PERMUTĂRI

curs

1) Fie permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&2&5&7&3&1&6\end{pmatrix}\in S_7$.

Inversa permutării σ.

$$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}4&2&5&7&3&1&6\\1&2&3&4&5&6&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&2&5&1&3&7&4\end{pmatrix}$$

curs

2) Să se calculeze inversa matricei $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\in S_4$.

$$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}2&3&4&1\\1&2&3&4\end{pmatrix}\in S_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\in S_4$$

curs

3) Să se calculeze ordinul permutării $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&4&1&6&7&5\end{pmatrix}\in S_7$

Descompunem în cicli disjuncți, apoi calculăm $ord(\sigma)$ = cel mai mic multiplu comun al lungimilor ciclilor disjuncți.

$$\sigma=(1,2,3,4)\circ(5,6,7)$$
$$k_1=4 \qquad k_2=3$$

$$\boxed{ord\,\sigma=[4,3]=12}$$

4) Calculați inversa permutării $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&6&2&5&1&4\end{pmatrix}$ din grupul $(S_6,\circ)$.

Inversa permutării $\sigma=\sigma^{-1}$

$$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}3&6&2&5&1&4\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&3&1&6&4&2\end{pmatrix}\in S_6$$

5) Calculați ordinul permutării $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&6&2&5&1&4\end{pmatrix}$ în grupul $(S_6,\circ)$ și σ^{2003}.

Descompunem în cicli disjuncți, apoi calculăm $ord(\sigma)$ = cel mai mic multiplu comun al lungimilor ciclilor disjuncți.

$$\sigma=\underbrace{(1,3,2,6,4,5)}_{\text{lungime } k=6} \Rightarrow \boxed{ord\,\sigma=[6]=6}\ ;\ \sigma^{2003}=(\sigma^6)^{333}\cdot\sigma^5=\underset{=1}{e}\cdot\sigma^5=\sigma^5$$

6) Fie $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&4&1&5&6&7&2\end{pmatrix}$. Calculați ordinul σ.

$$\sigma=\underbrace{(1,3)}_{\text{lungime } k_1=2}\circ\underbrace{(2,4,5,6,7)}_{\text{lungime } k_2=5} \longrightarrow \boxed{ord\,\sigma=[2,5]=10.}$$

7) Fie $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&4&7&1&5&3&6\end{pmatrix}$. Calculați ordinul σ.

$$\sigma=\underbrace{(1,2,4)}_{\text{lungime } k_1=3}\circ\underbrace{(3,7,6)}_{\text{lungime } k_2=3}\circ\underline{7}\ \text{lungime } l_3=1 \longrightarrow \boxed{ord\,\sigma=[3,3,1]=3}$$

(8) Găsiți cel mai mare ordin al unei permutări din S_{12}.

lucr

Cazul 1 – σ ciclu de lungime 12 $\Rightarrow$ ord $\sigma = [12] = 12$

Cazul 2 – σ – 2 cicluri disjuncți cu lungime k_1 și k_2, $k_1 + k_2 = 12$

k_1	k_2	ord $\sigma = [k_1, k_2]$
1	11	11
2	10	10
3	9	9
4	8	8
5	7	35
6	6	6

ord $\sigma = [5, 7] = 35$ (maxim)

Cazul 3 σ 3 cicluri disjuncți, cu lungimile k_1, k_2, k_3

$k_1 + k_2 + k_3 = 12$

k_1	k_2	k_3	ord $\sigma = [k_1, k_2, k_3]$
10	1	1	10
9	2	1	18
8	2	2	8
8	3	1	24
7	2	3	$7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$
7	4	1	28
6	5	1	30
6	4	2	12
6	3	3	18

$\boxed{\text{ord } \sigma = 42}$

cel mai mare pt. $k_1 = 7$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$

Cazul 4 – σ – 4 cicluri disjuncți, cu lungimile k_1, k_2, k_3 și k_4

$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 12$

k_1	k_2	k_3	k_4	ord $\sigma = [k_1, k_2, k_3, k_4]$
9	1	1	1	9
8	1	1	2	8
7	1	1	3	21
7	2	1	2	14
6	1	1	4	12
6	2	1	3	6

$\boxed{\text{ord } \sigma = 21}$

cel mai mare pt. $k_1 = 7$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $k_4 = 3$

(9) Găsiți cel mai mare ordin al unei permutări din S_7.

CURS

cazul 1 – σ ciclu de lungime 7 $\Rightarrow$ ord $\sigma = [7] = 7$

cazul 2 – σ – 2 cicluri disjuncte cu lungime k_1 și k_2, $k_1+k_2=7$

k_1	k_2	ord $\sigma = [k_1, k_2]$
1	6	6
2	5	10
3	4	12

$k_1+k_2=7$

ord $\sigma = [3,4] = 12$

cel mai mare pt $k_1=3$, $k_2=4$

cazul 3 – σ – 3 cicluri disjuncte cu lungime k_1, k_2, k_3

k_1	k_2	k_3	ord $\sigma = [k_1, k_2, k_3]$
5	1	1	5
4	2	1	4
3	3	1	3
3	2	2	6

$k_1+k_2+k_3=7$

ord $\sigma = [3,2,2] = 6$

cel mai mare pt $k_1=3$, $k_2=2$, $k_3=2$

cazul 4 σ – 4 cicluri disjuncte cu lungimile k_1, k_2, k_3, k_4.

k_1	k_2	k_3	k_4	ord $\sigma = [k_1, k_2, k_3, k_4]$
4	1	1	1	4
3	1	1	2	6

$k_1+k_2+k_3+k_4=7$

ord $\sigma = [3,4,1,2] = 6$

cel mai mare pt $k_1=3$, $k_2=1$, $k_3=1$, $k_4=2$

(10) Fie $\sigma \in S_{36}$ definită prin faptul că $\sigma(x)$ este unicul număr din $\{1,2,3,\dots,36\}$ astfel încât $\sigma(x) \equiv 3x \pmod{37}$. Să se calculeze ordinul permutării σ.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 & 27 & 30 & 33 & 36 & 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 \end{pmatrix.}$$

$$\begin{pmatrix} 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 20 & 23 & 26 & 29 & 32 & 35 & 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 & 22 & 25 & 28 & 31 & 34 \end{pmatrix}$$

$\sigma(1) \equiv 3 \cdot 1 \equiv 3 \pmod{37}$

$\sigma(3) \equiv 3 \cdot 3 \equiv 9 \pmod{37}$

$\sigma(9) \equiv 9 \cdot 3 \equiv 27 \pmod{37}$

$\sigma(27) \equiv 27 \cdot 3 = 81 \equiv 7 \pmod{37}$

$\sigma(7) \equiv 7 \cdot 3 \equiv 21 \pmod{37}$

$\sigma(2) \equiv 2 \cdot 3 = 6 \pmod{37}$

$\sigma(4) \equiv 4 \cdot 3 \equiv 12 \pmod{37}$

$\sigma(5) \equiv 5 \cdot 3 \equiv 15 \pmod{37}$

$\sigma(6) \equiv 6 \cdot 3 \equiv 18 \pmod{37}$

$\sigma(8) \equiv 8 \cdot 3 \equiv 24 \pmod{37}$

$\sigma(10) \equiv 10 \cdot 3 \equiv 30 \pmod{37}$

$\sigma(11) \equiv 11 \cdot 3 \equiv 33 \pmod{37}$

$\sigma(12) \equiv 12 \cdot 3 \equiv 36 \pmod{37}$

$\sigma(13) \equiv 13 \cdot 3 \equiv 39 \equiv 2 \pmod{37}$

$\sigma(14) \equiv 14 \cdot 3 \equiv 42 \equiv 5 \pmod{37}$

$\sigma(15) \equiv 15 \cdot 3 \equiv 45 \equiv 8 \pmod{37}$

$\sigma(16) \equiv 16 \cdot 3 \equiv 48 \equiv 11 \pmod{37}$

$\sigma(17) \equiv 17 \cdot 3 \equiv 51 \equiv 14 \pmod{37}$

$\sigma(18) \equiv 18 \cdot 3 \equiv 54 \equiv 17 \pmod{37}$

$\sigma(19) \equiv 19 \cdot 3 \equiv 57 \equiv 20 \pmod{37}$

$\sigma(20) \equiv 20 \cdot 3 \equiv 60 \equiv 23 \pmod{37}$

$\sigma(21) \equiv 21 \cdot 3 \equiv 63 \equiv 26 \pmod{37}$

$\sigma(22) \equiv 22 \cdot 3 \equiv 66 \equiv 29 \pmod{37}$

$\sigma(23) \equiv 23 \cdot 3 \equiv 69 \equiv 32 \pmod{37}$

$\sigma(24) \equiv 24 \cdot 3 \equiv 72 \equiv 35 \pmod{37}$

$\sigma(25) \equiv 25 \cdot 3 \equiv 75 \equiv 1 \pmod{37}$

$\sigma(26) \equiv 26 \cdot 3 \equiv 78 \equiv 4 \pmod{37}$

$\sigma(28) \equiv 28 \cdot 3 \equiv 84 \equiv 10 \pmod{37}$

$\sigma(29) \equiv 29 \cdot 3 \equiv 87 \equiv 13 \pmod{37}$

$\sigma(30) \equiv 30 \cdot 3 \equiv 90 \equiv 16 \pmod{37}$

$\sigma(31) \equiv 31 \cdot 3 \equiv 93 \equiv 19 \pmod{37}$

$\sigma(32) \equiv 32 \cdot 3 \equiv 96 \equiv 22 \pmod{37}$

$\sigma(33) \equiv 33 \cdot 3 \equiv 99 \equiv 25 \pmod{37}$

$\sigma(34) \equiv 34 \cdot 3 \equiv 102 \equiv 28 \pmod{37}$

$\sigma(35) \equiv 35 \cdot 3 \equiv 105 \equiv 31 \pmod{37}$

$\sigma(36) \equiv 36 \cdot 3 \equiv 108 \equiv 34 \pmod{37}$

- ciclii disjuncți

$$\sigma = \underbrace{(1,3,9,27,7,21,26,4,12,36,34,28,10,30,16,11,33,25)}_{K_1 = 18} \circ$$

$$\underbrace{(2,6,18,17,14,5,15,8,24,35,31,19,20,23,32,22,29,13)}_{K_2 = 18}$$

$\Rightarrow \boxed{\text{ord } \sigma_{(x)} = [18, 18] = 18}$

(11) Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 5 & 7 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in S_7$. Calculați ordinul σ

$\sigma = \underbrace{(1, 4, 7, 6)}_{k_1} \circ \underbrace{(2)}_{k_2} \circ \underbrace{(3, 5)}_{k_3} \Rightarrow \boxed{\text{ord } \sigma = [4, 1, 2] = 4}$

(12) Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 9 & 6 & 11 & 10 \end{pmatrix}$.

L3

Calculați σ^{2023}.

descompunem în cicluri disjuncte, apoi calculăm ord σ.

$\sigma = \underbrace{(1, 2, 3, 4, 5)}_{k_1 = 5} \circ \underbrace{(6, 7, 8, 9)}_{k_2 = 4} \circ \underbrace{(10, 11)}_{k_3 = 2} \Rightarrow$

$\boxed{\text{ord } \sigma = [5, 4, 2] = 5 \cdot 4 = 20}$

$\sigma^{2023} = ?$ Știm că $\sigma^{20} = e \Rightarrow \sigma^{2020} = e$

$\sigma^{2023} = \underbrace{\sigma^{2020}}_{e} \cdot \sigma^3 = \sigma^3$

$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 9 & 6 & 7 & 8 & 11 & 10 \end{pmatrix}$

(de 3 ori la σ)

Adică, $\sigma^3(1) = \sigma^2(\sigma(1)) = \sigma(\sigma(2)) = \sigma(3) = 4$

Deci, $\boxed{\sigma^3 = (1, 4, 2, 5, 3) \circ (6, 9, 8, 7) \circ (10, 11) = \sigma^{2023}}$

(13) Rezolvați ecuația $x^{2023} = \sigma^{2023}$ $(x \in S_{11})$

L3

$\text{ord } x^{2023} = \text{ord } \sigma^{2023} = 20$

Aplic formula (4):

$\text{ord } g^k = \frac{\text{ord } g}{(k, \text{ord } g)}$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{\frac{\text{ord } x}{(2023, \text{ord } x)} = 20} \Rightarrow$

$20 \cdot (2023, \text{ord } x) = \text{ord } x = 20$

$2023 = 7 \cdot 17^2$ $\Rightarrow \text{ord } x = [k_1, \dots, k_n]$ — în $S_{11} \to 11$ elemente

$k_1 + k_2 + \dots + k_n = 11$

$7 \cdot 20 = 140$ $\quad k_1 \geq 7, k_2 \geq 5$ $\Rightarrow \text{ord } x \neq 17 > 11$ $\Rightarrow \underline{\text{ord } x = 20}$

Știm că $x^{2023} = \sigma^{2023}$

ord x = ord σ = 20

Deci ord $x = 7k \Rightarrow 7 \cdot 20 = 140$

$k_1 = 7$, $k_2 = 5 \Rightarrow k_1 + k_2 = 12$

$x^3 = \sigma^3$ | Ridicăm la puterea a 7-a

$(2023, \text{ord } x) = 1 \Rightarrow$ ord $x = 20$

$x^{20} = \sigma^{20} = e$

$(x^3)^7 = (\sigma^3)^7 \Rightarrow x^{21} = \sigma^{21} \Rightarrow x^{20} \cdot x = \sigma^{20} \cdot \sigma \Rightarrow$

$e \cdot x = e\sigma \,|{:}e \Rightarrow \boxed{x = \sigma}$

(14) Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$

$\sigma(1) = 4$ $\quad \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4) < \sigma(1) \xRightarrow{4>2,3,1} (1,2), (1,3), (1,4)$ - inversiuni (3)

$\sigma(2) = 2, \sigma(4) = 1 \Rightarrow \sigma(4) < \sigma(2) \xRightarrow{2>1} (2,4)$ inversiune - 1 inversiune

$\sigma(3) = 3, \sigma(4) = 1 \Rightarrow \sigma(4) < \sigma(3) \xRightarrow{3>1} (3,4)$ - " - " - 1 inversiune

Nr total inversiuni: $m(\sigma)$

$m(\sigma) = 3 + 1 + 1 = 5 \Rightarrow$ σ - permutare impară

(15) Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_5$

$\sigma(1) = 4 \rightarrow$

$m(\sigma) = 3 + 3 + 2 + 0 = 8 \Rightarrow$ σ - permutare pară

(16) $\sigma^p = \begin{cases} e, & p = 3n \\ \sigma, & p = 3n+1 \\ \sigma^2, & p = 3n+2 \end{cases}$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ ordinul = 3

ordinul permutării = cel mai mic nr. natural k pt care $\boxed{\sigma^k = e}$

$2016 : 3 = 672$

$\sigma^{2016} = \sigma^{672 \times 3} = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$2017 : 3 = 672 + 1$

$\sigma^{2017} = \sigma^{672 \times 3 + 1} = \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$2018 : 3 = 672 + 2$

$\sigma^{2018} = \sigma^{672 \times 3 + 2} = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

---

(17) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$

Inversiunile permutării σ: $(1,4), (2,4), (3,4)$ - 3 inversiuni $\Rightarrow$

(1) (2) (3)

$\boxed{m = 3}$ $\quad$ semn $= \varepsilon(\sigma) = (-1)^3 = (-1) \rightarrow$ permutare impară

Examen Lrld

c) câte soluții are ecuația $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ în $(S_8, \circ)$?

Descompunem în cicluri disjuncte.

$\sigma = (1,2)\circ(3,4)\circ(5,6)\circ(7,8)$

Inversiuni: $(1,2) - 1$, $(3,4) - 1$, $(5,6) - 1$, $(7,8) - 1$ } 4 inversiuni

$sign = \varepsilon(\sigma) = (-1)^4 = 1 \Rightarrow$ permutare pară

Are soluții $\Leftarrow$

Are 12 soluții.

① ciclul disjunct (fără termeni care se repetă) $(1,2)$ înseamnă că

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to$ e ciclu $\Rightarrow 1 \to 2 \to 1$

~~b) $\sigma^2 = \sigma\circ\sigma$~~

$K = 8 = 4 \cdot 2 \to 2$ cicluri disjuncte de lung 4.

$\sigma^2 = (1\ 3\ 2\ 4)\circ(5\ 7\ 6\ 8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

sol 2 $\sigma = (1\ 3\ 2\ 4)\circ(5\ 8\ 6\ 7)$

sol 3 $\sigma = (1\ 4\ 2\ 3)(5\ 7\ 6\ 8)$

sol 4 $\sigma = (1\ 4\ 2\ 3)(5\ 8\ 6\ 7)$

sol 5 $\sigma = (1\ 5\ 2\ 6)(3\ 7\ 4\ 8)$

sol 6 $\sigma = (1\ 6\ 2\ 5)(3\ 7\ 4\ 8)$

sol 7 $\sigma = (1\ 5\ 2\ 6)(3\ 8\ 4\ 7)$

sol 8 $\sigma = (1\ 6\ 2\ 5)(3\ 8\ 4\ 7)$

sol 9 $\sigma = (1\ 7\ 2\ 8)(3\ 5\ 4\ 6)$

sol 10 $\sigma = (1\ 7\ 2\ 8)(3\ 6\ 4\ 5)$

sol 11 $\sigma = (1\ 8\ 2\ 7)(3\ 5\ 4\ 6)$

sol 12 $\sigma = (1\ 8\ 2\ 7)(3\ 6\ 4\ 5)$

(1) Rezolvați ecuația $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ în S_9.

Descompunem în cicluri disjuncte.

$= \underbrace{(1,2,3,4)}_{\ell_1 = 4} \circ \underbrace{(5,6,7,8,9)}_{\ell_2 = 5}$.

Inversiuni

$(1,4)$ — 1
$(2,4)$ — 1
$(3,4)$ — 1
$(5,9)$ — 1
$(6,9)$ — 1
$(7,9)$ — 1
$(8,9)$ — 1

7 inversiuni

$\operatorname{sign} = \varepsilon(\sigma) = (-1)^7 = (-1) \Rightarrow$ permutare impară

nu are soluții

Portofoliu

(1) Fie $\sigma = (1\,3\,2\,4) \in S_4$.

1. Determinați soluțiile ec: $x^2 = \sigma$, $x \in S_4$

Ptr ca ec $x^2 = \sigma$, $x \in S_4$ să aibă sol, σ trebuie să fie o permutare pară

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$ord(\sigma) = 2 + 3 = 5 \Rightarrow sgn(\sigma) = -1 \Rightarrow \sigma =$ impară $\Rightarrow$ ec. nu are sol.

2. Determinați soluțiile ec $x^3 = \sigma$, $x \in S_4$

transp. la puterea a 3-a $\Rightarrow$ aceași transpoziție

- un ciclu de lung 3 la puterea a $\underline{3\text{-a}}$ $\Rightarrow$ $\underline{\text{permut. identică}}$

— 4 — 4 — 4 — 4 $\Rightarrow$ ciclu de lung. 4.

Sol ec $x^3 = \sigma$, $x \in S_4$ e un ciclu de patru

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \qquad x^3 = \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{ciclu } \underset{\text{lung } 4}{(1, 3, 2, 4)}$$

3. nr de elem. din $H = \langle \sigma \rangle$ (subgrup generat de σ în S_4)

$\sigma =$ ciclu de lung 4 $\Rightarrow \sigma^4 = e \Rightarrow$ nr de elem. din $H = \langle \sigma \rangle$ este $\underline{4}$

$H = \{e, \sigma, (1\,2)(3\,4), (1\,4\,2\,3)\}$

4. Indicele? S_4 are $4! = 24$ elem. $[S_4 : H] = \frac{ord(S_4)}{ord(H)} = 6$

(2) Fie grupul abelian $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$

1. elem. $x = (\hat{2}, \hat{2})$ al lui G. Ordinul lui x? $H = \langle x \rangle$ elem grupului

$ord(x) = $ cmmmc$(ord\,\hat{2}$ în $\mathbb{Z}_4$, $ord(\hat{2}$ în $\mathbb{Z}_{10}))$.

$= ord =$ nr de elem din subgrupul $H = \{(\hat{0}, \hat{0}), (\hat{0}, \hat{2}), (\hat{0}, \hat{4}), (\hat{0}, \hat{6}), (\hat{0}, \hat{8}),$
$(\hat{1}, \hat{0}), (\hat{1}, \hat{2}), (\hat{1}, \hat{4}), (\hat{1}, \hat{6}), (\hat{1}, \hat{8})\}$.

2. cu ce grup e izomorf? $G/H = \{\overline{(\hat{0}, \hat{0})}, \overline{(\hat{0}, \hat{1})}, \overline{(\hat{1}, \hat{0})}, \overline{(\hat{1}, \hat{1})}\}$

$G/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ $\quad (\mathbb{Z}_n) / \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_{n / ord(x)}$

3 elem. de ordin 20 din G

ord elem $(\hat{x},\hat{y}) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$ = cmmmc(ord(x), ord y))

T. Lagrange → ord(x) | 4 ord(x) = 4

ord(y) | 10 ord(y) = 10 → ord maxim

cmmmc(4,10) = 20

$4 = 2^2$ $2^2 \cdot 5$

$10 = 2 \cdot 5$

$c^3 = (1\ 7\ 3\ 15) \Leftrightarrow c = (1\ 15\ 3\ 7)$

---

(1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 9 & 15 & 10 & 13 & 8 & 3 & 14 & 2 & 6 & 12 & 11 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_{15}$

a) $\sigma = (1\ 7\ 3\ 15) \circ (2\ 9) \circ (4\ 10\ 6\ 8\ 14) \circ (5\ 13)(11\ 12)$

b) $ord(\sigma) = cmmmc(4,2,5,2,2) = 20.$

$\sigma^{2023} = (\sigma^{20})^{101} \sigma^3 = \sigma^3$

$\sigma^3 = (1\ 15\ 3\ 7)(4\ 8\ 10\ 14\ 6)(5\ 13)(11\ 12)(2\ 9)$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 15 & 9 & 7 & 8 & 13 & 4 & 1 & 10 & 2 & 14 & 12 & 11 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

c) ec $\tau^3 = \sigma$ în S_{15}

$l = 3k, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \tau^3 = \sigma$ are 3 cicli de lung k

$\tau = (1\ 15\ 3\ 7)(4\ 6\ 14\ 10\ 8)(2\ 9)(5\ 13)(11\ 12)$

Legi de compoziție

"*" $X * X \to X$

$x, y \in X$

$x * y = z \in X$

1) $* : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$x * y = xy + 1$

$\exists! e \in \mathbb{N}$ a.î. $e \cdot x = x \Leftrightarrow ex + 1 = x \Leftrightarrow x(e-1) = 0$

$\forall x$

$\Rightarrow e = -\frac{1}{x} + 1,\ \forall x \in M$ dar pt $x=0$, $e \notin M$ (Fals)

$xy+1 = yx+1 \Rightarrow (*)$ comutativă

Asociativ:

$(x*y)*z = (xy+1)*z = (xy+1)z+1 = xyz+z+1$

$x*(y*z) = xyz+x+1$ elem neutru este mereu inversabil

Monoid $\rightarrow$ A, E, N $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{Z},\cdot)$, $(M_2(\mathbb{R}),\cdot)$

Grup $\rightarrow$ A, E, N, inv, $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(M_2(\mathbb{R}),+)$

$\forall$ monoid $\rightarrow U(M) = \{m \in M \mid \exists m' \in M \text{ a.î. } mm' = e\}$

$(\mathbb{Z}_n,+)$, $(\mathbb{Z}_n,\cdot)$

$U(\mathbb{Z}_{12}) = \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{11}\}$

$68 \mid 2^2$
$17 \mid 17$

$\varphi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$

$\varphi(n) = \text{card}\{m \in \mathbb{N}^* \mid m \le n, (m,n)=1\} = |U(\mathbb{Z}_n)|$

1) $(m,n)=1 \Rightarrow \varphi(mn) = \varphi(m)\cdot\varphi(n)$

2) $\varphi(p^m) = p^m - p^{m-1}$, p prim

$\varphi(20) = \varphi(4)\cdot\varphi(5) = 2\cdot 4 = 8$

3) $\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$

$n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$

$\varphi(n) = 68\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{17}\right) = \cancel{68}\cdot 2\cdot 1\cdot 16 = \underline{32}$

---

① $G = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $H = \langle(12,15)\rangle$, G/H ciclic?

Dem că G/H nu e ciclic

$(\widehat{1,0}) \in G/H$

Pp că $\text{ord}((\widehat{1,0})) < \infty$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}^*$ a.î. $k(\widehat{1,0}) = (\widehat{0,0})$

$\Updownarrow$

$(\widehat{k,0}) \in G/H$

$\Updownarrow$

$(k,0) \in H \Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{Z}$ a.î. $\begin{cases} k = 12l \\ 0 = 15l \end{cases} \Rightarrow$

$\text{ord}((\widehat{1,0})) = \infty$ contradicție $G/H \not\cong \mathbb{Z}$

$\Rightarrow l = 0 \Rightarrow k = 0$ Contradicție cu $k \in \mathbb{Z}^*$

Deci, $\text{ord}(\widehat{1,0}) = \infty$. Pp că G/H este ciclic. Ordinul lui $(\widehat{1,0}) = \infty$

$\Rightarrow G/H \cong \mathbb{Z}$. Dar $(\widehat{4,5}) \in G/H$ și $3\cdot(\widehat{4,5}) = (\widehat{12,15}) = (\widehat{0,0})$ pentru că $(12,15) \in H$

continuare

$\supseteq$ Fie $P \in (X^2-6) \Rightarrow P = f(X^2-6)$ cu $f \in \mathbb{Q}[X]$

$\Downarrow$

$\varphi(P) = P(\sqrt{6}) = f(\sqrt{6}) \cdot 0 = 0$

$\Downarrow$

$P \in \ker\varphi \Rightarrow \ker\varphi = I$

sau TFI $\Rightarrow \frac{\mathbb{Q}[X]}{I} \simeq \mathbb{Q}[\sqrt{6}]$

c) $X^5 - 9X + 1$ și $aX + b \in \mathbb{Q}[X]$ cu

$\widehat{X^5-9X+1} = \widehat{aX+b}$ în $\mathbb{Q}[X]/I$

$\Updownarrow$

$\widehat{X^5-9X+1-aX-b} = \hat{0}$

$\Updownarrow$

$X^5-(9+a)X+1-b \in I$

Deci $X^5-(9+a)X+1-b$ împărțit la X^2-6 dă restul 0

$(1\,3\,6)\,(1\,2\,7\,8)\,(4\,5\,9)$

$\Downarrow$

$c_9^3 = (l_1\, l_4\, l_7)(l_2\, l_5\, l_8)(l_3\, l_6\, l_9)$

$\Rightarrow c_9 = (l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 l_6 l_7 l_8 l_9)$

$= (1\,2\,\cancel{4}\,3\,\cancel{7}\,\cancel{5}\,6\,8\,9)$

sau $= (1\,2\,4\,6\,8\,9\,3\,7\,5)$

sau $= (6\,8\,9\,1\,2\,4\,3\,7\,5)$

sau $= (6\,8\,9\,3\,7\,5\,1\,2\,4)$

sau $= (3\,7\,5\,1\,2\,4\,6\,8\,9)\,(\ldots\,6\,8\,9\,1\,2\,4)$

$\sigma = (1\,3\,5\,9)(2\,4\,7\,8\,6)(10\,4$

$x^{2011} = \sigma$

$x^{11} = \sigma$

$x = (1\,9\,5\,3)(2\,4\,7\,8\,6)$ $(10\,11)$

$x^{2011} = \sigma.$

$(\mathbb{Z}_{14},+) \rightarrow \operatorname{ord}(\hat{1}) = 14 = \langle \hat{1} \rangle$

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_{14},+) \simeq G_1 \Rightarrow \exists$ elem în G_1 a.î. $\operatorname{ord} x = 14$

$x \in S_8 \Rightarrow \operatorname{ord} x = [l_1, \ldots, l_k] = 14$

$x = l_1 \ldots l_k$

$l_{\varphi_1} + \ldots + l_{\varphi_k} \leq 8$ (în S_8)

pt. $\operatorname{ord} x = 14 \Rightarrow$ am avea $[l_{\varphi_1}, \ldots, l_{\varphi_k}] = 14$

pt. $\left.\begin{array}{l} l_{\varphi_1} = 2 \\ l_{\varphi_2} = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow [l_{\varphi_1}, l_{\varphi_2}] = 14$ $\left.\right\} \Rightarrow$ contradicție

$l_{\varphi_1} + l_{\varphi_2} > 8$

$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_{15}$

$f(a,b)=(\hat{a},\bar{b})$

$\ker f=\{(a,b)\mid f(a,b)=(\hat{0},\bar{0})\}$

$f(a,b)=(\hat{0},\bar{0})$

$\Updownarrow$

$a\in 12\mathbb{Z}$
$b\in 15\mathbb{Z}$ $\Rightarrow \ker f=\{(12k,15l)\}=\{12(k,0)+15(0,l)\}=$

$=\langle(12,0),(0,15)\rangle$

---

② b) Fie $\varphi:\mathbb{Q}[X]\to\mathbb{Q}[\sqrt{6}]$

$\varphi(P)=P(\sqrt{6})=\{a+b\sqrt{6}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$

Arătăm că φ surj $\Rightarrow$ $\ker\varphi=(X^2-6)=I$ $\Rightarrow$ aplicăm TFI.

φ = morfismul

$\varphi(a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n)=a_0+a_1\sqrt{6}+\ldots+a_n\sqrt{6}^n)$

Fie $a+b\sqrt{6}\in\mathbb{Q}[\sqrt{6}]$. Observăm că $\exists\, a+bX\in\mathbb{Q}[X]$ a.î.

$\varphi(a+bX)=a+b\sqrt{6}\Rightarrow\varphi$ = surject

$\ker\varphi=\{P\in\mathbb{Q}[X]\mid\varphi(P)=0\}$

• $\ker\varphi=X^2-6$

"$\subseteq$" Fie $P\in\ker\varphi$ $\quad P(\sqrt{6})=0\Rightarrow\sqrt{6}$ e o rădăcină
$P\in\mathbb{Q}[\sqrt{6}]$ $\Big\}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ și conjugata lui $\sqrt{6}$, adică $\underline{-\sqrt{6}}$ este ~~tot~~ o rădăc.

$\Rightarrow P\,\vdots\, X-\sqrt{6}$
$P\,\vdots\, X+\sqrt{6}$ $\Big\}$ în $\mathbb{R}[X]\Rightarrow P\,\vdots\,(X-\sqrt{6})(X+\sqrt{6})=X^2-6$

$\Downarrow$

$P\in(X^2-6)$

a) $X^3(X^2-6)\,\vdots\, X^2-6$, deci $X^3(X^2-6)\in I$

$I=(X^2-6)\leq\mathbb{Q}[X]$ $\quad$ și grad $(X^3(X^2-6))=3+2=5$

• Fie $a,b\in I$. Vrem $a+b\in I$

Dacă $a, b \in I$ atunci $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{Q}[X]$ a.î.

$a = (X^2-6)c_1$

$b = (X^2-6)c_2$

$a+b = (X^2-6)(c_1+c_2) \vdots X^2-6$

deci $a+b \in I$

• Fie $a \in I$ și $b \in \mathbb{Q}[X]$. Vrem $a \cdot b \in I$

$a \in I \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Q}[X]$ a.î. $a = (X^2-6)c$

$a \cdot b = b \cdot c (X^2-6) \vdots (X^2-6)$

$\Downarrow$

$a \cdot b \in I$

deci, $I \subseteq \mathbb{Q}[X]$ este ideal

$$\begin{array}{l|l} X^5-(9+a)X+1-b & X^2-6 \\ \hline -X^5+6X^3 & X^3+6X \\ \quad 6X^3-(9+a)X+1-b & \\ \quad -6X^3+36X & \\ \quad (36-9-a)X+1-b = (27-a)X+1-b & \end{array}$$

$\text{grad}((27-a)X+1-b) = 1 < \text{grad}((X^2-6))$

deci restul este $(27-a)X+1-b = 0$

$\Downarrow$

$\boxed{a=27}$, $\boxed{b=1}$

d) $P \in \mathbb{Q}[X]$ ired $\Leftrightarrow$ $(\forall)$ $F, G \in \mathbb{Q}[X]$ cu proprietatea că $P = F \cdot G$, atunci F sau $G \in U(\mathbb{Q}[X])$ și grad $P \geq 1$

Ex.: • $X-5$ ireductibil în $(\forall)$ $A[X]$

• X^2-6 reductibil în $\mathbb{R}[X]$ întrucât $X^2-6 = (X-\sqrt{6})(X+\sqrt{6})$ și $X-\sqrt{6}, X+\sqrt{6} \in \mathbb{R}[X]$ neinversabile

dar X^2-6 ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$

• $(X^4+1)(X^2+2)$ reductibil

• Fie $P \in I$ ireductibil $\Rightarrow P = F \cdot (X^2-6)$ cu $F \in \mathbb{Q}[X]$

dar P ireduct $\Rightarrow X^2-6 \in U(\mathbb{Q}[X])$ Fals

sau

$F \in U(\mathbb{Q}[X])$

$\Rightarrow F \equiv a$, $a \neq 0$ F este polinom de grad 0

$\Rightarrow P$ e ireductibilă cu forma $a(X^2-6)$, $a \neq 0$

a) $\sigma = (1\ 7\ 3\ 10)(2\ 9)(4\ 10\ 6\ 8\ 14)(5\ 13)(11\ 12)$

b) $\mathrm{ord}\,\sigma = \mathrm{cmmmc}[4,2,5,2,2] = 20$

$\sigma^{2023} = (\sigma^{20})^{101}\sigma^3$

$\sigma^3 = (1\ 11\ 5\ 3\ 7)(4\ 8\ 10\ 14\ 6)(5\ 13)(11\ 12)(2\ 9)$

Inel factor

$X^2-1 \in$ idealul, $\widehat{X^2-1} = \hat{0} \Rightarrow \hat{X}^2 = \hat{1}$

Fie $\hat{a}X+\hat{b}$ un element idempotent $\Rightarrow (\hat{a}X+\hat{b})^2 = \hat{a}X+\hat{b}$; $\hat{a}^2X^2 +$
$+ 2\hat{a}\hat{b}X + \hat{b}^2 = \hat{a}X+\hat{b}$, $\hat{a}^2 + 2\hat{a}\hat{b}X + \hat{b}^2 = \hat{a}X+\hat{b}$

$\begin{cases} \hat{a}^2+\hat{b}^2 = \hat{b} \\ 2\hat{a}\hat{b} = \hat{a} \end{cases} \Rightarrow$ in $\mathbb{Z}$ — Soluții sunt $\dfrac{a=0}{b\in\{0,1\}}$ $\rightarrow$ 3 elem. idempotente

in $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ sunt 4 elem idempotente $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

Avînd nr. diferit de idempotenți, inelele nu sunt izomorfe.

Ex 2

Fie idealul $I=(X^3, X^5)$ al inelului de polin. $\mathbb{Q}[X]$.

Fie idealul I, are 4 termeni nenuli

– Exemplu de polinom $\in I$, are 4 termeni nenuli

cum $X^5 \in I \Rightarrow X^5+X^6+X^7+X^8$ Polinom –

$\notin I$ are 3 termeni nenuli.

– " – " $\notin I$ are 3 termeni nenuli

Fie $P = X^2+X+1$. Pp că $P\in I \Rightarrow P = X^3 * A + X^5 * B$,
A, B = polinoame

$\Rightarrow P = X^3 * C$ (C = polinom)

P nu poate fi egal cu $X^3 * C$. Contradicție $P \notin I$, P are 3 termeni nenuli

(grade)

3. $I = X^3$? $I = X^5$?

$X^3 * A + X^5 * B$; $I = X^3$.

$I \neq X^5$, deoarece $I = (X^3)$ și $X^3 \in (X^3)$ dar $X^3 \notin (X^5)$

4. Elementele idempotente $\mathbb{Q}[X]/I$.

$\hat{P}$ din grupul factor sunt de forma $P = aX^2+bX+c =$
$= X(\widehat{b+aX}) + c$; $a,b \in \mathbb{R}$. P = nilpotent, dacă $\exists\, n\in\mathbb{N}$ a.î. P^n este
multiplu de X^3 – Binomul lui Newton $= P^n$

Exerciţii rezolvate cu polinoame

Enunţuri

Ex.1.

Se consideră polinoamele cu coeficienţi reali $f = X^4 + aX^3 - 28X^2 + bX + 96$, $g = X^2 + 2X - 24$ şi $h = (X^2 + 2X - 24)(X^2 - 4)$.

a) Să se scrie forma algebrică a polinomului h.

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât polinoamele f şi h să fie egale.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $16^x + 2\cdot 8^x - 28\cdot 4^x - 8\cdot 2^x + 96 = 0$.

Variante M2 bac 2009

Ex.2.

Fie polinoamele $f = X^3 + aX^2 + X + \hat{1}$ şi $g = X + \hat{3}$ din inelul $\mathbb{Z}_5[X]$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{Z}_5$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.

b) Pentru $a = \hat{1}$ să se arate că $f = (X + \hat{1})(X^2 + \hat{1})$.

c) Pentru $a = \hat{1}$ să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ ecuaţia $f(x) = \hat{0}$.

Variante M2 bac 2009

Ex.3.

Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = (\hat{3}a + \hat{3}b)X^2 + \hat{2}X + \hat{2}a + \hat{3}b$ şi $g = \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{3}a + \hat{2}b$.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_5$ astfel încât cele două polinoame să fie egale.

b) Pentru $a = b = \hat{2}$ să se calculeze în $\mathbb{Z}_5$ suma $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) + f(\hat{3}) + f(\hat{4})$.

c) Pentru $a = b = \hat{2}$ să se rezolve în $\mathbb{Z}_5$ ecuaţia $f(x) = \hat{0}$.

Variante M2 bac 2009

Ex.4.

Se consideră $a \in \square_7$ şi polinomul $f = X^6 + aX + \hat{5} \in \square_7[X]$

a) Să se verifice că, pentru orice $b \in \mathbb{Z}_7$, $b \neq \hat{0}$, are loc relaţia $b^6 = \hat{1}$.

b) Să se arate că $x^6 + \hat{5} = (x^3 - \hat{4})(x^3 + \hat{4})$, $\forall x \in \mathbb{Z}_7$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $a \in \mathbb{Z}_7$, polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.

Variante M1 bac 2009

Ex.5.

Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{3}X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{3}X + \hat{2}$ şi $g = X^2 + \hat{2}X$.

a) Să se calculeze $f(\hat{1}) \cdot g(\hat{0})$.

b) Să se verifice că $f = (\hat{3}X + \hat{3}) \cdot g + \hat{2}X + \hat{2}$.

c) Să se determine numărul rădăcinilor din $\mathbb{Z}_5$ ale polinomului f.

Variante M2 bac 2009

Ex.6.

Se consideră polinoamele $f = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ şi $g = X^2 - 2X + 1$, cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze diferenţa $S - S'$, unde $S = x_1 + x_2 + x_3$ şi $S' = y_1 + y_2$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la g.

c) Să se calculeze produsul $f(y_1) \cdot f(y_2)$.

Variante M2 bac 2009

Rezolvări:

Ex.1.

a) $h = X^4 - 4X^2 + 2X^3 - 8X - 24X^2 + 96 = X^4 + 2X^3 - 28X^2 - 8X + 96$ este forma algebrică a polinomului h.

b) Prin identificarea coeficienţilor obţinem că polinoamele f şi h sunt egale pentru $a = 2$ şi $b = -8$.

c) Ecuaţia dată se scrie sub forma $(2^x)^4 + 2\cdot(2^x)^3 - 28\cdot(2^x)^2 - 8\cdot 2^x + 96 = 0$

Facem substituţia $2^x = y$ şi obţinem ecuaţia $y^4 + 2y^3 - 28y^2 - 8y + 96 = 0$

Folosind punctual b) obţinem $(y^2 + 2y - 24)(y^2 - 4) = 0$.

$y^2 + 2y - 24 = 0$ are soluţiile $y_1 = 4$ şi $y_2 = -6$

$y^2 - 4 = 0$ are soluţiile $y_3 = 2$ şi $y_4 = -2$.

Revenind la notaţia făcută avem $x_1 = 2$ şi $x_2 = 1$.

Ex.2.

a) $f \vdots g \Leftrightarrow f(-\hat{3}) = \hat{0} \Leftrightarrow f(\hat{2}) = \hat{0} \Rightarrow \hat{3} + \hat{4}a + \hat{2} + \hat{1} = \hat{0}$

$\hat{4}a + \hat{1} = \hat{0} \Rightarrow \hat{4}a = -\hat{1} \Rightarrow \hat{4}a = \hat{4} \Rightarrow a = \hat{1}$.

b) $f = X^3 + X^2 + X + \hat{1}$

$(X + \hat{1})(X^2 + \hat{1}) = X^3 + X^2 + X + \hat{1}$ c.c.t.d.

c) $f(x) = \hat{0} \Leftrightarrow (x + \hat{1})(x^2 + \hat{1}) = \hat{0}$

$x + \hat{1} = \hat{0} \Rightarrow x = -\hat{1} \Rightarrow x = \hat{4}$

Pentru ecuaţia $x^2 + \hat{1} = \hat{0}$ se incearcă toate elementele mulţimii $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ şi se mai obţin soluţiile $x = \hat{2}$ şi $x = \hat{3}$.

In concluzie ecuaţia dată are soluţiile $x = \hat{2}, x = \hat{3}$ şi $x = \hat{4}$.

Ex.3.

a) Polinoamele f şi g sunt egale dacă şi numai dacă avem:

$$\begin{cases} \hat{3}a + \hat{3}b = \hat{2} \\ \hat{2}a + \hat{3}b = \hat{3}a + \hat{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{3}(a+b) = \hat{2} \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \hat{4} \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{2}a = \hat{4} \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \hat{2}.$$

b) Pentru $a = b = \hat{2}$ avem $f = \hat{2}X^2 + \hat{2}X$.

$f(\hat{0}) = \hat{0}$

$f(\hat{1}) = \hat{4}$

$f(\hat{2}) = \hat{2}$

$f(\hat{3}) = \hat{4}$

$f(\hat{4}) = \hat{0}$

$f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) + f(\hat{3}) + f(\hat{4}) = \hat{0} + \hat{4} + \hat{2} + \hat{4} + \hat{0} = \hat{0}$.

c) Deoarece $f(\hat{0}) = \hat{0}$ şi $f(\hat{4}) = \hat{0}$ rezultă că rădăcinile ecuaţiei $f(x) = \hat{0}$ sunt $x = \hat{0}$ şi $x = \hat{4}$.

Ex.4.

a) $\mathbb{Z}_7 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \hat{6}\}$ este mulţime finită deci le putem verifica pe toate:

$\left(\hat{1}\right)^6=\hat{1}$

$\left(\hat{2}\right)^6=\hat{1}$

$\left(\hat{3}\right)^6=\hat{1}$

$\left(\hat{4}\right)^6=\hat{1}$

$\left(\hat{5}\right)^6=\hat{1}$

$\left(\hat{6}\right)^6=\hat{1}$

b) $\left(x^3-\hat{4}\right)\left(x^3+\hat{4}\right)=x^6-\hat{2}=x^6+\hat{5}, \forall x\in\mathbb{Z}_7$

c) Fie $a\in\mathbb{Z}_7, a\neq\hat{0}$. Tripletul $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ este corp comutativ (deoarece 7 este prim) deci există $a^{-1}\in\mathbb{Z}_7, a^{-1}\neq\hat{0}$.

$f(a^{-1})=\left(a^{-1}\right)^6+a\cdot a^{-1}+\hat{5}=\hat{1}+\hat{1}+\hat{5}=\hat{0}$ deci f este divizibil prin $X-a^{-1}$ adică f este reductibil in $\mathbb{Z}_7[X]$.

Pentru $a=\hat{0}$ avem $f=x^6+\hat{5}=\left(x^3-\hat{4}\right)\left(x^3+\hat{4}\right)$ deci f este reductibil şi in acest caz.

Ex.5.

a) $f\left(\hat{1}\right)\cdot g\left(\hat{0}\right)=\hat{2}\cdot\hat{0}=\hat{0}.$

b) $(\hat{3}X+\hat{3})\cdot g+\hat{2}X+\hat{2}=(\hat{3}X+\hat{3})(X^2+\hat{2}X)+\hat{2}X+\hat{2}=f$.

c) Din b) rezultă că $f(x)=(x+\hat{1})(\hat{3}g+\hat{2})=(x+\hat{1})(\hat{3}x^2+x+\hat{2})=\hat{0}$

de unde $x+\hat{1}=\hat{0}$ cu soluția $x=\hat{4}$ și $\hat{3}x^2+x+\hat{2}=\hat{0}$ care nu are soluții în $\mathbf{Z}_5$.

În concluzie, polinomul *f* are o singură soluție în $\mathbf{Z}_5$ și anume $x=\hat{4}$.

Ex.6.

a) Aplicăm relațiile lui Viete pentru cele două polinoame: $S=-3, S'=2\Rightarrow S-S'=-5.$

b) Folosim teorema împărțirii cu rest și obținem câtul $q=X+5$ și restul $r=12X-4$.

c) Rădăcinile y_1, y_2 ale polinomului g sunt $y_1=y_2=1$. Rezultă $f(y_1)\cdot f(y_2)=\left(f(1)\right)^2=64$

Exerciții rezolvate cu legi de compoziție

Enunțuri

Ex.1.

Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ definim operația $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a)Verificați identitatea $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b)Demonstrați că $x \circ (-4) = -4$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

c)Arătați că legea de compoziție $\circ$ este asociativă.

d)Calculați $(-2009) \circ (-2008) \circ \ldots \circ 2009$.

e)Rezolvați in $\mathbb{R}$ ecuația $x \circ x \circ x \circ x = 12$.

Variante M2 bac 2009

Ex.2.

Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

a) Să se arate că $x \circ y = 2(x-3)(y-3) + 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = 11$.

c) Știind că operația "$\circ$" este asociativă, să se calculeze $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \ldots \circ \sqrt{2009}$.

Variante M2 bac 2009

Ex.3.

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = xy - 2(x+y) + 6$.

a) Să se arate că $x \circ y = (x-2)(y-2) + 2$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că $x \circ 2 = 2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Știind că legea de compoziție „$\circ$" este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei $E = (-2009) \circ (-2008) \circ \ldots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \ldots \circ 2009$.

Variante M2 bac 2009

Ex.4.

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = (x-4)(y-4) + 4$.

a) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x \circ x = x$.

c) Să se determine două numere $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{N}$.

Variante M2 bac 2009

Ex.5.

Pentru a,b din mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește operația $a * b = \ln(e^a + e^b - 1)$.

a) Să se arate că dacă $a, b \in M$, atunci $a * b \in M$.

b) Să se arate că legea de compoziție „$*$" este asociativă.

c) Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, să se determine $a \in M$ astfel încât $\underbrace{a * a * \ldots * a}_{\text{de } n \text{ ori } a} = 2a$.

Variante M1 bac 2009

Rezolvări:

Ex.1.

a) $(x+4)(y+4)-4 = xy+4x+4y+16-4 = xy+4x+4y+12 = x\circ y$ şi identitatea din cerinţă este demonstrată.

b) $x\circ(-4) = (x+4)(-4+4)-4 = -4, \forall x \in \mathbb{R}$.

c)Legea de compoziţie $\circ$ este asociativă dacă $(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z), \forall x,y,z \in \mathbb{R}$.

$$(x\circ y)\circ z = \underbrace{\left[(x+4)(y+4)-4\right]}_{a}\circ z = a\circ z = (a+4)(z+4)-4 = (x+4)(y+4)(z+4)-4, \forall x,y,z \in \mathbb{R}$$

$$x\circ(y\circ z) = x\circ\underbrace{\left[(y+4)(z+4)-4\right]}_{b} = x\circ b = (x+4)(b+4)-4 = (x+4)(y+4)(z+4)-4, \forall x,y,z \in \mathbb{R}$$

Din cele două relaţii de mai sus rezultă că legea $\circ$ este asociativă.

d) $(-2009)\circ(-2008)\circ\ldots\circ 2009 = \underbrace{(-2009)\circ(-2008)\circ\ldots\circ(-5)}_{x}\circ(-4)\circ\underbrace{(-3)\circ\ldots\circ 2008\circ 2009}_{y} = x\circ(-4)\circ y = -4$

conform punctului b).

e) $x\circ x = (x+4)(x+4)-4 = (x+4)^2-4$

$x\circ x\circ x = (x+4)^3-4$

$x\circ x\circ x\circ x = (x+4)^4-4$

Ecuaţia dată devine $(x+4)^4-4=12 \Leftrightarrow (x+4)^4-16=0 \Leftrightarrow \left[(x+4)^2-4\right]\underbrace{\left[(x+4)^2+4\right]}_{>0}=0$.

Cum $x\in\mathbb{R}$ rezultă că $(x+4)^2-4=0 \Rightarrow (x+4)^2=4 \Rightarrow x+4=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=-6 \end{cases}$.

Ex.2.

2.a) $2(x-3)(y-3)+3 = 2(xy-3x-3y+9)+3 = 2xy-6x-6y+21 = x\circ y, \forall x,y\in\mathbb{R}$ c.c.t.d.

b) $x\circ x = 11 \Rightarrow 2x^2-12x+10=0 \Rightarrow x^2-6x+5=0$ care are soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=5$.

c)Observăm că $x\circ 3 = 3\circ x = 3, \forall x\in\mathbb{R}$

$$1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{9}\circ\ldots\circ\sqrt{2009} = \underbrace{1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{8}}_{x}\circ 3\circ\underbrace{\sqrt{10}\circ\ldots\circ\sqrt{2009}}_{y} = 3.$$

Ex.3.

2.a) $(x-2)(y-2)+2 = xy-2x-2y+4+2 = xy-2x-2y+6 = xy-2(x+y)+6 = x\circ y, \forall x,y\in\mathbb{R}$ c.c.t.d.

b) $x\circ 2 = (x-2)(2-2)+2 = 2, \forall x\in\mathbb{R}$.

c)Să mai observăm că şi $2\circ x = (2-2)(x-2)+2 = 2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Observaţi in acea compunere rolul important al lui 2!

Utilizand proprietatea de asociativitate a operaţiei precum şi faptul că $x\circ 2 = 2, \forall x\in\mathbb{R}$ şi $2\circ x = 2, \forall x\in\mathbb{R}$ se obţine că E=2.

$$\underbrace{E = (-2009)\circ(-2008)\circ\ldots\circ 0\circ 1}_{x}\circ 2\circ\underbrace{3\circ\ldots\circ 2009}_{y} = 2.$$

Ex.4.

a)e este element neutru dacă $x\circ e = e\circ x = x, \forall x\in\mathbb{R}$.

$x\circ e = (x-4)(e-4)+4 = x, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow (x-4)(e-4)-(x-4) = 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow (x-4)(e-4-1) = 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow e-5=0 \Rightarrow e=5.$

b) $x\circ x = (x-4)^2+4$

$x\circ x\circ x = \left[(x-4)^2+4\right]\circ x = (x-4)^2(x-4)+4 = (x-4)^3+4$

Ecuaţia dată devine:

$(x-4)^3+4=x \Leftrightarrow (x-4)^3-(x-4)=0 \Leftrightarrow (x-4)\left[(x-4)^2-1\right]=0$

$(x-4)(x-4-1)(x-4+1)=0$ (am folosit formula $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

Obţinem ecuaţia $(x-4)(x-5)(x-3)=0$ care are soluţiile $\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=4 \\ x_3=5 \end{cases}$.

c) $a\circ b=(a-4)(b-4)+4 \in \square$.

Observăm că dacă luăm $a-4=\dfrac{3}{5}$ şi $b-4=\dfrac{5}{3}$ vom obţine $a\circ b=1+4=5\in\square$

Din $a-4=\dfrac{3}{5}$ obţinem $a=\dfrac{3}{5}+4=\dfrac{23}{5}$ iar din $b-4=\dfrac{5}{3}$ obţinem $b=\dfrac{5}{3}+4=\dfrac{17}{3}$.

Evident a şi b sunt numere raţionale $a,b\in\square\setminus\square$.

Ex.5.

a) Fie $a,b\in M=[0,+\infty)$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow e^a\ge 1 \\ e^b\ge 1 \end{array}\right| \Rightarrow e^a+e^b-1\ge 1 \Rightarrow \ln(e^a+e^b-1)\ge 0 \Rightarrow \ln(e^a+e^b-1)\in M \Rightarrow a*b\in M$$

b) Legea de compoziţie * este asociativă dacă $(x*y)*z=x*(y*z), \forall x,y,z\in M$

$$\left.\begin{array}{l} x*(y*z)=x*\left(\ln(e^y+e^z-1)\right)=\ln\left(e^x+e^y+e^z-2\right) \\ (x*y)*z=\left(\ln(e^x+e^y-1)\right)*z=\ln\left(e^x+e^y+e^z-2\right) \end{array}\right. \text{deci legea este asociativă.}$$

c) $a*a=\ln(2e^a-1)$

$a*a*a=\ln(3e^a-2)$

Demonstrăm prin inducţie că $P(n):\underbrace{a*a*...*a}_{de\ \ n\ \ ori\ \ a}=\ln\left(ne^a-(n-1)\right), n\ge 1$ este adevărată.

<u>Etapa verificării</u>:

Pentru n=1 avem $P(1): a=a$ este adevărată.

<u>Etapa demonstraţiei</u>:

Presupunem P(k) adevărată şi demonstrăm că P(k+1) este adevărată.

$P(k):\underbrace{a*a*...*a}_{de\ \ k\ \ ori\ \ a}=\ln\left(ke^a-(k-1)\right)$ este adevărată.

$P(k+1):\underbrace{a*a*...*a}_{de\ \ k+1\ \ ori\ \ a}=\ln\left((k+1)e^a-k\right)$ trebuie demonstrată.

$\underbrace{a*a*...*a}_{de\ \ k+1\ \ ori\ \ a}=\left(\ln\left(ke^a-(k-1)\right)\right)*a=\ln\left(ke^a-(k-1)+e^a-1\right)=\ln\left((k+1)e^a-k\right)$ c.c.t.d.

Egalitatea $\underbrace{a*a*...*a}_{de\ \ n\ \ ori\ \ a}=2a$ devine $\ln\left(ne^a-(n-1)\right)=2a$

$ne^a-(n-1)=e^{2a}\Rightarrow e^{2a}-ne^a+n-1=0$. Notăm $e^a=x$ şi obţinem ecuaţia de gradul doi $x^2-nx+n-1=0$ care are soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=n-1$.

Revenind la notaţie , obţinem $a=0$ sau $a=\ln(n-1)$

SUBIECTE EXAMEN

6. Câte sol. are $\sigma^2 = (1\,2)\circ(3\,4)\circ(5\,6)\circ(7\,8)$? Răspuns: 12 soluții. Iarna (Sub. examen)

Rezolvare:

Observații: 1) ciclul disjunct (fără termeni care se repetă) $(1\,2)$ înseamnă că $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ e ciclic: $1 \to 2 \to 1$

permutarea are forma

2) $\sigma^2 = \sigma\circ\sigma \Rightarrow$ ciclul $(1\,2)$ al σ^2 e calculat sub forma $\underbrace{\underbrace{1 \to x}_{\sigma} \circ \underbrace{\to 2}_{\sigma}}_{\sigma^2}$; noi trb. să aflăm pe x (pasul intermediar) pt. fiecare ciclu al σ^2 (pt. a determina pe σ)

exemplu: $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ pas 1, pas 2

ciclu disj $(1, 3, 2)$

pași de det. a τ^2:

$1 \xrightarrow{\text{pas 1}} 3 \xrightarrow{\text{pas 2}} 2$
$2 \to 1 \to 3$
$3 \to 2 \to 1$

$\Rightarrow \tau^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\,2\,3)$ ciclu disjunct

Având aceste considerente, pornim de la ciclii disjuncți ai σ^2:

solutia 1: $(1\,2) \Rightarrow 1 \to x_1 \to 2$

Fie $x_1 = 3 \Rightarrow 1 \to 3 \to 2$. Urmărim ciclul care îl conține pe 3 adică $(3\,4)$ $\Rightarrow 3 \to \overbrace{2 \to 4}^{*}$ (3 trb. să ducă în 4 în 2 pași)

Se întoarcem la ciclul care îl conține pe 2 și anume $(1\,2)$, cu precizarea că 2 trebuie să ducă în 1 (în 2 pași):

$2 \xrightarrow{*} 4 \to 1$

Până acum avem I-a 1/2 a lui σ: $1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1 \Rightarrow (1\,3\,2\,4)$ *

Pt. că $\sigma \in S_8$ ⇒ σ se va scrie ca 2 cicli disjuncți de lungime $\frac{8}{2} = 4$.
par (a se vedea notițele de la consultații de pe 3 feb. 2024)

Det. acum cel de al II-lea ciclu disjunct a lui σ (va conține 5, 6, 7 și 8, elementele care nu apar în I-ul ciclu).

Pornim, spre ex., de la ciclul $(5\,6)$ și procedăm ca mai sus (excludem elem-le care au fost deja, i.e. 1, 2, 3, 4)

$(5\,6) \Rightarrow 5 \to y_1 \to 6$

Fie $y_1 = 7 \Rightarrow 5 \to 7 \to 6$

Ne uităm la ciclul care îl conține pe 7, i.e. (7 8); precedent am stabilit că 7 se duce în 6; fiind ciclu (7 8) $\Rightarrow$ 6 trebuie să ducă în 8:

$$7 \to 6 \to 8$$

6 aparține (5 6) și 6 trebuie să ~~ducă~~ se întoarcă în 5 $\Big\} \Rightarrow 6 \to 8 \to 5$

Și avem: $5 \to 7 \to 6 \to 8 \to 5 \Leftrightarrow (5\ 7\ 6\ 8)$ (Δ) al $\bar{n}$-lea ciclu disjunct al lui σ

(★), (Δ)

$$\Rightarrow \sigma = (1\,3\,2\,4)\circ(5\,7\,6\,8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$ ✓

<u>soluția 2</u>: Se alege $x_2 = 4$ și se menține $y_1 = 7$ $\Rightarrow \sigma = (1\,4\,2\,3)(5\,7\,6\,8)$ ✓

<u>soluția 3</u>: Se alege $x_1 = 3$ și se schimbă $y_2 = 8$ $\Rightarrow \sigma = (1\,3\,2\,4)(5\,8\,6\,7)$ ✓

<u>soluția 4</u>: $x_2 = 4$ și $y_2 = 8$ $\Rightarrow \sigma = (1\,4\,2\,3)(5\,8\,6\,7)$ ✓

Reies ușor soluțiile întrucât (3 4) și (7 8)

<u>soluția 5</u>: Se alege $x_3 = 5$ (precedent am combinat ciclul (1 2) cu (3 4), acum alegem să combinăm (1 2) cu (5 6))

$\left.\begin{array}{l} x_3 = 5 \\ 1 \to x_3 \to 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \to \underset{(5\,6)}{5} \to 2 \Big\} \Rightarrow 5 \to \underset{\in(1\,2)}{2} \to 6 \Big\} \Rightarrow 2 \to 6 \to 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1\ 5\ 2\ 6)$

Au mai rămas ciclii (3 4) și (7 8). Începem de la (3 4):

$\left.\begin{array}{l} 3 \to y_1 \to 4 \\ y_1 = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \to \underset{\in(7\,8)}{7} \to 4 \Big\} \Rightarrow 7 \to \underset{\in(3\,4)}{4} \to 8 \Big\} \Rightarrow 4 \to 8 \to 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow (3\ 7\ 4\ 8)$

$\Rightarrow \sigma = (1\,5\,2\,6)(3\,7\,4\,8)$

<u>soluția 6</u>: Pt. ciclul (1 2) se alege $x_4 = 6$ și se menține $y_1 = 7$ pt. (3 4) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma = (1\,6\,2\,5)(3\,7\,4\,8)$

<u>soluția 7</u>: $x_4 = 5$ și $y_2 = 8$ $\Rightarrow \sigma = (1\,5\,2\,6)(3\,8\,4\,7)$

<u>soluția 8</u>: $x_4 = 6$ și $y_2 = 8$ $\Rightarrow \sigma = (1\,6\,2\,5)(3\,8\,4\,7)$

<u>soluția 9</u>: Se alege x_5 din ciclul (7 8). Fie $x_5 = 7$.

Astfel, pornind de la ciclul (1 2): $1 \to \underset{\in(7\,8)}{7} \to 2 \Big\} \Rightarrow 7 \to \underset{\in(1\,2)}{2} \to 8 \Big\} \Rightarrow 2 \to 8 \to 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1\ 7\ 2\ 8)$

Am epuizat ciclu (1 2) și (7 8). Ne rămân (3 4) și (5 6). Începem cu (3 4):

$$\left.\begin{array}{l} 3 \to y_3 \to 4 \\ \text{Fie } y_3 = 5 \in (5\ 6) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \to 5 \to 4 \\ \quad\quad\ \in (5\ 6) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5 \to 4 \to 6 \\ \quad\quad\ \in (3\ 4) \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \to 6 \to 3 \Rightarrow$$

am încheiat ciclul (3 4)

$\Rightarrow 3 \to 5 \to 4 \to 6 \to 3 \Rightarrow (3\ 5\ 4\ 6)$

$\Rightarrow \sigma = (1\,7\,2\,8)(3\,5\,4\,6)$

<u>soluția 10</u>: $x_5 = 7$ și $y_4 = 6 \Rightarrow \sigma = (1728)(3645)$

<u>soluția 11</u>: $x_6 = 8$ și $y_3 = 5 \Rightarrow \sigma = (1827)(3546)$

<u>soluția 12</u>: $x_6 = 8$ și $y_4 = 6 \Rightarrow \sigma = (1827)(3645)$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
2	solutia 1	3	4	2	1	7	8	6	5
3	solutia 2	3	4	2	1	8	7	5	6
4	solutia 3	4	3	1	2	7	8	6	5
5	solutia 4	4	3	1	2	8	7	5	6
6	solutia 5	5	6	7	8	2	1	4	3
7	solutia 6	5	6	8	7	2	1	3	4
8	solutia 7	6	5	7	8	1	2	4	3
9	solutia 8	6	5	8	7	1	2	3	4
10	solutia 9	7	8	5	6	4	3	2	1
11	solutia 10	7	8	6	5	3	4	2	1
12	solutia 11	8	7	5	6	4	3	1	2
13	solutia 12	8	7	6	5	3	4	1	2

La ultimul ex, cica trb sa observam ca 1=-1 in acel inel, din cauza ca x^2=x ... si apoi porneam de la (x+y)^2 = x+y

Noi trebuie sa demonstram ca xy=yx pentru orice x si y din R.
Pentru orice z din R, $z^2=z$. Deci luam x si y arbitrare cu x+y=z
Deci avem $(x+y)^2=x+y$
Apoi facem calculele, desfacand parantezele (pentru ca intr-un inel, inmultirea e distributiva fata de adunare) si obtinem: x^2 + xy +yx + y^2 = x+y (Atentie! Noi nu stim, inca, faptul ca xy=yx, ceea ce e de fapt ce trebuie sa demonstram, deci exact asa scriem cum am scris)
Si stim ca x^2=x si y^2=y, deci avem x+xy+yx+y=x+y
Stim ca pentru orice x exista -x si evident pentru orice y avem -y, deci putem aduna la relatie, in ambii membri, cate un -x si un -y, care se vor anula cu x si y, si ne ramane xy+yx=0
Stim ca exista -yx, pe care il adunam la relatie si obtinem xy=-yx
Acum inmultim relatia cu -1 (care este opusul elementului 1 in raport cu adunarea in acest inel, iar elementul 1 fiind elementul neutru la inmultirea in acest inel)
Si ne rezulta xy(-1)=-yx(-1)
Stim (sau demonstram folosind proprietati ale elementelor inelului) ca -yx=yx(-1). (eu personal am demonstrat la examen ca in orice inel avem (-1) z = z(-1) = -z, pentru ca nu e evidenta proprietatea ca un element care e inmultit cu opusul elementului neutru la inmultire este egal cu opusul sau si am considerat ca trebuie demonstrat) deci avem relatia xy(-1)=yx[(-1)^2]
Stim din proprietatile acestui inel ca z^2=z, deci (-1)^2=-1
Deci xy(-1)=yx(-1)
Mai inmultim o data cu -1 si avem
xy=yx.
(Apropos, de asta spunea domnul profesor ca -1=1 in acest inel, deoarece in orice inel (-1)^2=1, iar in acest inel (-1)^2 este egal si cu -1 din ipoteza exercitiului)

$\sigma^2 = 2$ ... ciclu

Permutarea

Consult ... Mark + ...

Subiecte examen

... $k = ...$

$\boxed{k = 2n}$ $= 8 = $ par

$a_1 \to a_2$ $(a_2 \to a_3)$ $\sigma^2: a_1 \to a_3$

a_3 în ciclu ...

σ ciclu $\to$ ... par $\Rightarrow$ 2 cicluri

$(2 \text{ cicluri})^2 \to 4$ cicluri

$(a_1, a_2, \ldots a_{10}) \to$

$\sigma^3 \to (a_1 \to a_4)$

$k = 3n \to 3$ cicluri

σ^2 ... cicluri ... .

...

σ^2 $(1\ 2)$ $(3\ 4)$ $(5\ 6)$ $(7\ 8)$ $S_8 =$ par

cicluri de 3 ... $\to$ ... în ciclu de 3 se ...

$2n-1 = \cancel{7}$ $(a_1\ a_3\ a_5\ a_7)(a_2\ a_4\ a_6\ a_8)$

$2n = 8$

$\sigma^2 \to 2$ cicluri de 4 elem

2 cicluri cu câte 4 elem

... $1 \to 2$ (e un ciclu)

B	C	A	5	7	6	...	
1	2	3	4	5	6	7	8

ordine din cele ce au rămas

$4, 3 \to 6$ sunt în același ciclu

sol 3 $(4, 3, 1, 2)^2 = (4\ 1)$ $(1\ 4\ 2\ 3)^2 = (1\ 2)(4\ 3)$

2 cicluri

(4) Grup — 20

a·b = b·a (la operații comutative)

(3,5) → 8

(5,3) → 8.

Asociativitate

$(a\cdot b)c = a(b\cdot c)$
(G,·) semigrup

$f\circ g(x) = f(g(x))$

(G,·) se numește semigrup.

$(a\cdot b)c = a(b\cdot c)$

E asociativă, dar nu e comutativă

$f(g(h)) = (f\circ g)h = f\cdot(g\circ h)$

$f(x) = x^2$

$g(x) = e^x$

$f\circ g = (e^x)^2 = e^{2x}$ } nu e comutativă

$g\circ f = e^{x^2}$

$a\circ e = e\circ a = a$

(G,·) se numește monoid (e un semigrup cu o op. asociativă și elem. neutru)

pt (∀) a, ∃ a^{-1} inversul lui a;

(N,+) — nu are invers → e doar monoid

(Z,+) = grup; am inversul = opusul lui (în loc de $\hat{a}$, $-\hat{a}$ avem.

(N*,+) semigrup — nu are elem. neutru (începe de la 1)
- e asociativă
- e comutativă

grup abelian → are și comutativitate.

$x^2 = e$

monoid și grup → cel mai interesant se dă

$x^2 = e^{(G,\cdot)}$

$x \cdot x = e$ pt $\forall x$, x este inversul lui x

- grupurile au proprietăți: - e = unic

inversul unui elem. este unic

$x \cdot y = e \qquad y \cdot x = e$ (e def elem invers)

$x \cdot z = e$

$\underline{xy = xz}$ | o inmulțim la dreapta sau la stg

$a \cdot x \cdot y = a \cdot x z$ (dacă e comutativă) $\qquad (xy)\cdot(yx) = xex = xx = e$

$x \cdot y = xz \mid \cdot y$ $\qquad$ Notăm inversul lui x cu x'

$(y \cdot x)y = (y \cdot x)z$ $\qquad (xy)' = y' \cdot x'$; $x \cdot y \cdot y' \cdot x = x \cdot e \cdot x' = xx' = e$

$e \cdot y = e \cdot z \Rightarrow \underline{y = z}$ - inversul unui elem e unic

~~Trebuie să~~ dem că $x \cdot x = e$, e este comutativă.

Știm că $(G,\cdot)$ grup, că are cele 3 proprietăți

și $x \cdot x = e$

$x \cdot y = y \cdot x$, $\forall x, y$ luați arbitrar

~~$x \cdot y = x \cdot y$~~ Luăm $(x \cdot y)(x \cdot y) = e \mid \cdot y$

$(x \cdot y) x \underbrace{(y y)}_{e} = y$

$xyx = y \mid \cdot x$

$xy \underbrace{xx}_{e} = yx$

$\boxed{xy = yx}$ Adev pt $(\forall) x, y$

Inele $(A, +, \cdot)$ - def inel

+ trebuie să fie asociativă și cu elem. neutru și cu inversabilitate și comutativă

$(A, +)$ grup abelian

- trebuie să fie asociativă și cu elem. neutru

$(A, \cdot)$ = monoid

- este distributivă față de + de ex: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + xz$

elementul neutru la + se notează cu 0

— " — $\cdot$ se notează cu 1

inelul are proprietatea:

$x\cdot 0=0 = 0\cdot x$ (la fel și pt $0\cdot x$) (elem degenerator pt înmulțire)

$x\cdot(1+(-1))=x\cdot 1+x\cdot(-1)$

$x=x\cdot 1$ corect $=x(1+0)=x\cdot 1+x\cdot 0=x+x\cdot 0$

$x=x+x0 \quad |+(-x)$

$\boxed{0=x\cdot 0}$ I propr

$x\cdot(-1)=-x$

$x\cdot 0=0$ știm $\qquad x(-1)=-x=(-1)\cdot x$

$x\cdot(1+(-1))=0$

$\underbrace{x\cdot 1}_{x}+x\cdot(-1)=0$

$x+x\cdot(-1)=0 \quad |+(-x) \Rightarrow$ dispare

$x\cdot(-1)=-x$

$(A,+,\cdot)$

$(\mathbb{N},+,\cdot)$ ~~nu e~~ inel?

$+,\cdot$ sunt comutative

$(\mathbb{N},+)$ nu e grup de elem nu sunt inversabile, că nu au opusul

$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ inel?

~~nu e~~ e!

– de ce nu e?

$(\mathbb{Z},\cdot)$ e monoid, e asociativă, are e neutru

$(A,+,\cdot)$, $x\cdot x=x$

Trebuie să dem că $x\cdot y=y\cdot x$

$(x+y)\cdot(x+y)=x+y$

$x\cdot(x+y)+y(x+y)=x+y$

$x\cdot x+x\cdot y+y\cdot x+yy=x+y$

$\Rightarrow x+x\cdot y+y\cdot x+y=x+y \quad | +(-x) \; +(-y)$

$x \cdot y + y \cdot x = 0 \quad \Big| + (-\cancel{yx})$

$x \cdot y = -y x$

Stim că inelul are elem neutru 1 = la înmulțire

-1 este opusul său la adunare.

$(-1)\cdot(-1) = (-1)$ – la noi → deci $1 = -1$ în inelul nostru

Propr. a grupului: $(-1)(-1) = 1$ egalit.

$\Rightarrow xy = -yx \;\Big|\cdot(-1)$

$-xy = y x = -yx$

$xy = yx$

– corp

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ inel

– nu e corp – nu are elem inversabile la $\cdot$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ e corp.

→ fiecare factor are invers

Invers

Ⓘ $x + 37 = 0 \quad (\mathbb{Z}_{149}, +)$ – pentru adunare

$x = 149 - 37 = 112$

(2) $37 x = 1$ în $U(\mathbb{Z}_{149})$.

$149 = 37 \cdot 4 + 1$

$a \cdot x = 1$ în $U(\mathbb{Z}_{n})$ → inversul lui a

$n = a \cdot q_1 + r_1$

$a = r_1 \cdot q_2 + r_2$

$r_1 = r_2 q_3 + r_3$

$r_2 = r_3 q_4 + r_4$

$r_3 = r_4 q_5 + r_5$

...

$r_n = r_{n+1} q_{n+2} + \cancel{r_{n+2}}$ – fără ultimul
$= 0$

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots q_{n+1}}}} = \frac{B}{A} = \text{fracție reductibilă}$$

nr impar de q = $(-)$

par de q → e cu $+$

$149 = 37 \cdot 4 + 1$

~~$37 = 1 \cdot 37 + 0$~~ nu se le mai considere

$37 \cdot 4 = 148 = -1$

$\frac{2 \cdot 4}{2} = \frac{4}{1}$ $B = 4$

$B = -4$

nu impar de 2

$37 \cdot (-4) = -(-1) = 1$ în $(\mathbb{Z}_{149})$ sau $1 \cdot (-1)$ $37 \cdot (-4) = 1$

$-4 = 145 = 149 - 4 = 145$ în 149 $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Răspuns} = 145}$

reciproc

$2^{147} + 3^{147} + 6^{147}$ la 149.

se poate face $1 + x + y$.

$2^{147} \times 2^2$.

$\boxed{\hat{2}^{148} = 1}$ în $U(\mathbb{Z}_{149})$

$U(\mathbb{Z}_{149}) = \{1, 2, 3, 4, ..., 148\}$

ord 2

$\hat{2}^{147} \cdot 2 = \hat{1}$

elementul invers lui 2

ord grupului = 148.

$2 \times 75 = 150 = (149 + 1) = 1$

$3 \times 50 = 150 = 149 + 1 = 1$

inversul lui 3

$6 \times 25 = 150 = (149 + 1) = 1$

$(150 : 6 = 25)$

$\hat{2}^{147} = 75$

$\boxed{\hat{3}^{147} \cdot \hat{3} = 1}$

$\Rightarrow \hat{3}^{147} = 50$

$\hat{6}^{147} \cdot \hat{6} = 1$

$\hat{6}^{147} = 25 \Rightarrow$

restul

$75 + 50 + 25 = 150 : 149 = 1$

(5) ord. 3 în $U(\mathbb{Z}_{61}^{*})$ ordine

ordinul lui 3 $U(\mathbb{Z}_{149})$

$3^{1}=1$

$3^2=9$ ord. lui (3) | ord $U(\mathbb{Z}_{148})$

$3^3=27$ ord(3) | 148

$148=37\cdot 2\cdot 2$

$3^{\frac{37}{2}}$

$3^4=81=20$

$3^5=60=-1$

$(3^5)^2=1$ 3^{10} ordinul $=10$

Să arătăm că cel mai mic nr prim după care divide 2019^8+1

$2019^8+1=p\cdot k$

în $U(\mathbb{Z}_p)$ multiplu de p

$2019^8+1=0$

$\boxed{2019^8=-1}$ în $U(\mathbb{Z}_p)$

Ridic $2019^{16}=1$, deci

ordinul lui 2019 este 16.

~~ord(2019)=16~~ știm ord

~~2018~~

$16 \mid |U(\mathbb{Z}_p)|=p-1$ elemente

știm ordinul din câte știm ordinul

$16 \mid p-1 \Rightarrow p-1=16\cdot r \Rightarrow \boxed{p=16r+1}$

Scriu multiplii lui 16

$\{17, \cancel{33}, \cancel{49}, \cancel{65}, 81, 97, 113, \dots\}$

care e prim

Pt 17 $2019=17\cdot 118+13=13$ în $U\mathbb{Z}_{17}$

Ridic pe $13^8=13^2=169=(170-1)=-1$

$169 \mid 17$
9

$13^8 = (-1)^4 = 1$ 17 → am obtinut

$U(\mathbb{Z}_{97})$

$2019 = 97 \cdot 20 + 79 = 79$ în $U(\mathbb{Z}_{97})$

$79^2 = 6241 \,|\, 97 = 97 \cdot 64 + 33 = \underline{33}$

$(79)^4 = 33^2 = 1089 = 97 \cdot 11 + 22 = 22$

$(22)^2 = 484 = 485 - 1 = \underbrace{97 \cdot 5}_{\text{se reduce}} - 1 = -1$

$2019^8 + 1 = 0$ în $U(\mathbb{Z}_{97})$, deci $\boxed{2019^8 + 1 \text{ se divide cu } 97}$

---

polinoame

3) a) $x^4 - \hat{1}$ în $(\mathbb{Z}_{41}, +, \cdot)$?

$x^4 - \hat{1} = (x^2 - \hat{1})(x^2 + \hat{1}) = (x-1)(x+1)\underbrace{(x^2+1)}_{\text{în } \mathbb{Z}_{41}} = (x-1)(x+1)(x^2 - 40) =$

$-40 = 1 = 42$

se dă pătrat

$= (x+1)(x-1)(x^2 - 81) = (x+1)(x-1)(x+9)(x-9) =$

sol $= 1$, 9

$= (x-40)(x-1)(x-32)(x-9)$ în $\mathbb{Z}_{41}$

$x_1 = 40$
$x_2 = 1$
$x_3 = 32$
$x_4 = 9$

Acestea sunt rădăcinile

sol $= -9 =$

sol $-1 = 40$

b) $x^4 - 5$ în $U(\mathbb{Z}_{19})$

$\cancel{x^4} - 5 = -24 = -43 = -62 = -81$

$x^4 - 81 = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = (x-3)(x+3)(x^2 - 10) =$ (mod 19)

$x - 16$ în $\mathbb{Z}_{19}$

$-10 \overset{19}{=} -29 \overset{19}{=} -38 \overset{19}{=} \ldots$ nu dă pătrat perfect

$x^2 = 10$ ca să am rădăcini $U\mathbb{Z}_{19}$

18 - cardinalul

$(x^2)^9 = 10^9$

$x^{18} = 10^9$
$x^{18} = 1$
contradicție

$10 = -9$

$10^2 = 81 \,|\, 19 = 19 \cdot 4 + 5 = 5$

$10^4 = 5^2 = 25 \overset{19}{=} 6$

$10^8 = 6^2 = 36 \overset{19}{=} -2$

$10^8 = -2$ — 6 —

$10^9 = (-2) \cdot 10 = -20 = -1$ Contradictie

$x = 3$
$\left.\cancel{x = 16}\right\}$ 2 soluții

ord 3 în $\mathbb{Z}_{61}$ cu adunare

Le adun 3 până când dă $\underline{0}$. (elem neutru).

card lui $(\mathbb{Z}_{61}, +) = 61$

$\mathbb{Z}_{20} = \{0, 1, 2, \ldots, 19\}$ — 20 elem

$U(\mathbb{Z}_{20}) = \{1, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, 9, \cancel{10}, 11, 13, 17, 19\}$

— 8 elemente

$\mathbb{Z}_{61}$ — 61 elemente

$3 \cdot \cancel{k} = 0 = 61k \to 61$ răspunsul

$61 \nmid 3$ nu se împarte la 3

$k \mid 3$

ordinul lui 3 în $(\mathbb{Z}_{60}, +)$

$3x = 60k$

$\boxed{x = 20}$ ordinul

ordinul lui 18 în $(\mathbb{Z}_{45}, +)$

$18x = 45k$

$2x = 5k$ $\underline{k = 2}$
$= par$

$2x = 10 \Rightarrow \boxed{x = 5}$ ordinul lui e 5

$18 \cdot 5 = 90 = 2 \cdot 45$
$= \underline{0}$

Examen

Problema 4

Fie un element z din G-H

Atunci pentru orice x din H, z*x este neaparat din G-H, pentru ca daca z*x ar fi din H, arunci z*x ar putea fi inmultit cu inversul lui x (care este din H), si s-ar obtine tocmai z, si ar trebui ca z sa fie astfel produsul a doua elemente din H, adica z sa fie din H.

Deci e clar ca z*x este din G-H.

Pentru orice x si y diferiti din H, z*x trebuie sa fie diferit de z*y. De ce? Pentru ca daca ar fi egale, atunci se poate inmulti la stanga cu inversul lui z (despre care stim ca exista, deoarece G e grup), si s-ar obtine ca x egal cu y, ceea ce nu e permis.

H are 50 de elemente. Luam un element din G-H si il inmultim cu fiecare element din H si mai obtinem 50 de elemente. Adica avem deja in total toate cele 100 de elemente ale lui G.

Deci daca ar exista 3 elemente a, b, si c din G-H astfel incat a*b=c, stim sigur ca putem obtine c inmultindu-l pe a cu un element x din H. Deci a*b=c=a*x, ceea ce este imposibil deoarece ar insemna ca b=x, ceea ce e absurd, deoarece x e din H, iar b nu e din H.

Deci nu exista elementul c din G-H astfel incat sa fie produs de 2 elemente, a si b, din G-H. Astfel, produsul oricaror 2 elemente din G-H este un element din H.