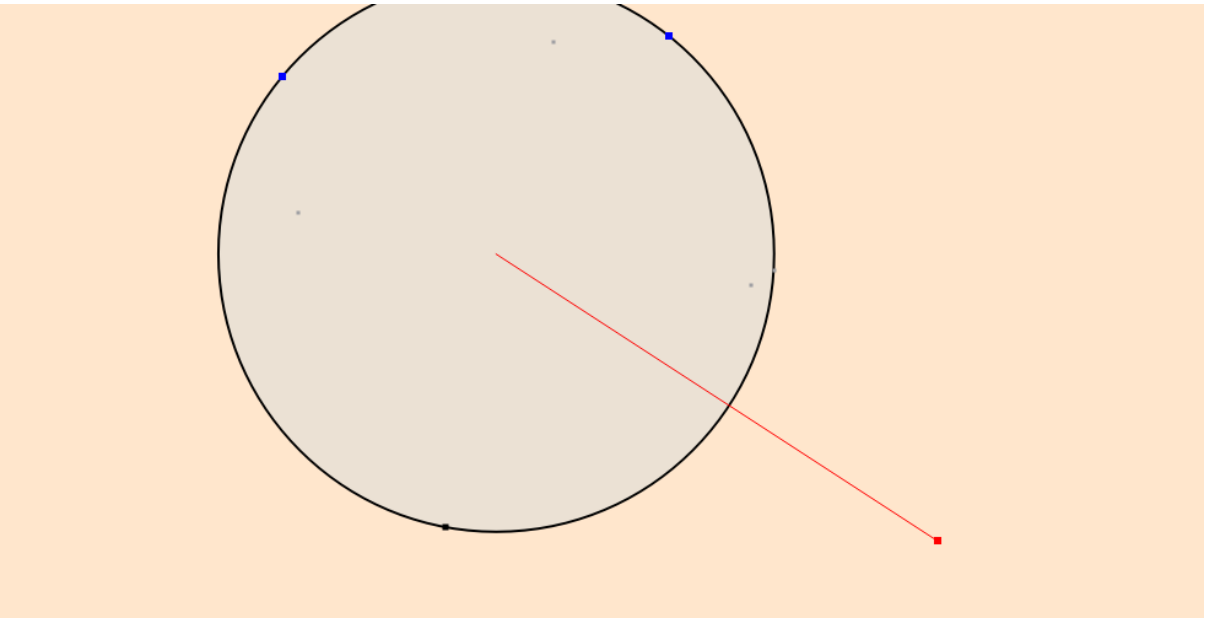
Geometrijski algoritmi @ MATF

Algoritam za izračunavanje minimalnog zatvarajućeg diska

Rastko Đorđević



Opis problema

Neka je dato n tačaka u ravni, potrebno je pronaći zatvoreni disk sa minimalnim poluprečnikom i to takav da pokriva sve date tačke. Krug je skup tačaka ekvidistantnih od tačke centra. Disk predstavlja skup tačaka koje se nalaze unutar kruga. Zatvoren disk sadrži i krug koji ga ograničava.

Ulaz: *skup od n tačaka u ravni*

Izlaz: *zatvoreni disk minimalnog poluprečnika koji pokriva sve tačke*

Naivno rešenje problema

Pre diskutovanja algoritma, primetimo da je svaki krug određen sa tri tačke (kao opisan krug oko trougla koje te tačke definišu). Takođe može se dokazati da za bilo koji konačan skup tačaka najmanji pokrivajući disk sadrži bar tri tačke na njegovoj granici, ili ima dve i to takve da zajedno grade prečnik kruga koji opisuje disk.

Iz prethodnih zaključaka direktno sledi ideja za naivni algoritam vremenske složenosti O(n^4) gde je n broj tačaka datog skupa.

Prvo generišemo sve parove tačaka u O(n^2) vremenu, i linearno proverimo za svaki par da li disk koji generišu sadrži sve tačke. Potom generišemo u O(n^3) vremenu sve različite kombinacije trojke tačaka, i za svaku od njih linearno izvršimo istu proveru.

Ovaj algoritam se može ubrzati, ako obradjujemo samo tačke koje grade konveksni omotač skupa. Ako na ovaj način preprocesiramo skup tačaka koji nam je dat, vremenska složenost naivnog algoritma postaje O(h^4), gde je h broj tačaka konveksnog omotača.

```
1
2  naivniAlgoritam:
3      ULAZ : skup S koji sadrži n tačaka u ravni (n>=2)
4      IZLAZ: minimalni pokrivajući disk
5
6      S' = konveksniOmotač( S )
7      za sve parove tačaka x,y:
8          trenutniDisk = diskOpisanTačkama(x, y)
9          ako trenutniDisk.sadržiTačke( S' )
10             minDisk = trenutniDisk
11     za sve trojke tačaka x,y,z:
12         trenutniDisk = diskOpisanTačkama(x, y, z)
13         ako trenutniDisk.sadržiTačke( S' )
14             minDisk = trenutniDisk
15     vrati minDisk
16
```

Randomizirani inkrementalni algoritam

U nastavku će biti predstavljen algoritam koji rešava problem najmanjeg pokrivajućeg diska u očekivanom O(n) vremenu. Za početak ćemo permutovati dat skup tačaka. Izabraćemo bilo koje dve tačke, i izračunati jedinstveni krug čiji je prečnik određen ovim tačkama. Sa D_{i-1} ćemo označiti minimalni disk nakon unosa i-1 tačaka. Za tačku p_i koju trenutno ubacujemo, u konstantnom vremenu možemo izračunati da li leži unutar D_{i-1}. Ako se nalazi unutar diska, onda prelazimo na sledeću tačku a minimalni disk ostaje isti $D_i = D_{i-1}$. Ako ne pripada disku onda moramo da ažuriramo minimalni disk, tako da sadrži i tačku p_i i to na njegovom obodu. Nakon što ubacimo poslednju tačku vratimo D_n kao minimalni pokrivajući disk.

```
1  minDisk:
2      ULAZ :  skup P koji sadrži n tačaka u ravni ( n >= 2 )
3      IZLAZ:  minimalni pokrivajući disk
4
5      P = permutujSkupTačaka(P)
6      neka su p₁ i p₂ prve dve tačke skupa
7      D₂ = krugOdređenTačkama(p₁,p₂)
8      ako |S| == 2 onda
9          vrati Dᵢ
10     Dᵢ₋₁ je disk posle unesenih i-1 tačaka
11     za sve tačke pᵢ:
12         ako tačka pripada disku D₂₋₁ onda
13             Dᵢ = Dᵢ₋₁
14         inače
15             Dᵢ = minDiskSa1FiksiranomTačkom(P[0,1,..i-1], pᵢ)
16
17
```

Pseudokod prvog nivoa rekurzije

Ostaje pitanje kako ažurirati minimalni disk kada unosimo novu tačku. Iako je primamljivo pretpostaviti da možemo da ga izračunamo samo koristeći tačke koje zatvaraju prethodni minimalni disk i novu tačku, postoje slučajevi koji to onemogućavaju, tako da ćemo morati da uzmemo u obzir sve do sada unete tačke. Važno tvrđenje je da ako p_i nije u minimalnom disku prvih i-1 tačaka, onda se nalazi na obodu minimalnog diska prvih i tačaka.

Ažuriranje se vrši na sledeći način. Fiksiramo tačku koju ubacujemo što znamo da možemo da uradimo iz prethodnog tvrđenja, nakon čega smo efektivno smanjili dimenzionalnost

problema. U ovom drugom nivou rekurzije kada dođemo do tačke koja se nalazi van trenutnog minimalnog diska, rekurzivno ćemo pozvati podproblem koji ima dve fiksirane tačke od kojih je druga trenutno ubačena tačka.

Konačno u trećem nivou rekurzije ako dođemo do tačke koja se ne nalazi u trenutnom minimalnom disku imamo podproblem koji ima tri fiksirane tačke. Ali rešenje ovog problema je jedinstveno tako je i rešenje problema jedinstveno.

```
17
18 minDiskSa1FiksiranomTačkom:
19     ULAZ :  skup S koji sadrži n tačaka u ravni ( n >= 2 )
20             fiksirana tačka q
21     IZLAZ:  minimalni pokrivajući disk
22
23     P = permutujSkupTačaka(P)
24     neka je p₁ prva tačka skupa
25     D₁ = krugOdređenTačkama(q,p₁)
26     za sve tačke pᵢ:
27         ako tačka pripada disku Dᵢ-₁ onda
28             Dᵢ = Dᵢ-₁
29         inače
30             Dᵢ = minDiskSa2FiksiraneTačke(P[0,1,..i-1], q, pᵢ)
31
32
33 minDiskSa2FiksiraneTačke:
34     ULAZ :  skup S koji sadrži n tačaka u ravni ( n >= 2 )
35             fiksirane tačke q₁, q₂
36     IZLAZ:  minimalni pokrivajući disk
37
38     P = permutujSkupTačaka(P)
39     D₀ = krugOdređenTačkama(q₁,q₂)
40     za sve tačke pᵢ:
41         ako tačka pripada disku Dᵢ-₁ onda
42             Dᵢ = Dᵢ-₁
43         inače
44             Dᵢ = krugOdređenTačkama(q₁,q₂,pᵢ)
45
```

Pseudokod drugog i trećeg nivoa rekurzije

Poredjenje efikasnosti naivnog i naprednog algoritma

Ovde treba da bude dat tabelarni i/ili grafički prikaz brzine izvršavanja oba algoritma u zavisnosti od veličine ulaza

Alg. \ dim. ulaza	100	500	1.000	5.000	7.000	10.000
naivni	0,0012	0,098	0,0559	0,2918	2,6614	18,7632
optimalan	0,0002	0,0008	0,0021	0,0112	0,0189	0,0298

Testiranje ispravnosti algoritma

Za testiranje je korišćena biblioteka google test. Pošto je algoritam koristi realne brojeve u pokretnom zarezu, svaki test je napisan imajući na umu potencijalne greške u računu. Algoritam dopušta greške od 0.0001, i očekuje se da vrednosti rezultata neće odstupati od očekivanog izlaza više od ove vrednosti koja se prožima kroz sve testove.

SKUP TESTOVA: nalaženje jedinstvenog kruga pomoću tačaka

Naziv testa	Opis testa	Ulaz	Očekivani izlaz
twoPoints	Zadavanje dve tačke kao ulaz, očekivani izlaz je krug čiji prečnik je određen tačkama sa ulaza	[{-1,0}, {1,0}]	circle.x == 0 circle.y == 0 circle.radius == 1
threePoints_twoHaveSameX	Kao ulaz dajemo tačke sa istim X koordinatama. Ako tačke grade duži paralelne sa x-osom može doći do problema pri izračunavanju. Očekivani izlaz je krug opisan oko trougla koji grade tačke sa ulaza.	[{1,2}, {1,4}, {2,3}]	circle.x == 1 circle.y == 3 circle.radius == 1
threePoints_twoHaveSameY	Kao ulaz dajemo tačke sa istim Y koordinatama. Ako tačke grade duži paralelne sa y-osom može doći do problema pri izračunavanju. Očekivani izlaz je krug opisan oko trougla koji grade tačke sa ulaza.	[{20,10}, {40,10}, {38,60}]	circle.x == 30.00 circle.y == 34.46 circle.radius == 26.59

SKUP TESTOVA: naivni algoritam

Narednim skupom testova se testira ispravnost naivnog algoritma, pokriveni su granični slučajevi, kao i neki naizgled proizvoljni ulazi radi temeljne provere ispravnosti.

Naziv testa	Opis testa	Ulaz	Očekivani izlaz
twoPoints	Kao ulaz imamo dve tačke. Kao izlaz očekujemo minimalni disk nad tim tačkama, koji u ovom slučaju predstavlja krug čiji je poluprečnik određen tačkama sa ulaza.	[{10,10}, {30,10}]	minDisk.x == 20 minDisk.y == 10 minDisk.radius == 10
threePoints	Kao ulaz imamo tri tačke. Kao izlaz očekujemo minimalni disk nad tim tačkama.	[{10, 10}, {30, 10}, {20, 12}]	minDisk.x == 20 minDisk.y == 10 minDisk.radius == 10
threeColinearPoints	Kao ulaz imamo tri tačke. Kao izlaz očekujemo minimalni disk nad tim tačkama, koji u ovom graničnom slučaju predstavlja krug određen prečnikom najudaljenijih tačaka iz datog skupa.	[{10, 10}, {30, 10}, {15, 10}]	minDisk.x == 20 minDisk.y == 10 minDisk.radius == 10
fourPointsOnDisk	Kao ulaz imamo četiri tačke koje se nalaze na obodu minimalnog diska koji određuju. Kao izlaz očekujemo taj disk.	[{10, 10}, {30, 10}, {20, 0}, {20, 20}]	minDisk.x == 20 minDisk.y == 10 minDisk.radius == 10
fivePoints	Test sa više mogućnosti za grešku, ulaz čine 5 tačaka, a kao izlaz očekujemo minimalni disk.	[{10, 10}, {30, 10}, {20, 12}, {21, 11}, {19, 9}]	minDisk.x == 20 minDisk.y == 10 minDisk.radius == 10

SKUP TESTOVA: napredni algoritam

Ovaj skup testova je izuzetno sličan prethodnom skupu, ulazi i izlazi su isti, jedina stvar koja se razlikuje je algoritam čiju ispravnost proveravamo.

Naziv testa	Opis testa	Ulaz	Očekivani izlaz
twoPoints	Kao ulaz imamo dve tačke. Kao izlaz očekujemo minimalni disk nad tim tačkama, koji u ovom slučaju predstavlja krug čiji je poluprečnik određen tačkama sa ulaza.	[{10,10}, {30,10}]	minDisk.x == 20 minDisk.y == 10 minDisk.radius == 10
threePoints	Kao ulaz imamo tri tačke. Kao izlaz očekujemo minimalni disk nad tim tačkama.	[{10, 10}, {30, 10}, {20, 12}]	minDisk.x == 20 minDisk.y == 10 minDisk.radius == 10
threeColinearPoints	Kao ulaz imamo tri tačke. Kao izlaz očekujemo minimalni disk nad tim tačkama, koji u ovom graničnom slučaju predstavlja krug određen prečnikom najudaljenijih tačaka iz datog skupa.	[{10, 10}, {30, 10}, {15, 10}]	minDisk.x == 20 minDisk.y == 10 minDisk.radius == 10
fourPointsOnDisk	Kao ulaz imamo četiri tačke koje se nalaze na obodu minimalnog diska koji određuju. Kao izlaz očekujemo taj disk.	[{10, 10}, {30, 10}, {20, 0}, {20, 20}]	minDisk.x == 20 minDisk.y == 10 minDisk.radius == 10
fivePoints	Test sa više mogućnosti za grešku, ulaz čine 5 tačaka, a kao izlaz očekujemo minimalni disk.	[{10, 10}, {30, 10}, {20, 12}, {21, 11}, {19, 9}]	minDisk.x == 20 minDisk.y == 10 minDisk.radius == 10

SKUP TESTOVA: poređenje algoritama

Testovima koji slede poredimo izlaze naivnog i efikasnog algoritma na generisanim ulazima različitih veličina.

Naziv testa	Opis testa	Ulaz	Očekivani izlaz
randomInput_20points	Kao ulaz imamo proizvoljan niz tačaka, poredimo izlaze efikasnog i naivnog algoritma, pritom očekivajući da budu jednaki.	Proizvoljni niz veličine 20	Poklapanje rezultata naivnog i efikasnog algoritma.
randomInput_100points	Kao ulaz imamo proizvoljan niz tačaka, poredimo izlaze efikasnog i naivnog algoritma, pritom očekivajući da budu jednaki.	Proizvoljni niz veličine 100	Poklapanje rezultata naivnog i efikasnog algoritma.
randomInput_500points	Kao ulaz imamo proizvoljan niz tačaka, poredimo izlaze efikasnog i naivnog algoritma, pritom očekivajući da budu jednaki.	Proizvoljni niz veličine 500	Poklapanje rezultata naivnog i efikasnog algoritma.