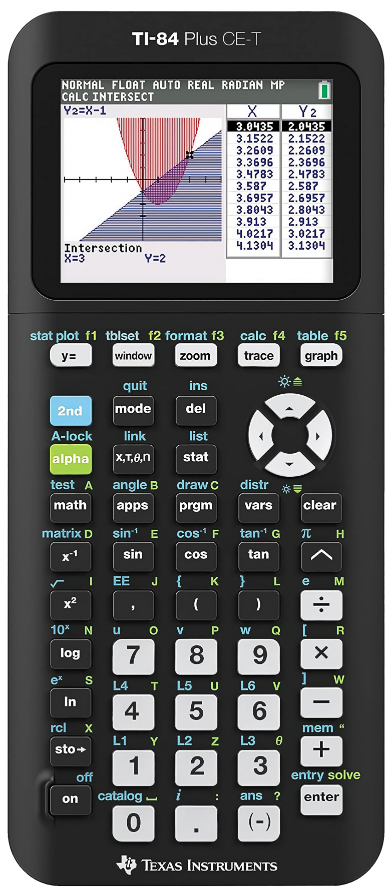
Theorieheft

Bjarne Axmann

22. Dezember 2023

Inhaltsverzeichnis

GTR Anleitung



1 GRT

1.1 Eintragen einer Funktion

Mit dem Grafiktaschenrechner kann man sich die Graphen verschiedener Funktionen anzeigen lasse. Dazu geht man zuerst auf und trägt dort unter y1, y2,y3, die gewünschten Funktionen ein. Funktionen, die gezeichnet werden sollen, müssen ausgewählt werden, indem auf das Gleichheitszeichen gedrückt wird und dieses schwarz hinterlegt bleibt.

1.2 Anpassen des Fensterbereiches des Graphen

Um das Window anzupassen, in dem der Graphen darsgestellt wird, muss man zuerst 2nd und window drücken. Anschließend unterscheidet man zwischen den Werten.

`Xmin` Dieser Wert bezeichnet den mindest Wert auf der X-Achs, der zu sehen sein wird

`Xmax` Dieser Wert bezeichnet den maximalen Wert, der auf der X-Achse zu sehen sein wird.

`Xscl` Dieser Wert bezeichnet die Schrittlänge auf der X-Achse

`Ymin` Dieser Wert bezeichnet den minimal zu sehenden Y-Wert auf der Y-Achse

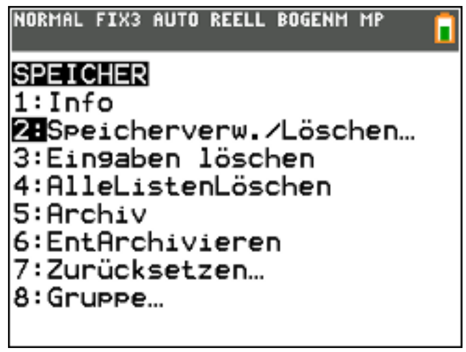
`Ymax` Dieser Wert bezeichnet den maximalen zu sehenden Y-Wert auf der Y-Achse

`Yscl` Dieser Wert bezeichnet die Schrittlänge auf der Y-Achse

Beim dem Angeben der Werte ist darauf zu achten, dass jegliche negativen Werte nicht mit dem Rechenminus, sonder mit dem Vorzeichenminus angegeben werden. Wurde der Window Bereich eingestellt, kann man im Anschluss mit der Taste graph zu der Ansicht des Koordinatensystems wechseln. Ist der Graph nicht zu sehen, kann man auch über zoom und anschließend `zoomStandart` sich wieder die ursprüngliche Einstellung herstellen.

1.3 Komplett Reset

Sollte der Fall eines Fehlers auftreten, so ist das maximalinvasivste ein Reset des Taschenrechners, welcher durch die Tagenfolge 2nd und +. Anschließend wählt man `reset` aus.



1.4 Einsetzen von Werten in eine Funktion

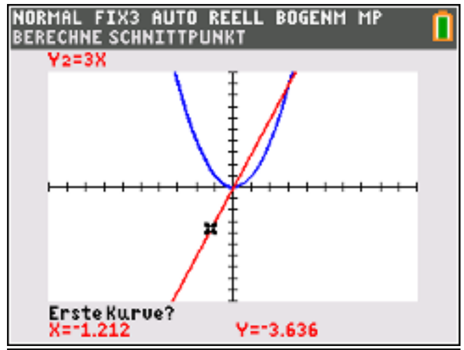
Mit den Tasten 2nd und trace lässt sich das Menü zum Berechnen von verschiedenen Funktionsberechnungen aufrufen. Wählt man nun hier `1` , so kann man einen Wert in eine Funktion einsetzten für die Variable x.
Die Dokumentation erfolgt hierbei wie folgt:

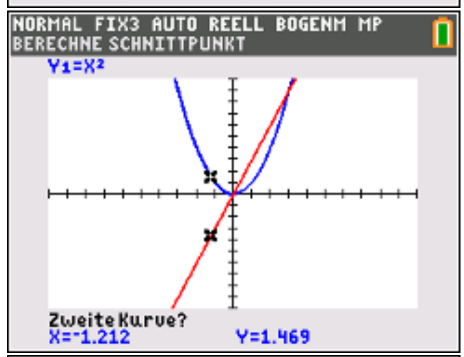
$$value(y_1, Wert) \rightarrow y = Wert$$

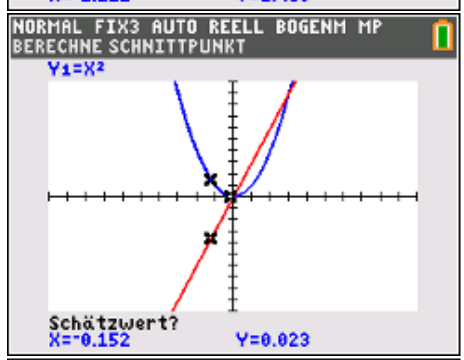
1.5 Schnittpunkt ermitteln

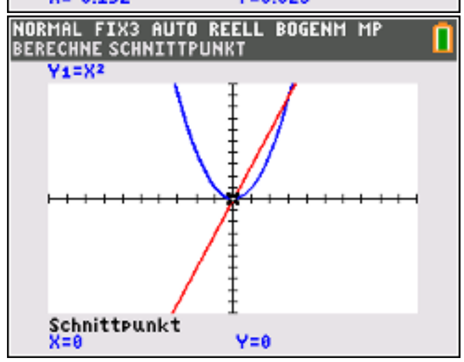
Mit den Tasten 2nd und trace lässt sich das Menü zum berechnen von verschiedenen Funktionsberechnungen aufrufen. Wählt man5, so kann man den Schnittpunkt von zwei Funktionen berechnen lassen. Hierfür muss man im ersten Schritt die erste Funktion auswähle und anschließend die zweiten und den ungefähren Schnittpunkt der beiden Funktionen.

$$intersect(y_1, y_2) \rightarrow \quad x = \quad y =$$







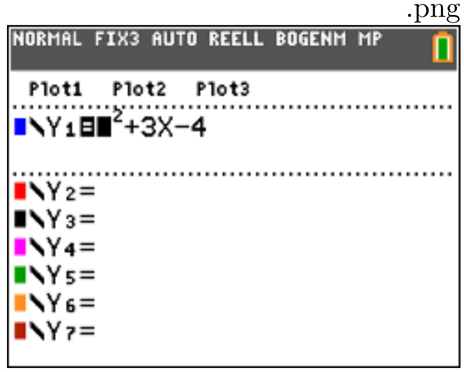


1.6 Lösen von Gleichungen

Ist eine Gleichung mit einer Unbekannten in der Grundform = 0 gegeben, so kann man diese leicht mit dem GTR lösen.

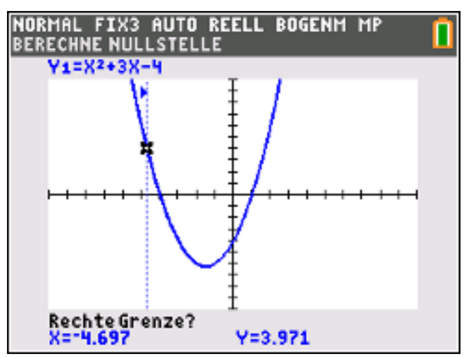
Zuerst erfolgt das Eintragen der Funktion in dem, indem die Funktionen eingetragen werden. Dieses wird aufgerufen, indem man die Taste y= drückt. Anschließend drückt man die Taste graph, um sich den Graphen anzeigen zu lassen.

.png

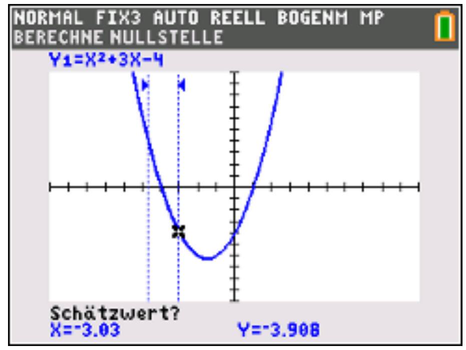


Um nun die Gleichung nach Null aufzulösen, wählt man 2nd und trace und wählt Null aus.

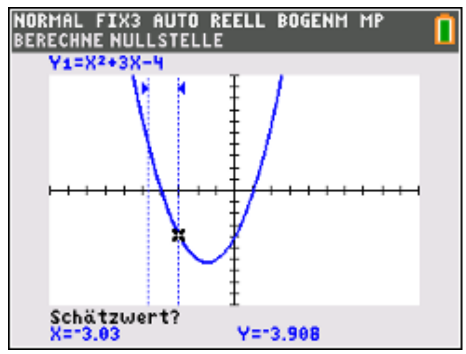
Anschließend müssen die Grenzen bestimmt werden, indem der Taschenrechner die Nullstellen bestimmen soll. Das Wählen der ersten Grenze sollte überhalb der ersten Nullstelle geschehen.



Das Wählen der rechten Grenze geschieht unterhalb der Nullstelle.



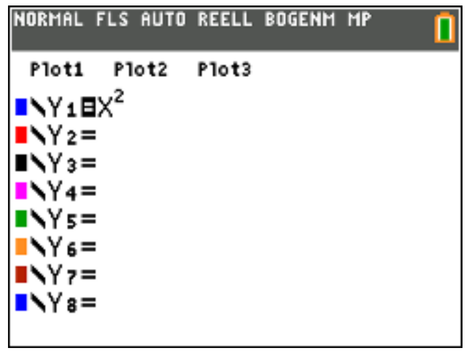
Um schlussendlich die Nullstellen zu bestimmen müssen die Grenzen bestätigt werden. Anschließend zeigt der Taschenrechner die Nullstellen an.



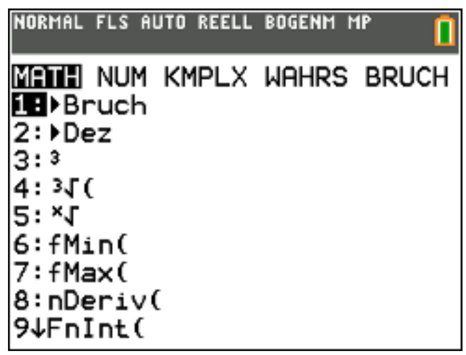
1.7 Ableitungsgraph bestimmen

Auch der Ableitungsgraph lässt sich mit dem Taschenrechner problemlos bestimmen, indem man den `nDeriv` Befehl anwendet.

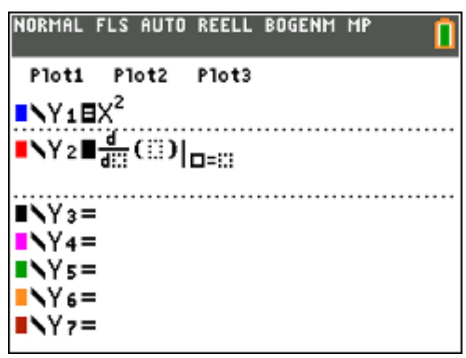
Zuerst benötigt man einen bereits eingetragenen Graphen in der Graphenübersicht bei y= und navigiert auf die nächste freie Funktion.



Nun drückt man die Taste math und wählt aus dem Menu den `nDeriv` Befehl aus (Herkunft engl. Derivation). Anschließend fügt der Taschenrechner den `nDrevi` in das Feld der Funktion ein



Hier muss nun die umpunkteten Feldern ein Wert eingetragen werden. Der Bruch wird wie folgt definiert $\frac{d}{dx}$. In die Klammer wird die Funktion deren Ableitung gewünscht ist eingetragen mit deer Taste alpha und trace drauf öffnet sich Menu aus Funktionen, die dort eingesetzt werden können. Zuletzt wird in dem hintersten Feld erneut x eingetragen. Drückt man nun erneut graph, so erhält man den Ableitungsgraph der Funktion.

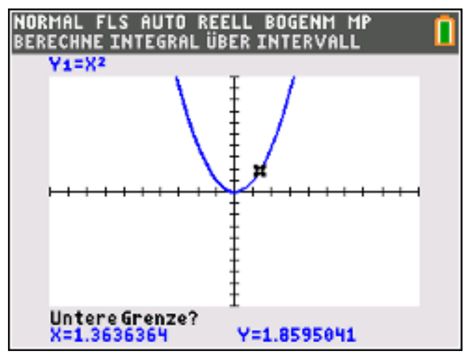


1.8 Integrale berechnen

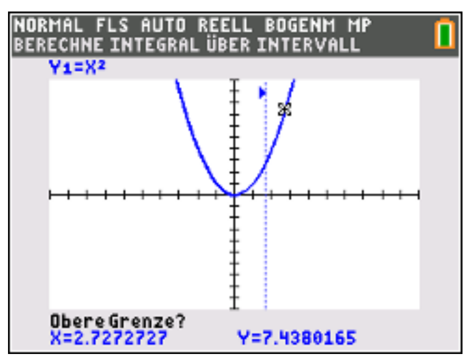
Ähnlich wie bei der Ableitung ist es möglich das Integral graphisch zu bestimmen. Der GTR kann hierbei auch rechnerisch vorgehen.

Um ein Integral mit dem GTR rechnerisch zu bestimmen, muss zunächst 2nd und trace gedrückt werden. Anschließend navigiert man zu der Option 7:$\int f(x)dx$

Anschließend kann die linke Grenze des Integrals graphisch gewählt werden.

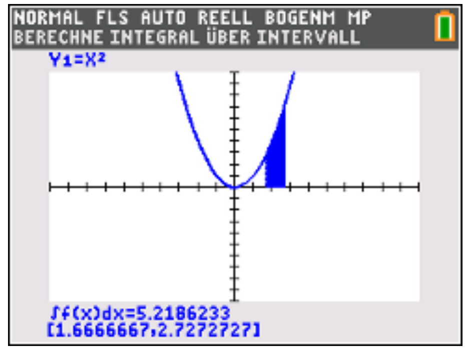


Nachdem die linke Intervallgrenze gesetzt wurde, muss nun die rechte gewählt werden. Dies funktioniert gleich wie bei der linken.



Nachdem mit der Enter Taste

bestätigt wurde, verfärbt sich der gewählte Intervall und zeigt den Flächeninhalt in dem jeweiligen Intervall an.



1.9 Unbekannte Intervallgrenzen eintragen

Um eine bekannten Flächeninhalt mit einer unbekannten Intervallgrenze zu berechnen, geht man wie folgt vor.

Eintragen der Ausgangsfunktion in das Funktionsmenü bei y=

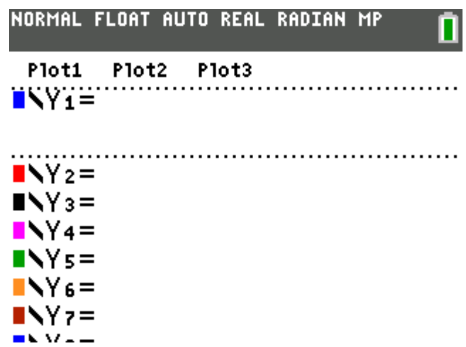


Abbildung 1: Visualisierung

Anschließend muss nun das Integral eingetragen werden. Hierfür drückt man zunächst auf die Taste math und wählt anschließend die Option `fnInt()` aus. Nun müssen die Integralgrenzen eingefügt werden. Die erste bekannte Intervallgrenze wird unten eingefügt, während die unbekannte mit x ersetzt wird. Hiernach muss die Funktion eingetragen werden, so wie die Variable, nach der hier aufgelöst wird. Abschließend kann die Taste graph gedrückt werden. Auf dem Graphen Fenster ist nun die Stammfunktion zu sehen.

1.10 Berechnung nicht-orientierter Flächen

Um anstatt mit orientierten Flächen mit dem reinen Flächeninhalt zu rechnen, muss mit dem Betrag gerechnet werden.

Zunächst müssen die Nullstellen mit dem Befehl `zero` ermittelt werden. Hierfür geht man auf 2nd und trace, wählt dort `zero` aus und gibt nun Rechts und Links die Grenzen der Nullstelle an. Abschließend drückt man Enter und erhält die X-Koordiante. Dieser Vorgang ist Abhängig von der Anzahl der Nullstellen und muss ggf. mehr als zwei mal wiederholt werden.

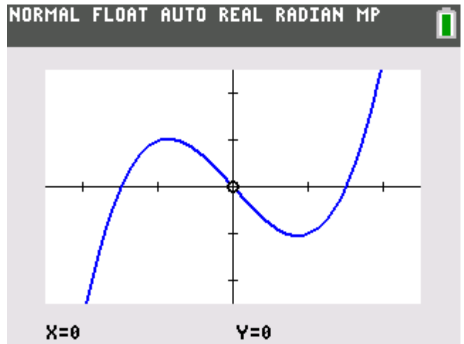


Abbildung 2: Visualisierung

Anschließend muss nun der Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der X-Achse berechnet werden mithilfe der Betragsstriche. Hierfür benutzt man die im vorherigen Schritt berechneten Nullstellen als Intervallgrenzen und berechnet den jeweiligen Flächeninhalt. Diese werden anschließend addiert, worauf man den gesamten Flächeninhalt des Graphen in einem Intervall hat. Die Druchführung der Addition darf nicht im Bereich der Funktion durchgeführt werden, da hierbei sich nur einen Gleichung ergibt, welche als lineare dargestellt wird. Um nun ein Integral einzutragen verwendet man math und wählt die Option `fnInt()` an. Anschließend kann man die Intervallgrenzen(berechneten Nullstellen) eintragen. Um nun denBetrag einer Funktion zu verwenden, muss man auf math drücken und dort mit den Pfeiltasten auf die Kategorie `NUM` navigieren. Dort wählt man `abs()` aus und bestätigt mit Enter.

1.11 Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen berechnen

Bei berechnen von einem Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen stellt sich ein ähnliches Problem Problem heraus wie bei berechnen des Flächeninhalts mit der X-Achse.

Um den Flächeninhalt mit dem GTR zu berechnen, bildet man zunächst die Differenzenfunktion, indem man sich bei Funktionen in der Funktionsübersicht einträgt und anschließend eine weitere definiert. Diese Funktion subtrahiert die beide vorherigen Funktionen von einandern.

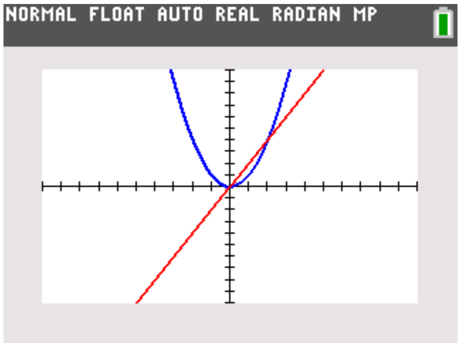


Abbildung 3: Visualsisierung

1.12 Regression

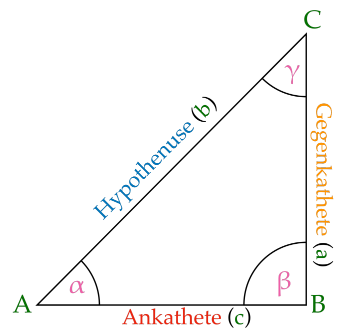
Die Regression ist ein Verfahren, bei dem Zusammenhänge zwischen Abhängigkeiten einer oder mehrere Variablen analysiert werden. Beim GTR gibt es verschiedene Arten, die für verschiedenen Graphen sind. Diese Arten sind spezifisch für spezifische Graphen gedacht, weswegen das wählen dieser sorgfältig erfolgen sollte.

Um mithilfe von Regression eine Funktionsgleichung zu bestimmen geht man über stat in das `STAT`-Menu.

2 Trigonometrie

2.1 Geometrische Trigonometrie

Das Thema Trigonometrie in der Geometrie umfasst eine Reihe an verschiedenen Unterthemen. Hierbei spielt das rechtwinkelige Dreieck eine wesentliche Rolle und bestimmt somit auch die Wurzeln der Trigonometrie. Bei der geometrischen Trigonometrie geht es vorwiegend um das Bestimmen von Seitenlängen oder Winkeln.



A, B, C Die Ecken eines rechtwinkeligen Dreiecks sind mit großen Buchstaben gekennzeichnet

a,b,c Die gegenüberliegenden Seiten sind mit dem jeweils gleichen Buchstab in klein gekennzeichnet Stellen jeweils die Winkel zwischen den anliegenden Seiten dar und ergeben zusammen 180 Grad. Die Gegenkathete stellt die Höhe des Dreiecks dar, während die Ankathete die Seite ist, die am rechten Winkel und anliegt

Hypothenuse Die Hypothenuse stellt im Dreieck die Seite b dar. Sie ist die längste Seite und immer gegenübervon rechten Winkel, wobei sie nie an ihm anliegt.

Ankathete Die Ankathete ist die Seite c in einem Dreieck und liegt immer am rechten Winkel an. Sie bildet mit der Gegenkathete den rechten Winkel und ist hierbei immer kürzer als die Hypothenuse

Gegenkathete Die Gegenkathete beschreibt in einem Dreieck die Seite a und liegt direkt an dem rechten Winkel, den sie mit der Ankathete bildet.

2.2 Berechnung der Seiten und des Winkels

Um eine Berechnung der Seiten durchführen zu können, muss verwendet man folgende Formeln:

Sinus

$$\sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$$

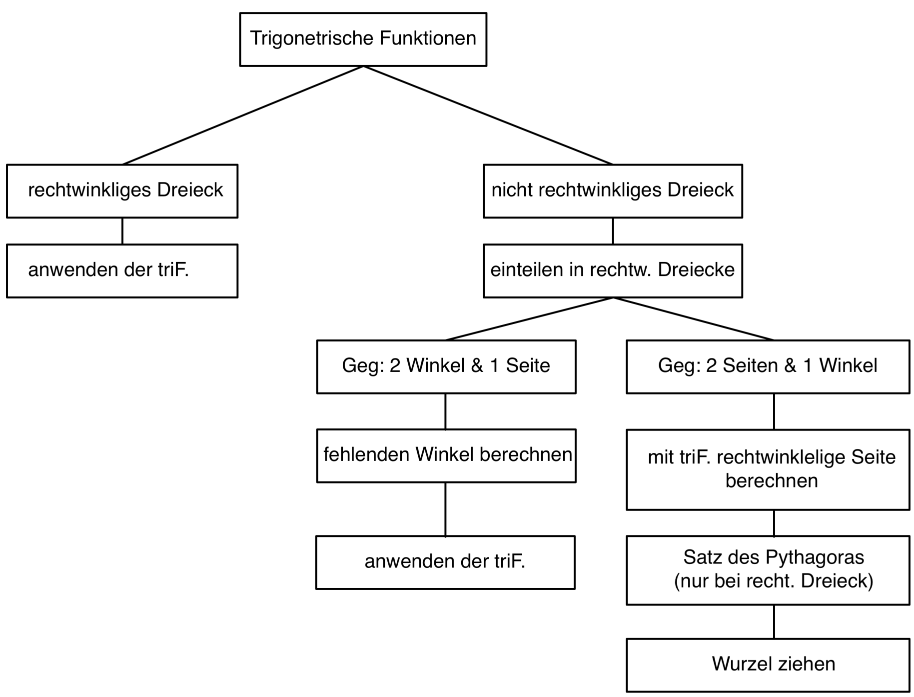
Cosinus

$$\cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypothenuse}$$

Tangens

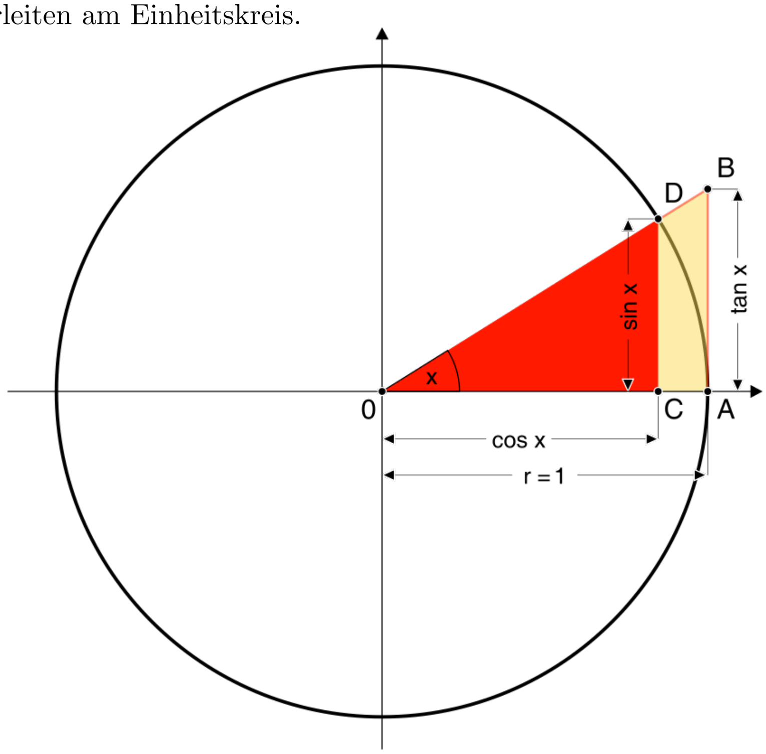
$$\tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

Um einen ersten Anhaltspunkt zu schaffen, kann man sich an dem folgenden Algorythmus orientieren.



2.3 Trigonometrische Funktionen

Auch in der Analyses spielt die Trigonometrie einen wichtige Rolle. Sie ermöglicht es periodische Prozesse darzustellen und mit ihnen zu rechnen. So lassen sich Sinus, Cosinus und Tangens jeweils im Koordinatensystem herleiten am Einheitskreis.



So stellt Sinus die Höhe der Gegenkathete in Abhängigkeit von dem Bogenmass, welches mit Hilfe des Winkels Alpha berechnet wird. Cosinus hingegen stellt die Ankathete in Abhängigkeit des Bogenmasses dar. Hierbei orientieren sich die Eckpunkt jeweils an dem Einheitskreis und laufen auf diesem gegen den Uhrzeigersinn. Hierdurch entsteht die wellenförmige Ausprägung des Graphen. Da Sinus die Höhe der Gegenkathete darstellt in Abhängigkeit von dem Bogenmass befindet sich die dargestellte Höhe der Gegenkathete auf einer Höhe von π auf der X-Achse.

Begründung der Periodenlänge Durch den Einheitskreis wird die Perioden länge bestimmt, da das Bogenmass auf der X-Achse dargestellt wird. So ist eine halbe Umrundung des Kreises genau ein π lang.

2.4 Überleitung zu trigonmetrische Funktionen

Aufgrund der Veränderung der verschiedenen Seitenlängen des rechtwinkeligen Dreiecks, welche durch die jeweilge trigonometrische Funktion dargestellt wird und abhängi von dem Winkel α ist, entsteht die pregnante Form von Sinus und Cosinus.

2.5 Normalform einer trigonometrischen Funktion

Ähnlich wie quadratische Funktionen oder lineare Funktionen gibt es ebenfalls einen Normalform der Sinus Funktion.

$$a \cdot sin(b(x + d)) + e$$

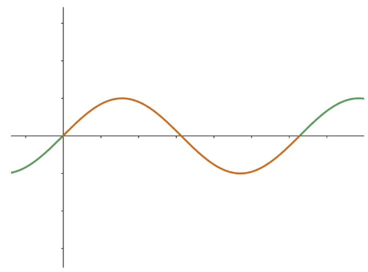
a: Streckfaktor auf der X-Achse(Amplitude)
b: Streckfaktor auf der Y-Achse (Periodenlänge)
d: Verschiebung auf der X-Achse
e: Verschiebung auf der Y-Achse

2.6 Moddelierung der Sinus Funktion

Für die Moddelierung einer Sinus oder Cosinus Funktion kann man wie folgt vorgehen.

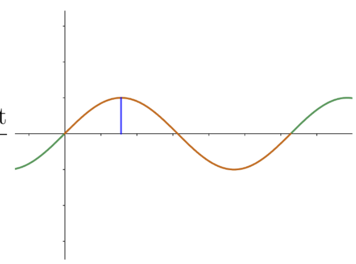
Periode bestimmen

Schreibweise $b : \dfrac{2\pi}{b}$



Amplitude bestimmen

$$a : \frac{\text{minimal Wert} - \text{maximal Wert}}{2}$$



Y-Achsenverschiebung

$$e : \frac{\text{maximal Wert} + \text{minimal Wert}}{2}$$

Einsetzten und auflösen

$P(x_1, f(x_1)$

$s(x) = a(sin(b(x - d)) + e$

P in f

$f(x_1) = a(sin(b(x_1 - d)) + e$

Loese nach d

3 Exponentialfunktionen

Eine Exponentialfunktion stellt einen exponentiell Verlauf eines Graphen dar.

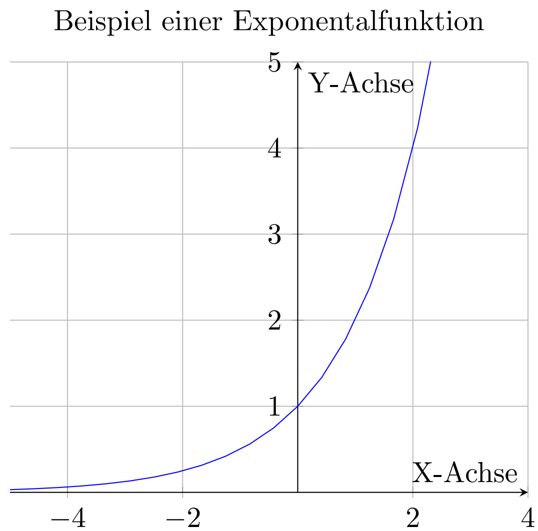


Abbildung 1: Funktionsgraph von $f(x) = 2^x$

3.1 Normalform

Hierbei folgt einer Exponentialfunktion der folgenden Form:

$$f(x) = a \cdot b^x$$

Wobei $b > 0 \land b \neq 0$ sein muss.
a wird hierbei als Startwert bezeichnet. Innermathematisch spricht man von a als Streckfaktor und von b als Wachstumsfaktor.

3.1.1 Faktor a - Startwert

Der Koeffizent a stellt bei einer exponentiell verlaufenden Funktion den Startwert dar und zugleich auch Streckfaktor der Funktion. Er wird für jedes x immer mit der Basis b multipliziert.

Beispiel sei sei $-0.5 \leq b \geq 2$ und $-1 \leq a \geq 1$ für $f(x) = ab^x$

$$a : -1 \qquad a : 0 \qquad .a : 1$$
$$x : -1 \qquad x : 0 \qquad x : 1$$
$$b : -0.5 \qquad b : -0.5 \qquad b : -0.5$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1) \cdot (-0.5)^{-1} \\ &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(0) &= 0 \cdot 0.5^0 \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(1) &= 1 \cdot (-0.5)^1 \\ &= -0.5 \end{aligned}$$

3.1.2 Basis *b* - Wachstumsfaktor

Die Basis b ist hierbei von großer Bedeutung, da diese mit dem x für jedes x multipliziert wird. Da bei exponentiell Verläufen schnell das Vielfache der Basis erreicht wird, braucht der Wert von b nur sehr gering sein, um eine große Auswirkung zu haben. Ebenfalls hat b eine große Auswirkung den Verlauf in Bezug auf den Schnittpunkt mit der Y-Achse. b ist hauptverantwortlich für diese, da durch x die Anzahl der Multiplikationen mit sich selbst bestimmt wird.

Beispiel sei $-0.5 \leq b \geq 2$ und $-1 \leq x \geq 2$ für $f(x) = b^x$

$$\begin{aligned} x &: -1 \\ b &: -0.5 \\ f(-1) &= -0.5^{-1} \\ &= -2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &: 0 \\ b &: -0.5 \\ f(0) &= a - 0.5^0 \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &: 1 \\ b &: -0.5 \\ f(1) &= -0.5^1 \\ &= -0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &: -1 \\ b &: 0 \\ f(-1) &= 0^{-1} \\ &= \infty \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &: 0 \\ b &: 0 \\ f(0) &= 0^0 \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &: 1 \\ b &: 0 \\ f(1) &= 0^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{ccc}
x:-1 & x:0 & x:1 \\
b:1 & b:1 & b:1 \\
f(-1)=1^{-1} & f(0)=1^{0} & f(1)=1^{1} \\
=1 & =1 & =1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
x:-1 & x:0 & x:1 \\
b:2 & b:2 & b:2 \\
f(-1)=2^{-1} & f(0)=2^{0} & f(1)=2^{1} \\
=0.5 & =1 & =2
\end{array}
$$

An dem Beispiel kann man sehen, dass egal welche Zahl die Basis b annimmt es beim Einsetzten von 0 für x immer zu 1 kommt. Auffällig ist hierbei, dass setzt man für $b:1$ ein, so erhält man zu jedem x immer den Wert 1. Dies ist die Begründung für die Schnittstelle mit der Y-Achse bei 1, wenn $a=1$ ist. Setzt man nun für b einen Wert ein, der größer als 1 ist, so verändert sich etwas. Die Basis b wird für x mit sich selber multipliziert. Nimmt b nun einen Wert von 1.01 an, so wird wie folgt für $x=3$ gerechnet.

$$
\underbrace{1.01}_{1}\cdot\underbrace{1.01}_{2}\cdot\underbrace{1.01}_{3}
$$

$$
=1.030301
$$

Die Differenz zwischen 1 und b wird vervielfacht. Alleine diese kleine Differenz reicht aus, um eine deutliche Ausprägung zu verursachen in dem Graphen von $f(x)$.

3.2 Prozentuale Zunahme

Einen exponentiellen Verlauf kann man unteranderem an einer prozentualen Veränderung erkennen. So lässt sich sagen, dass sei $b>1$ eine prozentuale Steigung der Differenz zwischen 1 und dem Wert, den b annimmt bestimmen. Nimmt man an, dass sei $b=1.01$, so ist 0.1 gleich 1% von 1 und besitzt somit eine prozentuale Zunahme von 1%. Übertragt man diesen Sachverhalt auf eine weitere Basis, welche $b>1$ erfüllt, so lässt sich ebenfalls der Übertrag als prozentuale Steigung definieren.

Beispiel Sei $b \in \{x : x \in \mathbb{R}, x > 1\}$

$$f(x) = 1.04^x \Rightarrow 4\%$$

So folgt aus $b = 1.04$, dass eine Zunahme von 4% vorliegt.

$$f(x) = 1.5^x \Rightarrow 50\%$$

So folgt aus $b = 1.5$, dass eine Zunahme von 50% vorliegt.

$$f(x) = 1.9^x \Rightarrow 90\%$$

So folgt aus $b = 1.9$, dass eine Zunahme von 90% vorliegt.

$$f(x) = 2.6^x \Rightarrow \ 160\%$$

So folgt aus $b = 2.6$, dass eine Zunahme von 160% vorliegt, da sich eine prozentuale Zunahme nur für die Differenz zwischen b und $b = 1$ ausprägt.

$$f(x) = 0.8^x \Rightarrow 20\%$$

So folgt aus $b = 0.8$, dass eine Abnahme von 20% vorliegt. Zu dieser Annahme kommt man, indem man sich überlegt, dass $b = 1 = 100\%$ sind. Hat man nun nur $b = 0.8$ anstelle von $b = 1$, so ergibt sich hieraus die Verringerung von 20%

3.3 Prozentuale Zunahme/Abnahme algorithmisch bestimmen

Um die Berechnung der prozentualen Änderung des Graphen zu bestimmen kann man algorythmisch vorgehen.