T.C.A.S.

Un risolutore di limiti compatto ed efficiente

Roberto Alessandro Bertolini

Liceo "P. Nervi - G. Ferrari" - Morbegno

Giugno 2021

Indice

La definizione di limite

Definizione generale di limite di una funzione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta(\varepsilon) \mid \forall x \in D_f, 0 < \mid x - x_0 \mid < \delta \implies \mid f(x) - l \mid < \varepsilon$

La definizione di limite

Definizione generale di limite di una funzione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta(\varepsilon) \mid \forall x \in D_f, 0 < \mid x - x_0 \mid < \delta \implies \mid f(x) - l \mid < \varepsilon$

Esempio

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

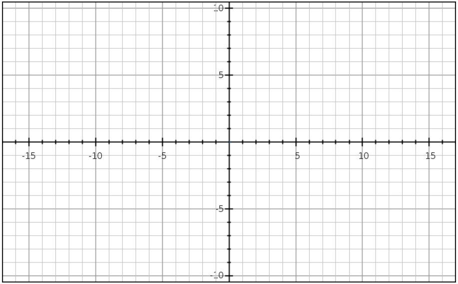
La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^{\ln\ln\ln\ln\frac{1}{x}-1}}$

La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^{\ln \ln \ln \ln \frac{1}{x} - 1}}$

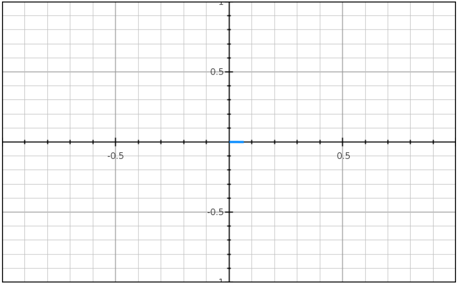
Cerchiamo $\lim_{x \to 0^+} f(x)$



La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^{\ln\ln\ln\ln\frac{1}{x}-1}}$

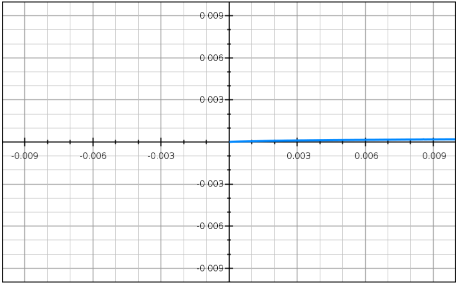
Cerchiamo $\lim_{x\to 0^+} f(x)$



La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^{\ln\ln\ln\ln\frac{1}{x}-1}}$

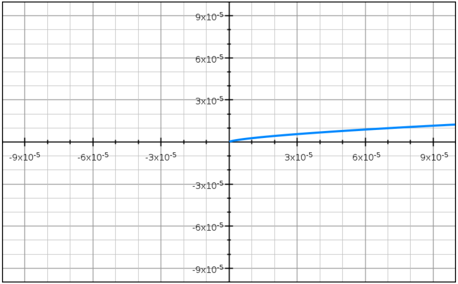
Cerchiamo $\lim_{x\to 0^+} f(x)$



La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^{\ln\ln\ln\ln\frac{1}{x}-1}}$

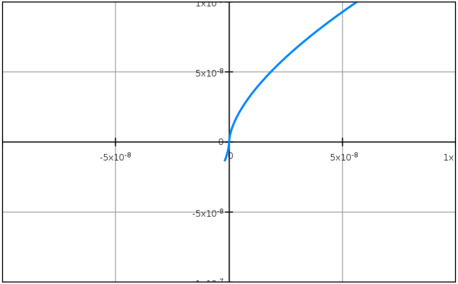
Cerchiamo $\lim_{x\to 0^+} f(x)$



La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^{\ln\ln\ln\ln\frac{1}{x}-1}}$

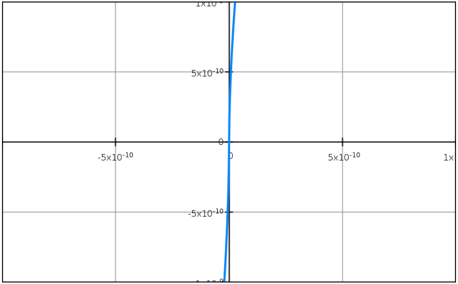
Cerchiamo $\lim_{x \to 0^+} f(x)$



La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^{\ln\ln\ln\ln\frac{1}{x} - 1}}$

Cerchiamo $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

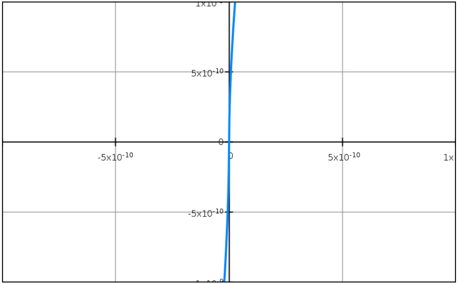


La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^{\ln\ln\ln\ln\frac{1}{x}} - 1}$

Cerchiamo $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

Eppure $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$



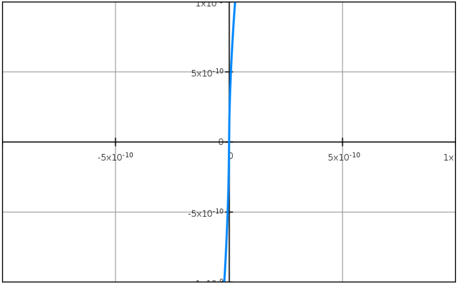
La risoluzione per approssimazione

Consideriamo $f(x) = \frac{1}{x^{\ln\ln\ln\ln\frac{1}{x}-1}}$

Cerchiamo $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

Eppure $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

La funzione ha un minimo in $x \approx 4.29 \times 10^{-1656521}$



L'approccio matematico

La regola di De L'Hôpital

$$\text{Se } \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

$$\text{oppure } \lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$$

$$\text{ed esiste } \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathrm{R}$$

$$\text{allora } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

I problemi dell'approccio matematico

La regola di De L'Hôpital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esempio

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

$$g(x) = e^x - e^{-x}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}; \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

La notazione polacca

Notazione Polacca

È una notazione prefissa in cui gli operatori sono a sinistra degli argomenti. Non richiede parentesi perché non presenta ambiguità nell'interpretazione, se degli operatori è nota l'arietà.

La notazione polacca

Notazione Polacca

È una notazione prefissa in cui gli operatori sono a sinistra degli argomenti. Non richiede parentesi perché non presenta ambiguità nell'interpretazione, se degli operatori è nota l'arietà.

Esempio

$$3 \times (4 - 5) \rightarrow \times\, 3 - 4\; 5$$

La notazione polacca

Notazione Polacca

È una notazione prefissa in cui gli operatori sono a sinistra degli argomenti. Non richiede parentesi perché non presenta ambiguità nell'interpretazione, se degli operatori è nota l'arietà.

Esempio

$$3 \times (4 - 5) \to \times\ 3 - 4\ 5$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \to \lim\ / - \exp\ x\ 1\ x\ x\ 0$$

Il parsing dell'espressione

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Il parsing dell'espressione

$$\lim \ / \ \sin x \ x \ x \ 0$$

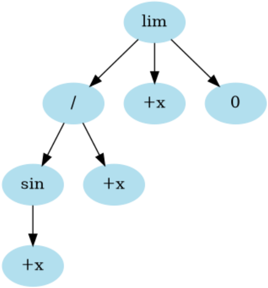
Il parsing dell'espressione

lim / sin x x x 0

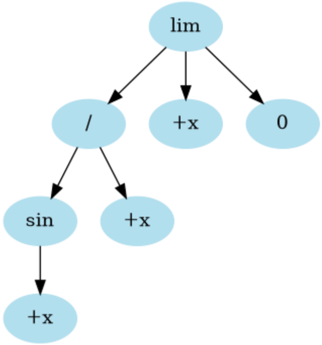
$$\downarrow$$


lim
/
sin
x
x
x
0

$\downarrow$

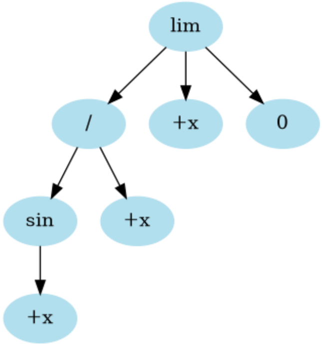


$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

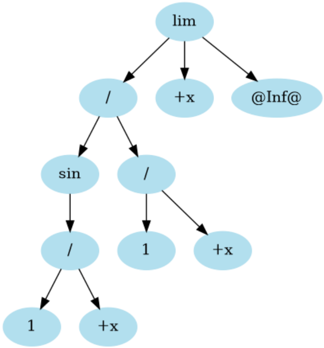


$\rightarrow$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

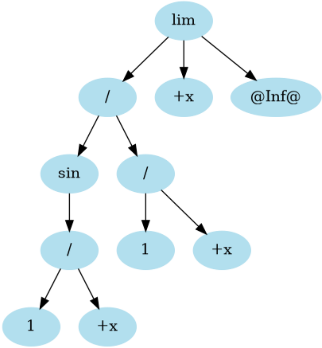


$\rightarrow$



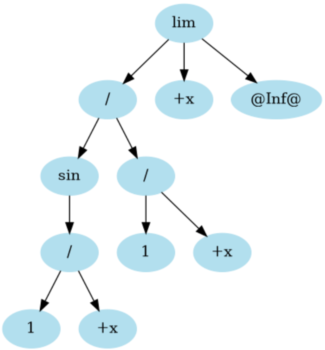
$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$



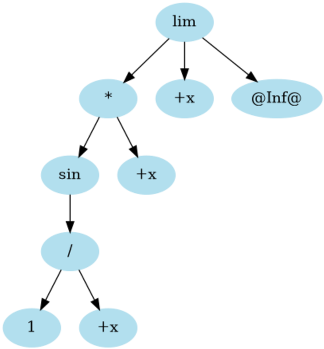
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$\rightarrow$



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$\to$$



$$\lim_{x \to +\infty} \sin \frac{1}{x} \cdot x$$

Definizioni

Sottoespressione di una funzione

$$g(x) \lhd f(x), \text{ se } g(x) \text{ è una sottoespressione di } f(x)$$
$$g(x) \ntriangleleft f(x), \text{ se } g(x) \text{ non è una sottoespressione di } f(x)$$

Classe di Comparabilità

$$\begin{aligned} f(x) \prec g(x) \text{ se e solo se } & \lim_{x\to\infty} \frac{\ln|\ f(x)\ |}{\ln|\ g(x)\ |} = 0 \\ f(x) \asymp g(x) \text{ se e solo se } & \lim_{x\to\infty} \frac{\ln|\ f(x)\ |}{\ln|\ g(x)\ |} \neq 0 \in R \end{aligned} \qquad (2)$$

Definizione di MRV

MRV

È l'insieme di sottoespressioni della funzione con la più alta classe di comparabilità.

$$mrv(f(x)) = \begin{cases} \{\} & \text{if } x \ntriangleleft f(x) \\ \{g(x) \mid g(x) \triangleleft f(x) \wedge (\nexists\ h(x) \triangleleft f(x) \mid h(x) \succ g(x))\} & \end{cases}$$