

# Formulario Mecánica y Ondas

Sólido Rígido y Mecánica Analítica

Ismael Charpentier Martín

January 5, 2021

# Contents

<b>I</b>	<b>Sólido Rígido</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Momento de inercia:</b>	<b>3</b>
1.1	Teorema de Steiner: . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Energía cinética:</b>	<b>4</b>
<b>II</b>	<b>Mecánica Analítica:</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Formulación Lagrangiana:</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Formulación Hamiltoniana:</b>	<b>6</b>

## Part I

# Sólido Rígido

Un sólido rígido es un cuerpo cuya distancia entre las partículas que lo forman es invariable

## 1 Momento de inercia:

- Distribución discreta de masa:

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha k}^2 - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right) \quad (1)$$

- Para una distribución continua de masa:

$$I_{ij} = \int_V \rho \left( \delta_{ij} \sum_k x_k^2 - x_i x_j \right) \quad (2)$$

- En forma matricial:

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & \cdots & I_{1n} \\ I_{21} & I_{22} & \cdots & I_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{m1} & I_{m2} & \cdots & I_{mn} \end{pmatrix} \quad (3)$$

### 1.1 Teorema de Steiner:

Momento de inercia respecto de un origen distinto al centro de masas (CM), respetando el paralelismo de los ejes:

$$I_{ij} \Big|_o = I_{ij} \Big|_{cm} + M (\delta_{ij} a^2 - a_i a_j) \quad (4)$$

## 2 Energía cinética:

Cálculo general de la energía cinética para un sólido rígido:

$$[i]T = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_0^2}_{\text{T. Traslación}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\omega \times r_{\alpha})^2}_{\text{T. Rotación}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\alpha} r_{\alpha} \cdot (v_0 \times \omega)}_{\text{U.T}} \quad (5)$$

Este último término es igual a cero cuando ( $U.T = 0$ ):

(i)  $v_0 = 0$ : Rotación pura que pasa por O.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\omega \times r_{\alpha})^2 \quad (6)$$

(ii)  $v_0 \parallel \omega$ : Eje de rotación y deslizamiento que pasa por O.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\omega \times r_{\alpha})^2 \quad (7)$$

(iii)  $O \equiv CM$ : El origen de coordenada coincide con el centro de masas.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\omega_{cm} \times r_{\alpha})^2 \quad (8)$$

## Part II

# Mecánica Analítica:

## 3 Formulación Lagrangiana:

- **Coordenadas generalizadas:** Se toman tantas como sean necesarias para describir *totalmente* el sistema, es decir, tantas como grados de libertad (g.l)

$$q_i \quad i = 1, 2, \dots, g.l \quad (9)$$

- **Ligaduras:** Fuerza o restricción del movimiento.
  - Holónomas: Función de la posición de las partículas ( $r$ ) (puede depender o no explícitamente del tiempo)

$$f(r_1, r_2, \dots, t) = 0 \quad (10)$$

- No holónomas: Además pueden depender de las velocidades:

$$f(r_1, r_2, \dots, \frac{dr_1}{dt}, \frac{dr_2}{dt}, \dots, t) = 0 \quad (11)$$

- **Lagrangiana:**

$$\mathcal{L} = T - V \quad (12)$$

$T \equiv$  energía cinética del sistema

$V \equiv$  potencial del campo

- **Principio de D'Alembert:**

$$\underbrace{\sum_i (F_i^a - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i}_{\text{Trabajo de las fuerzas aplicadas más una fuerza inversa}} + \underbrace{\sum_i f_i \delta r_i}_{\text{Trabajo fuerzas de ligadura}} \quad (13)$$

Cuando las fuerzas de ligadura no realizan trabajo (casos vistos en clase)

$$\sum_i (F_i^a - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i = 0 \quad (14)$$

- **Ecuaciones de transformación a coord. generalizadas:**

- Posición:

$$r_i \equiv r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (15)$$

- Desplazamiento virtual:

$$\delta r_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \cdot \delta q_j \quad (16)$$

- Velocidad:

$$v_i \equiv \sum_k \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad (17)$$

- Fuerza generalizada:

$$Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \quad (18)$$

- **Ecuaciones de Lagrange**

Condición: Ligaduras holónomas,  $f(r_1, r_2, \dots, t) = 0$ , entonces:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (19)$$

Condiciones: Ligaduras holónomas Y Fuerzas derivan de un potencial escalar y no depende de la velocidad,  $V \neq V(\dot{q}_j)$ , entonces:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad (20)$$

tambien:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (21)$$

## 4 Formulación Hamiltoniana:

- **Momento generalizado canónico:**

$$P_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \quad (22)$$

- **Coordenadas cíclicas:** Las coordenadas cíclicas no aparecen explícitamente en el Lagrangiano del sistema

$$\mathcal{L} \neq \mathcal{L}(q_c) \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_c} = 0 \quad (23)$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_c} = 0 \implies \frac{d}{dt} P_c = 0 \iff P_c \equiv cte \quad (24)$$