МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники»
Кафедра высшей математики №1

Вологжанин Никита Андреевич

# Представление конечных решеток конгруэнциями унарных алгебр

Научный руководитель:
профессор Кожухов И.Б.

Москва 2024

# Введение

Алгебры, состоящие из множества и операций, являются фундаментальными объектами в математике, с важными примерами, такими как решетки, группы, кольца и модули. Изучение алгебры часто включает анализ её гомоморфизмов и связанных с ними конгруэнтных отношений, которые образуют решетку. Согласно теореме Грэтцера и Шмидта, любая конечная дистрибутивная решетка может быть представлена как решетка конгруэнций некоторой алгебры. Вопрос о том, является ли каждая конечная решетка представимой, известен как проблема конечного представления решетки (FLRP) и остаётся нерешённым.

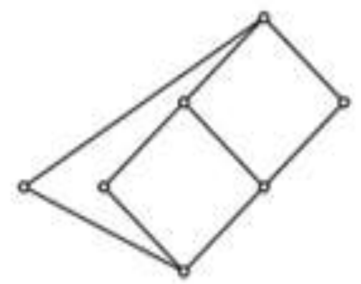
**Решетка**

Частично упорядоченное множество ( L; ≤ ) - решетка , если sup(H) и inf(H) существует для любого непустого конечного подмножества H множества L .

Теорема (Гретцер-Шмидт) :

Каждая конечная дистрибутивная решетка изоморфна решетке конгруэнций некоторой конечной решётки

# Постановка задачи



$L_7$

**Объект исследования** : унарные алгебры

**Предмет исследования** : решетка $L_7$

**Постановка задачи** :

1. Ввести произвольную алгебру X с отношениями эквивалентности образующую решетку $L_7$
2. Найти все классы эквивалентности для заданной алгебры на заданной решетке
3. Найти отображения X →X сохраняющие классы
4. Проверить, найдены ли все отображения
5. Найти все разбиения множества X на классы , чтобы все ф$_i$ сохраняли эти классы
6. В случае , если найдены все исходные классы, построить решетку конгруэнций

# Общие сведения

В своей диссертации Уильям Дж.ДеМео доказал , что решетки , которые содержат не более шести элементов , являются представимыми . С семиэлементными решетками всё сложнее . Всего существует 53 решетки , которые содержат не более семи элементов , представления для большинства из них найти достаточно просто , взять, например, дистрибутивные решетки , которые являются представимыми по следующей теореме .

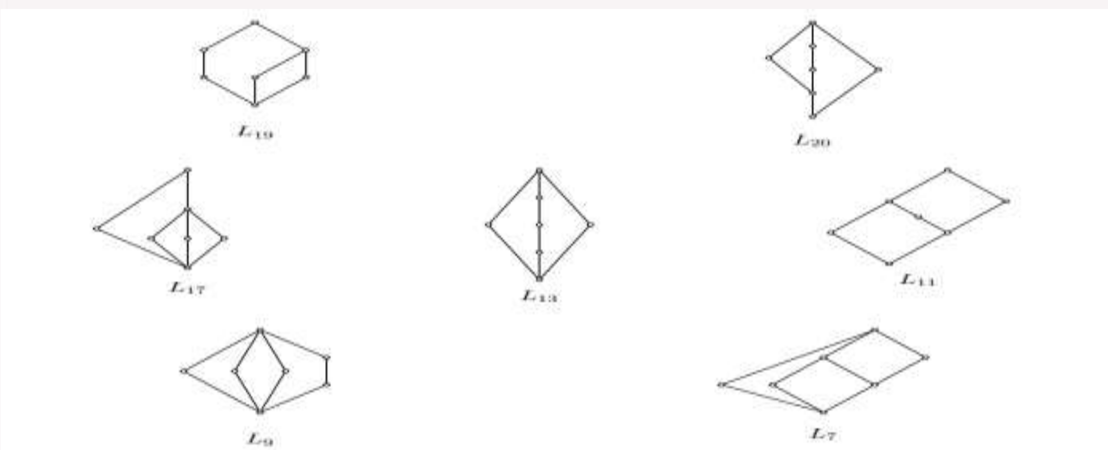
Теорема 1.1

( Berman , Quackenbush и Walk ) Любая конечная дистрибутивная решетка является представимой .

Теореема 1.2

Если $L \leq Eq(X)$ , то $L = Con(A)$ для некоторой алгебры A = <X,F> тогда и только тогда , когда L замкнутая.

Из всех 53 решеток , только 7 решеток не имеют очевидного представления .



$L_{19}$, $L_{20}$- найдены путем замыкания с помощью Sage

$L_{13}$ - найдено с помощью GAP

$L_9$, $L_{17}$, $L_{11}$ - найдены алгебраическим путем

# Алгоритм решения задачи

Рассмотрим алгебру X={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} с отношениями эквивалентности заданными разбиениями :

A = {0,2,4,6,8,10},{1,3,5,7,9,11}

D = {0,4,8},{1,5,9},{2,6,10},{3,7,11}

E = {0,3,6,9},{1,4,7,10},{2,5,8,11}

C = {0,6},{1,7},{2,8},{3,9},{4,10},{5,11}

Δ = {0},{1},{2},{3},{4},{5},{6},{7},{8},{9},{10},{11}

∇ = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}

Далее найдем элемент p . Данное p должно удовлетворять следующим требованиям :

$$P \vee A = \nabla \qquad P \wedge A = \Delta$$

$$P \vee C = \nabla \qquad P \wedge C = \Delta$$

$$P \vee D = \nabla \qquad P \wedge D = \Delta$$

$$P \vee E = \nabla \qquad P \wedge E = \Delta$$

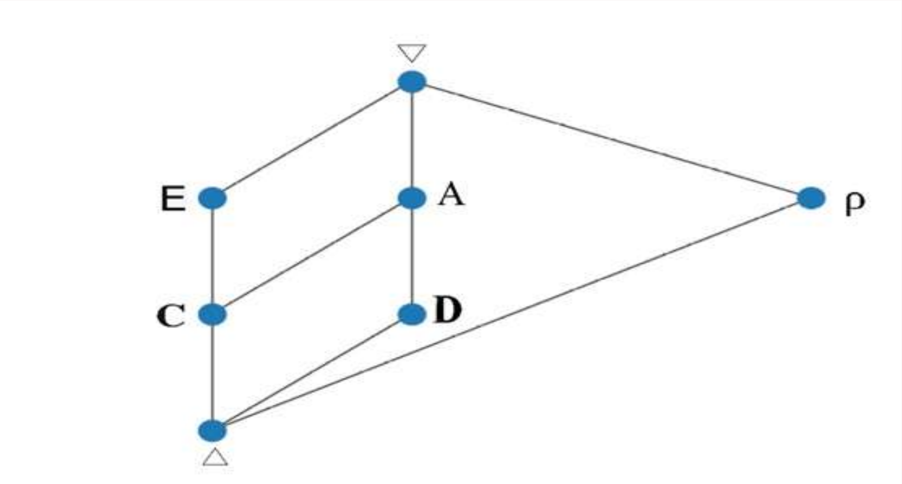
# Алгоритм решения задачи

Эту задачу лучше всего решать аналитически :

1. Чтобы наше р удовлетворяло пересечению с X нам нужно , чтобы р состояло из двух элементов .
2. Данные два элемента обязательно должны быть четным и нечетным числом
3. В наборе не может быть двух элементов с одинаковым остатком по mod .

Таким образом р может иметь вид : {0,1},{2,3},{4,11},{7,8},{5,6},{9,10}

Теперь наша решетка имеет следующий вид :



# Алгоритм решения

Всего было найдено 62 , которые будут удовлетворять условию нашей задачи :

{0,7},{2,1},{4,3},{6,5},{8,9},{10,11}
{0,7},{2,1},{4,9},{6,5},{8,3},{10,11}
{0,7},{2,1},{4,5},{6,11},{8,3},{10,9}
{0,7},{2,1},{4,3},{6,11},{8,9},{10,5}
{0,7},{2,1},{4,9},{6,11},{8,3},{10,5}
{0,7},{2,1},{4,5},{6,11},{8,9},{10,3}
{0,7},{2,3},{4,9},{6,5},{8,1},{10,11}
{0,7},{2,3},{4,5},{6,11},{8,1},{10,9}
{0,7},{2,3},{4,11},{6,5},{8,1},{10,9}
{0,7},{2,3},{4,9},{6,11},{8,1},{10,5}
{0,7},{2,9},{4,3},{6,5},{8,1},{10,11}
{0,7},{2,9},{4,3},{6,11},{8,1},{10,5}
{0,1},{2,3},{4,9},{6,11},{8,7},{10,5}
{0,1},{2,3},{4,5},{6,11},{8,7},{10,9}
{0,1},{2,7},{4,11},{6,5},{8,3},{10,9}
{0,1},{2,7},{4,9},{6,5},{8,3},{10,11}
{0,1},{2,7},{4,9},{6,11},{8,3},{10,5}
{0,1},{2,7},{4,5},{6,11},{8,3},{10,9}
{0,1},{2,7},{4,3},{6,5},{8,9},{10,11}
{0,1},{2,7},{4,3},{6,11},{8,9},{10,5}
{0,1},{2,7},{4,11},{6,5},{8,9},{10,3}
{0,1},{2,9},{4,3},{6,5},{8,7},{10,11}
{0,1},{2,9},{4,3},{6,11},{8,7},{10,5}
{0,1},{2,9},{4,11},{6,5},{8,7},{10,3}

{0,7},{2,9},{4,5},{6,11},{8,1},{10,3}
{0,7},{2,9},{4,11},{6,5},{8,1},{10,3}
{0,11},{2,1},{4,5},{6,7},{8,3},{10,9}
{0,11},{2,1},{4,9},{6,7},{8,3},{10,5}
{0,11},{2,1},{4,3},{6,7},{8,9},{10,5}
{0,11},{2,1},{4,5},{6,7},{8,9},{10,3}
{0,11},{2,3},{4,5},{6,7},{8,1},{10,9}
{0,11},{2,3},{4,5},{6,1},{8,7},{10,9}
{0,11},{2,3},{4,9},{6,7},{8,1},{10,5}
{0,11},{2,3},{4,9},{6,1},{8,7},{10,5}
{0,11},{2,7},{4,5},{6,1},{8,3},{10,9}
{0,11},{2,7},{4,9},{6,1},{8,3},{10,5}
{0,1},{2,9},{4,5},{6,11},{8,7},{10,3}
{0,5},{2,1},{4,3},{6,7},{8,9},{10,11}
{0,5},{2,1},{4,9},{6,7},{8,3},{10,11}
{0,5},{2,1},{4,11},{6,7},{8,3},{10,9}
{0,5},{2,1},{4,11},{6,7},{8,9},{10,3}
{0,5},{2,3},{4,9},{6,1},{8,7},{10,11}
{0,5},{2,3},{4,11},{6,1},{8,7},{10,9}
{0,5},{2,3},{4,11},{6,7},{8,1},{10,9}
{0,5},{2,7},{4,3},{6,1},{8,9},{10,11}
{0,5},{2,7},{4,9},{6,1},{8,3},{10,11}
{0,5},{2,7},{4,11},{6,1},{8,3},{10,9}
{0,5},{2,7},{4,11},{6,1},{8,9},{10,3}

{0,11},{2,7},{4,3},{6,1},{8,9},{10,5}
{0,11},{2,7},{4,5},{6,1},{8,9},{10,3}
{0,11},{2,9},{4,3},{6,7},{8,1},{10,5}
{0,11},{2,9},{4,5},{6,1},{8,7},{10,3}
{0,11},{2,9},{4,5},{6,7},{8,1},{10,3}
{0,1},{2,3},{4,11},{6,5},{8,7},{10,9}
{0,1},{2,3},{4,9},{6,5},{8,7},{10,11}
{0,1},{2,3},{4,9},{6,11},{8,7},{10,5}
{0,1},{2,3},{4,5},{6,11},{8,7},{10,9}
{0,1},{2,7},{4,11},{6,5},{8,3},{10,9}
{0,1},{2,7},{4,9},{6,5},{8,3},{10,11}
{0,1},{2,7},{4,9},{6,11},{8,3},{10,5}
{0,5},{2,9},{4,3},{6,1},{8,7},{10,11}
{0,5},{2,9},{4,11},{6,1},{8,7},{10,3}

{0,1},{2,7},{4,5},{6,11},{8,3},{10,9}
{0,1},{2,7},{4,3},{6,5},{8,9},{10,11}
{0,1},{2,7},{4,3},{6,11},{8,9},{10,5}
{0,1},{2,7},{4,11},{6,5},{8,9},{10,3}
{0,1},{2,9},{4,3},{6,5},{8,7},{10,11}
{0,1},{2,9},{4,3},{6,11},{8,7},{10,5}
{0,1},{2,9},{4,5},{6,11},{8,7},{10,3}
{0,1},{2,7},{4,5},{6,11},{8,3},{10,9}
{0,1},{2,3},{4,11},{6,5},{8,7},{10,9}
{0,5},{2,9},{4,11},{6,7},{8,1},{10,3}
{0,1},{2,3},{4,9},{6,5},{8,7},{10,11}
{0,1},{2,3},{4,9},{6,11},{8,7},{10,5}

# Алгоритм решения

**Второй этап решения задачи**.

Необходимо найти все отображения X →X , которые будут сохранять данные отношения:

A = {0,2,4,6,8,10},{1,3,5,7,9,11}

D = {0,4,8},{1,5,9},{2,6,10},{3,7,11}
E = {0,3,6,9},{1,4,7,10},{2,5,8,11}
C = {0,6},{1,7},{2,8},{3,9},{4,10},{5,11}
Δ = {0},{1},{2},{3},{4},{5},{6},{7},{8},{9},{10},{11}
∇ = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}

P={0,1},{2,3},{4,11},{5,6},{7,8},{9,10}

Всего возможных вариантов отображения : $12^{12}$ =8916100448256

# Алгоритм решения

Нам необходимо проверить существуют ли еще отображения , кроме тривиальных :

| | |
|---|---|
| [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] | вариант не тривиального отображения : |
| [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11] | 0→ 0 |
| [1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1] | 1→ 2 |
| [2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2] | 2→ 0 |
| [3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3] | 3→ 6 |
| [4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4] | 4→ 8 |
| [5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5] | 5→ 6 |
| [6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6] | 6→ 0 |
| [7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,7] | 7→ 2 |
| [8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8] | 8→ 0 |
| [9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,9] | 9→ 6 |
| [10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,10] | 10→ 8 |
| [11,11,11,11,11,11,11,11,11,11,11,11] | 11→ 6 |

# Алгоритм решения

Для решения данной задачи был получен следующий алгоритм :

1. Рассматриваем все классы и возможные варианты отображений

Дано отношение : C = [0,6] , [1,7] ,[2,8] , [3,9], [4,10 ] , [5,11]
Для C у нас есть 6 классов => $6^6$ соответствий . В каждом классе по 2 элемента , соответственно получаем : $6^6 * 2^{12}$ = 191102976 образов . Теперь построим матрицу отображений для [0,6] , т.е такие наборы в которые [0,6] может перейти :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 1,1 | 2,2 | 3,3 | 4,4 | 5,5 |
| 0,6 | 1,7 | 2,8 | 3,9 | 4,10 | 5,11 |
| 6,0 | 7,1 | 8,2 | 9,3 | 10,4 | 11,5 |
| 6,6 | 7,7 | 8,8 | 9,9 | 10,10 | 11,11 |

Для [1,7] ,[2,8] , [3,9], [4,10 ] , [5,11] – будут выполняться те же самые варианты .

2. Заметим , что всякий класс из E является подмножеством некоторого класса из A . Это же замечание справедливо для классов отношений C и D , соответственно .

3. Далее необходимо рассмотреть пересечение p и E и p и D

# Алгоритм решения

Результат пересечения будет следующим :

| | [0,1] | [2,3] | [4,11] | [5,6] | [7,8] | [9,10] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [0,6] | 0 | - | - | 6 | - | - |
| [1,7] | 1 | - | - | - | 7 | - |
| [2,8] | - | 2 | - | - | 8 | - |
| [3,9] | - | 3 | - | - | - | 9 |
| [4,10] | - | - | 4 | - | - | 10 |
| [5,11] | - | - | 11 | 5 | - | - |

| | [0,3,6,9] | [1,4,7,10] | [2,5,8,11] |
|---|---|---|---|
| [0,1] | 0 | 1 | - |
| [2,3] | 3 | - | 2 |
| [4,11] | - | 4 | 11 |
| [5,6] | 6 | - | 5 |
| [7,8] | - | 7 | 8 |
| [9,10] | 9 | - | - |

## Алгоритм решения

Далее будет представлен алгоритм , который будет показывать возможные варианты отображений :

2 3 2 3 2 3 2 3

-> 5/11 -> 6/4 5/11 -> 6/4 5/11 -> не сходится с D

2/8 2/8 3/7 2/8 3/7

5/11 6/4 3/7 4 11

А и E p и A D и p

Таким образом проверяются все пары для p.

В результате получаем , что отображения , которые будут сохранять все классы это тривиальные отображения

# Алгоритм решения

Далее проверим , что мы нашли все отображения , для этого построим таблицу отображений

| | k1 | k2 | k3 | k4 | k5 | k6 | k7 | k8 | k9 | k10 | k11 | k12 | k13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| k1 | k1 | k2 | k3 | k4 | k5 | k6 | k7 | k8 | k9 | k10 | k11 | k12 | k13 |
| k2 | k1 | k2 | k3 | k4 | k5 | k6 | k7 | k8 | k9 | k10 | k11 | k12 | k13 |
| k3 | k1 | k2 | k3 | k4 | k5 | k6 | k7 | k8 | k9 | k10 | k11 | k12 | k13 |
| k4 | k1 | k2 | k3 | k4 | k5 | k6 | k7 | k8 | k9 | k10 | k11 | k12 | k13 |
| k5 | k1 | k2 | k3 | k4 | k5 | k6 | k7 | k8 | k9 | k10 | k11 | k12 | k13 |
| k6 | k1 | k2 | k3 | k4 | k5 | k6 | k7 | k8 | k9 | k10 | k11 | k12 | k13 |
| k7 | k1 | k2 | k3 | k4 | k5 | k6 | k7 | k8 | k9 | k10 | k11 | k12 | k13 |
| k8 | k1 | k2 | k3 | k4 | k5 | k6 | k7 | k8 | k9 | k10 | k11 | k12 | k13 |
| k9 | k1 | k2 | k3 | k4 | k5 | k6 | k7 | k8 | k9 | k10 | k11 | k12 | k13 |
| k10 | k1 | k2 | k3 | k4 | k5 | k6 | k7 | k8 | k9 | k10 | k11 | k12 | k13 |
| k11 | k1 | k2 | k3 | k4 | k5 | k6 | k7 | k8 | k9 | k10 | k11 | k12 | k13 |
| k12 | k1 | k2 | k3 | k4 | k5 | k6 | k7 | k8 | k9 | k10 | k11 | k12 | k13 |
| k13 | k1 | k2 | k3 | k4 | k5 | k6 | k7 | k8 | k9 | k10 | k11 | k12 | k13 |

# Алгоритм решения

После того , как мы проверили , что мы нашли все отображения , перейдем к заключительному этапу нашей работы .

У нас есть алгебра X = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} , состоящая из 12 элементов с 13 унарными операциями (X , {k0 , …., k12}) . Нужно построить решетку ConA , найти все такие разбиения двенадцати элементного множества A на классы , что все ki будут сохранять эти классы .

Стоит учитывать , что возможно мы получим класс K , которого нет в исходных классах : A , p , C,D,E . Данный результат будет говорить нам о том , что алгебра для данной решетки найдена неверно и нужно применять более изощренные методы . Если же все классы совпадут и не будет ни одного лишнего , то задача может считаться решенной .

# Алгоритм решения

Стоит заметить , что все наши отображения являются тривиальными , как следствие они будут сохранять любое разбиение . Чтобы найти количество всех разбиений двенадцатиэлементного множества X , воспользуемся числом Белла . Рекуррентная формула для числа Белла имеет следующий вид :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{B_k}$$

Для нахождения числа разбиений для множества X , было написано программное решение с использованием формулы Белла . В результате мы получаем 4213597 .
Все эти разбиения нам подойдут , соответственно наша решетка конгруэнций будет содержать все 4213597 разбиения . Построить данную решетку не представляется возможным ввиду её объема .

# Результат

В ходе работы получены следующие результаты :

- Используя данный метод невозможно найти представление для решетки $L_7$ .
- Получен алгоритм позволяющий проверить сохраняет ли отображение все отношения.
- Написано программное решение для разбиения заданного множества X с отображениями (X,k0,…,k12) и проверка на сохранение классов эквивалентности .

Задел на будущее :

Применяя подобные методы , можно попытаться найти представления и для других решеток , которые имеют семь и более элементов .

# Спасибо за внимание !