

T.C.A.S.

Un risolutore di limiti compatto ed efficiente

Roberto Alessandro Bertolini

Liceo "P. Nervi - G. Ferrari" - Morbegno

Giugno 2021

Indice

1 Introduzione

- La definizione di limite
- La risoluzione per approssimazione
- L'approccio matematico
- La notazione polacca

2 TCAS

- Il parsing dell'espressione
- Riformulazione del limite
- Prima semplificazione
- Determinazione dell'MRV
- Riscrittura del limite
- Seconda semplificazione
- Determinazione del nuovo MRV
- Terza semplificazione
- Espressione come serie di potenze

La definizione di limite

Definizione generale di limite di una funzione

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \mid \forall x \in D_f, 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$

La definizione di limite

Definizione generale di limite di una funzione

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \mid \forall x \in D_f, 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

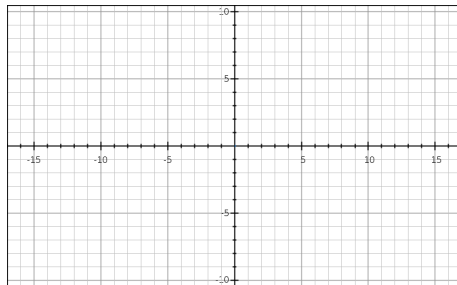
La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^{\ln \ln \ln \ln \frac{1}{x} - 1}}$

La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^{\ln \ln \ln \ln \frac{1}{x} - 1}}$

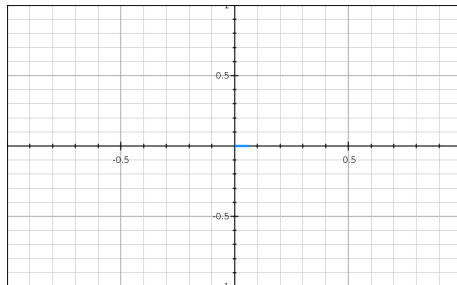
Cerchiamo $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$



La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^{\ln \ln \ln \ln \frac{1}{x} - 1}}$

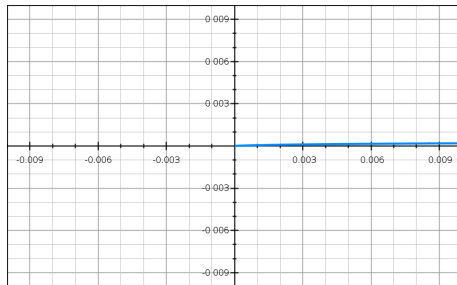
Cerchiamo $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$



La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^{\ln \ln \ln \ln \frac{1}{x} - 1}}$

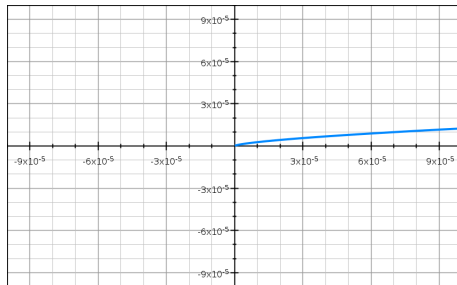
Cerchiamo $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$



La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^{\ln \ln \ln \ln \frac{1}{x} - 1}}$

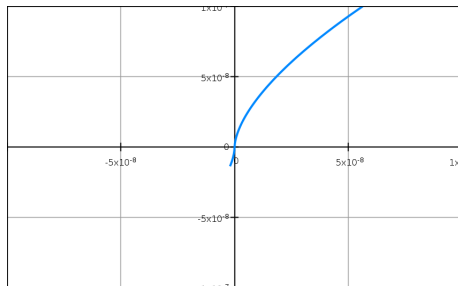
Cerchiamo $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$



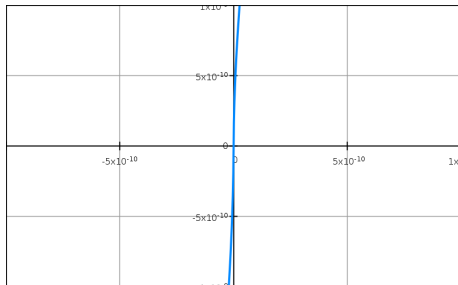
La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^{\ln \ln \ln \ln \frac{1}{x} - 1}}$

Cerchiamo $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$



Cerchiamo $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

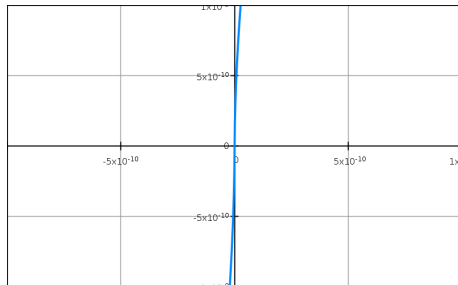


La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^{\ln \ln \ln \ln \frac{1}{x} - 1}}$

Cerchiamo $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

Eppure $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$



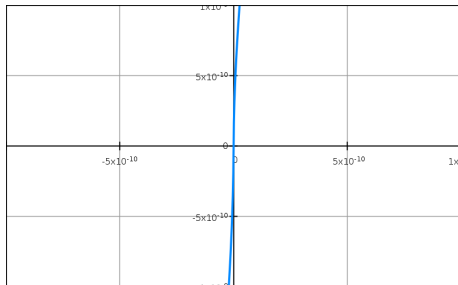
La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^{\ln \ln \ln \ln \frac{1}{x} - 1}}$

Cerchiamo $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

Eppure $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

La funzione ha un minimo in
 $x \approx 4.29 \times 10^{-1656521}$



L'approccio matematico

La regola di De L'Hôpital

$$\text{Se } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

$$\text{oppure } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$$

$$\text{ed esiste } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$$

$$\text{allora } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

I problemi dell'approccio matematico

La regola di De L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esempio

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

$$g(x) = e^x - e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

La notazione polacca

Notazione Polacca

È una notazione prefissa in cui gli operatori sono a sinistra degli argomenti. Non richiede parentesi perché non presenta ambiguità nell'interpretazione, se degli operatori è nota l'arietà.

La notazione polacca

Notazione Polacca

È una notazione prefissa in cui gli operatori sono a sinistra degli argomenti. Non richiede parentesi perché non presenta ambiguità nell'interpretazione, se degli operatori è nota l'arietà.

Esempio

$$3 \times (4 - 5) \rightarrow \times 3 - 4 5$$

La notazione polacca

Notazione Polacca

È una notazione prefissa in cui gli operatori sono a sinistra degli argomenti. Non richiede parentesi perché non presenta ambiguità nell'interpretazione, se degli operatori è nota l'arietà.

Esempio

$$3 \times (4 - 5) \rightarrow \times 3 - 4 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \rightarrow \lim / -\text{exp } x 1 x x 0$$

Il parsing dell'espressione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

Il parsing dell'espressione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

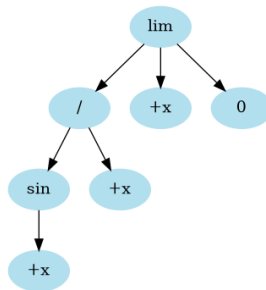
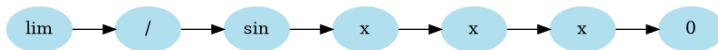
Il parsing dell'espressione

$\lim / \sin x x x 0$

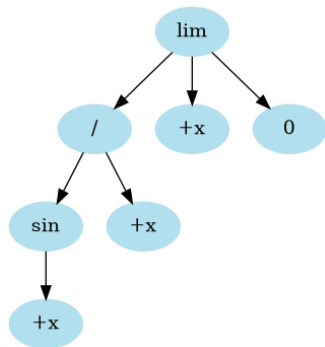


Il parsing dell'espressione



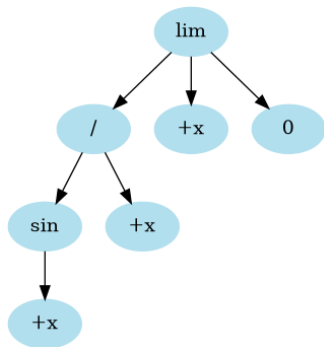


$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$



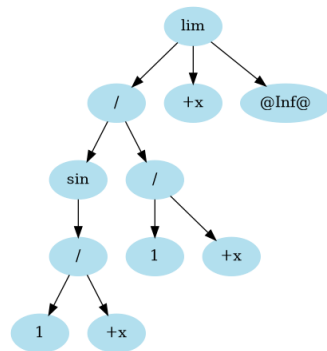
→

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

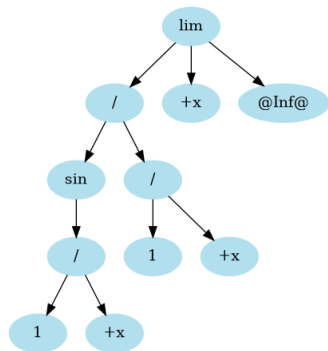


$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

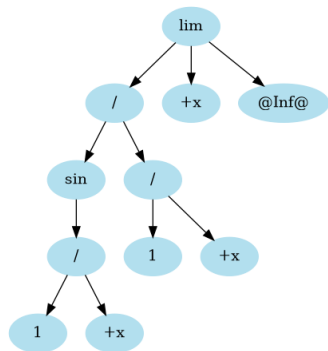
→



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

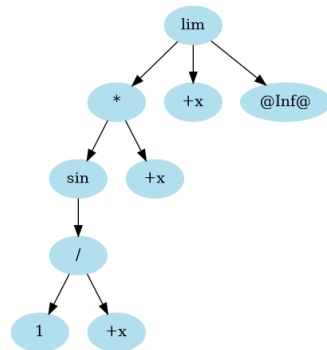
 \rightarrow

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

→



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x} \cdot x$$

Definizione di MRV

Sottoespressione di una funzione

$g(x) \triangleleft f(x)$, se $g(x)$ è una sottoespressione di $f(x)$

$g(x) \not\triangleleft f(x)$, se $g(x)$ non è una sottoespressione di $f(x)$

Classe di Comparabilità

$$f(x) \prec g(x) \text{ se e solo se } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(x)|}{\ln |g(x)|} = 0 \quad (2)$$

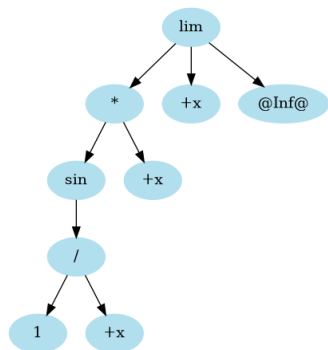
$$f(x) \asymp g(x) \text{ se e solo se } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(x)|}{\ln |g(x)|} \neq 0 \in \mathbb{R}$$

Definizione di MRV

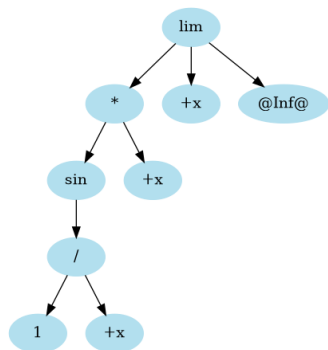
MRV

È l'insieme di sottoespressioni della funzione con la più alta classe di comparabilità.

$$mrv(f(x)) = \begin{cases} \{\} & \text{if } x \not\triangleleft f(x) \\ \{g(x) \mid g(x) \triangleleft f(x) \wedge (\nexists h(x) \triangleleft f(x) \mid h(x) \succ g(x))\} & \end{cases}$$

 \rightarrow

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x} \cdot x$$



→



x

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x} \cdot x$$

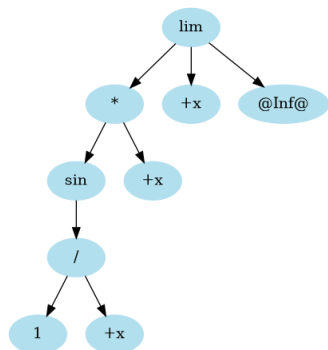
Incrementare la classe di comparabilità

Limite di un limite

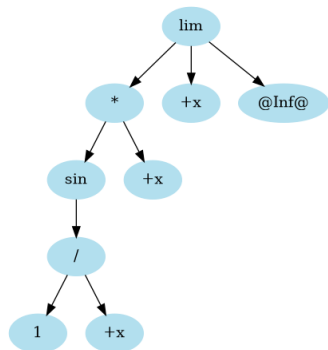
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(g(x)) = +\infty$$

Esempio

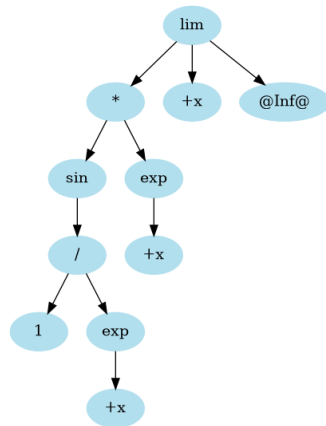
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x} \cdot x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin e^{-x} \cdot e^x$$

 \rightarrow

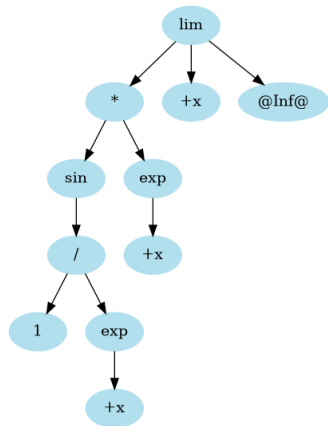
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x} \cdot x$$



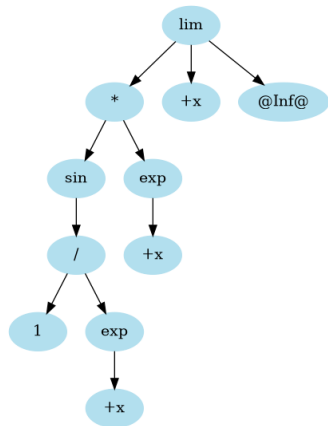
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x} \cdot x$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{e^x} \cdot e^x$$

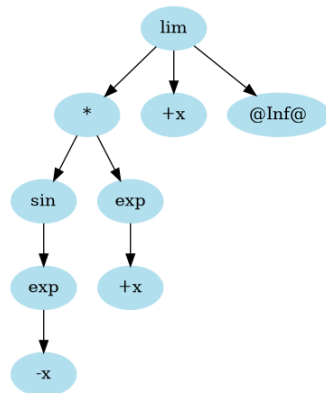
 \rightarrow

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{e^x} \cdot e^x$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{e^x} \cdot e^x$$

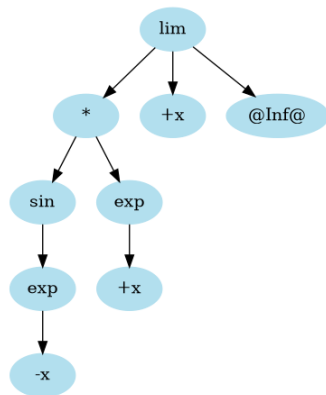
→



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin e^{-x} \cdot e^x$$

Sostituzione

Posto $w = e^{-x}$

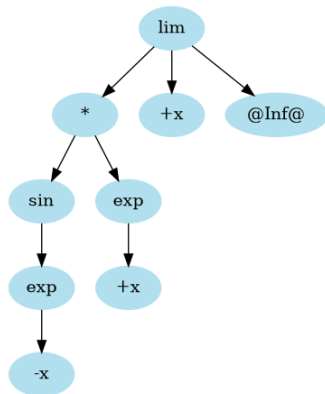


→

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin e^{-x} \cdot e^x$$

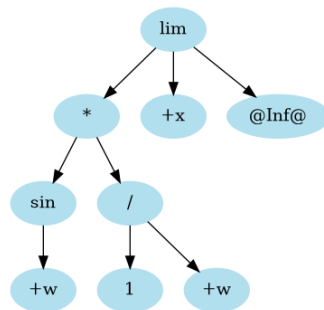
Sostituzione

Posto $w = e^{-x}$

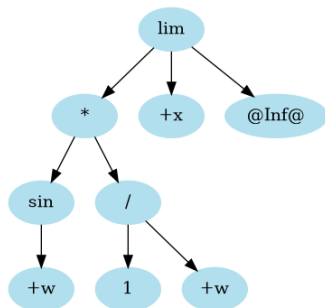


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin e^{-x} \cdot e^x$$

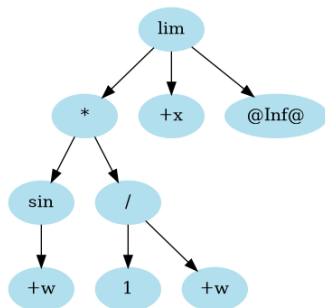
→



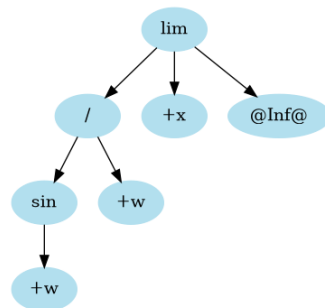
$$\lim_{w \rightarrow 0} \sin w \cdot \frac{1}{w}$$

 \rightarrow

$$\lim_{w \rightarrow 0} \sin w \cdot \frac{1}{w}$$



$$\lim_{w \rightarrow 0} \sin w \cdot \frac{1}{w}$$

 \rightarrow 

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{\sin w}{w}$$

Serie di Maclaurin

Serie di Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Serie di Maclaurin

Serie di Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Esempio

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$