T.C.A.S.

Roberto Alessandro Bertolini

Liceo "P. Nervi - G. Ferrari" - Morbegno

Giugno 2021

La definizione di limite

Definizione generale di limite di una funzione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta(\varepsilon) \mid \forall x \in D_f, 0 < \mid x - x_0 \mid < \delta \implies \mid f(x) - l \mid < \varepsilon$

La definizione di limite

Definizione generale di limite di una funzione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta(\varepsilon) \mid \forall x \in D_f, 0 < \mid x - x_0 \mid < \delta \implies \mid f(x) - l \mid < \varepsilon$

Esempio

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

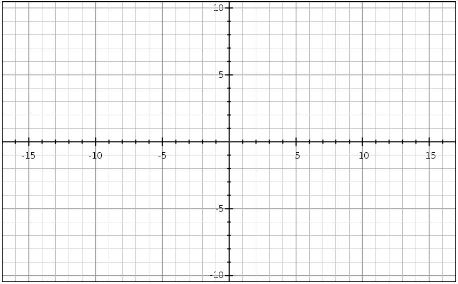
La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \dfrac{1}{x^{\ln\ln\ln\ln\frac{1}{x}-1}}$

La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^{\ln\ln\ln\ln\frac{1}{x}-1}}$

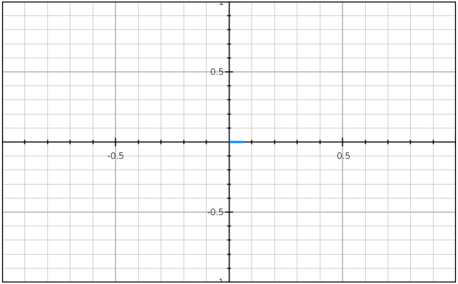
Cerchiamo $\lim_{x\to 0^+} f(x)$



La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^{\ln\ln\ln\ln\frac{1}{x}-1}}$

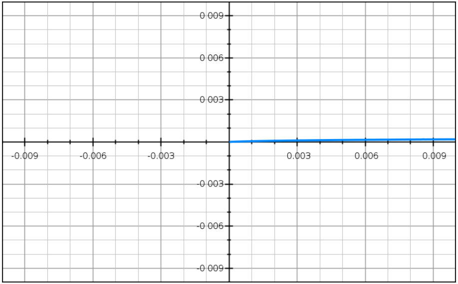
Cerchiamo $\lim_{x\to 0^+} f(x)$



La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \dfrac{1}{x^{\ln\ln\ln\ln\frac{1}{x}-1}}$

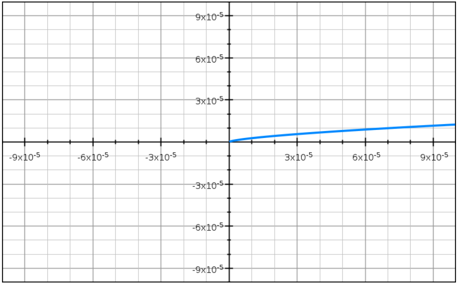
Cerchiamo $\lim_{x\to 0^+} f(x)$



La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \dfrac{1}{x^{\ln \ln \ln \ln \frac{1}{x} - 1}}$

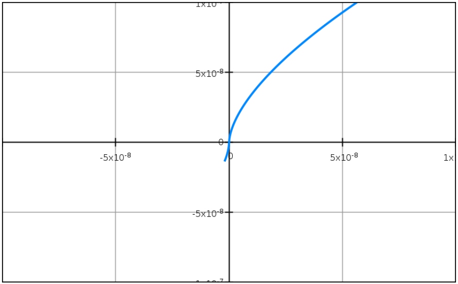
Cerchiamo $\lim_{x \to 0^+} f(x)$



La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \dfrac{1}{x^{\ln\ln\ln\ln\frac{1}{x}-1}}$

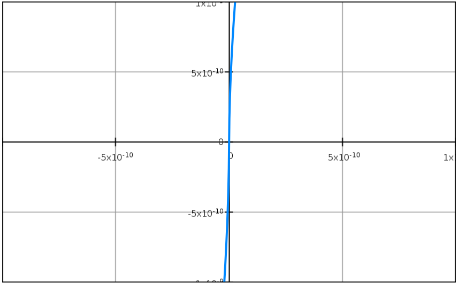
Cerchiamo $\lim_{x\to 0^+} f(x)$



La risoluzione per approssimazione

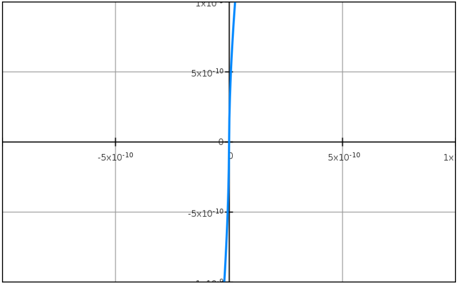
Consideriamo $f(x) = \dfrac{1}{x^{\ln\ln\ln\ln\frac{1}{x} - 1}}$

Cerchiamo $\lim_{x\to 0^+} f(x)$



La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^{\ln\ln\ln\ln\frac{1}{x}-1}}$

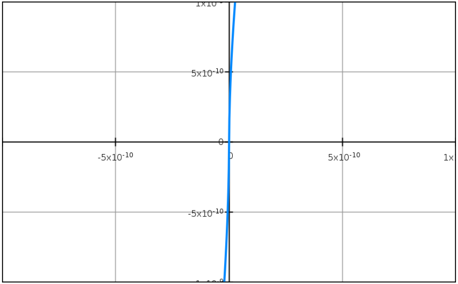


Cerchiamo $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

Eppure $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^{\ln\ln\ln\ln\frac{1}{x}-1}}$



Cerchiamo $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

Eppure $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

La funzione ha un minimo in $x \approx 4.29 \times 10^{-1656521}$

L'approccio matematico

La regola di De L'Hôpital

$$\text{Se } \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

$$\text{oppure } \lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$$

$$\text{ed esiste } \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathrm{R}$$

$$\text{allora } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

I problemi dell'approccio matematico

La regola di De L'Hôpital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esempio

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

$$g(x) = e^x - e^{-x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

La notazione polacca

Notazione Polacca

È una notazione prefissa in cui gli operatori sono a sinistra degli argomenti. Non richiede parentesi perché non presenta ambiguità nell'interpretazione, se degli operatori è nota l'arietà.

La notazione polacca

Notazione Polacca

È una notazione prefissa in cui gli operatori sono a sinistra degli argomenti. Non richiede parentesi perché non presenta ambiguità nell'interpretazione, se degli operatori è nota l'arietà.

Esempio

$$3 \times (4 - 5) \rightarrow \times\ 3 - 4\ 5$$

La notazione polacca

Notazione Polacca

È una notazione prefissa in cui gli operatori sono a sinistra degli argomenti. Non richiede parentesi perché non presenta ambiguità nell'interpretazione, se degli operatori è nota l'arietà.

Esempio

$$3 \times (4 - 5) \to \times\ 3 - 4\ 5$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \to \lim\ / - \exp\ x\ 1\ x\ x\ 0$$

Il parsing dell'espressione

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Il parsing dell'espressione

$$\lim \ / \ \sin \ x \ x \ x \ 0$$

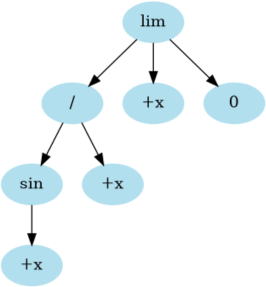
Il parsing dell'espressione

lim / sin x x x 0

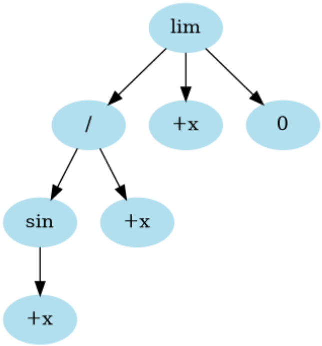
$\downarrow$


lim
/
sin
x
x
x
0

$\downarrow$

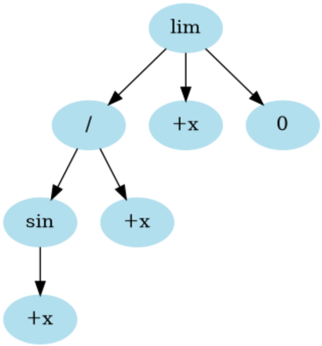


$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

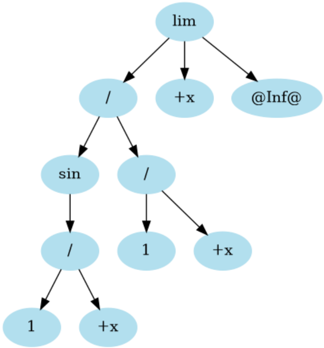


$\rightarrow$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

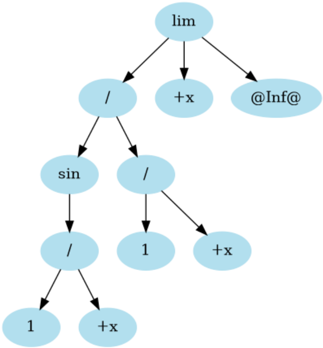


$\rightarrow$



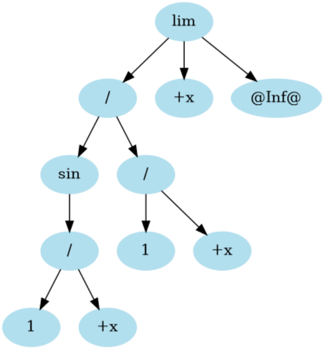
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$



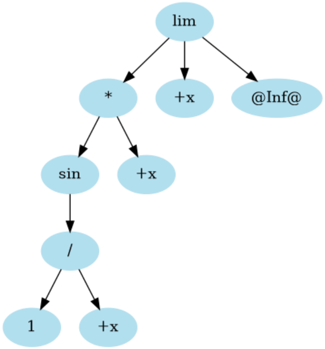
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$\rightarrow$



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$\to$



$$\lim_{x \to +\infty} \sin \frac{1}{x} \cdot x$$

Definizione di MRV

Sottoespressione di una funzione

$$g(x) \lhd f(x), \text{ se } g(x) \text{ è una sottoespressione di } f(x)$$
$$g(x) \not\lhd f(x), \text{ se } g(x) \text{ non è una sottoespressione di } f(x)$$

Classe di Comparabilità

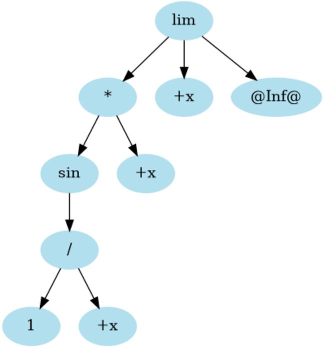
$$\begin{aligned} f(x) \prec g(x) &\text{ se e solo se } \lim_{x\to\infty} \frac{\ln|f(x)|}{\ln|g(x)|} = 0 \\ f(x) \asymp g(x) &\text{ se e solo se } \lim_{x\to\infty} \frac{\ln|f(x)|}{\ln|g(x)|} \neq 0 \in R \end{aligned} \tag{2}$$

Definizione di MRV

MRV

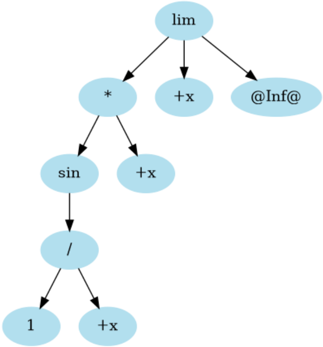
È l'insieme di sottoespressioni della funzione con la più alta classe di comparabilità.

$$mrv(f(x)) = \begin{cases} \{\} & \text{if } x \ntriangleleft f(x) \\ \{g(x) \mid g(x) \triangleleft f(x) \wedge (\nexists\ h(x) \triangleleft f(x) \mid h(x) \succ g(x))\} \end{cases}$$



$\rightarrow$

$\lim_{x \to +\infty} \sin \frac{1}{x} \cdot x$



$\lim_{x \to +\infty} \sin \frac{1}{x} \cdot x$

$\rightarrow$

x

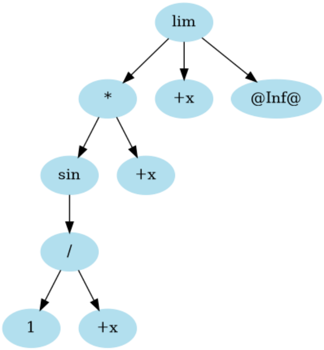
Incrementare la classe di comparabilità

Limite di un limite

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \, , \; \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \implies \lim_{x \to +\infty} f(g(x)) = +\infty$$

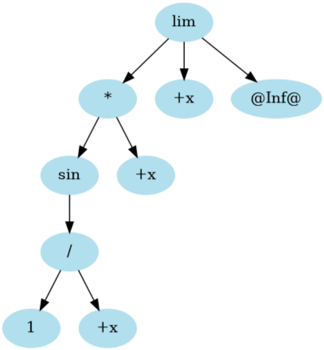
Esempio

$$\lim_{x \to +\infty} \sin \frac{1}{x} \cdot x = \lim_{x \to +\infty} \sin e^{-x} \cdot e^{x}$$



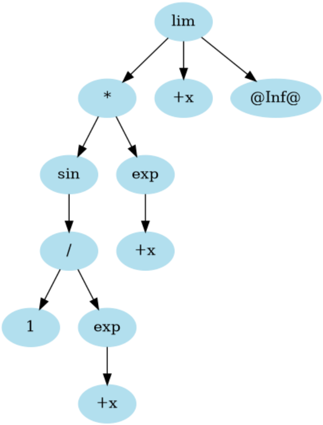
$\rightarrow$

$\lim_{x \to +\infty} \sin \frac{1}{x} \cdot x$

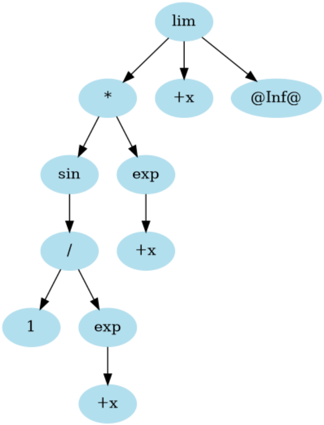


$\lim_{x \to +\infty} \sin \frac{1}{x} \cdot x$

$\rightarrow$

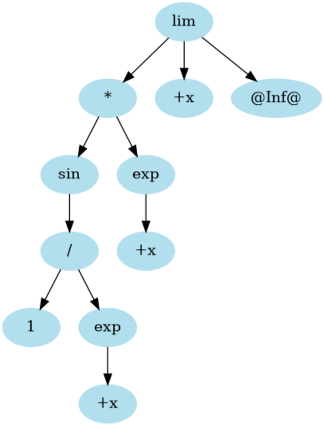


$\lim_{x \to +\infty} \sin \frac{1}{e^x} \cdot e^x$

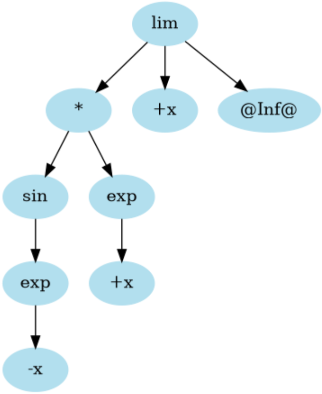


$\rightarrow$

$\lim_{x \to +\infty} \sin \frac{1}{e^x} \cdot e^x$



$\rightarrow$

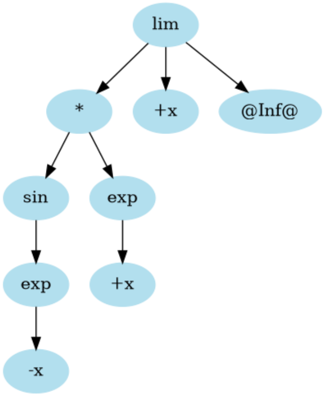


$\lim_{x\to+\infty} \sin \frac{1}{e^x} \cdot e^x$

$\lim_{x\to+\infty} \sin e^{-x} \cdot e^x$

Sostituzione

Posto $w = e^{-x}$

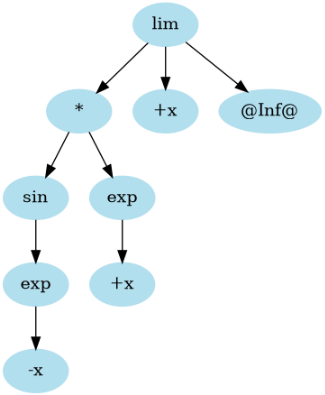


$\rightarrow$

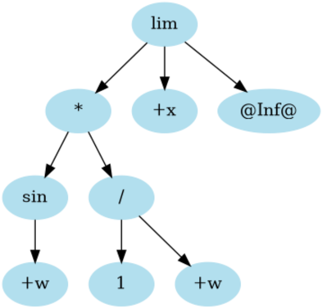
$\lim_{x \to +\infty} \sin e^{-x} \cdot e^{x}$

Sostituzione

Posto $w = e^{-x}$

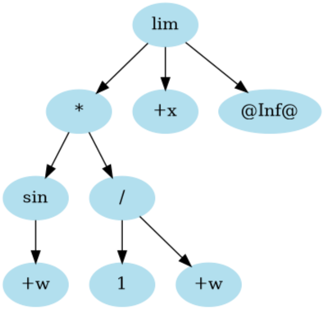


$\rightarrow$



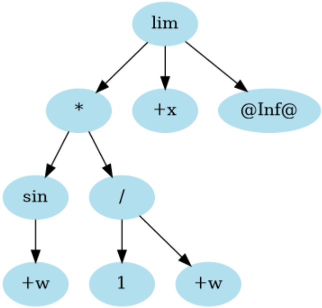
$\lim_{w \to 0} \sin w \cdot \frac{1}{w}$

$\lim_{x \to +\infty} \sin e^{-x} \cdot e^{x}$

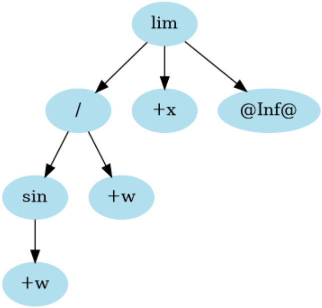


$\lim_{w \to 0} \sin w \cdot \frac{1}{w}$

$\rightarrow$



$\rightarrow$



$\lim_{w \to 0} \sin w \cdot \frac{1}{w}$

$\lim_{w \to 0} \frac{\sin w}{w}$

Serie di Maclaurin

Serie di Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Serie di Maclaurin

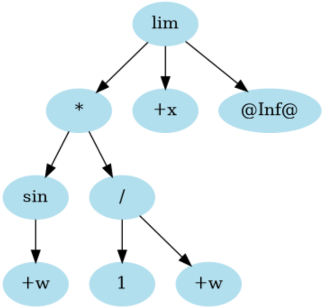
Serie di Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Esempio

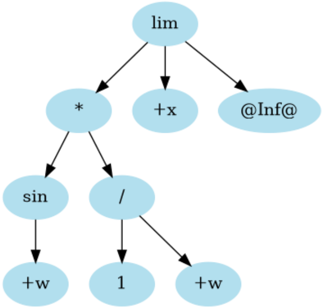
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

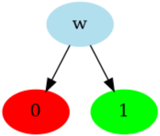


$\lim_{w \to 0} \sin w \cdot \frac{1}{w}$

$\rightarrow$



$$\lim_{w \to 0} \sin w \cdot \frac{1}{w} \quad \rightarrow \quad 1 \cdot w^0$$

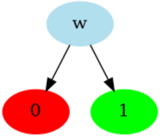


Determinare il risultato

Analisi della serie

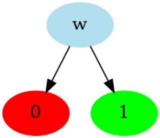
Dato il primo termine della serie nella forma $A(x)w^b$:

$$\lim_{x\to 0} w(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } b > 0 \\ +\infty & \text{if } b < 0 \\ \lim_{x\to 0} A(x) & \text{if } b = 0 \end{cases}$$



$1 \cdot w^0$

$\longrightarrow$



$$1 \cdot w^{0}$$

$$\rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$$