Formulario Mecánica y Ondas

Sólido Rígido y Mecánica Analítica

Ismael Charpentier Martín

January 5, 2021

Contents

Part I

Sólido Rígido

Un sólido rígido es un cuerpo cuya distancia entre las partículas que lo forman es invariable

1 Momento de inercia:

- Distribución discreta de masa:

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_{k} x_{\alpha k}^2 - x_{\alpha i}\, x_{\alpha j} \right) \tag{1}$$

- Para una distribución continua de masa:

$$I_{ij} = \int_V \rho \left(\delta_{ij} \sum_{k} x_k^2 - x_i\, x_j \right) \tag{2}$$

- En forma matricial:

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & \cdots & I_{1n} \\ I_{21} & I_{22} & \cdots & I_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{m1} & I_{m2} & \cdots & I_{mn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

1.1 Teorema de Steiner:

Momento de inercia respecto de un origen distinto al centro de masas (CM), respetando el paralelismo de los ejes:

$$I_{ij}\Big|_o = I_{ij}\Big|_{cm} + M\left(\delta_{ij} a^2 - a_i\, a_j\right) \tag{4}$$

2 Energía cinética:

Cálculo general de la energía cinética para un sólido rígido:

$$[i]T = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\alpha} m_\alpha v_0^2}_{\text{T. Traslación}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\alpha} m_\alpha \left(\omega \times r_\alpha\right)^2}_{\text{T. Rotación}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\alpha} r_\alpha \cdot \left(v_0 \times \omega\right)}_{\text{U.T}} \tag{5}$$

Este último término es igual a cero cuando ($U.T = 0$):

(i) $v_0 = 0$: Rotación pura que pasa por O.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha} m_\alpha \left(\omega \times r_\alpha\right)^2 \tag{6}$$

(ii) $v_0 \,||\, \omega$: Eje de rotación y deslizamientto que pasa por O.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha} m_\alpha v_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha} m_\alpha \left(\omega \times r_\alpha\right)^2 \tag{7}$$

(iii) $O \equiv CM$: El origen de coordenada coincide con el centro de masas.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha} m_\alpha v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha} m_\alpha \left(\omega_{cm} \times r_\alpha\right)^2 \tag{8}$$

Part II

Mecánica Analítica:

3 Formulación Lagrangiana:

- **Coordenadas generalizadas:** Se toman tantas como sean necesarias para describir *totalmente* el sistema, es decir, tantas como grados de libertad (g.l)

$$q_i \qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, g.l \tag{9}$$

- **Ligaduras:** Fuerza o restricción del movimiento.

  – Holónomas: Función de la posición de las partículas (r) (puede depender o no explícitamente del tiempo)

$$f(r_1, r_2, \cdots, t) = 0 \tag{10}$$

  – No holónomas: Además pueden depender de las velocidades:

$$f(r_1, r_2, ..., \frac{dr_1}{dt}, \frac{dr_2}{dt}, ..., t) = 0 \tag{11}$$

- **Lagrangiana:**

$$\boxed{\mathscr{L} = T - V} \tag{12}$$

$$T \equiv \text{energía cinética del sistema}$$
$$V \equiv \text{potencial del campo}$$

- **Principio de D'Alambert:**

$$\underbrace{\sum_i (F_i^a - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i}_{\text{Trabajo de las fuerzas aplicadas más una fuerza inversa}} + \underbrace{\sum_i \cdot f_i \delta r_i}_{\text{Trabajo fuerzas de ligadura}} \tag{13}$$

Cuando las fuerzas de ligadura no realizan trabajo (casos vistos en clase)

$$\sum_i (F_i^a - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i = 0 \tag{14}$$

- **Ecuaciones de transformación a coord. generalizadas:**
  - Posición:
$$r_i \equiv r_i(q_1, q_2, ..., q_n, t) \tag{15}$$
  - Desplazamiento virtual:
$$\delta r_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \cdot \delta q_j \tag{16}$$
  - Velocidad:
$$v_i \equiv \sum_k \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t} \tag{17}$$
  - Fuerza generalizada:
$$\boxed{Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j}} \tag{18}$$

- **Ecuaciones de Lagrange**

  Condición: Ligaduras holónomas, $f(r_1, r_2, ..., t) = 0$, entonces:
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \tag{19}$$

  Condiciones: Ligaduras holónomas Y Fuerzas derivan de un potencial escalar y no depende de la velocidad, $V \neq V(\dot{q}_j)$, entonces:
$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j} = 0} \tag{20}$$

  tambien:
$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{21}$$

4 Formulación Hamiltoniana:

- **Momento generalizado canónico:**

$$\boxed{P_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}} \tag{22}$$

- **Coordenadas cíclicas:** Las coordenadas cíclicas no aparecen explicitamente en el Lagrangiano del sistema

$$\mathscr{L} \neq \mathscr{L}(q_c) \Longrightarrow \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_c} = 0 \tag{23}$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_c} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}P_c = 0 \Longleftrightarrow P_c \equiv cte \tag{24}$$

- **Conservación del momento lineal:**

Si la coordenada q_j es una coordenada de traslación, es decir, dq_j supone un desplazamiento del sistema en la dirección $\hat{n}$ y además es coordenada cíclica:

$$P_j \equiv p_{\hat{n}} = cte \tag{25}$$

- **Conservación del momento angular:**

Si la coordenada q_j es una coordenada de rotación, es decir, dq_j supone una rotación del sistema respecto a un eje $\hat{n}$ y, además, es coordenada cíclica:

$$P_j \equiv L_{\hat{n}} = cte \tag{26}$$

- **Conservación de la energía total:**

Condiciones:

  - $V \neq V(\dot{q})$, Las fuerzas derivan de un potencial independiente de las velocidades
  - Ligaduras independientes del tiempo. $f \neq f(t)$

Definimos el Hamiltoniano del sistema:

$$\boxed{H = \sum_j \dot{q}_j P_j - \mathscr{L}} \tag{27}$$

- **Teorema:**

  Sistema dinámico de s grados de libertad, configuración determinada por las coord. generalizadas q_j. Si

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t} = 0 \Longrightarrow H = cte \tag{28}$$

  $H = T + V$, si:

  – V no es función explicita de $\dot{q}_j$ ni de t:

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad y \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{29}$$

  – Las ecs. de transformación $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j)$ no interviene t:

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0 \tag{30}$$

  – T es función cuadrática homogénea de las velocidades:

$$T(k\dot{q}_j) = k^2 T(\dot{q}_j) \tag{31}$$

  Condiciones 31 y 30 son equivalentes.

- **Ecuaciones de Hamilton:**

  Queremos pasar de $\mathscr{L} \equiv \mathscr{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$ a otra función $H \equiv H(q_j, P_j, t)$

$$\boxed{\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial P_j}; \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}} \tag{32}$$

- **Resolución práctica:**

  – Obtención de $\mathscr{L}$
  – Cálculo de $P_j = \partial \mathscr{L} / \partial q_j$
  – Obtención de $H = \sum_j \dot{q}_j P_j - \mathscr{L}$ o bien aplicando el teorema
  – Cálculo de las ecuaciones de Hamilton (32)