# Theorieheft

Bjarne Axmann

3. März 2024

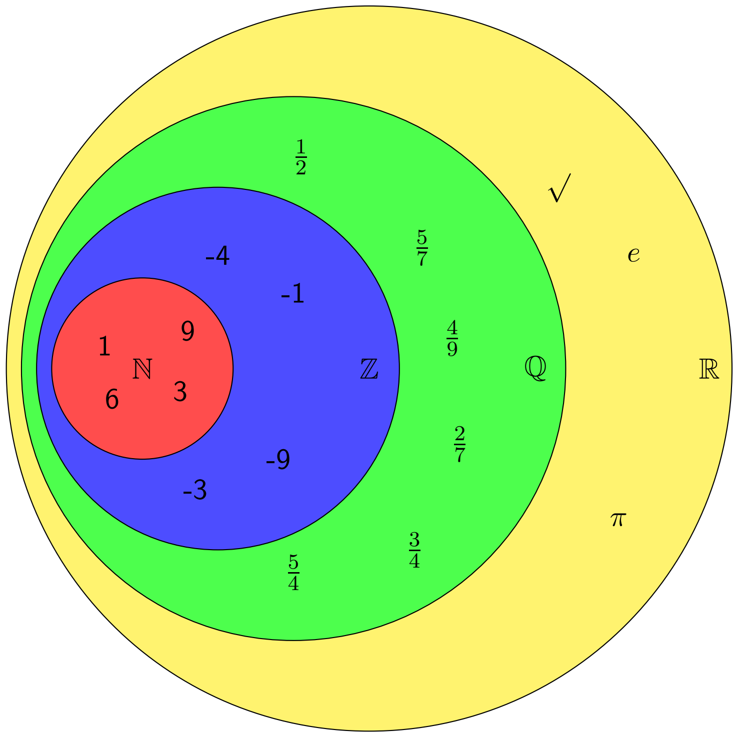
# Inhaltsverzeichnis


0.1 Zahlenmengen . . . . . . . . . . 1
0.2 GRT . . . . . . . . . . 3
  0.2.1 Eintragen einer Funktion . . . . . . . . . . 3
  0.2.2 Anpassen des Fensterbereiches des Graphen . . . . . . . . . . 3
  0.2.3 Komplett Reset . . . . . . . . . . 4
  0.2.4 Einsetzen von Werten in eine Funktion . . . . . . . . . . 4
  0.2.5 Schnittpunkt ermitteln . . . . . . . . . . 5
  0.2.6 Lösen von Gleichungen . . . . . . . . . . 6
  0.2.7 Lösen von Gleichungen ohne Graph . . . . . . . . . . 8
  0.2.8 Ableitungsgraph bestimmen . . . . . . . . . . 9
  0.2.9 Unbekannte Intervallgrenzen eintragen . . . . . . . . . . 11
  0.2.10 Berechnung nicht-orientierter Flächen . . . . . . . . . . 12
  0.2.11 Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen berechnen . . . . . . . . . . 13
  0.2.12 Regression . . . . . . . . . . 14
  0.2.13 Logarithmus . . . . . . . . . . 16
0.3 Terme . . . . . . . . . . 17
  0.3.1 Zusammenfassen von Termen . . . . . . . . . . 17
0.4 Rechengesetze . . . . . . . . . . 18
  0.4.1 Distributivgesetz . . . . . . . . . . 18
  0.4.2 Erweitertes Distributivgesetz . . . . . . . . . . 18
  0.4.3 Faktorisieren . . . . . . . . . . 19
0.5 Binomische Formeln . . . . . . . . . . 20
0.6 Brüche . . . . . . . . . . 21
  0.6.1 Termination . . . . . . . . . . 21
  0.6.2 Erweitern und kürzen von Brüchen . . . . . . . . . . 21
  0.6.3 Rechnen mit Brüchen . . . . . . . . . . 22
0.7 Potzen . . . . . . . . . . 24
  0.7.1 Potenzgesetzte . . . . . . . . . . 24
  0.7.2 Negative Exponenten umformen . . . . . . . . . . 24
0.8 Wurzeln . . . . . . . . . . 25

0.8.1 Wurzelgesetze . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25
0.9 Gleichungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
0.9.1 Äquivalenzumformung . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
0.9.2 Schema zum Lösen von Gleichungen . . . . . . . . . . 27
0.10 Funktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28
0.10.1 Darstellung von Funktionen . . . . . . . . . . . . . . . 28
0.11 Lineare Funktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28
0.11.1 Parallelität . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29
0.11.2 Orthogonalität . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29
0.11.3 Geradengleichung bestimmen . . . . . . . . . . . . . . 29
0.11.4 Zwei-Punkt Steigungsform . . . . . . . . . . . . . . . . 30
0.12 Quadratische Funktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32
0.12.1 Normalformen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32
0.12.2 Scheitelpunktform herstellen . . . . . . . . . . . . . . 32
0.12.3 Funktion anhand des Graphen ablesen . . . . . . . . . 33
0.12.4 Lösen einer quadratischen Gleichung . . . . . . . . . . 34
0.13 Potenzfunktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37
0.13.1 Definition . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37
0.13.2 Potenzfunktionen mit $n > 0$ . . . . . . . . . . . . . . 38
0.13.3 Potenzfunktion mit $n < 0$ - Hyperbel . . . . . . . . . . 40
0.13.4 Ausbildung des Graphen bei Potenzfunktion . . . . . 42
0.14 Polynome . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42
0.15 Momentane Änderungsrate . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42
0.16 Potenzgesetzte . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42
0.17 Tangenten . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42
0.18 Trigonometrie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43
0.18.1 Geometrische Trigonometrie . . . . . . . . . . . . . . . 43
0.18.2 Berechnung der Seiten und des Winkels . . . . . . . . 44
0.18.3 Trigonometrische Funktionen . . . . . . . . . . . . . . 45
0.18.4 Überleitung zu trigonmetrische Funktionen . . . . . . 46
0.18.5 Normalform einer trigonometrischen Funktion . . . . . 46
0.18.6 Modelierung der Sinus Funktion . . . . . . . . . . . . 47
0.19 Exponentialfunktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48
0.19.1 Normalform . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48
0.19.2 Prozentuale Zunahme . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50
0.19.3 Prozentuale Zunahme/Abnahme algorithmisch bestimmen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52
0.20 $e$-Funktion . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53
0.20.1 Entstehung von $e$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53
0.20.2 Normalform . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53

0.20.3 Ableiten der $e$ Funktion . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53
0.20.4 $e$-Funktion aufstellen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
0.20.5 Umformung von der normalen Exponentialfunktion zu der E-Funktion . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57
0.20.6 Umschreiben einer Exponentialfunktion zu einer $e$-Funktion 62
0.20.7 Verdopplungszeit und Halbwertszeit einer $e$-Funktion bestimmen. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62
0.21 Logarithmus . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63
0.21.1 Logarithmus naturalis . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64
0.21.2 Logarihtmus Gesetzt . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64
0.22 Ableitung des Logarithmus Naturalis . . . . . . . . . . . . . . 65
0.23 Verschiebung & Streckung des $ln(x)$ . . . . . . . . . . . . . . 66
0.24 Inverse von $ln(x)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70
0.25 Begrenztes Wachstum . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70
0.26 Logistisches Wachstum . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72

## 0.1 Zahlenmengen



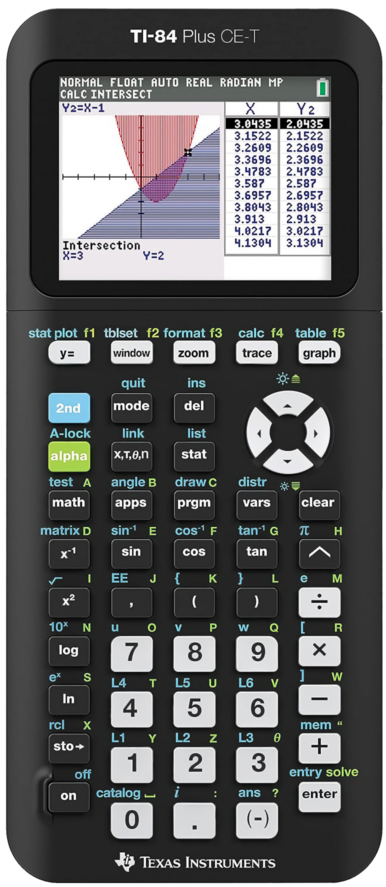

$\mathbb{N}$ Die Zahlenmenge der natürlichen Zahlen beinhaltet alle positiven Zahlen, die kein Dezimalbruch sind

$\mathbb{Z}$ Die Zahlenmenge der ganzen Zahlen beinhaltet alle Zahlen der vorherigen Zahlenmenge inklusive negativer Zahlen

$\mathbb{Q}$ Die Zahlenmenge der rationaler Zahlen beinhaltet alle Zahlen der vorherigen Zahlenmenge inklusive Dezimalbrüche und Brüche

$\mathbb{R}$ Die Zahlenmenge der reelen Zahlen beinhaltet alle Zahlen der vorherigen Zahlenmenge inklusive Zahlen wie $pi$, $e$ und

# GTR Anleitung



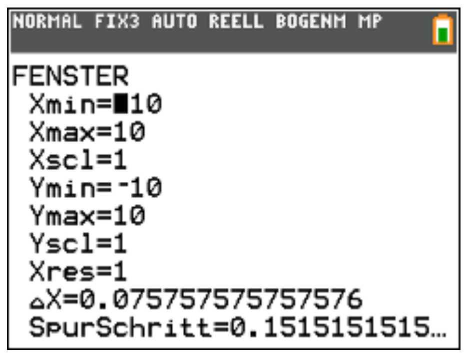
## 0.2 GRT

### 0.2.1 Eintragen einer Funktion

Mit dem Grafiktaschenrechner kann man sich die Graphen verschiedener Funktionen anzeigen lasse. Dazu geht man zuerst auf und trägt dort unter y1, y2,y3, die gewünschten Funktionen ein. Funktionen, die gezeichnet werden sollen, müssen ausgewählt werden, indem auf das Gleichheitszeichen gedrückt wird und dieses schwarz hinterlegt bleibt.


### 0.2.2 Anpassen des Fensterbereiches des Graphen

Um das Window anzupassen, in dem der Graphen darsgestellt wird, muss man zuerst 2nd und window drücken. Anschließend unterscheidet man zwischen den Werten.




`Xmin` Dieser Wert bezeichnet den mindest Wert auf der X-Achs, der zu sehen sein wird

`Xmax` Dieser Wert bezeichnet den maximalen Wert, der auf der X-Achse zu sehen sein wird.

`Xscl` Dieser Wert bezeichnet die Schrittlänge auf der X-Achse

`Ymin` Dieser Wert bezeichnet den minimal zu sehenden Y-Wert auf der Y-Achse

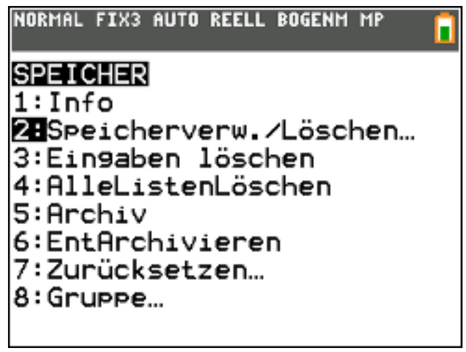
`Ymax` Dieser Wert bezeichnet den maximalen zu sehenden Y-Wert auf der Y-Achse

`Yscl` Dieser Wert bezeichnet die Schrittlänge auf der Y-Achse

Beim dem Angeben der Werte ist darauf zu achten, dass jegliche negativen Werte nicht mit dem Rechenminus, sonder mit dem Vorzeichenminus angegeben werden. Wurde der Window Bereich eingestellt, kann man im Anschluss mit der Taste graph zu der Ansicht des Koordinatensystems wechseln. Ist der Graph nicht zu sehen, kann man auch über zoom und anschließend `zoomStandart` sich wieder die ursprüngliche Einstellung herstellen.

### 0.2.3 Komplett Reset

Sollte der Fall eines Fehlers auftreten, so ist das maximalinvasivste ein Reset des Taschenrechners, welcher durch die Tagenfolge 2nd und +. Anschließend wählt man `reset` aus.



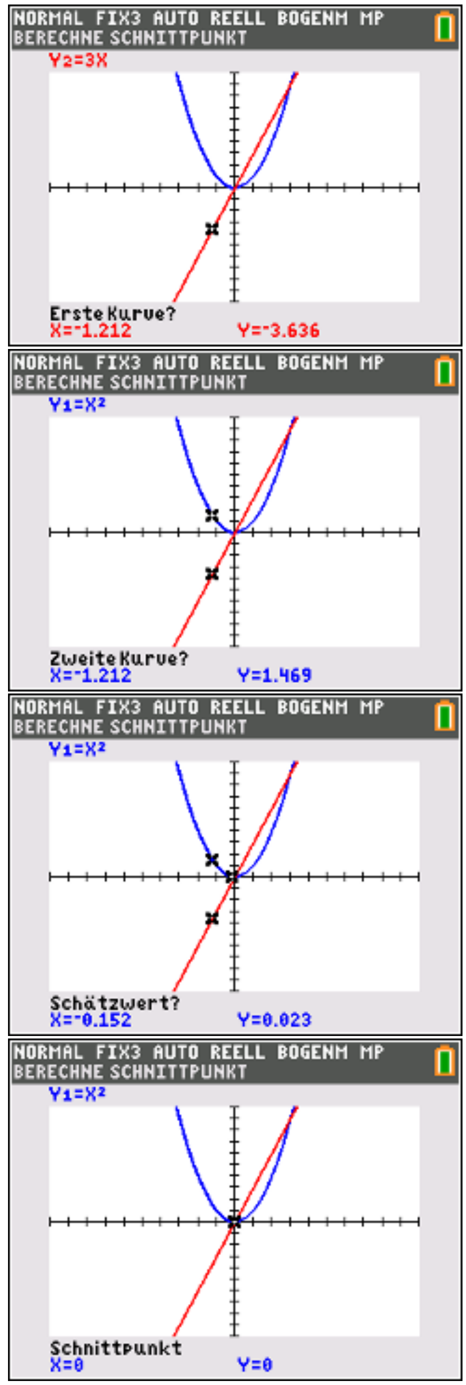

### 0.2.4 Einsetzen von Werten in eine Funktion

Mit den Tasten 2nd und trace lässt sich das Menü zum Berechnen von verschiedenen Funktionsberechnungen aufrufen. Wählt man nun hier `1` , so kann man einen Wert in eine Funktion einsetzten für die Variable $x$.
Die Dokumentation erfolgt hierbei wie folgt:
value($y_1$, *Wert*) $\rightarrow y = Wert$

### 0.2.5 Schnittpunkt ermitteln

Mit den Tasten 2nd und trace lässt sich das Menü zum berechnen von verschiedenen Funktionsberechnungen aufrufen. Wählt man 5, so kann man den Schnittpunkt von zwei Funktionen berechnen lassen. Hierfür muss man im ersten Schritt die erste Funktion auswähle und anschließend die zweiten und den ungefähren Schnittpunkt der beiden Funktionen.

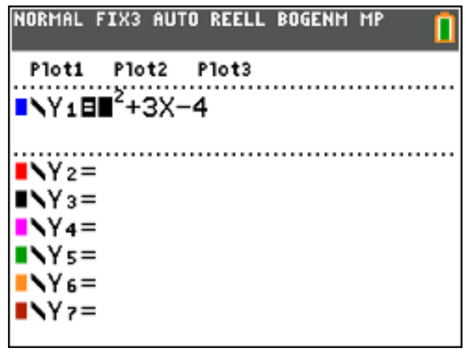
intersect$(y_1, y_2) \to \quad x = \quad y =$



### 0.2.6 Lösen von Gleichungen

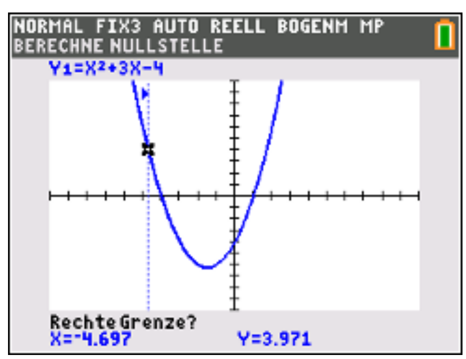
Ist eine Gleichung mit einer Unbekannten in der Grundform = 0 gegeben, so kann man diese leicht mit dem GTR lösen.

Zuerst erfolgt das Eintragen der Funktion indem, indem die Funktionen eingetragen werden. Dieses wird aufgerufen, indem man die Taste y= drückt. Anschließend drückt man die Taste graph, um sich den Graphen anzeigen zu lassen.

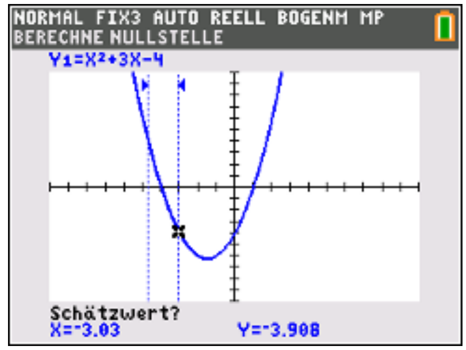



Um nun die Gleichung nach Null aufzulösen, wählt man 2nd und trace und wählt Null aus.

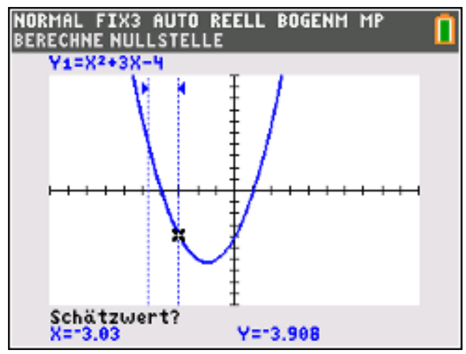

Anschließend müssen die Grenzen bestimmt werden, indem der Taschenrechner die Nullstellen bestimmen soll. Das Wählen der ersten Grenze sollte überhalb der ersten Nullstelle geschehen.




Das Wählen der rechten Grenze geschieht unterhalb der Nullstelle.



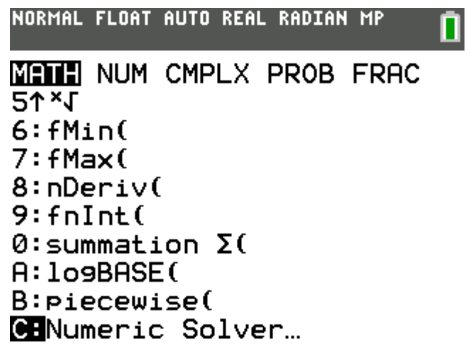

Um schlussendlich die Nullstellen zu bestimmen müssen die Grenzen bestätigt werden. Anschließend zeigt der Taschenrechner die Nullstellen an.



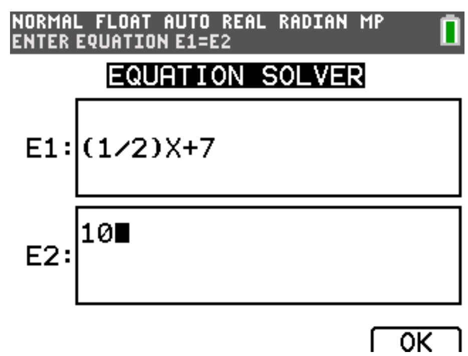
### 0.2.7 Lösen von Gleichungen ohne Graph

Nicht nur das Lösen nach Null ist möglich mit dem Taschenrechner. Genauso lässt sich eine klassische Gleichung äquivalent umformen mit dem folgenden Vorgehen.

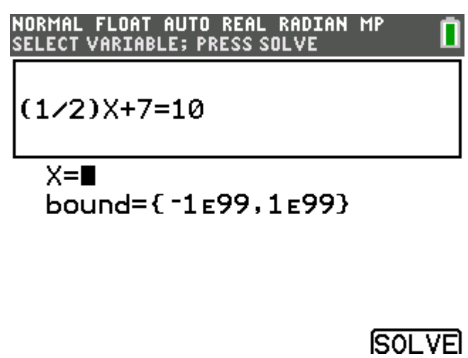
Zunächst navigiert man mit der Taste math auf das `math` Menu und wählt dort ganz unten die Option `Numeric Solver` aus.




Nun kann man jeweils die beiden Gleichungen in die Felder `EQ1` und `EQ2`

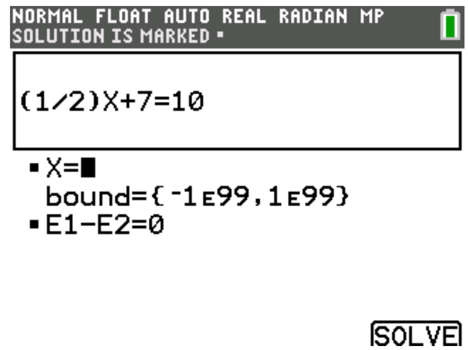



Abschließend drückt man die Taste unter `ok`, worauf man in dem folgenden Fenster die Grenzen bestimmen kann. Dies ist nur relevant für Gleichungen, die mehrere Ergebnisse liefern können.




Abschließend bestätigt man wieder

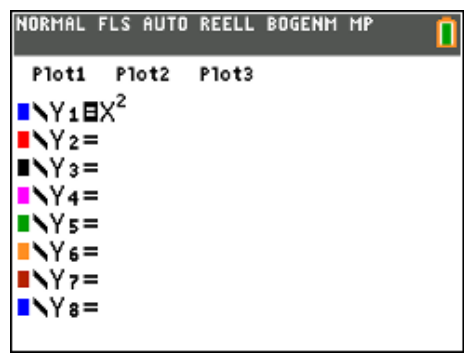
mit der Taste, die unter `ok` liegt, und erhält ein Ergebnis.



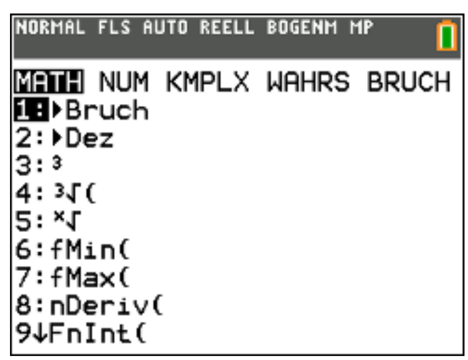

### 0.2.8 Ableitungsgraph bestimmen

Auch der Ableitungsgraph lässt sich mit dem Taschenrechner problemlos bestimmen, indem man den `nDeriv` Befehl anwendet.

Zuerst benötigt man einen bereits eingetragenen Graphen in der Graphenübersicht bei y= und navigiert auf die nächste freie Funktion.

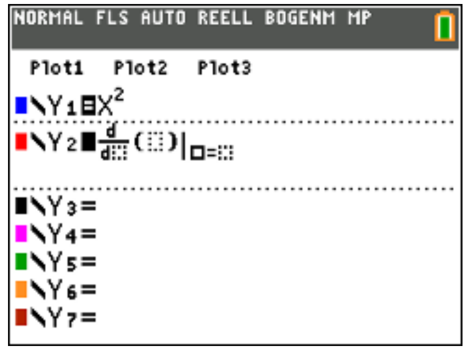



Nun drückt man die Taste math und wählt aus dem Menu den `nDeriv` Befehl aus (Herkunft engl. Derivation). Anschließend fügt der Taschenrechner den `nDrevi` in das Feld der Funktion ein




Hier muss nun die umpunkteten

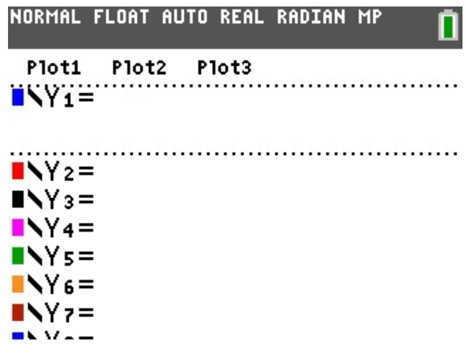
Feldern ein Wert eingetragen werden. Der Bruch wird wie folgt definiert $\frac{d}{dx}$. In die Klammer wird die Funktion deren Ableitung gewünscht ist eingetragen mit der Taste alpha und trace drauf öffnet sich Menu aus Funktionen, die dort eingesetzt werden können. Zuletzt wird in dem hintersten Feld erneut $x$ eingetragen. Drückt man nun erneut graph, so erhält man den Ableitungsgraph der Funktion.



### 0.2.9 Unbekannte Intervallgrenzen eintragen

Um eine bekannten Flächeninhalt mit einer unbekannten Intervallgrenze zu berechnen, geht man wie folgt vor.

Eintragen der Ausgangsfunktion in das Funktionsmenü bei y=



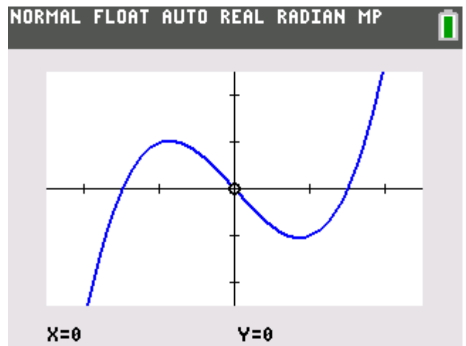

Der genaue Ablauf ist auf Youtube verfügbar.

Anschließend muss nun das Integral eingetragen werden. Hierfür drückt man zunächst auf die Taste math und wählt anschließend die Option `fnInt()` aus. Nun müssen die Integralgrenzen eingefügt werden. Die erste bekannte Intervallgrenze wird unten eingefügt, während die unbekannte mit $x$ ersetzt wird. Hiernach muss die Funktion eingetragen werden, so wie die Variable, nach der hier aufgelöst wird. Abschließend kann die Taste graph gedrückt werden. Auf dem Graphen Fenster ist nun die Stammfunktion zu sehen.

### 0.2.10 Berechnung nicht-orientierter Flächen

Um anstatt mit orientierten Flächen mit dem reinen Flächeninhalt zu rechnen, muss mit dem Betrag gerechnet werden.

Zunächst müssen die Nullstellen mit dem Befehl `zero` ermittelt werden. Hierfür geht man auf 2nd und trace, wählt dort `zero` aus und gibt nun rechts und links die Grenzen der Nullstelle an. Abschließend drückt man `Enter` und erhält die x-Koordiante. Dieser Vorgang ist Abhängig von der Anzahl der Nullstellen und muss ggf. mehr als zwei Mal wiederholt werden.



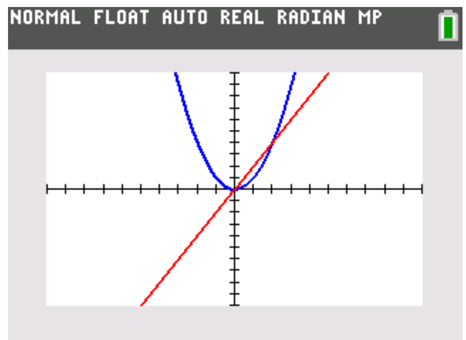

Der genaue Ablauf ist auf Youtube verfügbar.

Anschließend muss nun der Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse berechnet werden mithilfe der Betragsstriche. Hierfür benutzt man die im vorherigen Schritt berechneten Nullstellen als Intervallgrenzen und berechnet den jeweiligen Flächeninhalt. Diese werden anschließend addiert, worauf man den gesamten Flächeninhalt des Graphen in einem Intervall hat. Die Druchführung der Addition darf nicht im Bereich der Funktion durchgeführt werden, da hierbei sich nur einen Gleichung ergibt, welche als lineare dargestellt wird. Um nun ein Integral einzutragen verwendet man math und wählt die Option `fnInt()` an. Anschließend kann man die Intervallgrenzen (berechneten Nullstellen) eintragen. Um nun den Betrag einer Funktion zu verwenden, muss man auf math drücken und dort mit den Pfeiltasten auf die Kategorie `NUM` navigieren. Dort wählt man `abs()` aus und bestätigt mit `Enter`.

### 0.2.11 Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen berechnen

Bei berechnen von einem Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen stellt sich ein ähnliches Problem Problem heraus wie bei berechnen des Flächeninhalts mit der x-Achse.

Um den Flächeninhalt mit dem GTR zu berechnen, bildet man zunächst die Differenzenfunktion, indem man sich bei Funktionen in der Funktionsübersicht einträgt und anschließend eine weitere definiert. Diese Funktion subtrahiert die beide vorherigen Funktionen von einandern.



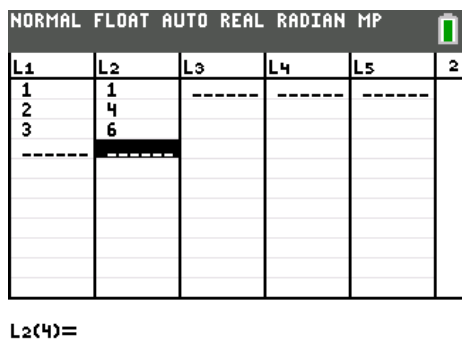

Der genaue Ablauf ist auf Youtube verfügbar.

### 0.2.12 Regression

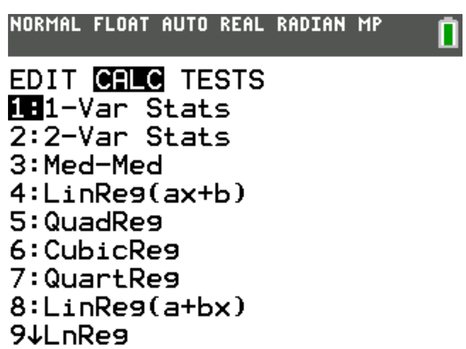
Die Regression ist ein Verfahren, bei dem Zusammenhänge zwischen Abhängigkeiten einer oder mehrere Variablen analysiert werden. Beim GTR gibt es verschiedene Arten, die für verschiedenen Graphen sind. Diese Arten sind spezifisch für spezifische Graphen gedacht, weswegen das wählen dieser sorgfältig erfolgen sollte.

Um mithilfe von Regression eine Funktionsgleichung zu bestimmen geht man über stat in das `STAT`-Menu.


Anschließend wählt man Edit aus und kommt in die Listenansicht. In dieser müssen nun mindestens zwei verschiedene Punkte eingetragen werden. In der ersten Spalte befinden sich hierbei die $x$-Wert und in der zweiten die $y$-Werte.




Sind die Werte eingetragen, so drückt man erneut stat und navigiert mit den Pfeiltaste in das `Calc` Menu. Dort wählt man`QuadReg` aus und bestätigt. Wählt hier eine andere Option aus, so erhält man einen andern Funktionstypen.



Bestätigt man erneut kommt man in eine Bestätigungsansicht, wo die jeweiligen Listen erneut ausgewählt werden müssen. Bestätigt man dies, so erhalt man

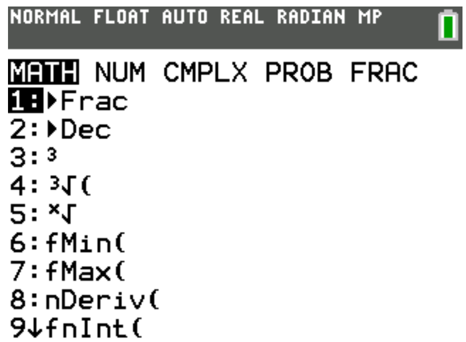

```
        QuadReg

y=ax+c
a=-05
c=3
```

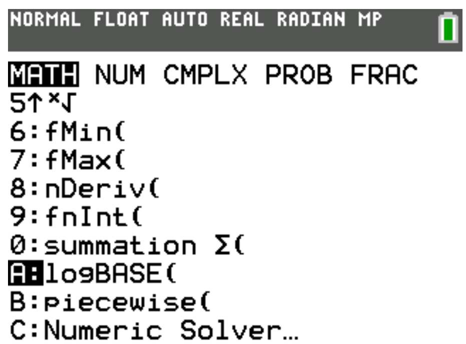
### 0.2.13 Logarithmus

Um mit der Hilfe des GTRs den Logarithmus einer Zahl zu erhalten, sind folgende Schritte notwendig.

Zunächst muss man mit 2nd und math in das `Mathe-Menu` navigieren.




Anschließend navigiert man mit den Pfeiltasten nach unten auf die Option `logBASE(` und bestätigt mit `Enter`




Nun wird befindet man sich wieder in dem normalen Rechenfenster, allerdings wurde hier nun der Logarithmus hinzugefügt, der nun mit Zahlen ausgefüllt werden muss. In das erste gestrichelte Feld wird die Basis eingetragen und in dem zweiten die Zahl, von der man den `log` haben möchte.

## 0.3 Terme

Ein Term ist ein Rechenausdruck, der aus verschiedenen Faktoren und Summanden besteht. Mit einem Term können reelle Sachverhalte oder mathematische Zusammenhänge ausgedrückt werden.

***Beispiel.***

1. Maren kauft zwei Äpfel und drei Bananen
$$\Rightarrow 2a + 2b$$

2. Zu dem dreifachen einer Unbekannten wird das fünfache einer weiteren Unbekannten addiert
$$\Rightarrow 3x + 5y$$

$\triangle$

### 0.3.1 Zusammenfassen von Termen

Ist ein Term gegeben, so kann man alle Variablen mit dem gleichen Namen zusammenfassen und so den Term vereinfachen. Hierbei werden die Terme der gleichen Sorte zusammengefasst. Weitere Themen zum vereinfachen von Termen sind in den Rechengesetzten zu finden.

***Beispiel.***

$$2a{-}3b{+}5a{-}7b{=}7a{+}{-}10b$$

$\triangle$

#### Vereinfachung mit Faktorisierung

Nicht nur lassen sich Terme der gleichen "Sorte" wie in dem oberen Beispiel zusammenfassen, sondern auch mit der Hilfe der Faktorrisierung. Dies bedeutet, dass man durch Ausklammern der Variablen die Koeffizienten zusammenfassen kann.

***Beispiel.***

$$\begin{aligned} 2a + 5a - 3b - 7b \\ = a(2+5) + b(-3-7) \\ = 7a + b(-10) \end{aligned}$$

$\triangle$

## 0.4 Rechengesetze

Die Rechengesetze sind grundlegend für die Anwendung vieler Rechenverfahren. Sie beschreiben Grundlegende Regeln, die ausnahmslos gelten.

### 0.4.1 Distributivgesetz

Das Distributivgesetz ist auch unter dem Namen Verteilungsgesetz bekannt. Hierbei wird ein Faktor vor einer Klammer auf alle Inhalte einer Klammer verteilt.

***Beispiel.***

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

△

### 0.4.2 Erweitertes Distributivgesetz

Das erweiterte Distributivgesetz wird auf die Multiplikation von zwei Klammern miteinander, so kann man diese auflösen, indem man das einfache Distributivgesetz mehrfach hintereinander anwendet.

***Beispiel.***

1. Mit Variablen:

$$(a + b) \cdot (c + d) = (a + b) \cdot c + (ac + b) \cdot d = ac + bc + ad + ad + bd$$

2. Mit Zahlen:

$$(3a - 6c) \cdot (-2a + 3b) = -6a^2 + 9ab + 12ca - 18cb$$

△

### 0.4.3 Faktorisieren

In manchen Fällen ist es sinnvoll, einen Term mit einem Produkt zu verwandeln. Diesen Vorgang nennt man Faktorisieren. Dabei sucht man seine Variable oder einen Teiler, der in jedem Summanden des Terms vorkommt und zieht diesen aus dem Term heraus, indem man das Distributivgesetz "rückwärts" anwendet. Man schreibt: $ab + ac + ad = a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d = a \cdot (b + c + d)$

***Beispiel.***

1.

$$\begin{aligned} &3a - 6ab + 4ac \\ &= a \cdot 3 + a \cdot 6b + a \cdot 4c \\ &= a \cdot (3 - 6b + 4c) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} &6ac - 8ab + 10a^2 \\ &= 2a \cdot 3c - 2a \cdot 4b + 2a \cdot 5a \\ &= (3c - 4b + 5a) \cdot 2a \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} &x - 2x^2 + 3x^3 \\ &= x \cdot 1 - x \cdot 2x + x \cdot 3x^2 \end{aligned}$$

△

## 0.5 Binomische Formeln

Für bestimmt Anwendungen des erweiterten Distributivgesetzes wird die binomische Formel verwendet. Hierbei unterscheidet man im wesentlichen in drei Typen der binomischen Formel. Sie sind von Nutzen beim vereinfachen von Termen und sollten schnellstmöglich erkannt werden beim Rechnen.

- 1. binomische Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- 2. binomische Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- 3. binomische Formel

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

## 0.6 Brüche

Brüche sind in der Mathematik grundlegenden für das Verständnis für viele Rechnungen. Dabei sind sie oftmals genauer als Dezimalbrüche, da sie, im Gegenteil zu Dezimalbrüchen, periodische Zahlen darstellen können, ohne sie Runden zu müssen. Dies bedeutet Brüche sind deutlich genauer im Vergleich zu Dezimalbrüchen. Dabei ist ein Bruch nicht anders als eine andere Darstellungsweise für eine Division.

### 0.6.1 Termination

Bezüglich der Termination von Brüchen gilt Folgendes.

$$a : b = \frac{a}{b}$$

Wobei $a$ bei einem Bruch als Zähler bezeichnet wird und dabei angibt, wie viele Bruchteile des Nenners gegeben sind. $b$ ist hierbei der Nenner und bestimmt den Namen des Bruches.

### 0.6.2 Erweitern und kürzen von Brüchen

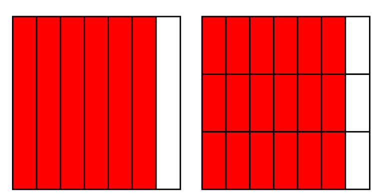
In manchen Situationen ist es notwendig, den Namen eines Bruches zu verändern, aber seinen Wert beizubehalten. Hierbei liegt das Prinzip eines Verhältnisses zugrunde. So stellt ein Bruch $\frac{1}{2}$ den gleichen Sachverhalt dar, wie der Bruch $\frac{4}{8}$.

#### Erweitern von Brüchen

Durch das Multiplizieren von Zähler und Nenner in einem Bruch mit einer Zahl wird der ursprüngliche Bruch erweitert.

***Beispiel.***

$$\overset{\xrightarrow{\cdot 3}}{\frac{6}{7} = \frac{18}{21}}$$



$\triangle$

#### Kürzen von Brüchen

Das Kürzen von Brüchen funktioniert ähnlich wie beim Erweitern, bloß umgedreht.

***Beispiel.***

$$\frac{8}{28} = \frac{2}{7}$$

△

#### Faktorisieren

Da beim Rechnen mit Brüchen ebenfalls alle Rechengesetzte gelten, kann man im Zähler und im Nenner faktorisieren.

***Beispiel.***

$$\frac{5x-5}{10x-5} = \frac{5 \cdot (x-1)}{5 \cdot (2x-1)} = \frac{x-1}{2x-1}$$

△

### 0.6.3 Rechnen mit Brüchen

Da auch mit Brüchen in der Mathematik gerechnet wird, gelten auch die Grundrechenarten.

#### Addition und Subtraktion

Beim addieren und subtrahieren von Brüchen, muss darauf geachtet werden, dass beide Brüche gleichnamig sin.

***Beispiel.***

$$\begin{aligned} &\frac{2}{7} + \frac{3}{12} \\ &\quad = \frac{2}{7} + \frac{3}{12} \\ &\quad = \frac{24}{84} + \frac{21}{84} \\ &\quad = \frac{45}{84} \end{aligned}$$

△

### Multiplizieren

Das Multiplizieren von Brüchen ist weniger aufwendig im Vergleich zu der Subtraktion und Addition, denn bei der Multiplikation wird lediglich der Nenner mit dem Nenner und der Zähler mit dem Zähler multipliziert.

***Beispiel.***

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{8}$$

$\triangle$

### Division

Bei der Division von Brüchen nimmt man lediglich den Kehrbruch des zu dividierenden Bruch und multipliziert ihn mit dem ersten Bruch.

***Beispiel.***

$$\frac{3}{4} : \frac{4}{7} \rightarrow \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{4} = \frac{21}{12}$$

$\triangle$

## 0.7 Potzen

Eine Potzen besteht immer aus einer Basis und einem Exponenten. Dabei gibt der Exponenten an, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert wird. Man schreibt $a^b$.

### 0.7.1 Potenzgesetzte

Auch mit Potenzen kann gerechnet werden, deswegen finden gewisse Rechengesetzte auch hier eine Anwendung.

1. Multiplikation von zwei Variablen mit gleicher Basis, aber mit verschiednen Exponenten.
$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

2. Dividieren von zwei Variablen mit gleicher Bais, aber verschiedene Exponenten.
$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

3. Basis mit Exponent wird umklammert von einem weiteren Exponenten.
$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

4. Die Basis ist ungleich und wird mit einer anderen Baisis multipliziert, aber die Exponenten sind gleich.
$$a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k$$

5. Die Basis ist ungleich wird mit einer anderen Basis dividiert, aber die Exponenten sind gleich.
$$\frac{a^k}{b^k} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

### 0.7.2 Negative Exponenten umformen

Um einen negativen Exponenten umzuformen muss dieser in ein Bruch geschrieben werden und folgt dabei folgender Form.

***Beispiel.***

$$x^{-4} = \frac{1}{x^4}$$

△

## 0.8 Wurzeln

Wurzeln sind ein wesentlicher Bestandteil in der Mathematik. Das Grundkonzept hinter Wurzeln ist, dass Umkehren einer Potenz, in der eine Zahl so oft mit sich Multipliziert wird, wie der Exponent angibt. Die $n$-te Wurzel aus einer Zahl $a$ ist genau die Zahl, die $n$-mal mit sich selbst multipliziert den Wert $a$ ergibt. Man Schreibt: $\sqrt[n]{a}$, wobei $n$ angibt, wie oft die Zahl mit sich selbst multipliziert wurde, damit sich $a$ ergibt.

***Beispiel.***

$$\sqrt[3]{8} \Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \tag{1}$$

$$\sqrt[5]{243} \Rightarrow 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243 \tag{2}$$

△

### 0.8.1 Wurzelgesetze

Auch mit Wurzeln kann gerechnet werden, deswegen finden gewisse Rechengesetze auch hier einen Anwendung.

1. Wurzel ziehen aus einer Division.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

2. Wurzel ziehen aus einer Multiplikation

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

## 0.9 Gleichungen

Eine Gleichung besteht immer aus zwei Termen, die mit einem GLeichungszeichen verknüpft sind. Damit wird ausgedrückt, dass beide Seiten, der Gleichung, den gleichen Wert haben bzw. "gleichschwer" sind. Taucht eine oder mehrere Variablen auf einer oder beider Seiten, der Gleichung auf, so ist genau der Wert der Variable eine Lösung der Gleichung für den das Gleichheitszeichen stimmt. Eine Gleichung kann eine Lösung, mehrere Lösungen oder keine Lösung haben.

***Beispiel.***

1. Eine Lösung

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 2x + 3 \\ &= \{8\} \end{aligned}$$

2. mehrere Lösungen

$$\begin{aligned} 2a + b &= 7 \\ &= \{(3.1); (2.3)...\} \end{aligned}$$

3. Keine Lösung

$$\begin{aligned} x^2 &= -4 \\ &= \{\} \end{aligned}$$

△

### 0.9.1 Äquivalenzumformung

Eine Äquivalenzumformnung ist eine Umformung, die auf beiden Seiten einer Gleichung durchgeführt wird. Dabei wird die Lösungsmenge nicht verändert, die Darstellung allerdings schon.

***Beispiel.***

$$\begin{aligned} x - 7 &= 9 && | + 7 \\ 3x &= 16 && | : 3 \\ x &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

△

### 0.9.2 Schema zum Lösen von Gleichungen

Liegt eine Gleichung vor, an der der höchste Exponent $n$ =1 ist, kann man zu der Ermittlung der Lösung wie folgt vorgehen .

1. Klammern auflösen und Zusammenfassen mit den Distributivgesetzen und der binomischen Formel.
2. Alles mit einer Variable auf eine Seite bringen
3. Alles ohne Variable auf die andere Seite bringen
4. Normieren, indem man auf ein $x$ runter oder hochrechnet.

***Beispiel.***

$$\begin{aligned}
(x-2) &= (x+3)(x-3)\\
x^2-4x+4x &= x^2-9\\
-4x+4 &= -9\\
-4x &= -13\\
x &= \frac{13}{4}
\end{aligned}$$

△

Wobei in der ersten Zeile die Ausgangsgleichung steht. Anschließend folgen die Schritt, wie oben beschrieben.

## 0.10 Funktionen

Eine Funktion ist eine Zuordnung aus zwei Zahlenmengen. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \in \mathbb{R}$. Sei $a \in X$ und $b \in Y$, so bildet $a \mapsto b$ ab, und stellt somit ein Zuordnung zweier Mengen dar. Hierbei wird jedem $x$ ein $y$ zu.

***Beispiel.*** Fährt man mit einem Auto konstant 100km/h, so kann man dies auch in einer Wertetabelle darstellen. Hierbei ist zu beachten, dass die Funktion Kilometer in Zeit darstellt.

$$
\begin{aligned}
1 \text{ Stunde} &\mapsto 100 \text{ Kilometer} \\
2 \text{ Stunde} &\mapsto 200 \text{ Kilometer} \\
3 \text{ Stunde} &\mapsto 300 \text{ Kilometer} \\
4 \text{ Stunde} &\mapsto 400 \text{ Kilometer}
\end{aligned}
$$

$\triangle$

### 0.10.1 Darstellung von Funktionen

Setzt man in eine Funktion für das $x$ einen Wert, so erhält man den zugehörigen $y$-Wert. Dieses Wertepaar lässt sich in ein Koordinatensystem eintragen (1). Verbindet man nun die Punkte miteinand er, so entsteht der sogenannte Funktionsgraph. Auch lässt sich hierbei leicht erkennen, ob es sich überhaupt um eine Funktion, handelt. Betrachtet man die $Y$-Achse, als den obig erwähnten Wert und die $X$-Achse als Ausgangsmenge, so lässt sich feststellen, warum eine Funktion keine Zuweisung von zwei $X$-Werten haben kann.

## 0.11 Lineare Funktionen

Wird eine Funktion durch eine Gleichung in der Form $y = mx+b$ dargestellt, so spricht man von einer linearen Funktion. Dabei gibt $b$ den Schnittpunkt mit der $Y$-Achse, den sogenannten $Y$-Achsenabschnitt an. Die Variable $m$ ist die Steigung der Funktion. Hat $m$ die Form $m = \frac{a}{b}$, so gibt $b$ den Weg auf der $X$-Achse und $a$ den Weg auf der $Y$-Achse an, um von einem Punkt zu dem nächsten zu gelangen. Dies kann gut mit dem Steigungsdreieck darsgestellt werden. Beim Einzeichnen ist zu beachten, dass immer erst nach Rechts und anschließend nach oben bei potiven Zahlen und nach unten bei negativen Zahlen gegangen wird.

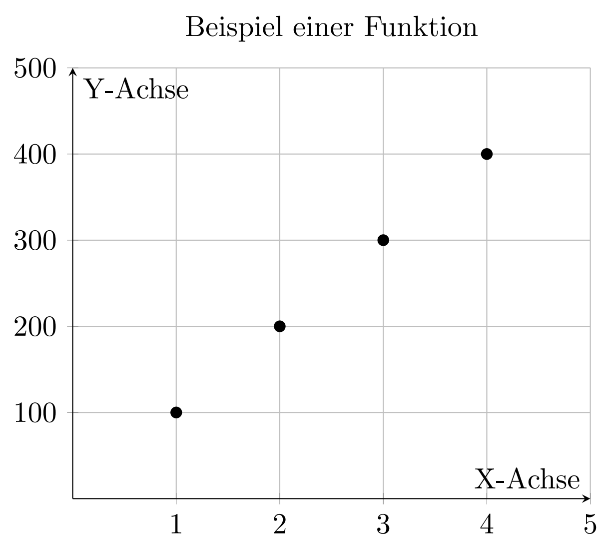



Abbildung 1: Wertetabelle einer Funktion visualisiert

### 0.11.1 Parallelität

Um die Eigenschaft der Parallelität zu bestimmen bei einer linearen Funktion, betrachtet man den Steigungsfaktor $m$. Im Bezug auf Parallelität ist folgendes festzuhalten.

$$f(x) = mx + b$$
$$a(x) = m_1 x + b$$

Sind die Werte, die $m$ annimmt, die selben, die $m_2$ animmt, so spricht man von einer Parallelität. Ist $m_1 = m_2$, so ist $G_f || G_a$

### 0.11.2 Orthogonalität

Im Vergleich zu der Parallelität stellt die Orthogonalität das Gegenteil dar. Eine Funktion, die zu einer anderen Orthonogal steht, bildet mit der anderen Funktion einen Schnittpunkt im 90° Winkel. Daraus folgt, dass sollte $m_f \cdot m_a = -1$ die Funktionen immer orthogonal zu einander stehen.

### 0.11.3 Geradengleichung bestimmen

Bei einer linearen Funktion bei der die Steigung und ein Punkt auf einer Geraden gegeben ist, lässt sich die Funktionsgleichung leicht bestimmen.

Orthogonalität

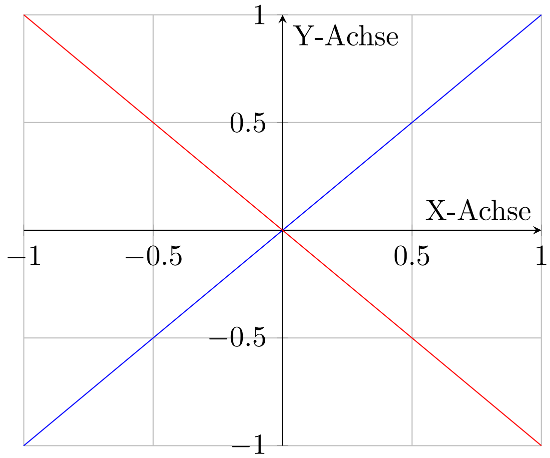



Abbildung 2: Graphisches Beispiel für Orthogonalität

Hierzu geht man von der Grundform $f(x) = mx+b$ aus und ermittelt $b$ sowie den gesuchten Parameter. Dafür setzt man das Gegebene in die Grundform ein und bestimmt $b$ so, dass die Gleichung erfüllt ist.

***Beispiel.*** Gesucht ist die Gerade $g_1$ mit $m = 3$, die durch den Punkt $(-2;-7)$ verläuft Dabei wird $g_1 : f(x) = mx + b$ wie folgt definiert $m = 3$, $x = 2$, $y = -7$.

$$\begin{aligned} f(x) &= mx + b \\ -7 &= -3 \cdot (-2) + b \\ -7 &= 6 + b \\ -13 &= b \end{aligned}$$

Somit lautet der $Y$-Achsenabschnitt $-13$, weswegen die gesuchte Gerade wie folgt lautet: $g_1 : f(x) = -3x - 13$ △

### 0.11.4 Zwei-Punkt Steigungsform

Sind von einer Geraden zwei Punkte, der Form $A(y_1; y_2)$ und $B(x_2; y_2)$, bekannt, so kann man aus diesen beiden Punkten ein Steigungsdreieck bilden.

Für die Steigung gilt dann folgendes.

$$m = \frac{\text{Abstand Y-Wert}}{\text{Abstand X-Wert}}$$
$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

***Beispiel.*** Die Punkte $A(1, -1)$, $B(2; 3)$ sind gegeben und sollen nun mit der Zwei-Punkt Steigungsform die Steigung $m$ ergeben.

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$
$$m = \frac{3 - (-1)}{2 - 1}$$
$$m = \frac{4}{1}$$
$$m = 4$$

Somit ist die Steigung $m = 4$ zwischen den Punkten $A \wedge B$ $\triangle$

## 0.12 Quadratische Funktionen

Eine quadratische Funktion ist eine weitere Art von Funktionen. Sie stellt allerdings nicht wie bei den linearen Funktionen einen linearen Sachverhalt dar, sondern einen quadratischen.

### 0.12.1 Normalformen

#### Scheitelpunktform

Der Scheitelpunkt einer quadratischen Funktion oder auch einer Parabel ist der größte bzw. kleinste Wert einer parabolischen Funktion. Die allgemeine Form der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion ist die folgende.

$$f(x) = a(x - d)^2 + e$$

Dabei gilt

- Der Streckfaktor $a$ bestimmt, ob die Parabel nach oben ($a > 0$) oder nach unten ($a < 0$) geöffnet ist. Auch bestimmt er, wie die Parabel gestreckt ($|a| > 0$) oder gestaucht ($0 < |a| < 1$) ist
- Mit dem Parameter $d$ wird angeben, wie weit die Funktion nach rechts bzw. links verschoben wird. Hierbei muss allerdings auf das Vorzeichen von $d$ geachtet werden. Ist $d > 0$, so verschiebt sich der Graph nach links, während sich der Graph bei $d < 0$ nach rechts verschiebt.
- Der Parameter $e$ beschreibt die Verschiebung auf der $Y$-Achse.

Zu dem obig behandelten Thema steht eine digitale Visualisierung im Internet bereit. ↗

#### Faktorisierte Form

#### Normalform

### 0.12.2 Scheitelpunktform herstellen

Ist eine Funktion $f(x)$ in der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$, so kann diese in die Form der Scheitelpunktform gebracht werden. Hierfür wendet man die zweite binomische Formel rückwärts an. Dabei unterscheidet man in zwei Fällen.

- Ist $c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$, so kann eine Funktion deren Form der Normalform entspricht in die Scheitelpunktform umgeschrieben werden.$x^2 + bx + c = \left(x\frac{b}{2}\right)^2$
- Ist $c \neq \left(\frac{b}{2}\right)^2$, so

### 0.12.3 Funktion anhand des Graphen ablesen

Um die Funktion eines parabolisch ausgeprägten Graphen abzulesen benötigt man ebenfalls die Scheitelpunktform, in die die jeweilgen Punkte des Graphen eingesetzt werden. Zunächst setzt man hierfür den Wert für $d$ und $e$ ein. Anschließend wird sich ein ablesbarer Punkt ausgesucht, der für restlichen Parameter eingesetzt wird.

***Beispiel.*** Auf der Abbildung befindet sich der Scheitelpunkt bei den Koordianten $(5; 10)$. Setzt man nun diesen Punkt in die Scheitelpunktform ein, so ist das Einsetzten eines Punktes der abschließende Schritt.

$$
\begin{aligned}
S(5;10) \\
P(0;10) \\
f(x) &= a(x-5)^2 + 10 \\
10 &= a(0-5)^2 + 10 \\
10 &= -25a + 10 \\
10 + 25a &= 10
\end{aligned}
$$

△

### 0.12.4 Lösen einer quadratischen Gleichung

Ist eine Gleichung mit einer Variablen deren höchster Exponent 2 in der Form $ax^2 + b = 0$ oder $ax^2 + bx + c = 0$ gegeben, so spricht man von einer reinen quadratischen bzw. von einer gemischten quadratischen Gleichung. Um die Lösung für solch eine Gleichung zu bestimmen, gibt es zwei unterschiedliche Vorgehensweisen.

#### Vorgehen mit einer reinen quadratischen Gleichung

1. Grundform herstellen, indem die Gleichung gleich 0 gesetzt wird.
2. $x^2$ isolieren mithilfe von Umformungen
3. $\pm\sqrt{}$

***Beispiel.***

$$\begin{aligned}(4x-1)^2 &= (x-4)^2\\ 16x^2 - 8x + 1 &= x^2 - 8x + 16\\ 15x^2 - 15 &= 0\\ 15x^2 &= 15\\ x^2 &= 1\\ &\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1\end{aligned}$$

$\triangle$

#### Vogehen mit einer gemischten quadratischen Gleichung

1. Wenn ein Faktor vor dem $x$ steht, muss dieser druch Division entfernt werden.
2. Anwendung von quadratischer Ergänzung, PQ-Formel oder Mitternachtsformel

**Quadratische Ergänzung** Bei der quadratischen Ergänzung wird der Teil, der bei der Normalform als $b$ bezeichnet wird, halbiert und anschließend quadriert. Diese Zahl wird zwischen $b$ und $c$ geschoben mit in der Form $b^2 - b^2$. Anschließend ergibt sich mit den ersten drei Teilen der quadratischen Gleichung eine bekannte Form. Diese sollte der Form der einer binomischen Formel ergeben. Anschließend kann die jeweilige binomische Formel rückwärts angewendet werden.

***Beispiel.***

$$\begin{aligned}
8x^2 + 2x - 3 &= 0 && (: 8, \text{ sodass } x^2 \text{ normiert wird})\\
x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} &= 0 && (+\tfrac{3}{8} \text{ alle Summanden ohne } x \text{ nach rechts})\\
x^2 + \frac{1}{4}x &= \frac{3}{8}\\
& && \left(\left(\tfrac{1}{8}\right)^2 \text{ wird als } \tfrac{b}{2} \text{ ergänzt \& hinzufügen beide Seiten}\right)\\
x^2 + \frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{8}\right)^2 &= \frac{2}{8} + \frac{1}{64} && (\text{Anwendung der binomischen Formeln})\\
\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 &= \frac{24}{64} + \frac{1}{64}\\
\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 &= \frac{25}{64} && (\surd \text{ Plus Minus Wurzel ziehen})\\
x_1 = x + \frac{1}{8} &= \frac{5}{8} && (-\tfrac{1}{8})\\
x_2 = x + \frac{1}{8} &= -\frac{5}{8}\\
&\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

△

**PQ-Formel** Bei der Anwendung der PQ-Formel, werden die Zahlen, die anstelle von den Variablen $b$ und $c$ in der Normalform stehen, als $p$ und $q$ definiert und in die folgende Form eingesetzt.

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - q}$$

***Beispiel.***

$$\begin{aligned}
3x^2 - 7x + 2 &= 0 && (:3 \; x^2 \text{ wird normiert}) \\
x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3} &= 0 && (p = -\tfrac{7}{3},\; q = \tfrac{2}{3}) \\
-\left(-\frac{7}{3}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{7}{3}}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}} & && (\text{Einsetzen in PQ-Formel}) \\
x_1 &= \frac{7}{6} + \frac{5}{6} \\
x_2 &= \frac{7}{6} - \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

△

## 0.13 Potenzfunktionen

### 0.13.1 Definition

Betrachtet man eine Funktion $f(x) = x^n$, wobei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so spricht man von einer Potenzfunktion. Der Begriff 'Potenzfunktion' ist hierbei ein Schirmbegriff für alle Funktionen, die eine Potenz besitzen. Im Folgenden unterscheidet man zwischen

- $n > 0$ und $n \equiv 0 \pmod{2}$ Bedeutet, dass $n$ größer als 0 ist und einen kongruenten Modulo hat für den Modulo aus 2 und den Wert 0. Wird $n$ geteilt durch 2, so muss der Modulo 0 ergeben.
- $n > 0$ und $n \equiv 1 \pmod{2}$
- $n < 0$ und $n \equiv 0 \pmod{2}$
- $n < 0$ und $n \equiv 1 \pmod{2}$

### 0.13.2 Potenzfunktionen mit $n > 0$

Bei Potenzfunktionen unterscheidet man im wesentlichen zwischen $n > 0$ und $n < 0$ und zwischen geraden und ungeraden Exponenten

**Potentfunktion mit $n > 0$ und $n \equiv 0 \pmod{2}$**

Ist $n$ gerade und positiv, so hat eine Funktion $f(x) = x^n$ folgende Eigenschaften.

- Der Graph ist Achsensymmetrisch zu der $Y$-Achse
- Der Graph verläuft parabolisch
- Für $x < 0$ steigt der Graph
- Für $x > 0$ steigt der Graph
- Je höher der Exponent, desto flacher verläuft der Graph für $-1 < x > 1$ und desto steiler für $x > 1$ und $x < -1$

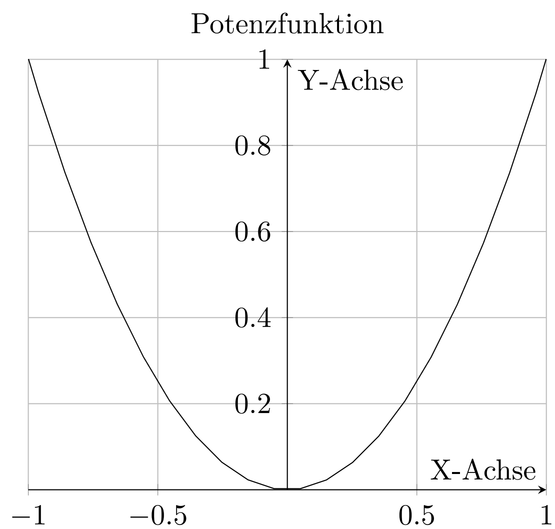



Abbildung 3: Quadratische Funktion mit $n > 0$ und $n \equiv 0 \pmod{2}$

Zu dem behandelten Thema steht eine digitale Visualisierung im Internet bereit.

**Potenzfunktion mit $n > 0$ und $n \equiv 1 \pmod 2$**

Ist $n > 0$ und ungerade, so hat $f(x) = x^n$ die folgenden Eigenschaften.

- $f(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung
- $f(x)$ verläuft von links nach rechts (vom 1. Quadranten zum 3. Quadranten), dies bedeutet die Form ist kubisch.
- Je größer der Exponent ist, desto flacher verläuft $f$ für $-1 < x < 1$ und steiler für $x > 1$ bzw. $x < -1$
- Die Funktion, die die geben Eigenschaften erfüllen sind alle monoton steigend

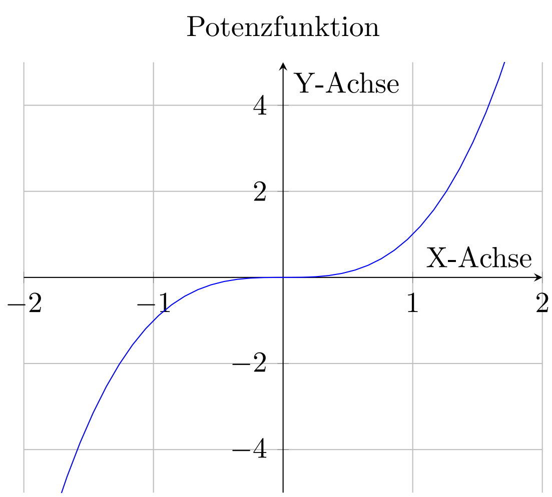



Abbildung 4: Potenzfunktion mit $n > 0$ und $n \equiv 1 \pmod 2$

### 0.13.3 Potenzfunktion mit $n < 0$ - Hyperbel

Hat eine Funktion $f(x) = x^n$ einen negativen Exponenten, so bezeichnet man die Funktion als Hyperbel. Hyperbeln haben eine Definitionslücke, dass heißt, es gibt Zahlen, die man nicht für $x$ einsetzten darf. Hyperbeln verlaufen asymptotisch, dass heißt, es existieren Geraden, deren sich der Graph unendlich nah annähert, diese allerdings nicht tangiert. Besitzen sie einen geraden Exponenten verlaufen sie Achsensymmetrisch. Ist der Exponent ungerade, so verläuft der Graph punktsymmetrisch.

#### Potenzfunktionen mit $n < 0$ und $n \equiv 0 (mod 2)$

Auch wie bei Potenzfunktionen mit einem positiven Exponenten gibt es Eigenschaften, die ein Graph einer Funktion mit einem negativen geraden Exponenten erfüllt.

- Der Graph ist achsensymmetrisch
- Der Graph verläuft durch den Punkt $(-1; 1)$
- Der Graph steigt für $x > 0$ und fällt für $x < 0$

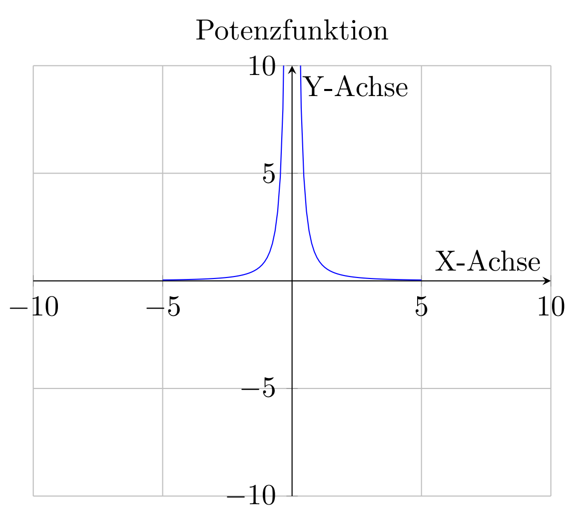



Abbildung 5: Potenzfunktion mit $n < 0$ und $n \equiv 0 \pmod{2}$

**Potenzfunktionen mit $n < 0$ und $n \equiv 1(mod2)$**

Die Eigenschaften einer Potenzfunktion mit einem negativen ungeraden Exponenten sind die folgenden.

- Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung
- Der Graph verläuft durch den Punkt $(-1; 1)$
- Der Graph fällt für $x > 1$ sowohl als auch für $x < 0$

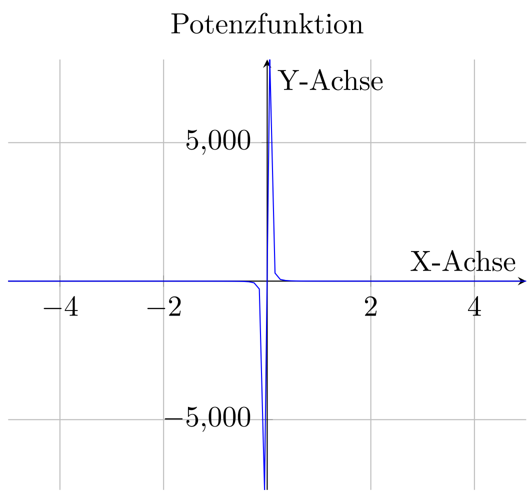



Abbildung 6: Potenzfunktion mit $n < 0$ und $n \equiv 0 \pmod 2$

### 0.13.4 Ausbildung des Graphen bei Potenzfunktion

Ähnlich wie bei linearen Funktion stellt eine Potenzfunktion ein Verhältnis von einem $y$-Wert zu einem $y$-Wert dar. Durch die Multiplikation bei einer Potenzfunktion, die durch den Exponenten bestimmt wird, kann beim Einsetzten in eine Varibale, die einen geraden Exponenten besitzt keine negative Zahl als Ergebnis entstehen. Bei einem ungeraden Exponenten kann wiederum eine negative Zahle als Ergebnis einer Multiplikation entstehen. Bei einer kubisch verlaufenden Potenzfunktion ist es wichtig, zu wissen, dass ein Exponenten angibt, wie oft eine Zahl mit sich selbst multipliziert wird. Kubisch verlaufende Funktionen sind Funktionen, die einen ungeraden Exponenten besitzen. Weil in der Variable $x$ jede Zahl von positiv bis negativ enthalten ist und das Multiplizieren von einer ungeraden Anzahl an Faktoren bei einer negativen Basis ein negatives Ergebnis ergibt, prägt sich der Graph in der kubischen Form aus. Da das Multipliziert von einer ungeraden Anzahl an positiven Faktoren ein positives Ergebnis ergibt, steigt der Graph im 2. Quadranten.

## 0.14 Polynome

## 0.15 Momentane Änderungsrate

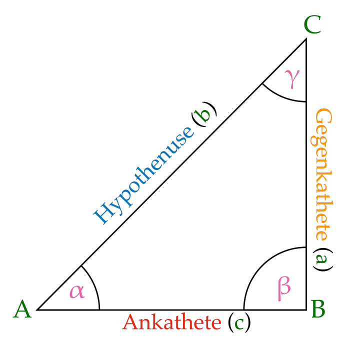
## 0.16 Potenzgesetzte

## 0.17 Tangenten

## 0.18 Trigonometrie

### 0.18.1 Geometrische Trigonometrie

Das Thema Trigonometrie in der Geometrie umfasst eine Reihe an verschiedenen Unterthemen. Hierbei spielt das rechtwinkelige Dreieck eine wesentliche Rolle und bestimmt somit auch die Wurzeln der Trigonometrie. Bei der geometrischen Trigonometrie geht es vorwiegend um das Bestimmen von Seitenlängen oder Winkeln.




**A, B, C** Die Ecken eines rechtwinkeligen Dreiecks sind mit großen Buchstaben gekennzeichnet

**a,b,c** Die gegenüberliegenden Seiten sind mit dem jeweils gleichen Buchstab in klein gekennzeichnet Stellen jeweils die Winkel zwischen den anliegenden Seiten dar und ergeben zusammen 180 Grad. Die Gegenkathete stellt die Höhe des Dreiecks dar, während die Ankathete die Seite ist, die am rechten Winkel und anliegt

**Hypothenuse** Die Hypothenuse stellt im Dreieck die Seite $b$ dar. Sie ist die längste Seite und immer gegenübervon rechten Winkel, wobei sie nie an ihm anliegt.

**Ankathete** Die Ankathete ist die Seite $c$ in einem Dreieck und liegt immer am rechten Winkel an. Sie bildet mit der Gegenkathete den rechten Winkel und ist hierbei immer kürzer als die Hypothenuse

**Gegenkathete** Die Gegenkathete beschreibt in einem Dreieck die Seite a und liegt direkt an dem rechten Winkel, den sie mit der Ankathete bildet.

### 0.18.2 Berechnung der Seiten und des Winkels

Um eine Berechnung der Seiten durchführen zu können, muss verwendet man folgende Formeln:

**Sinus**

$$\sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$$

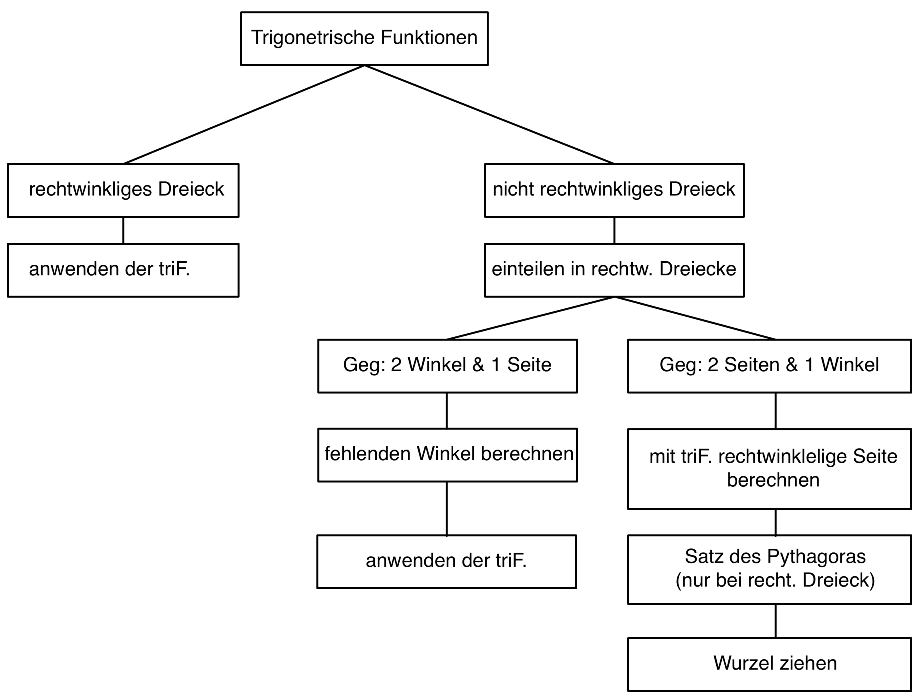
**Cosinus**

$$\cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypothenuse}$$

**Tangens**

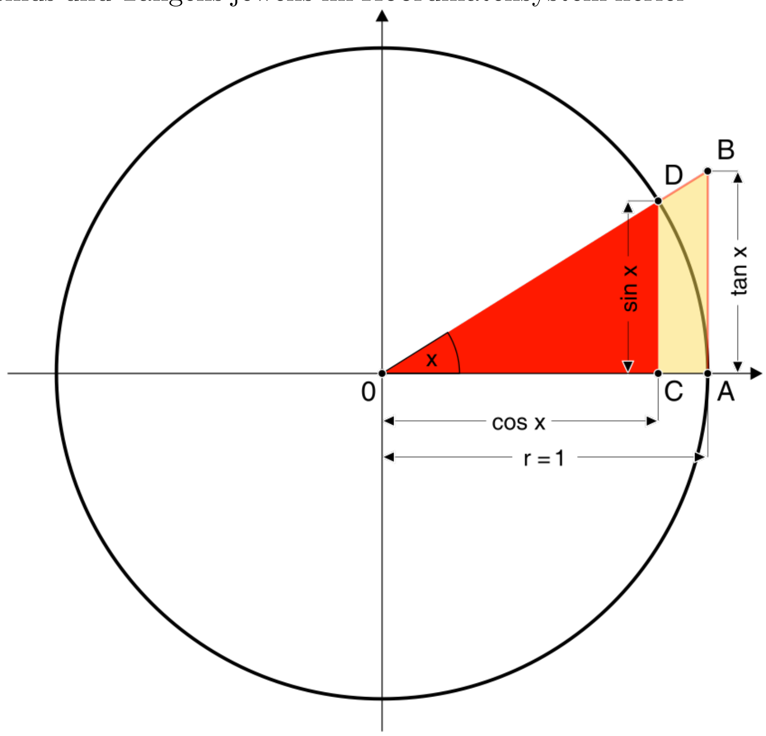
$$\tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

Um einen ersten Anhaltspunkt zu schaffen, kann man sich an dem folgenden Algorythmus orientieren.



### 0.18.3 Trigonometrische Funktionen

Auch in der Analyses spielt die Trigonometrie einen wichtige Rolle. Sie ermöglicht es periodische Prozesse darzustellen und mit ihnen zu rechnen. So lassen sich Sinus, Cosinus und Tangens jeweils im Koordinatensystem herlei-




ten am Einheitskreis.
So stellt Sinus die Höhe der Gegenkathete in Abhängigkeit von dem Bogenmass, welches mit Hilfe des Winkels Alpha berechnet wird. Cosinus hingegen stellt die Ankathete in Abhängigkeit des Bogenmasses dar. Hierbei orientieren sich die Eckpunkt jeweils an dem Einheitskreis und laufen auf diesem gegen den Uhrzeigersinn. Hierdurch entsteht die wellenförmige Ausprägung des Graphen. Da Sinus die Höhe der Gegenkathete darstellt in Abhängigkeit von dem Bogenmass befindet sich die dargestellte Höhe der Gegenkathete auf einer Höhe von $\pi$ auf der X-Achse. **Begründung der Periodenlänge** Durch den Einheitskreis wird die Perioden länge bestimmt, da das Bogenmass auf der X-Achse dargestellt wird. So ist eine halbe Umrundung des Kreises genau ein $\pi$ lang.

### 0.18.4 Überleitung zu trigonmetrische Funktionen

Aufgrund der Veränderung der verschiedenen Seitenlängen des rechtwinkeligen Dreiecks, welche durch die jeweilge trigonometrische Funktion dargestellt wird und abhängi von dem Winkel $\alpha$ ist, entsteht die pregnante Form von Sinus und Cosinus.

### 0.18.5 Normalform einer trigonometrischen Funktion

Ähnlich wie quadratische Funktionen oder lineare Funktionen gibt es ebenfalls einen Normalform der Sinus Funktion.

$$a \cdot sin(b(x + d)) + e$$

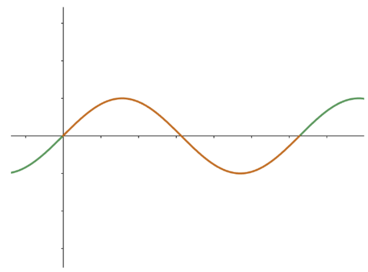
$a$: Streckfaktor auf der X-Achse(Amplitude)
$b$: Streckfaktor auf der Y-Achse (Periodenlänge)
$d$: Verschiebung auf der X-Achse
$e$: Verschiebung auf der Y-Achse

### 0.18.6 Modelierung der Sinus Funktion

Für die Moddelierung einer Sinus oder Cosinus Funktion kann man wie folgt vorgehen.

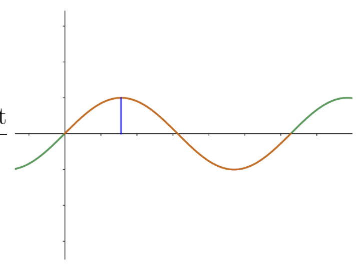
Periode bestimmen

Schreibweise $b : \frac{2\pi}{b}$



Amplitude bestimmen

$$a : \frac{\text{minimal Wert} - \text{maximal Wert}}{2}$$



Y-Achsenverschiebung

$$e : \frac{\text{maximal Wert} + \text{minimal Wert}}{2}$$

Einsetzten und auflösen

$P(x_1, f(x_1)$

$s(x) = a(sin(b(x - d)) + e$

P in f

$f(x_1) = a(sin(b(x_1 - d)) + e$

Loese nach $d$

## 0.19 Exponentialfunktionen

Eine Exponentialfunktion stellt einen exponentiell Verlauf eines Graphen dar.

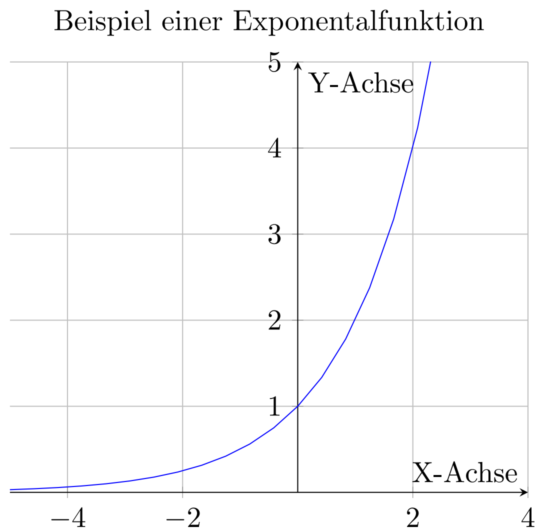



Abbildung 7: Funktionsgraph von $f(x) = 2^x$

### 0.19.1 Normalform

Hierbei folgt einer Exponentialfunktion der folgenden Form:

$$f(x) = a \cdot b^x$$

Wobei $b > 0 \wedge b \neq 0$ sein muss.
$a$ wird hierbei als Startwert bezeichnet. Innermathematisch spricht man von $a$ als Streckfaktor und von $b$ als Wachstumsfaktor.

#### Faktor $a$ - Startwert

Der Koeffizent $a$ stellt bei einer exponentiell verlaufenden Funktion den Startwert dar und zugleich auch Streckfaktor der Funktion. Er wird für jedes $x$ immer mit der Basis $b$ multipliziert.

**Beispiel** sei sei $-0.5 \leq b \geq 2$ und $-1 \leq a \geq 1$ für $f(x) = ab^x$

| | | |
|---|---|---|
| $a : -1$ | $a : 0$ | $.a : 1$ |
| $x : -1$ | $x : 0$ | $x : 1$ |
| $b : -0.5$ | $b : -0.5$ | $b : -0.5$ |

$$f(-1) = (-1) \cdot (-0.5)^{-1} = 2 \qquad f(0) = 0 \cdot 0.5^0 = 0 \qquad f(1) = 1 \cdot (-0.5)^1 = -0.5$$

**Basis *b* - Wachstumsfaktor**

Die Basis $b$ ist hierbei von großer Bedeutung, da diese mit dem $x$ für jedes $x$ multipliziert wird. Da bei exponentiell Verläufen schnell das Vielfache der Basis erreicht wird, braucht der Wert von $b$ nur sehr gering sein, um eine große Auswirkung zu haben. Ebenfalls hat $b$ eine große Auswirkung den Verlauf in Bezug auf den Schnittpunkt mit der Y-Achse. $b$ ist hauptverantwortlich für diese, da durch $x$ die Anzahl der Multiplikationen mit sich selbst bestimmt wird.

**Beispiel** sei $-0.5 \leq b \geq 2$ und $-1 \leq x \geq 2$ für $f(x) = b^x$

$x : -1 \quad x : 0 \quad x : 1$

$b : -0.5 \quad b : -0.5 \quad b : -0.5 \; f(-1) \quad = -0.5^{-1} f(0) \quad = a - 0.5^0 f(1) \quad = -0.5^1$

$= -2 \quad = 1 \quad = -0.5$

| | | |
|---|---|---|
| $x : -1$ | $x : 0$ | $x : 1$ |
| $b : 0$ | $b : 0$ | $b : 0$ |
| $f(-1) = 0^{-1}$ | $f(0) = 0^0$ | $f(1) = 0^1$ |
| $= \infty$ | $= 1$ | $= 0$ |

| | | |
|---|---|---|
| $x : -1$ | $x : 0$ | $x : 1$ |
| $b : 1$ | $b : 1$ | $b : 1$ |
| $f(-1) = 1^{-1}$ | $f(0) = 1^0$ | $f(1) = 1^1$ |
| $= 1$ | $= 1$ | $= 1$ |

$$\begin{array}{ccc} x:-1 & x:0 & x:1 \\ b:2 & b:2 & b:2 \\ f(-1)=2^{-1} & f(0)=2^{0} & f(1)=2^{1} \\ =0.5 & =1 & =2 \end{array}$$

An dem Beispiel kann man sehen, dass egal welche Zahl die Basis $b$ annimmt es beim Einsetzten von 0 für $x$ immer zu 1 kommt. Auffällig ist hierbei, dass setzt man für $b:1$ ein, so erhält man zu jedem $x$ immer den Wert 1. Dies ist die Begründung für die Schnittstelle mit der Y-Achse bei 1, wenn $a=1$ ist. Setzt man nun für $b$ einen Wert ein, der größer als 1 ist, so verändert sich etwas. Die Basis $b$ wird für $x$ mit sich selber multipliziert. Nimmt $b$ nun einen Wert von 1.01 an, so wird wie folgt für $x=3$ gerechnet.

$$\underbrace{1.01}_{1}\cdot\underbrace{1.01}_{2}\cdot\underbrace{1.01}_{3}$$
$$=1.030301$$

Die Differenz zwischen 1 und $b$ wird vervielfacht. Alleine diese kleine Differenz reicht aus, um eine deutliche Ausprägung zu verursachen in dem Graphen von $f(x)$.

### 0.19.2 Prozentuale Zunahme

Einen exponentiellen Verlauf kann man unteranderem an einer prozentualen Veränderung erkennen. So lässt sich sagen, dass sei $b>1$ eine prozentuale Steigung der Differenz zwischen 1 und dem Wert, den $b$ annimmt bestimmen. Nimmt man an, dass sei $b=1.01$, so ist 0.1 gleich 1% von 1 und besitzt somit eine prozentuale Zunahme von 1%. Übertragt man diesen Sachverhalt auf eine weitere Basis, welche $b>1$ erfüllt, so lässt sich ebenfalls der Übertrag als prozentuale Steigung definieren.

**Beispiel** Sei $b\in\{x:x\in\mathbb{R},x>1\}$

$$f(x)=1.04^{x}\Rightarrow 4\%$$

So folgt aus $b=1.04$, dass eine Zunahme von 4% vorliegt.

$$f(x)=1.5^{x}\Rightarrow 50\%$$

So folgt aus $b = 1.5$, dass eine Zunahme von 50% vorliegt.

$$f(x) = 1.9^x \Rightarrow 90\%$$

So folgt aus $b = 1.9$, dass eine Zunahme von 90% vorliegt.

$$f(x) = 2.6^x \Rightarrow \ 160\%$$

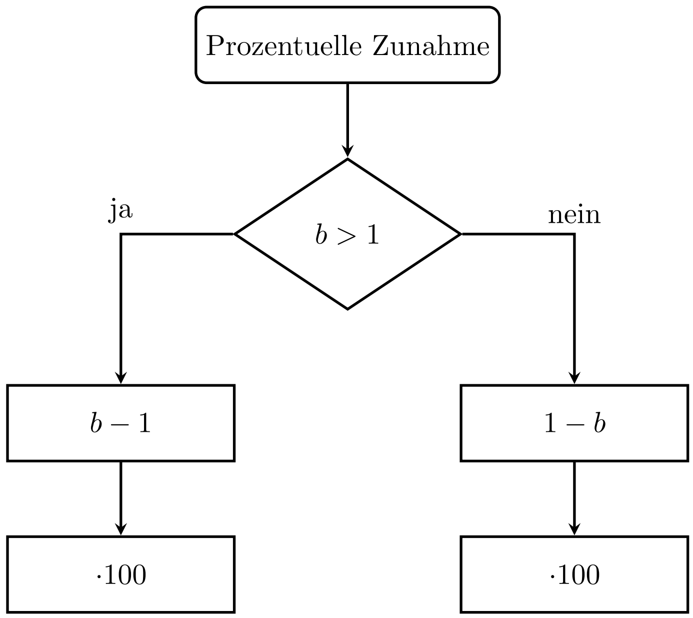
So folgt aus $b = 2.6$, dass eine Zunahme von 160% vorliegt, da sich eine prozentuale Zunahme nur für die Differenz zwischen $b$ und $b = 1$ ausprägt.

$$f(x) = 0.8^x \Rightarrow 20\%$$

So folgt aus $b = 0.8$, dass eine Abnahme von 20% vorliegt. Zu dieser Annahme kommt man, indem man sich überlegt, dass $b = 1 = 100\%$ sind. Hat man nun nur $b = 0.8$ anstelle von $b = 1$ , so ergibt sich hieraus die Verringerung von 20%

### 0.19.3 Prozentuale Zunahme/Abnahme algorithmisch bestimmen

Um die Berechnung der prozentualen Änderung des Graphen zu bestimmen kann man algorythmisch vorgehen.



## 0.20 $e$-Funktion

Die E-Funktion ist einen Unterart der Exponentialfunktion (0.19) sie hat, anders als eine Exponentialfunktion, einen belibige Zahl als Basis. Die Basis einer $e$-Funktion ist die eulischere Zahl $e$.

### 0.20.1 Entstehung von $e$

Die Entstehung von $e$ ist ein Grenzwertprozess...

### 0.20.2 Normalform

Die Normalform einer $e$-Funktion lautet

$$a \cdot e^{k \cdot x}$$

### 0.20.3 Ableiten der $e$ Funktion

Die besonderheit bei $e$-Funktionen ist, dass die Differenzierte und Integrierte Funktion jeweils immer gleich ist.

#### Faktorregel

Ähnlich wie bei dem normalen Ableiten bei einer ganzrationalen Funktion lässt sich hier die Faktorregel anwenden.

#### Kettenregel

Liegt eine verkette Funktion vor, so kann diese mithilfe der Kettenregel abgleitet werden. Bei einer verketteten Funktion gibt es eine äußere Funktion und eine innere Funktion. Die Kettenregel ist ein wichtiges Hilfsmittel beim Ableiten von komplexeren Funktion, die sich in eine innere und äußere Funktion einteilen lassen. Die Kettenregel lautet wie folgt.

$$f(x) = u(v(x))$$
$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Wobei $u(x)$ die äußere Funktion darstellt und $v(x)$ die äußere Funktion. Um mit der Kettenregel zu integrieren wendet man folgende Normalform an.

$$f(x) = u(v(x))$$
$$F(x) = \frac{U(v(x))}{v'(x)}$$

***Beispiel.***

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^{\frac{1}{2}x} && \text{(Aufteilen in innere- und äußere Funktion)} \\ v(x) &= \frac{1}{2}x && \text{(Die innere Funktion)} \\ u(x) &= e^x && \text{(Die äußere Funktion)} \end{aligned}$$

Anschließend werden die Funktionen einzeln abgleitet und wieder mit der Form zusammen gebracht. △

**Differentialgleichungen**

Differentialgleichungen werden vorwiegend genutzt, um eine gesuchte Funktion mit einer Gleichung zu erhalten. Konkret bedeutet dies, dass eine Differentialgleichung 1. Ordnung die Ausgangsfunktion und die Ableitung enthält. Allerdings bezieht sich dies nur auf e-Funktionen. So kann man beispielsweise eine e-Funktion wie folgt ableiten.

***Beispiel.***

$$f'(x) = k \cdot f(x)$$

In der Anwendung von Differnetialgleichungen gibt es außerdem noch die Möglichkeit Bedingungen aufzustellen ($f(0) = 1$). Mit solchen Bedingungen kann man wie folgt umgehen. △

***Beispiel.***

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 && \text{(Bedingung)} \\ f(0) &= e^{k\cdot 1} && \text{(Nach } k \text{ auflösen)} \\ ln(f(0)) &= k \cdot 1 && \text{(Dividieren durch 1)} \\ ln(f(0)) &= k \\ \Rightarrow f'(x) &= ln(f(0)) \cdot f(x) \end{aligned}$$

△

### 0.20.4 $e$-Funktion aufstellen

Um eine $e$-Funktion aufzustellen aus einem gegeben Sachverhalt, ist mindestens ein Wertepaar in der $(F;G)$ notwendig. Hierfür nimmt man zu Beginn die Normalform der $e$-Funktion $(ae^{kx})$

$$
\begin{align}
f(x) &= ae^{kx} \tag{1}\\
G &= ae^{kF} \tag{2}\\
\frac{G}{a} &= e^{kF} \tag{3}\\
ln\left(\frac{G}{a}\right) &= kF \tag{4}\\
\frac{ln\left(\frac{G}{a}\right)}{F} &= k \tag{5}
\end{align}
$$

**Erklärung**

Durch die Tatsache, dass ein Wertepaar gegeben ist und dies in die Form einer $e$-Funktion eingesetzt werden kann und somit für eine unbekannte Variable gesorgt wird, ist es möglich dies mithilfe des Logarithmus aufzulösen.

1. Die Normalform der $e$-Funktion
2. Das Wertepaar wird in die Normalform der $e$-Funktion eingesetzt
3. Der Koeffizent wird durch Division auf die andere Seite gebracht.
4. Durch die Tatsache, dass der Logarithmus die Beziehung zwischen dem Ergebnis einer Potenzierung mit einem unbekannten Exponenten darstellt und $e$ in diesem Fall unsere Basis ist, dessen Exponenten genau die links neben dem Gleichheitszeichen ergibt.

***Beispiel.*** Gesucht ist die Funktion $f$. Diese soll mithilfe von der Normalform der $e$-Funktion aufgestellt werden. Der hierfür benötigte Punkt lautet

$(5;12)$

$$\begin{aligned} f(x) &= ae^{kx} \\ 12 &= e^{k5} && \text{(Anwenden des ln)} \\ ln(12) &= k5 && \text{(Dividieren mit 5)} \\ \frac{ln(12)}{5} &= k \\ f(x) &= e^{x\cdot\frac{ln(12)}{5}} \end{aligned}$$

$\triangle$

### 0.20.5 Umformung von der normalen Exponentialfunktion zu der E-Funktion

Da sich die $e$-Funktion besonders gut differenzieren und integrieren lässt, nutzt man diese, um Sachverhalte darzustellen. Hierfür formt man die normale Exponentialfunktion so um, dass man sie als $e$-Funktion schreiben kann. Hierfür ist es relevant die Bedeutung der folgenden Normalform zu kennen.

#### Normalform

$$f(x) = a \cdot e^{k \cdot x + d} + c$$

Zu dem behandelten Thema steht eine digitale Visualisierung im Internet bereit.

### $a$ - Streckfaktor

Der Faktor $a$ ist bestimmt die Streckungs/Stauchungs des Graphen. Wird dieser negativ, so wird der Graph an der $X$-Achse gespiegelt. Der Grund hierfür ist, dass ist $a$ negativ, werden die gesamten Werte des Graphen ebenfalls negativ.

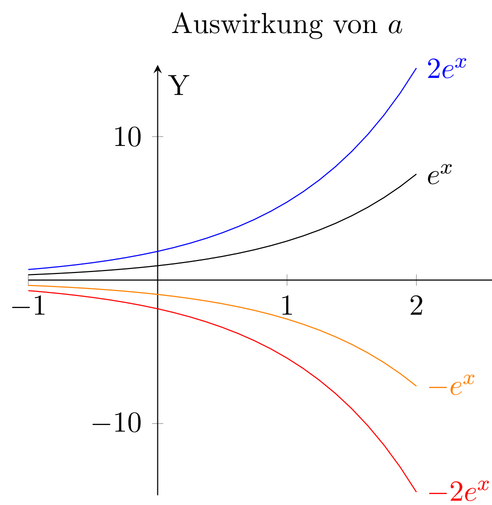



Abbildung 8: Auswirkung von $a$ auf den Graphen

### $k$ - Koeffizent

Der Faktor $k$ ist ähnlich wie $a$ und bestimmt die Streckung und Stauchung des Graphen, allerdings wird der Graph an der $Y$-Achse gespiegelt, sobald dieser negativ wird. Dies wird begründet durch Die Begründung hierfür ist, dass wenn eine Zahl für $k$ eingesetzt wird, bestimmt $k$ wie oft $x$ multipliziert wird. Hierdurch erreicht der Graph schneller die selben $Y$-Wert für $k > 0$. Ist $k < 0$, so kehrt sich der Graph um aufgrund der Negätivität von $k$. Werden nun postive Werte für $x$ eingesetzt, so entstehen hierraus immernoch negative Zahlen, denn $-$ mal $+$ ergibt $-$. Somit werden die gleichen $Y$-Werte wie im Positiven erricht, jedoch im Negativen.

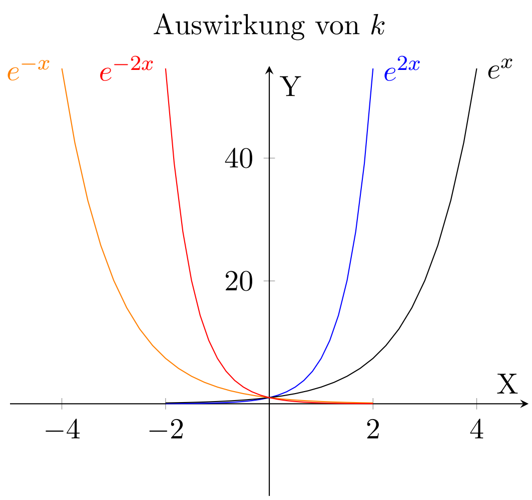



Abbildung 9: Auswirkung von $k$ auf den Graphen

**$d$ - $X$-Achsenverschiebung**

Die Variable $d$ gibt die $X$-Achsenverschiebung an. Sei $d > 0$ verschiebt sich der Graph nach links, andernfalls für $d < 0$ verschiebt sich der Graph nach rechts.

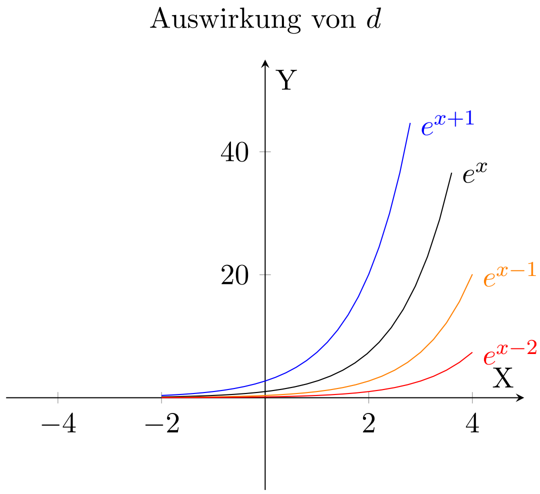



Abbildung 10: Auswirkung von $d$ auf den Graphen

### $c$ - $Y$-Achsenverschiebung

Der Summand $c$ bestimmt die $Y$-Achsenverschiebung. Dies ist begründet durch die Tatsache, dass wenn ein Summand zu $x$ addiert wird, dieser immer um $c$ nach oben verschoben ist.

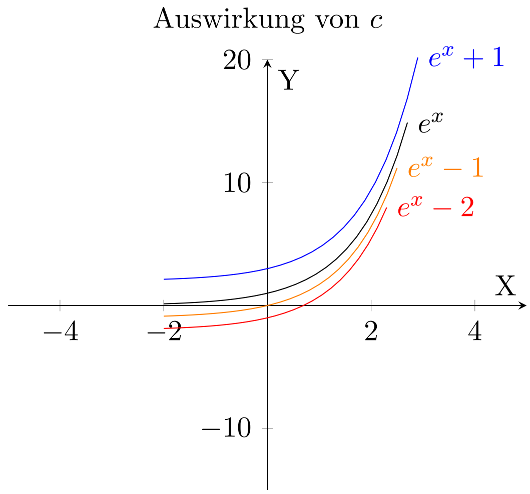



Abbildung 11: Auswirkung von $c$ auf den Graphen

### 0.20.6 Umschreiben einer Exponentialfunktion zu einer $e$-Funktion

Das Umschreiben einer normalen Exponentialfunktion in eine $e$-Funktion erfolgt systematisch nach folgenden Schritten. Allerdings ist dies nur andwendbar auf bereits bestehenden Exponentialfunktionen.

1. Eine Funktion ist geben mit dem Funktionsterm $ab^x$
2. $a$ bleibt stehen
3. anstelle von $b^x$ wird $e$ geschrieben
4. Als Exponent wird nun der $\ln(b^x)$ geschrieben.

Bedeutet, dass

$$a \cdot b^x = a \cdot e^{ln(b^x)}$$

### 0.20.7 Verdopplungszeit und Halbwertszeit einer $e$-Funktion bestimmen.

Liegt eine Funktion mit $e$ als Basis vor, so kann man die Verdoppelungszeit oder die Halbwertszeit bestimmen, indem man die folgende Formel anwendet

$$x = \frac{ln(2)}{k}$$

Hierbei ist $k$ die Wachstumskonstante und $x$ die Zeit. Für die Halbwertszeit gilt die folgende Formel.

$$x = \frac{ln(0.5)}{k}$$

Wobei die $x$ die Zeit darstellt, $k$ die Wachstumskonstante und $ln(0.5)$ die Halbierung

## 0.21 Logarithmus

Betrachtet man folgendes, könnte auffallen, dass es einen Beziehung zwischen $n$,$b$ und $r$ geben könnte.

$$b^n = r$$

**Die Potenz** beschreibt zunächst den Weg, wie man zu $r$ kommt. Dies erfolgt durch das Potenzieren der Basis $b$ mit dem Exponenten $n$

**Die Wurzel** beschreibt die Beziehung zwischen $r$ und $n$ und ergibt abschließend $b$

**Der Logarithmus** beschreibt die Beziehung zwischen der Basis $b$ und dem Ergebnis $r$.

$$\begin{tikzcd}
 & & n \arrow[dd] & & \\
 & Y^n \arrow[ur] \arrow[drrr] & & \sqrt[n]{X} \arrow[ul] & \\
Y \arrow[ur] \arrow[urrr] \arrow[rr] & & \log_Y(X) \arrow[rr] & & X \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Abbildung 12: Auswirkung von $a$ auf den Graphen

### Entstehung

Dem Logarithmus liegt die Mercator-Reihe zugrunde und ist lediglich eine Approximation...

### Bedeutung

Durch die Eigenschaften des Logarithmus kann man sagen, dass dieser das Verhältnis zwischen

**Anwendung**

### 0.21.1 Logarithmus naturalis

Der Logarithmus naturalis ist der Logarithmus zu der Basis $e$ und wird als verkürzte Schreibweise für $log_e(n)$ genutzt.

### 0.21.2 Logarihtmus Gesetzt

Logarihtmusgesetze sind eine der Grundlegenden Vorrausetzung, um mit dem Logarithmus rechnen zu können.

**1. Logrithmusgesetz**

$$ln(x \cdot y) = ln(x) + ln(y)$$

**2. Logrithmusgesetz**

$$ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln(x) - ln(y)$$

**2. Logrithmusgesetz**

$$ln(x^t) = t \cdot ln(x)$$

## 0.22 Ableitung des Logarithmus Naturalis

Genauso wie andere Funktion besitzt der $ln$ eine Ableitung. Die Besonderheit ist hierbei allerdings, dass die Ableitung des $ln(x)$ immer $\frac{1}{x}$ ist. Als Erklärung kann man sich folgendes Anschauen:

$$\begin{aligned}
x &= e^{ln(x)} && \text{(Ableiten auf beiden Seiten)} \\
1 &= (ln(x))' \cdot e^{ln(x)} && \text{(Beide Seiten vereinfachen)} \\
1 &= (ln(x))' \cdot x && \text{(Durch } x \text{ dividieren)} \\
\frac{1}{x} &= (ln(x))'
\end{aligned}$$

## 0.23 Verschiebung & Streckung des $ln(x)$

Genauso wie die $e$-Funktion lässt sich der $ln$ ebenfalls im Koordinatensystem durch verschiedene Parameter modelieren. Hierbei kommt die Normalform des $ln(x)$ zum Einsatz.

$$f(x) = a \cdot ln(b \cdot (x - c)) + d$$

#### $a$ - Streck- oder Stauchungsfaktor

Der Streck- oder Stauchungsfaktor sorgt für eine Streckung oder Stauchung an der $Y$-Achse. Der Grund hierfür ist, dass zunächst die Werte auf $Y$-Achse mit dem $ln$ berechnet werden und anschließend mit $a$ multipliziert werden. Somit bleibt ebenfalls die Nullstelle erhalten, da sich beim Multiplizieren mit Null (wenn man in $ln(x)$ die Zahl 1 einsetzt) immer Null ergibt.

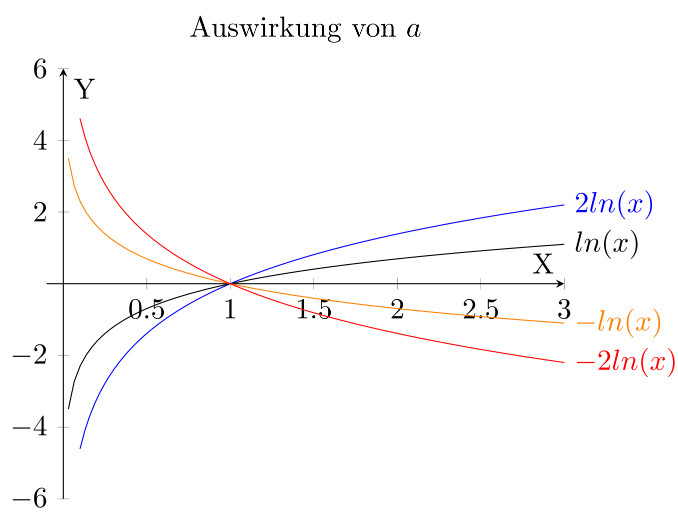



Abbildung 13: Auswirkung von $a$ auf den Graphen

### $b$ - Streck- oder Stauchfaktor

Der Koeffizent $b$ ist ebenfalls ein Stauchungs- oder Streckfaktor im Bezug auf den Graphen. Allerdings streckt dieser den Graphen auf der $X$-Achse, indem er die $x$-Werte bevor sie durch den $ln$ nacher die $Y - Wert$ ergeben, multipliziert. Das Bedeutet, dass die $Y$- Werte, die eigentlich an einem anderen Wertepaar erst erreicht werden mit einem davorliegenden $x$ erreicht werden. Außerdem spiegelt man mit diesem Faktor den Graphen an der $Y$-Achse.

***Beispiel.***

$$f(x) = ln(x)$$
$$f(3) = ln(3)$$
$$f(3) = 1.09$$

△

***Beispiel.***

$$f(x) = ln(2x)$$
$$f(3) = ln(2 \cdot 3)$$
$$f(3) = 1.79$$

△

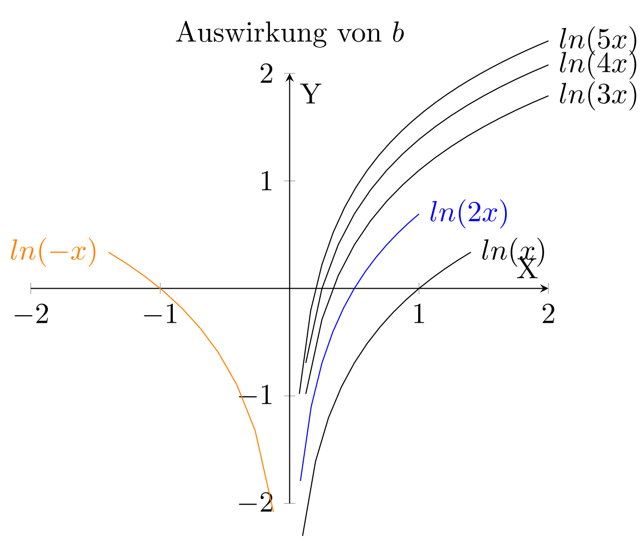



Abbildung 14: Auswirkung von $b$ auf den Graphen

**$c$-Verschiebung auf $X$-Achse**

Mit $c$ lässt sich der Graph auf der $Y$-Achse verschieben. Ist $c < 0$ verschiebt sich hierbei der Graph nach rechts. Ist $x > 0$ verschiebt er sich nach links.

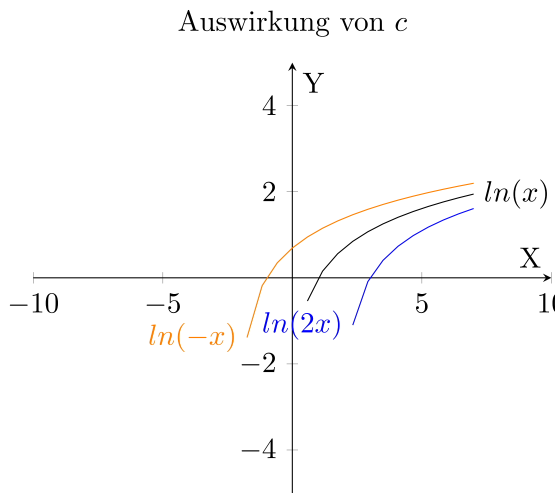



Abbildung 15: Auswirkung von $c$ auf den Graphen

### $b$ - Y-Achsenverschiebung

Der Summand $b$ sorgt für eine $Y$-Achsenverschiebung, da zu den $X$-Werten jeweils ein gewisser Wert addiert oder subtrahiert wird.

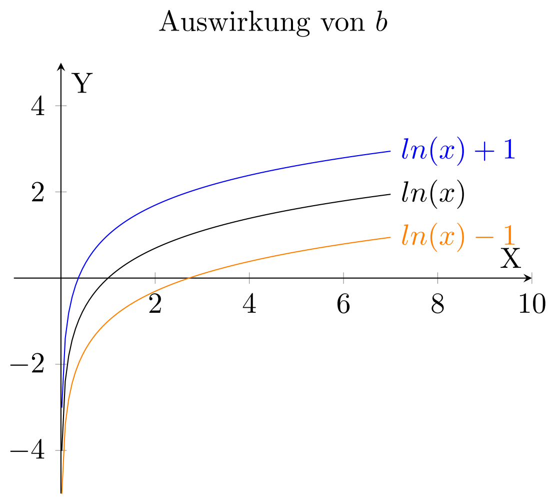



Abbildung 16: Auswirkung von $b$ auf den Graphen

## 0.24 Inverse von $ln(x)$

Um die Inverse des $ln(x)$ zu bilden muss die Definitionsmenge und Wertemenge vertauschst werden und anschließend äquvalent umgeformt werden.

***Beispiel.***

$$\begin{aligned}
f(x) &= 5 \cdot 2^x && (f(x) \text{ zu } y \text{ umschreiben})\\
y &= 5 \cdot 2^x && (\text{Umformen nach } x)\\
y &= 5 \cdot 2^x && (\text{Dividieren von } 5)\\
\frac{y}{5} &= 2^x && (\text{Logarithmieren})\\
ln\left(\frac{y}{5}\right) &= ln(2^x) && (3.\ \text{Logarithmusgesetz})\\
ln\left(\frac{y}{5}\right) &= x \cdot ln(2) && (\text{Dividieren } ln(2))\\
\frac{ln\left(\frac{y}{5}\right)}{ln(2)} &= x\\
\Rightarrow f^{-1}(x) &= \frac{ln\left(\frac{x}{5}\right)}{ln(2)}
\end{aligned}$$

△

## 0.25 Begrenztes Wachstum

Es gibt Sachverhalte, die erfodern, dass eine e-Funktion/Exponential Funktion nicht in ihrer ursprünglichen Form vorliegt. Dass bedeutet, dass nicht jeder Sachverhalt gleich mit einer Funktion, der Form $f(x)ae^{kx}$ oder $f(x) = a \cdot b^x$ modeliert werden kann. So eignet sich das Beispiel eines Glasses Milch, der in einen Raum gestellt wird und somit sich Temperatur der auf die Raumtemperatur angleicht. Den Verlauf der Temperatur darzustellen in Abhängikeit der Zeit ergibt nur auf eine Art Sinn. Die 25 Grad stellen das Minimum der Temperatur, welche der Kaffe erreichen kann, dar. Somit kann nur Abb 3 zutreffen auf eine mit einem begrenzten Wachstum. Um nun den Prozess des Modellierens, der Funktion, welche die Temperatur des Kaffes darstellt, fortzuführen, ist es wichtig sich die Informationen, welche gegeben sind, anzuschauen. So kann beispielsweise aus der Information, dass der Kaffe jeden Moment um 9% wärmer wird, gezogen werden, dass $e^{-0.09}$ die alleinig um die Abnahme, sondern auch um die Begrenzung. Mit logischem Überlegen kann man nun den Graphen im Koordinatensystem verschieben.

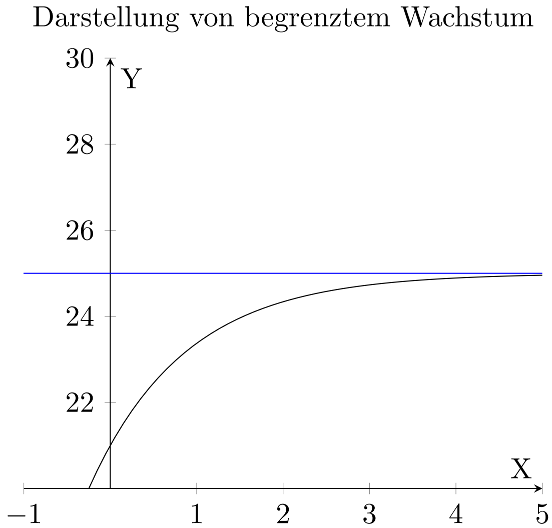



Abbildung 17: Der Graph von $25 - 4e^{-0.9x}$ konvergiert zu 25

Dies erfolgt durch das Ändern der Parameter der Normalform. Da die Sättigungsgrenze bekannt ist, können wir mit dem Parameter $e$ den Graphen nach oben schieben, sodass der Graph bereits gegen 25 konvergiert. Wissen wir nun den Startwert bzw. die Temperatur bei der wir den Kaffee raus gestellt haben, können wir konkret den Bereich der Wertemenge eingrenzen. Nehmen wir an, dass der Kaffe 4 deg kalt war, kann man sich nun den Bereich, der für die Rechnung relevant ist, berechnen. Dies wird mit der Hilfe von Subtraktion des Startwertes Minus die Sättigungsgrenze gemacht. Dies ist wichtig, weil wir einen Startwert benötigen für unsere Funktion. Normalerweise kann man einfach $a$ verändern, allerdings bedingt $-25$ diesen Wert. Unser Startwert ist also $25 - 4$. Daraus folgt, dass die Funktion wie folgt aussehen muss.

$$f(x) = -21e^{-0.09x} + 25$$

## 0.26 Logistisches Wachstum

Das logistische Wachstum stellt einen Wachstumsprozess dar, welcher nicht durchgehend wächst, sondern sich zu einem begrenzten Wachstum wandelt. Ähnlich wie ein begrenztes Wachstum besitzt das logistische Wachstum eine Sättigungsgrenze, die das Wachstum begrenzt. Zu Begin des logistischen Wachstums gilt, dass $f(x)$ proportional zu $f'(x)$ ist. Nach dem Wendepunkt. welcher sich immer bei der Hälfte der Sättigungsgrenze befindet, gilt für $f(x)$, dass es proportional zu der Differenz zu der Sättigungsgrenze ist. Dies bedeutet, dass $S - f(x)$ proportional zu $k(S - f(t))$ ist. Das logistische Wachstum wird durch unterschiedliche Normalformen beschrieben. Diese variieren jedoch nur äußerlich.

$$f(t) = \frac{S}{1 + \left(\frac{S}{f(0)}\right) e^{-kSt}} \qquad f(t) = \frac{f(0) \cdot S \cdot e^{kSt}}{f(0)e^{kSt} + S - f(0)}$$

$$f(t) = \frac{f(0) \cdot S}{f(0) + (S - f(0))e^{-kSt}} \qquad f(t) = S - \frac{(S - f(0))S}{f(0)e^{kSt} + S - f(0)}$$

Darstellung von logistischem Wachstum

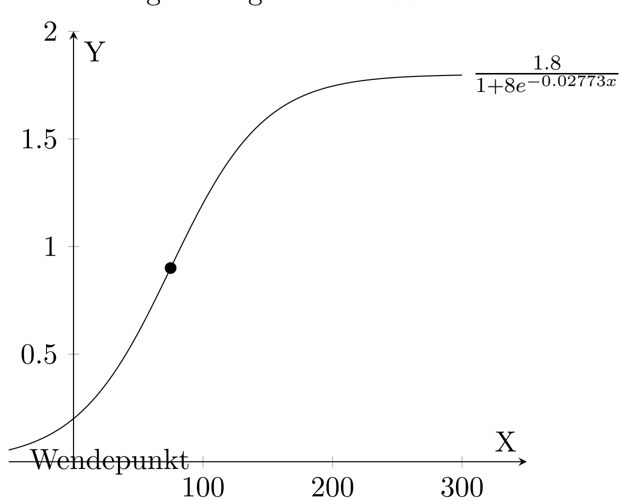



Abbildung 18: Der Graph von $25 - 4e^{-0.9x}$ konvergiert zu 25