервала.

интервал, который мы нашли в теореме 7.3.3. В данном случае мы имеем

[β , β] = {θ Eq(A) | β θ β} = 2 $^{м 1}$.

☐

Прежде чем сформулировать следующий результат, напомним читателю, что θ = CgA(θ) для каждого θ Con B.

Лемма 7.3.7. Если η Con A удовлетворяет условию η |B = θ, и если (x, y) η \ θ для некоторых x Bi , y Bj , то i = 0, j = K + 1 и θβ.

Другими словами, если только i = 0 и j = K + 1, сравнение η не соединяет блоки Bi с блоки Bj (кроме тех, которые уже соединены θ).

Доказательство. Мы исключим все 0 ij K + 1, за исключением i = 0 и j = K + 1, показав, что в каждом следующих случаев приходим к противоречию (x, y) θ := CgA(θ). из

Случай 1: я = j.

Если (x, y) B2 я где-то 0 i K + 1, то (qi,0(x), qi,0(y)) η |B = θ θ *, итак (x, y) = (q0,iqi,0(x), q0,iqi,0(y)) θ .

Случай 2: 1 i < j K.

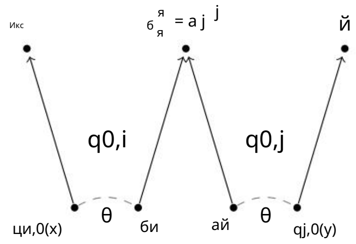
В этом случае,

$$(q_{i,0}(x), q_{i,0}(y)) = (q_{i,0}(x), b_i) \quad \theta, \qquad (q_{j,0}(x), q_{j,0}(y)) = (a_j , q_{j,0}(y)) \quad \theta,$$

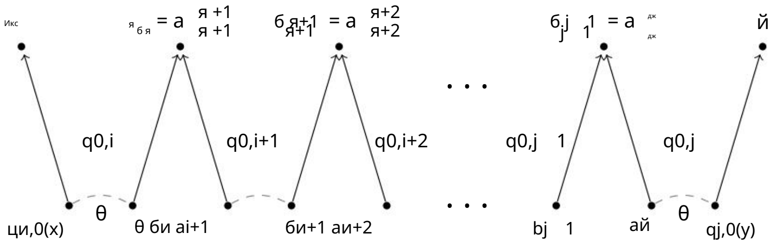
Когда j = i + 1, получаем

$$x = q_{0,i}q_{i,0}(x)\ \theta \quad q_{0,i}(b_i) = b^{я}_{я} = a^{дж}_{дж} = q_{0,j} (a_j)\ \theta \quad q_{0,j}\, q_{j,0}(y) = y, \qquad (7.3.8)$$

итак (x, y) θ . Более наглядно это можно увидеть на диаграмме.



Если j > i+1, то (qk,0(x), qk,0(y)) = (ak, bk) θ для всех i < k < j, и мы имеем следующую диаграмму:



Здесь тоже можно было бы выписать линию, аналогичную (7.3.8), но из диаграммы очевидно, что

(x, y) θ ·

Случай i = 0; 1 j K, а также случай 1 я K; j = K + 1, можно обработать с помощью диаграммы аналогичны использованным выше, а доказательства практически идентичны, поэтому мы их опускаем.

Единственная оставшаяся возможность — это x B0 и y BK+1. В этом случае имеем (qk,0(x), qk,0(y)) = (ak, bk) θ для всех 1 k K. Следовательно, θβ = CgA((a1, b1),...,(aK, bK)). ☐

Теорема 7.3.8. Предположим, A = A, FA — овералгебра, основанная на конгруэнтном отношении β = CgB((a1, b1),...,(aK, bK)), как описано выше. Тогда θ < θ тогда и только тогда, когда β θ < 1B, при котором случай [θ , θ] = 2^{r-1} , где r — количество классов конгруэнтности θ.

Следовательно, если θ β, то θ = θ ·

Доказательство. Из леммы 7.3.7 следует, что θ < θ только если β θ < 1B. С другой стороны, если β θ < 1B, то получаем [θ , θ] = 2^{r-1} тем же аргументом, который использовался для доказательства [β , β] = $2^{м\ 1}$ в теореме 7.3.6. ☐

Теперь рассмотрим пример конгруэнтной решетки, в которой коатом β не является главным: и мы используем метод, описанный в этом разделе, для построения надалгебры A, для которой β < β в Con A и θ = θ для всех θβ в Con B.

Пример 7.3.9. Пусть G — группа C2 × A4 , определенная в GAP следующим образом:[11]

```
разрыв> G:=Группа([ (9,10)(11,12)(5,6)(7,8),
   >                      (3,7,12)(9,1,6)(11,4,8)(5,10,2),
   >                      (3,2)(9,11)(5,7)(1,4)(10,12)(6,8) ]);;
```

Это группа порядка 24, действующая транзитивно на множестве {1, 2, . . . , 12}. (Если мы обозначим H стабилизатор точки, скажем H := G1 = C2, то группа действует транзитивно умножением справа на множество G/H правых смежных классов. Эти два G-множества, конечно, изоморфны.) Решетка конгруэнций

---

[11] Команда GAP TransitiveGroup (12,7) также дает группу, изоморфную C2 × A4, но путем ее явного определения в терминах некоторых образующих мы получаем более привлекательные разбиения в решетке конгруэнций.

эта алгебра (которая изоморфна интервалу от H до G в решетке подгрупп группы G) есть показано на рисунке 7.11. После переименования элементов в соответствии с нашим обозначением смещения 0, Вселенная есть B := {0, 1, . . . , 11}, а нетривиальные сравнения таковы:

$$\alpha = |0, 1, 4, 5, 8, 9|2, 3, 6, 7, 10, 11|$$

$$\beta = |0, 1, 2, 3|4, 5, 6, 7|8, 9, 10, 11|$$

$$\gamma_1 = |0, 1|2, 3|4, 5|6, 7|8, 9|10, 11|$$

$$\gamma_2 = |0, 2|1, 3|4, 7|5, 6|8, 11|9, 10|$$

$$\gamma_3 = |0, 3|1, 2|4, 6|5, 7|8, 10|9, 11|.$$

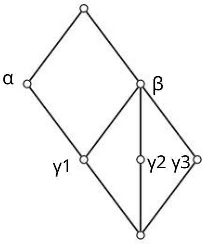


Рисунок 7.11: Решетка конгруэнций алгебры перестановок B, G, где B = {0, 1, . . . , 11} и G = C2 × A4.

Очевидно, что коатом β не является главным. Например, он генерируется {(0, 3),(8, 11)}. Если наша цель состоит в том, чтобы построить надалгебру, которая имеет β > β в Con A и θ = θ для всех θ β в Con B, это Понятно, что метод, описанный в разделе 7.3.1, не сработает. Ибо, если мы возьмем в основу овералгебру на связующих точках {0, 3}, то вселенная — это A = B B1 B2, где B B1 = {0}, B B2 = {3}, и B1 B2 = , а операции таковы : FA := {ge0 : g G} {e0, e1, e2, s}. Поскольку β имеет три классов конгруэнции, по теореме 7.3.3 интервал всех θ Con A, для которых θ|B = β, равен [β , β] = 2. Однакомы также^2 · имеем γ3 = CgB(0, 3), сравнение с 6 классов, поэтому снова по теореме 7.3.3 [γ 3 , γ3] = 2^5 . Таким образом, с помощью этого метода невозможно получить нетривиальный интервал [β , β], в то время как сохраняя исходную структуру конгруэнтной решетки ниже β. Это верно независимо от того, какая пара (x, y) β мы выбираем в качестве связующих точек, так как в любом случае пара будет принадлежать конгруэнции ниже β.

Процедура, описанная в этом подразделе, не имеет такого ограничения. Действительно, если мы положим (a1, b1) = (0, 3) и (a2, b2) = (8, 11) в этой конструкции, то универсум овералгебры есть A = 3 я=0Bi , где B0 = {0, 1, . . . , 11}, B1 = {0, 12, 13, . . ., 22}, B2 = {23, 24, . . ., 29, 30, 14, 31, 32, 33}, и B3 = {33, 34, . . ., 44}. (См. рисунок 7.12.)

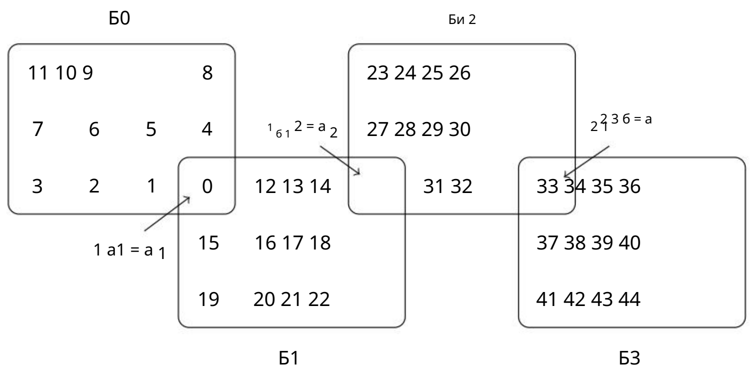


Рисунок 7.12: Вселенная овералгебры набора (C2 × A4), устроенная так, чтобы обнаруживать сравнения выше β .

Расположение субредуктивных вселенных, как показано на рис. 7.12, показывает сравнения выше β . Фактически, четыре сравнения в интервале [β , β] можно прочитать непосредственно из диаграммы. Например, классы конгруэнтности β показаны на рис. 7.13, а конгруэнция β, помимо этих отношения, объединяет блоки |4, 5, 6, 7| и |37, 38, 39, 40|, а также блоки |8, 9, 10, 11| и |41, 42, 43, 44|. Что касается сравнений βε, βε ′ , присоединяется |4, 5, 6, 7| и |37, 38, 39, 40|, а другой присоединяется |8, 9, 10, 11| и |41, 42, 43, 44|. Полная решетка конгруэнтности Con A показана на рис. 7.14.

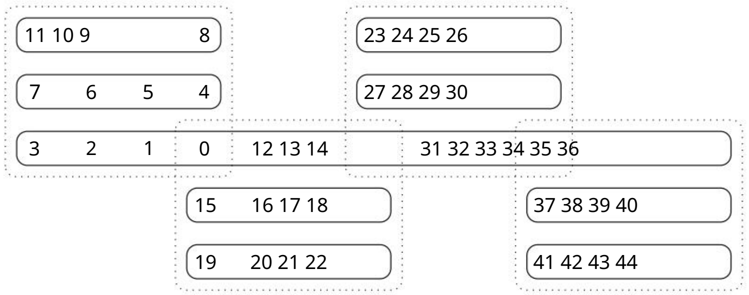


Рисунок 7.13: Вселенная овералгебры; сплошные линии обозначают классы конгруэнтности β .

7.3.3 Овералгебры III

В разделе 7.3.1 мы построили алгебру A с конгруэнц-решеткой Con A, имеющей интервал подрешетки [β , β], изоморфные произведениям степеней решеток разбиения. Мы увидели, что Строительство имеет два основных ограничения. Во-первых, размер перегородочных решеток ограничен размером классов конгруэнтности β Con B. Во-вторых, когда β неглавный, это невозможно с эту конструкцию для получения нетривиального прообраза [β , β] без наличия нетривиального обратного образа

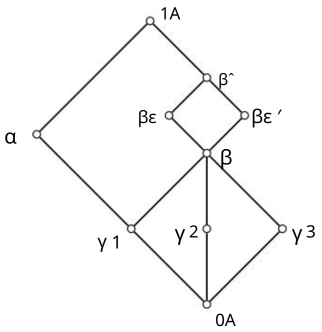


Рисунок 7.14: Решетка конгруэнций оверaлгебры A, FA B, G, где B = {0, 1, . . . , 11} и G = C2 × A4.

[θ , ˆθ] для некоторого θ β. В разделе 7.3.2 мы представили конструкцию, разрешающую вторые образы ограничение. Однако первое ограничение еще более серьезное, поскольку результирующие интервалы [β , β] являются просто степенями двойки, т. е. булевыми алгебрами. В этом разделе мы представляем обобщение предыдущих конструкций, которая преодолевает оба упомянутых выше ограничения.

Пусть B = B, F — конечная алгебра, и предположим, что

$$β = CgB((a1, b1),... ,(aK \quad 1, bK \quad 1))$$

для некоторого a1, . . . , aK 1, b1, . . . ,bK 1 B. Определим B0 = B и для некоторого фиксированного Q 0 пусть B1, B2, . . . , Б(2Д+1)К — множества мощности |B| = н. Как и выше, мы используем метку x ^{я} для обозначения элемента Bi , который соответствует x B при биекции. Для простоты записи пусть M := (2Q + 1). Мы организуем множества так, что они пересекаются следующим образом:

$$B0 \quad B1 = \{a1\} = \{a \quad {}^{1}_{1}\},$$

$$B1 \quad B2 = \{b \quad {}^{1}_{1}\} = \{a\ {}^{2}2\},$$

$$B2 \quad B3 = \{b\ {}^{2}2\} = \{a\ {}^{3}3\},$$

$$\vdots$$

$$BK \quad 2 \quad BK \quad 1 = \{b \quad {}^{K-2}_{K-2}\} = \{a \quad {}^{K-1}_{K-1}\},$$

$$BK \quad 1 \quad BK = BK \quad BK+1 = \{b \quad {}^{K-1}_{K-1}\} = \{б \quad {}^{K}K \quad 1\} = \{b \quad {}^{K+1}_{K-1}\},$$

$$BK+1 \quad BK+2 = \{a \quad {}^{K+1}_{K-1}\} = \{б \quad {}^{K+2}_{K-2}\},$$

$$BK+2 \quad BK+3 = \{a \quad {}^{K+2}_{K-2}\} = \{б \quad {}^{K+3}_{K \quad 3}\}, . . .$$

Machine Translated by Google

$$\cdots, \quad B2K \quad 2 \quad B2K \quad 1 = \{a^{2K-2}_{2}\} = \{б^{2K-1}_{1}\},$$

$$B2K \quad 1 \quad B2K = B2K \quad B2K{+}1 = \{a^{2K-1}_{1}\} = \{a^{2K}_{1}\} = \{a^{2K+1}_{1}\},$$

$$B2K{+}1 \quad B2K{+}2 = \{b^{2K+1}_{1}\} = \{б^{2K+2}_{2}\},$$

$$B2K{+}2 \quad B2K{+}3 = \{b^{2K+2}_{2}\} = \{б^{2K+3}_{3}\},$$

$$\vdots$$

$$BMK \quad 2 \quad BMK \quad 1 = \{b^{K-2}_{MK-2}\} = \{a^{K-1}_{MK-1}\},$$

$$BMK \quad 1 \quad BMK = \{b^{MK-1}_{K-1}\} = \{б^{MK}_{K-1}\}.$$

Все остальные перекрестки пусты. (См. рисунок 7.15.)

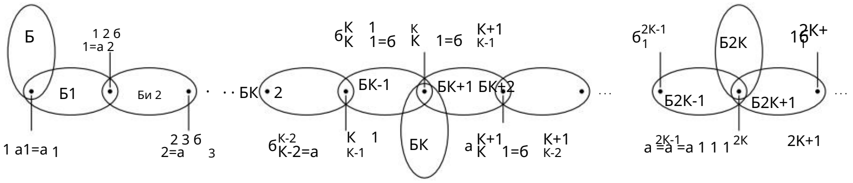


Рисунок 7.15: Вселенная овералгебры.

Как обычно, положим A := B0 · · · BMK и приступим к определению некоторых унарных операций над A.

Сначала за 0 i, j MK, пусть Si,j : Bi Bj — биекция Si,j (x ^{я}) = x ^{дж} , и обратите внимание

что Si,i = idBi . Определите следующие подмножества четных и нечетных кратных K соответственно:

E = {2qK : q = 0, 1, . . . , Q} и O = {(2q + 1)K : q = 0, 1, . . . , Q}. Для каждого ℓ E , позволять

$$eℓ(x) = \begin{cases} Sj,ℓ(x), \text{ если x } Bj \text{ для некоторого j } E, \\ ℓ \; a\, 1, \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

и при 0 < i < K

$$eℓ{+}я(x) = \begin{cases} a^{ℓ+я}_{я}, & \text{если x } Bj \text{ для некоторого } j < ℓ + i, \\ \text{Икс}, & \text{если x } Bℓ{+}i, \\ б^{ℓ+я}_{я}, & \text{если x } Bj \text{ для некоторого } j > ℓ + i. \end{cases}$$

Для каждого ℓ O пусть

Sj,ℓ(x), если x Bj для некоторого j O,

eℓ(x) =

ℓ б К 1 , в противном случае.

и при 0 < i < K

ℓ+я б К-и , если x Bj для некоторого j < ℓ + i,

eℓ+я(x) = Икс, если x Bℓ+i ,

а ℓ+я К-и , если x Bj для некоторого j > ℓ + i,

Другими словами, если ℓ E , тогда eℓ биективно отображает каждое направленное вверх множество на рис. 7.15 на набор точек Bℓ, указывающий вверх , и отображает все остальные точки A в связующую точку a. ℓ 1 € Bℓ ; если ℓ O, то eℓ отображает каждый набор, направленный вниз на рисунке, на набор, направленный вниз, Bℓ, и отображает все остальные точки на связующая точка б ℓ К-1 . Для каждого набора Bℓ+i между ними – представленного на рисунке эллипсом с горизонтальным расположением большая ось – соответствует карте eℓ+i , которая действует как тождество на Bℓ+i и отображает все точки в Слева от Bℓ+i до левой связующей точки Bℓ+i и все точки справа от Bℓ+i до правой связующей точки из Bℓ+i .

Наконец, для 0 i, j MK определим qi,j = Si,j ei и приведем набор основных операций над A к быть

FA := {fe0 : f F} {qi,0 : 0 i MK} {q0,j : 1 j MK}.

Затем мы рассмотрим овералгебру A := A, FA. Эта овералгебра снова основана на конкретных сравнение β = CgB((a1, b1),... ,(aK 1, bK 1)) Con B, а следующая теорема описывает прообраз β относительно |B – то есть интервал [β , β] в Con A.

Теорема 7.3.10. Пусть A = A, FA — описанная выше надалгебра и для каждого 0 i MK пусть ti обозначает связующую точку множества Bi. Определять

MK MK 2

β "=" β Bj ти/βBi .

j=0 я = 0

Тогда β = CgA(β).

Если β имеет трансверсаль {a1, c1, c2, . . . , см 1}, тогда

м 1 2 м 1 2

β = β ℓ б я / βBℓ ℓ б я / βBℓ . (7.3.9)

я=1 ℓεE я = 1 ℓεO

Более того, [β , β] = (Eq |E |) м 1 × (уравнение |O |) м 1 .

Замечание. Напомним, что m — количество классов конгруэнтности в β. Количество подходов с направлением вверх На рисунке 7.15 |E |, а |O| подсчитывает количество наборов, указывающих вниз. В своей конструкции мы взяли |E | = |O| = Q + 1, но, помимо удобства обозначений, этот выбор был произвольным; фактически, нет никакой причины, по которой E и O должны быть равны по количеству, и они могут даже быть пустыми. Выбор Например, O = приведет к интервалу [β , β] = (Eq |E |) м 1 . Таким образом, для любого N мы можем построим алгебру A, у которой (EqN) , β] < Con A1 = [β

Доказательство теоремы 7.3.10. Легко проверить, что β является отношением эквивалентности на A, поэтому сначала мы проверим, что f(β) β для всех f FA. Это установит, что β Con A. После этого мы покажем, что β η Con A влечет β η, что докажет, что β — наименьшая конгруэнция A, содержащая β, как утверждается в первой части теоремы.

Зафиксировать (x, y) β . Чтобы доказать, что (f(x), f(y)) β , рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: (x, y) β Bj для некоторого 0 j (2q + 1)K.

В этом случае легко проверить, что (qi,0(x), qi,0(y)) β и (q0,i(x), q0,i(y)) β Би для всех 0 i K + 1. Например, если (x, y) β Bj с 1 j K, то (q0,i(x), q0,i(y)) = (a я 1 , аи 1) и (qi,0(x), qi,0(y)) — это либо (bi , bi) , либо (ai , ai) в зависимости от того, находится ли i ниже или выше j соответственно. Если i = j, то (qi,0(x), qi,0(y)) — пара из B2 , соответствующая (x, y) β Bj , итак (qi,0(x), qi,0(y)) β. Особый случай — это (q0,0(x), q0,0(y)) β. Следовательно, q0,0 = e0 влечет (fe0(x), fe0(y)) β для всех e € ФБ. Итого мы доказали, что (f(x), f(y)) β для всех f FA.

Случай 2: (x, y) B2 , где B := МК я=0 ти/βBi .

Заметим, что e0(B) = a1/β. Следовательно, (e0(x), e0(y)) β, поэтому (fe0(x), fe0(y)) β для всех f FB. Также,

q0,k(B) = S0,ke0(B) = S0,k(a1/β) = a K 1/βBk ,

представляет собой отдельный блок β. Аналогично, ek(B) = tk/βBk , который так

qk,0(B) = Sk,0ek(B) = Sk,0(tk/βBk) = Sk,0(tk)/β,

блок β . Следовательно, (x, y) B2 влечет (f(x), f(y)) β для всех f FA. один

Таким образом, мы установили, что β является конгруэнцией A, содержащей β. Теперь мы покажем, что β наименьшее такое сравнение. Действительно, предположим, что β η Con A и зафиксировали (x, y) β . Если (x, y) β Bj — для некоторого 0 j MK тогда (qj,0(x), qj,0(y)) = (Sj,0ej (x), Sj,0ej (y)) = (Sj,0(x), Sj,0 (y)) β η, поэтому (x, y) = (q0,j qj,0(x), q0,j qj,0(y)) η.

Если вместо (x, y) β Bj , имеем (x, y) B2 , тогда без ограничения общности x a $^{я}_{я}$/βBi и y a j ^{j} /βBj для некоторого 0 i < j K + 1. Тогда (qi,0(x), qi,0(ti)) β и (qj,0(tj), qj,0(y)) β и , поскольку i < j, существует последовательность связующих точек c$^{я}_{я}$, ди+1 $_{я+1,}$ ци+1 $_{я+1,}$ ди+2 $_{я+2,}$ ci+2 c i+2, . . . $^{дж}_{дж}$, (где {c, d} = {a, b}) такой, что

$$ти β с я^{Би я} = d^{я+1}_{я+1} β Би+1 c^{я+1}_{я+1} я+2 = d я+2 β Би+2 c^{я+2}_{я+2} = · · · = c^{дж}_{дж} β Bj tj . \qquad (7.3.10)$$

Мы могли бы набросать диаграмму, подобную той, что приведена в доказательстве теоремы 7.3.6, но она должна быть теперь очевидно, что из соотношений (7.3.10) следует (ti , tj) η. Следовательно, β = CgA(β).

Далее докажем уравнение (7.3.9). Обозначим через β правую часть (7.3.9). Мы сначала показываем β Con A.

Позволять

$$C^{Э}_{я} "=" \underset{ℓεE}{} c^{ℓ}_{я} /βBℓ и C^{О}_{я} "=" \underset{ℓεO}{} c^{ℓ}_{я} /βBℓ .$$

Обратите внимание, что C$^{Э}_{я}$ — это объединение соответствующих (i-х) β-блоков в наборах, направленных вверх, на рисунке 7.15. Таким образом, C$^{Э}_{я}$ можно визуализировать как один срез всех наборов, направленных вверх. Аналогично, C$_{я}$О - это объединение соответствующих блоков в наборах, указывающих вниз, на рисунке 7.15. Если 0 < i < K и ℓ E , затем eℓ+i(C $^{Э}_{я}$) = eℓ+i(C $^{О}_{я}$) = {a $^{ℓ+я}_{я}$, 6$_{я}$ℓ+я }. Таким образом, для каждого такого k = ℓ + i имеем

$$qk0(Ci^{Э}) = Sk0 ek(Ci) = Sk0 ek^{Э}(Ci) = qk0(Ci) = \{ai^{О} , bi\}, \quad О$$

один блок β. Аналогично, если 0 < i < K и ℓ O, то eℓ+i(C $^{Э}_{я}$) = eℓ+i(C $^{О}_{я}$) = {a $^{ℓ+я}_{K-и}$, 6$^{ℓ+я}_{K-я}$ }. Таким образом, для каждого такого k = ℓ + i имеем

$$qk0(Ci^{Э}) = Sk0ek(Ci^{Э}) = Sk0ek(Ci^{О}) = qk0(Ci^{О}) = \{aK i ,bK i\},$$

который также является отдельным блоком β. Отсюда следует, что qk0(β) β для всех k /ε E O. Если k E , затем eк(C $^{Э}_{я}$) = c $^{к}_{я}$ /βBk и ek(C $^{О}_{я}$) = a $^{К}_{1}$, поэтому qk0(C$^{Э}_{я}$) = ci/β и qk0(C $^{О}_{я}$) = a1. Таким образом, qk0(β) β. Если k O, то ek(C $^{Э}_{я}$) = б $^{к}_{К-1}$ и ek(C $^{О}_{я}$) = c $^{к}_{я}$ /βBk , поэтому qk0(C $^{Э}_{я}$) = bK 1 и qk0(C $^{О}_{я}$) = ci/β. Таким образом, qk0(β) β. Наконец, e0(C $^{Э}_{я}$) = ci/β и e0(C $^{О}_{я}$) = a1, поэтому для каждого f FB операция fe0 принимает все C i ^{E} к одному β-классу, и все C $^{О}_{я}$ в один бета-класс. То есть fe0(β) β для всех f FB.

Это завершает доказательство того, что f(β) β для всех f FA.

Поскольку ограничение β на B очевидно равно β|B = β, лемма об вычете дает β β, и теперь мы доказать β β. Действительно, легко видеть, что для каждого (x, y) / β существует операция f Pol1(A), такая что (e0f(x), e0f(y)) / β и, следовательно, (x, y) / β. Проверка этого утверждения тривиальна. Например, если x $c^{ℓ}_{я}$/βBℓ для некоторого 1 i < m, ℓ E и y /ε C $я^{Э}$, тогда e0(x) ci/β и e0(y) / ci/β, так что (e0(x), e0(y)) /β. Возьмем чуть менее тривиальный случай, предположим, что x $c^{ℓ}_{я}$/βBℓ для некоторого 1 я < м, ℓ O $я^{O}$. Тогда (eℓ(x), eℓ(y)) / β Bℓ и y /ε C , итак (e0qℓ0(x), e0qℓ0(y)) = (qℓ0(x), qℓ0(y)) / β. Несколько остальные случаи еще легче проверить, поэтому мы их опускаем. Это завершает доказательство (7.3.9).

Осталось доказать, что [β , β] = $(\text{Eq}|E|)^{м\ 1} \times (\text{уравнение}|O|)^{м\ 1}$. Это тривиально следует из того, что мы доказали выше. Ведь, доказывая, что β — сравнение, мы показали, что на самом деле каждая операция f FA отображает блоки β(= β) в блоки β . То есть каждая операция схлопывает интервал [β , β]. Следовательно, каждое отношение эквивалентности на множестве A, лежащее между β и β, соблюдается. каждой операцией A. Другими словами,

$$[β\ ,\ β] = \{θ\ \ \text{Eq}(A) : β\ \ \ \ θ\ β\}.$$

Учитывая конфигурацию вселенной A, показанную на рис. 7.15, ясно, что интервал подрешетка {θ Eq(A) : β θβ} изоморфна $(\text{Eq}|E|)^{м\ 1} \times (\text{уравнение}|O|)^{м\ 1}$. □

7.4 Выводы

Мы описали подход к построению новых конечных алгебр из старых, который полезен в следующая ситуация: дана алгебра B с конгруэнтной решеткой Con B определенной формы. ищите алгебру A с решеткой конгруэнций Con A, которая имеет Con B как (нетривиальную) гомоморфную изображение; в частности, мы строим A так, чтобы |B : Con A Con B был решеточным эпиморфизмом. Мы описал исходный пример – «трехкрылый пятиугольник», показанный справа на рис. 7.1 – найден Ральфом Фризом, что побудило нас разработать общую процедуру нахождения таких конечных алгебраические представления.

В основном мы сосредоточились на нескольких конкретных конструкциях надалгебры. В каждом случае соответствие Полученная в результате решетка имеет ту же основную форму, что и та, с которой мы начали, за исключением некоторых сравнения заменяются интервалами, являющимися прямыми произведениями степеней решеток разбиения. Таким образом мы определили новый широкий класс конечно представимых решеток. Однако тот факт, что новые интервалы в этих решетках должны быть продуктами решеток разбиения, что кажется весьма ограничивающим фактором, и это

— это первое ограничение, которое, по нашему мнению, могут быть направлены на преодоление будущих исследований.

Мы предполагаем потенциальные вариации описанных здесь конструкций, которые могут принести нам ближе к цели замены некоторых сравнений β Con B более общим конечным решеток, L = [β , β] Con A. Используя описанные выше конструкции, мы нашли примеры надалгебры, для которых невозможно просто добавить операции, чтобы устранить все отношения строго содержится в интервале (β , β). Тем не менее, нас по-прежнему воодушевляет успех очень скромный пример в этом направлении, который мы сейчас опишем.

Пример 7.4.1. Предположим, C, . . . — произвольная конечная алгебра с конгруэнтной решеткой LC := Кон C, ... Переобозначьте элементы так, чтобы C = {1, 2, . . . , H}. Покажем, как пользоваться овералгеброй. конструкция, описанная в разделе 7.3.1, для получения конечной алгебры с решеткой конгруэнций, появляющейся на рисунке 7.16.12

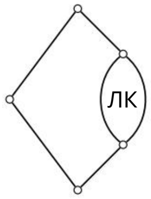


Рисунок 7.16: LC — произвольная конечно представимая решетка.

Пусть B = B, FB — унарная алгебра с универсумом

B = {a1, a2, . . . , aH , b1, b2, . . . , бН },

и решётка конгруэнций Con B = {0B, α, β, 1B} = 2 × 2, где

α = |a1, b1 |a2, b2 | · · · |aN , bN | и β = |a1, a2, . . . , aN |b1, b2, . . . , БН |.

Такая алгебра существует по теореме Бермана [5] и Квакенбуша и Волка [36]. Пусть B1, B2, . . . , БН — множества размера 2N, которые пересекают B следующим образом: для всех 1 я < j K,

B0 Bi = {bi} и Bi Bj = .

---

[12] Джон Сноу уже доказал, что «параллельные суммы» конечно представимых решеток конечно представимы (см. леммы 3.9 и 3.10 в [43]).

Если A = A, FA — надалгебра, построенная как в разделе 7.3.1, то Con A изоморфна решетка на рисунке 7.16, но с заменой LC на уравнение (C). Теперь расширьте набор ФА операций на A следующим образом: для каждого f FC , определим f0 : B B как f0(ai) = af(i) и f0(bi) = bf(i) , ˆf : A A как и определить ˆf(x) = f0(s(x)). Определив F + = FA { ˆf : f FC }, мы утверждаем, что сравнение A решетка алгебры A, F + A (изоморфна) решетке, представленной на рис. 7.16.

В заключение обратим внимание на еще одно очевидное ограничение методов, описанных в этой статье. глава - их нельзя использовать для поиска алгебры с конгруэнтной решеткой, изоморфной решетке L7, который является предметом Раздела 6.3. Эта решетка проста, поэтому она определенно не является прообразом под |B некоторой меньшей решетки.

ГЛАВА 8

ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ

Мы завершаем этот тезис перечислением некоторых открытых вопросов, ответы на которые помогут нам лучше. понимать конечные алгебры вообще и конечные группы в частности. По мнению автора, такой прогресс, несомненно, приведет к решению проблемы ФЛРП в самом ближайшем будущем.

Обозначим через H(K) класс гомоморфных образов класса K алгебр. Обозначим через L3 класс представимых решеток; т. е. L L3 тогда и только тогда, когда L = Con A для некоторой конечной алгебры A. Обозначим через L4 класс группово представимых решеток; т. е. L L4 тогда и только тогда, когда L = [H, G] для некоторого конечного группы H G. Как мы знаем, L3 L4.

1. Замкнуто ли L4 относительно гомоморфных образов, H(L4) = L4?

2. Верно ли H(L4) L3 ?

3. Верно ли H(L3) = L3 ?

4. Верно ли L3 = L4 ? Другими словами, если L — решетка конгруэнций конечной алгебры, то L (изоморфной) решетке конгруэнций транзитивного G-множества? Эквивалентно, является ли каждое сравнение решетка конечной алгебры (изоморфная) интервалу в решетке подгрупп конечной группы?

5. Предположим, что L L4. Верно, что L0 = {x L | x α или β x} L4 для всех α, β L? Примечание что по результату Джона Сноу (лемма 2.3.1) это верно, если мы заменим L4 на L3.

6. Какие еще свойства групп, кроме описанных в главе 5, являются интервальными? свойства подрешетки (ISLE) ?

7. Если групповое свойство — ISLE, верно ли, что отрицание этого свойства не может быть ISLE? (Этот есть гипотеза 5.1.)

8. Является ли решетка M7 конгруэнтной решеткой алгебры мощности меньше 30!/10? (В [14] Уолтер Фейт находит M7 = [H, A31], где |H| = 31 · 5, поэтому M7 — решётка конгруэнций транзитивного G-множества на |A31 : H| = 30!/10 элементов.)

9. Существует ли общая характеристика класса конечных решеток, встречающихся в виде конгруэнтных решеток? overалгебр? Как мы указывали в разделе 7.4.1, простая решетка не является сравнением решетку (нетривиального) разложения типа, описанного в главе 7. Существуют ли еще такие

свойства, помимо простоты, описывающие решетки, которые не могут быть конгруэнтной решеткой оверaлгебра?

10. Представляема ли группа L11 семиэлементной решетки ?

    (Напомним, в разделе 6.2 мы доказали, что L11 представима с помощью метода фильтр+идеал, который обязательно приводит к неперестановочной алгебре.)

11. Любая ли решетка, состоящая не более чем из семи элементов, представима?

    (В разделе 6.2 мы описали семиэлементные решетки, которые сложнее всего представлять. Они показаны на рисунке 7.1. Мы видели, что L13 и L17 представимы группами. Хотя мы не упоминали об этом выше, мы также нашли решетку L9 (что послужило мотивацией изобретение овералгебры) как интервал в решетке подгрупп A10. Внизу этого интервал представляет собой подгруппу индекса 25 400. Итак, наименьшее G-множество, которое мы нашли с конгруэнтностью решетка, изоморфная L9 , состоит из 25 400 элементов. Очевидно, что это не минимальное представление. из L9. Действительно, в примере 7.3.1 мы построили овералгебру из 16 элементов, имеющую конгруэнционная решетка, изоморфная L9. Мы подозреваем, что не составит большого труда доказать, что решетки L19 и L20 группово представимы. Тогда из решеток, представленных на рис. 7.1, L7 может быть непредставимым, а L11, хотя и представим, кажется трудным найти как интервал в решетке подгрупп конечной группы.)

Часть III

Приложение

ПРИЛОЖЕНИЕ
ПРЕДПОСЫЛКИ ТЕОРИИ ГРУПП

В этом разделе мы рассмотрим некоторые аспекты теории групп, которые имеют отношение к нашей проблеме представления конечная решетка как решетка конгруэнций конечной алгебры.

A.1 Групповые действия и группы перестановок

Пусть G — группа, A = A, G¯ — G-множество, и пусть Sym(A) обозначает группу перестановок группы A. Для a A, однопорожденная подалгебра a Sub(A) называется орбитой a в A. Легко проверяется что a — это множество Ga¯ := {ga¯ | g G}, и мы часто используем более наводящее на размышления слово Ga¯, когда говорим о эту орбиту.

Орбиты G-множества A разбивают множество A на непересекающиеся классы эквивалентности. Эквивалентность Отношение определяется на A2 следующим образом: x y тогда и только тогда, когда ¯gx = y для некоторого g G. Фактически, является конгруэнтности алгебры A, поскольку из x y следует ¯gx gy¯ . Таким образом, как уже говорилось выше, каждый орбита действительно является подалгеброй A.

Имейте в виду, что A — это непересекающееся объединение орбит. То есть, если {a1, . . . , ar} — полный набор -класса, то A = $\overset{р}{я = 1}$ Га¯ я представляет собой непересекающийся союз.

G-множество, имеющее только одну орбиту, называется транзитивным. Эквивалентно, A, G¯ является транзитивным G-множеством, если и только если (a, b A)(g G)(¯ga = b). В этом случае мы говорим, что G действует транзитивно на A, и иногда мы называем саму группу G транзитивной группой степени |A|.

Для a A множество StabG(a) := {g G | ga¯ = a} называется стабилизатором a. Это легко проверить что StabG(a) является подгруппой G. Альтернативное обозначение стабилизатора: Ga := StabG(a).

Пусть λ : G G¯ Sym(A) обозначает перестановочное представление группы G; т. е. λ(g) = ¯g. Затем

ker λ = {g G | ga¯ = a для всех a A} = StabG(a) = Га. (A.1.1)
aeA aeA

Следовательно, G/ ker λ = λ[G] Sym(A). Мы говорим, что представление λ группы G точное или что G действует точно на A, как раз в случае, когда ker λ = 1. В этом случае λ : G Sym(A), поэтому G сама по себе изоморфна. в подгруппу Sym(A), и мы называем G группой перестановок.

Если HG — группы, ядро H в G, обозначаемое coreG(H), является самой большой нормальной подгруппой группы.

G, содержащийся в H. Легко видеть, что

$$\text{ядро}G(H) = \underset{g\varepsilon G}{\quad} \text{грт-}1\,.$$

Подгруппа H называется бесядерной, если coreG(H) = 1.

Элементы на одной орбите G-множества имеют сопряженные стабилизаторы. В частности, если a, b A и g G таковы, что ¯ga = b, то Gb = Gga¯ = g Ga g^{1}. Если G-множество транзитивно, то он верен тогда и только тогда, когда стабилизатор Ga лишен ядра в G. Ибо

$$\text{кер } \lambda = \underset{aeA}{\quad} \text{Га} = \underset{g\varepsilon G}{\quad} \text{Gga}^{-} = \underset{g\varepsilon G}{\quad} \text{г га г}^{1}.$$

Таким образом , Ga не имеет ядер тогда и только тогда, когда ker λ = 1 тогда и только тогда, когда G действует точно на A.

В случае, если G — транзитивная группа подстановок, мы говорим, что G регулярна (или что G действует регулярно на A или что λ : G G¯ — регулярное представление) при условии, что Ga = 1 для каждого a A; то есть каждый неединичный элемент группы G не имеет неподвижных точек.[1] Эквивалентно, G регулярна на A тогда и только тогда, когда для каждого a, b A существует единственный g G такой, что ¯ga = b. В частности, |G| = |A|.

Блочная система для G — это разбиение A, сохраняющееся действием G. Другими словами, блочная система – это конгруэнтное отношение алгебры A = A, G¯. Тривиальные блочные системы: 0A = |a1 |a2| · · · |ai | · · · и 1A = |a1a2 · · · ai · · · |. Нетривиальные блочные системы называются системами непримитивности.

Непустое подмножество B A называется блоком для A, если для каждого g G либо ¯gB = B, либо ¯gB B = .

Пусть A = A, G¯ — транзитивное G-множество. В большинстве учебников по теории групп можно найти следующее. определение: группа G называется примитивной, если A не имеет систем импримитивности; в противном случае G называется примитивный. Другими словами, G является примитивным тогда и только тогда, когда транзитивное G-множество A, G¯ является простым алгебры – то есть Con A, G¯ = 2. По мнению автора, такое определение примитива бессмысленно. и является источником ненужной путаницы. Очевидно, каждая конечная группа действует транзитивно на смежных классах максимальной подгруппы H и полученное G-множество имеет Con G/H, G¯ = [H, G] = 2. Это означает что, согласно обычному определению, каждая конечная группа примитивна. Чтобы сделать определение более имеет смысл, мы должны потребовать, чтобы примитивная группа была изоморфна группе перестановок. Что мы называем транзитивную группу подстановок примитивной, если индуцированная алгебра проста. Чтобы увидеть В качестве различия возьмем произвольную группу G, действующую на смежных классах подгруппы H. Это действие точное,

---

[1] Действие регулярной группы подстановок иногда называют «свободным» действием.

и G является группой перестановок тогда и только тогда, когда H не имеет ядер. Если, кроме того, H — максимальная подгруппа, то индуцированная алгебра G/H, $\bar{G}$ проста. По этим причинам мы будем называть группу примитивной, если и только если она имеет максимальную подгруппу без ядра. (Обратите внимание, что термины «примитивный» и «импримитивный» используются только по отношению к транзитивным G-множествам.)

A.2 Классификация групп перестановок

Группа перестановок либо транзитивна, либо является подпрямым произведением транзитивных групп. транзитивная группа либо примитивна, либо является подгруппой повторного сплетения примитивных группы. (См., например, Прегер [33].) Следовательно, примитивные группы можно рассматривать как строительные блоки. всех групп перестановок и их классификация помогает нам лучше понять структуру группы перестановок в целом.

Цоколь группы G — это подгруппа, порожденная минимальными нормальными подгруппами группы G, и обозначается Soc(G). Согласно [12, следствие 4.3Б] цоколь конечной примитивной группы изоморфен прямой продукт одной или нескольких копий простой группы T. Теорема О'Нэна-Скотта классифицирует примитивные группы перестановок в соответствии со строением их цоколей. Следующая версия Эта теорема кажется одной из наиболее полезных, и она появляется, например, в диссертации доктора философии. Тезис Ханны Куттс [9].

A.2.1 Теорема О'Нэна-Скотта

Теорема A.2.1 (Теорема О'Нэна-Скотта). Пусть G — примитивная группа подстановок степени d и пусть N := Soc(G) = T m при m 1. Тогда выполнено одно из следующих утверждений.

1. N регулярен и
   - (а) Аффинный тип T циклический порядка p, поэтому $|N| = п^{м}$. Тогда d = pm и G — перестановка изоморфна подгруппе аффинной полной линейной группы AGL(m, p). Мы называем G группой аффинного типа.
   - (б) Скрученное сплетение типа m 6, группа T неабелева, G — группа скрученных тип сплетенного продукта, с d = |T | м.
2. N нерегулярен и неабелев и
   - (а) Почти простое m = 1 и TG Aut(T).

(b) Действие произведения m 2 и G является перестановкой, изоморфной подгруппе произведения

сплетение действия P Sm/l степени d = нм/л. Группа P примитивна типа

2.(a) или 2.(c), P имеет степень n и Soc(P) = $T^{л}$, где l 1 делит m.

(в) Диагональный тип m 2 и T m GT m.(Out(T) × Sm) с диагональным действием.

степень d = $|T|^{м \ 1}$.

Мы сразу видим, что не существует групп типов скрученных сплетений степени меньше, чем 606 (= 46,656 миллиардов). Обратите внимание, что это определение групп действий по продукту является более ограничительным, чем что дают некоторые авторы. Это сделано для того, чтобы классы О'Нэна-Скотта были непересекающимися.

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] Майкл Ашбахер. Об интервалах в решетках подгрупп конечных групп. Дж. Амер. Математика. соц., 21(3):809–830, 2008. doi:10.1090/S0894-0347-08-00602-4.

[2] Роберт Бэддели и Андреа Луккини. О представлении конечных решеток интервалами в подгруппе решетки конечных групп. J. Algebra, 196(1):1–100, 1997. doi:10.1006/jabr.1997.7069.

[3] Адольфо Баллестер-Болинчес и Луис М. Эскерро. Классы конечных групп, том 584 Матема- Эматика и ее приложения (Спрингер). Спрингер, Дордрехт, 2006 г.

[4] Альберто Базиле. Вторые максимальные подгруппы конечных знакопеременных и симметрических групп. кандидат наук диссертация, Австралийский национальный университет, Канберра, апрель 2001 г.

[5] Джоэл Берман. Решетки конгруэнций конечных универсальных алгебр. Кандидатская диссертация, Университет Вашингтона. Инингтон, 1970. Доступно по адресу: http://db.tt/mXUVTzSr.

[6] Гаррет Биркгоф. О строении абстрактных алгебр. Учеб. Кмабридж Фил. Соц., 31:433–454, 1935 год.

[7] Гаррет Биркгоф. Теория решетки. Американское математическое общество, Нью-Йорк, 1940.

[8] Фердинанд Бёрнер. Замечание о проблеме представления на конечной решетке. В вкладах в общая алгебра, 11 (Оломоуц/Вельке Карловице, 1998), страницы 5–38, Клагенфурт, 1999. Heyn.

[9] Ханна Куттс. Темы вычислительной теории групп: примитивные группы перестановок и нормализаторы матричных групп. Докторская диссертация, Университет Сент-Эндрюс, 2010 г. Доступно по адресу: http://www-circa.mcs.st-and.ac.uk/Theses/HCoutts_thesis.pdf.

[10] Ричард Дедекинд. Uber die Anzahl der Ideal-classen in den verschiedenen Ordnungen eines Endlichen K¨orpers. В Festschrift zur Saecularfeier des Geburtstages фон CF Gauss, страницы 1–55. Вьюег, Брауншвейг, 1877 г. см. Ges. Верке, Группа I, 1930, 105–157.

[11] Уильям ДеМео и Ральф Фриз. Решетки конгруэнций интранзитивных G-множеств. препринт, 2012. Доступно по адресу: http://db.tt/tNzQsZl9.

[12] Джон Д. Диксон и Брайан Мортимер. Группы перестановок, том 163 «Текстов для выпускников» в Математика. Спрингер-Верлаг, Нью-Йорк, 1996 г.

[13] Клаус Доерк и Тревор Хоукс. Конечные разрешимые группы, том 4 «Изложений де Грюйтера» в Математика. Вальтер де Грюйтер и компания, Берлин, 1992 г.

[14] Уолтер Фейт. Интервал в решетке подгрупп конечной группы, изоморфный M7. Algebra Universalis, 17(2):220–221, 1983. doi:10.1007/BF01194532.

[15] Ральф Фриз. Решетки конгруэнции конечно порожденных модулярных решеток. В материалах Конференция по теории решеток (Ульм, 1975), страницы 62–70, Ульм, 1975. Univ. Ульм.

[16] Ральф Фриз, Эмиль Кисс и Мэтью Валериот. Универсальный алгебраический калькулятор, 2008. Доступен. с: http://www.uacalc.org.

[17] Группа GAP. GAP – Группы, алгоритмы и программирование, версия. 4.4.12, 2008 г. В наличии с: http://www.gap-system.org.

[18] Г. Грэтцер и Э.Т. Шмидт. Характеризации решеток конгруэнций абстрактных алгебр. Акта Наука. Математика. (Сегед), 24:34–59, 1963.

[19] Джордж Гретцер. Универсальная алгебра. Д. Ван Ностранд Ко., Инк., Принстон, Нью-Джерси-Торонто, Онтарио-Лондон, 1968 год.

[20] И. Мартин Айзекс. Теория конечных групп, том 92 аспирантуры по математике. Американский Математическое общество, Провиденс, Род-Айленд, 2008.

[21] Бьярни Йонссон. Темы универсальной алгебры. Конспекты лекций по математике, Vol. 250. Спрингер-Верлаг, Берлин, 1972 г.

[22] Питер Кёлер. M7 как интервал в решетке подгрупп. Алгебра Универсалис, 17(3):263–266, 1983. doi: 10.1007/BF01194535.

[23] Ганс Курцвейл. Endliche Gruppen mit vielen Untergruppen. Дж. Рейн Анжью. Матем., 356:140–160, 1985. doi:10.1515/crll.1985.356.140.

[24] Ральф Маккензи. Конечные запрещенные решетки. В «Универсальной алгебре и теории решеток» (Пуэбла, 1982), том 1004 «Конспектов лекций по математике», страницы 176–205, Берлин, 1983. Springer.

[25] Ральф Маккензи. Новое произведение алгебр и теорема о приведении типов. Алгебра Универсалис, 18(1):29–69, 1984. doi:10.1007/BF01182247.

[26] Ральф Н. Маккензи, Джордж Ф. МакНалти и Уолтер Ф. Тейлор. Алгебры, решетки, многообразия. Том. И. Уодсворт и Брукс/Коул, Монтерей, Калифорния, 1987.

[27] Р. Неттер. Eine bemerkung zu kongruenzverbanden. препринт, 1986.

[28] П. П. Палфи. Дистрибутивные конгруэнц-решетки конечных алгебр. Акта Наука. Математика. (Сегед), 51(1-2): 153–162, 1987.

[29] П'етер П'ал П'алфи. Интервалы в решетках подгрупп конечных групп. В группах '93 Голуэй/Сент. Эндрюс, Том. 2, том 212 журнала London Math. Соц. Серия лекций, стр. 482–494. Кембридж унив. Пресс, Кембридж, 1995. doi:10.1017/CBO9780511629297.014.

[30] П'етер П'ал П'алфи. Группы и решетки. В группах Сент-Эндрюс 2001 г. в Оксфорде. Том. II, том 305 Лондонской математики. Соц. Серия лекций, страницы 428–454, Кембридж, 2003. Cambridge Univ. Нажимать. doi: 10.1017/CBO9780511542787.014.

[31] П'етер П'ал П'алфи. Задача конечной конгруэнтной решетки, сентябрь 2009 г. Летняя школа по поколению. Эральная алгебра и упорядоченные множества «Старая Лесна», 6, 2009. Доступно по адресу: http://db.tt/DydVmisY.

[32] П’етер П’ал Палфи и Павел Пудлак. Решетки конгруэнций конечных алгебр и интервалы в решетках подгрупп конечных групп. Алгебра Универсальная, 11 (1): 22–27, 1980. doi: 10.1007/BF02483080.

[33] Шерил Э. Прегер. Полунормальные и субнормальные решетки подгрупп для транзитивной подстановки группы. Дж. Ауст. Математика. Soc., 80(1):45–63, 2006. doi:10.1017/S144678870001137X.

[34] П. Пудлак, Дж. Тума. Дрожжевые графы и брожение алгебраических решеток. В теории решеток (Proc. Colloq., Сегед, 1974), страницы 301–341. Коллок. Математика. Соц. Янош Боляи, Том. 14. Север-Голландия, Амстердам, 1976 год.

[35] Павел Пудлак и Жиры Тума. Любую конечную решетку можно вложить в конечную решетку разбиений. Algebra Universalis, 10(1):74–95, 1980. doi:10.1007/BF02482893.

[36] Р. Квакенбуш и Б. Волк. Сильное представление решеток конгруэнций. Алгебра Универсалис, 1:165–166, 1971/72.

[37] Дерек Дж. С. Робинсон. Курс теории групп, том 80, «Тексты для выпускников» в Математика. Springer-Verlag, Нью-Йорк, второе издание, 1996 г.

[38] Джон С. Роуз. Курс теории групп. Dover Publications Inc., Нью-Йорк, 1994. Перепечатка оригинал 1978 года [Издательство Кембриджского университета; MR0498810 (58 №16847)].

[39] Ада Роттлендер. Nachweis der Existenz nicht-isomorpher Gruppen von gleicher Situation der Унтергрупп. Математика. З., 28(1):641–653, 1928. doi:10.1007/BF01181188.

[40] Э. Тамас Шмидт. Обзор представлений решетки конгруэнтности, том 42 журнала Teubner-Texte из математики. BSB BG Teubner Verlagsgesellschaft, Лейпциг, 1982 г.

[41] Роланд Шмидт. Решетки подгрупп групп, том 14 «Изложения де Грютера по математике» матика. Вальтер де Грюйтер и компания, Берлин, 1994 г.

[42] Говард Л. Силкок. Обобщенные сплетения и решетка нормальных подгрупп группы. Алгебра Универсалис, 7(3):361–372, 1977.

[43] Джон В. Сноу. Конструктивный подход к задаче представления конечной конгруэнтной решетки. Algebra Universalis, 43(2-3):279–293, 2000. doi:10.1007/s000120050159.

[44] Мичио Судзуки. Теория групп. I, том 247 «Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften». [Основные начала математических наук]. Springer-Verlag, Берлин, 1982. Перевод. с японского автора.

[45] Джири Тума. Некоторые конечные конгруэнтные решетки. I. Чехословацкая математика. Дж., 36(111)(2):298–330, 1986.

[46] Ясуо Вататани. Решетки промежуточных субфакторов. Дж. Функц. Анал., 140(2):312–334, 1996. doi:10.1006/jfan.1996.0110.

[47] Филип М. Уитмен. Решетки, отношения эквивалентности и подгруппы. Бык. амер. Математика. соц., 52:507–522, 1946.

ИНДЕКС