Вероятностные дисциплины, ФПМИ МФТИ 2017-2020

Иванов Вячеслав Владимирович
группа 699

Оглавление

Часть I

Основы вероятности и теории меры, ФИВТ, семестр 3

1 Вероятностное пространство как математическая модель случайного эксперимента. Статистическая устойчивость.

Для формализации исходов эксперимента в вероятностных терминах (сигма-алгебра событий, вероятностная мера на ней) необходимо выполнение принципа статистической устойчивости: частота исходов не меняется во времени.
Несколько забегая вперёд, определим следующие основополагающие понятия:

Определение 1.1. $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ — называют **сигма-алгеброй** над множеством событий Ω, если $\Omega \in \mathcal{F}$, а также $\mathcal{F}$ замкнуто относительно дополнения и счётного объединения своих компонент.

Определение 1.2. В аксиоматике Колмогорова **вероятностной мерой** называют отображение $\mathcal{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$, нормированное ($\mathcal{P}(\Omega) = 1$) и счётно-аддитивное.
Непосредственно из определения выводятся следующие полезные свойства вероятностной меры:

1. $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$
2. $\forall A, B \in \mathcal{F} : A \subseteq B \implies \mathcal{P}(A) \leq \mathcal{P}(B)$
3. $\mathcal{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathcal{P}(A)$
4. **Формула включений-исключений.**
5. **Непрерывность вероятностной меры**:

$$\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} : (\forall i (A_{i+1} \subseteq A_i) \wedge \cap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset) \implies \lim_{i \to \infty} \mathcal{P}(A_i) = 0$$

Определение 1.3. В данных выше обозначениях, пара $(\Omega, \mathcal{F})$ называется **измеримым пространством**, а тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ — **вероятностным пространством**.

2 Дискретное вероятностное пространство. Классическая вероятность. Построение простейших вероятностных пространств. Элементы комбинаторики. Вероятность суммы событий.

TODO

$(\Omega, P),\ |\Omega| \in \mathbb{N}, P(\omega_i) = const,\ i = \{1, \ldots, n\}$
Пример — урновая схема. Шаров в урне N, $w = (i_1, \ldots, i_k),\ i_j$ — номер шара.

1. Урновая схема: выбор с порядком без возвращения
   - $|\Omega| = N \ldots (N - K + 1)$
2. Урновая схема: выбор с порядком с возвращением:
   - $|\Omega| = N^k$
3. Урновая схема: выбор без порядка без возвращения:
   - $|\Omega| = C_n^k$
4. Урновая схема: выбор без порядка с возвращением:
   - $|\Omega| = C_{n+k-1}^k$

3 Условная вероятность. Формулы полной вероятности, умножения и Байеса.

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}),\ B \subseteq \Omega$$
$$\Omega_B := B,\ \mathcal{F}_B := \{A \cap B | A \in \mathcal{F}\},\ \mathcal{P}_B := \mathcal{P}|_{\mathcal{F}_B}$$
$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$$

1. **Формула полной вероятности**

   Теорема 3.1.
   $$B_i \cap B_j = \emptyset,\ \bigsqcup_i B_i = \Omega \implies P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

   Доказательство. Следует из аддитивности и определения условной вероятности. □

2. **Формула умножения вероятностей**
   $$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\dots P(A_n|A_1\ \cap \dots \cap A_{n-1})$$

3. **Формула Байеса (апостериорная вероятность)**
   $$P(B_k|A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}$$

4 Геометрическая вероятность. "Задача о встрече”

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n,\ \mathcal{F} := \{A \mid A \subseteq \Omega\},\ \mathcal{P}(A) := \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

где μ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Продолжение —в конспектах НГУ.

5 Независимость событий, виды и взаимосвязь.

Определение 5.1. $A \perp\!\!\!\perp B \iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Пример 5.1. Схема Бернулли:
Доказать независимость событий: (первая монета — орлом) $\perp\!\!\!\perp$ (последняя монета — решкой)

Решение.
$$w = (i_1, \dots, i_n),\ i_j \in \{0; 1\}$$
$$P(w) = p^{\sum_{i=1}^n i_j} \cdot q^{n - \sum_{i=1}^n i_j},\ p + q = 1$$
$$P(A) = \sum_{w \in A:\ w_1 = 1} P(w) = \sum_{(i_1, \dots, i_n),\ i_1 = 1} p^{1 + \sum_{i=2}^n i_j} \cdot q^{n-1-\sum_{j=2}^n i_j} = p \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-k-1}$$
$$= p(p+q)^{n-1} = p$$

Аналогично, $P(B) = q$.
Следовательно, $P(A \cap B) = p \cdot q \implies A \perp\!\!\!\perp B$ □

Определение 5.2. События называются **попарно независимыми**, если

$$\forall i, j:\ P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

Определение 5.3. События называются **независимыми в совокупности**, если утверждение выше верно для произвольного конечного набора индексов.

Пример 5.2. Тетраэдр Бернштейна

Пример 5.3. Есть и более простой пример: рассмотрим три монеты и события '1 и 2 упали одной стороной', '2 и 3 упали одной стороной', '1 и 3 упали одной стороной'. Очевидно, они попарно независимы, но не независимы в совокупности, т.к. одновременное выполнение любых двух эквивалентно одновременному выполнению всех трёх.

6 Случайные величины. Независимость случайных величин. Распределение. Примеры. Математическое ожидание, дисперсия, ковариация, корреляция. Свойства

Определение 6.1. Если Ω конечно, то **случайной величиной** называют функцию $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

Определение 6.2. Случайная величина ξ называется **дискретной**, если $|\text{Im}(\xi)| \leq \aleph_0$.

Определение 6.3. Если ξ — дискретная случайная величина, $\text{Im}(\xi) = \{a_i\}$, то $\{p_i\}$ называют **распределением случайной величины**:

$$p_i := P(\xi = a_i) = P(\{w \in \Omega \mid \xi(w) = a_i\})$$

Проблемы:

1. Если $\text{Im}\xi$ более чем счётно, как задать распределение?
2. Как оценивать вероятности вида $P(\xi \geq \alpha)$?

Определение 6.4. Дискретные случайные величины ξ и η называются **независимыми**, если $\forall a_i \in \text{Im}(\xi),\ b_j \in \text{Im}(\eta) : \mathcal{P}(\xi = a_i,\ \eta = b_j) = \mathcal{P}(\xi = a_i)\mathcal{P}(\eta = b_j)$.

Определение 6.5. В дискретном случае, **математическим ожиданием** называется сумма:

$$\mathbb{E}[\xi] := \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) \cdot P(\omega)$$

В терминах индикаторов можно дать ещё одно полезное определение случайной величины:

$$\xi : \Omega \to X,\ \xi(\omega) := \sum_i a_i I_{A_i}(\omega),\ A_i := \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = a_i\}$$

Оно особенно естественное, если смотреть на матожидание как на интеграл Лебега, т.к. та же самая формула по определению и получается для интеграла Лебега простой случайной величины.

Утверждение 6.1. (Свойства математического ожидания)

1. $\mathbb{E}[a\xi + b\eta] = a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$
2. $\mathbb{E}\xi = \sum_{a_i \in \text{Im}(\xi)} a_i \mathcal{P}(\xi = a_i)$
3. $\eta := \phi(\xi) \implies \mathbb{E}[\eta] = \sum_i \phi(a_i)\mathcal{P}(\xi = a_i)$
4. $\xi \geq 0 \implies \mathbb{E}\xi \geq 0$
5. $\xi \leq \eta \implies \mathbb{E}\xi \leq \mathbb{E}\eta$
6. $|\mathbb{E}\xi| \leq \mathbb{E}|\xi|$

7. $\xi \perp\!\!\!\perp \eta \implies \mathbb{E}[\xi\eta] = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$

Доказательство.

1. $\mathbb{E}[a\xi + b\eta] = \sum_{w\in\Omega}(a\xi(\omega) + b\eta(\omega))\mathcal{P}(\omega) = a\sum_{w\in\Omega}\xi(\omega)\mathcal{P}(\omega) + b\sum_{w\in\Omega}\eta(\omega)\mathcal{P}(\omega) = a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$

2. $$\mathbb{E}\xi = \sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)\cdot\mathcal{P}(\omega) = \sum_{a_i\in\mathrm{Im}(\xi)}\sum_{\omega\in\Omega:\ \xi(\omega)=a_i}\xi(\omega)\cdot\mathcal{P}(\omega) =$$
$$= \sum_{a_i\in\mathrm{Im}(\xi)} a_i \sum_{\omega\in\Omega:\ \xi(\omega)=a_i}\mathcal{P}(\omega) = \sum_{a_i\in\mathrm{Im}(\xi)} a_i\cdot\mathcal{P}(\xi = a_i)$$

3. Следует из 2.

4. Следует из определения.

5. $\eta - \xi \geq 0 \implies \mathbb{E}(\eta - \xi) = \mathbb{E}\eta - \mathbb{E}\xi \geq 0$.

6. Следует из определения.

7. $$\mathbb{E}[\xi\eta] = \sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)\eta(\omega)\mathcal{P}(\omega) = \sum_{i,j} a_i b_j \mathcal{P}(\xi = a_i, \eta = b_j)$$
$$= \sum_{i,j} a_i b_j \mathcal{P}(\xi = a_i)\mathcal{P}(\eta = b_j) = \sum_i a_i \mathcal{P}(\xi = a_i)\sum_j b_j\mathcal{P}(\eta = b_j) = \mathbb{E}\xi\cdot\mathbb{E}\eta$$

□

Определение 6.6. $\mathrm{Var}\xi := \mathbb{E}[\xi - \mathbb{E}\xi]^2$ — **дисперсия** случайной величины ξ.

Определение 6.7. $\mathrm{cov}(\xi, \eta) := \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)]$ — **ковариация** случайных величин ξ и η.

Утверждение 6.2 (Свойства дисперсии[1])**.**

1. $\mathrm{Var}(\xi) = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$
2. $\mathrm{Var}(\xi) \geq 0$
3. $\mathrm{Var}(\xi + c) = \mathrm{Var}(\xi)$ — инвариантность относительно сдвига.
4. $\mathrm{Var}(c\xi) = c^2\ \mathrm{Var}(\xi)$
5. $\mathrm{Var}(\xi + \eta) = \mathrm{Var}(\xi) + \mathrm{Var}(\eta) + 2\mathrm{cov}(\xi, \eta)$

Утверждение 6.3 (Свойства ковариации)**.**

1. $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}[\xi\eta] - \mathbb{E}[\xi]\mathbb{E}[\eta]$
2. $\mathrm{cov}(\cdot,\cdot)$ — симметричная положительно полуопределённая билинейная форма. Для неё, кроме прочего, верно неравенство Коши-Шварца: $|\mathrm{cov}(\xi, \eta)| \leq \sqrt{\sigma^2(\xi)\sigma^2(\eta)}$. В частности, при таком подходе дисперсия выступает в роли скалярного квадрата, а стандартное отклонение — в роли нормы случайной величины как элемента линейного пространства.
3. $\xi \perp\!\!\!\perp \eta \implies \mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Определение 6.8. $\mathrm{corr}(\xi, \eta) := \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)}\left(= \frac{(\xi,\eta)}{||\xi||||\eta||}\right)$ — **корреляция** случайных величин ξ и η.

[1] Здесь и далее доказательства предложений тривиально следуют из определений описываемых ими величин.

7 Схема испытаний Бернулли. Предельные теоремы: Пуассона и Муавра-Лапласа.

Теорема 7.1 (Муавра-Лапласа, De Moivre-Laplace theorem[1]).
Рассмотрим схему испытаний Бернулли с $p \in (0,1)$:
Формулировка 1:

$$P_n(k) := \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, & k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad P_n(a,b] := \sum_{a<x\le b} P_n(np + x\sqrt{npq})$$

Тогда

$$\sup_{-\infty\le a<b\le+\infty} \left| P_n(a,b] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \right| \to 0$$

Или

$$\sup_{-\infty\le a<b\le+\infty} \left| P_n\left\{ a < \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{Var} S_n}} \le b \right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \right| \to 0$$

$$\text{где } S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad \xi_i := \mathbf{I}_{\{\omega\in\Omega:\omega[i]=1\}}$$

Формулировка 2:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}},\ p+q=1,\ p,q>0$$

Теорема 7.2 (Пуассона, Poisson's limit theorem[2]). В обозначениях предыдущей теоремы

$$p = p(n) \to 0,\ np(n) \to \lambda > 0 \implies P_n(k) \to \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

8 Системы множеств (полукольца, кольца, алгебры, сигма-алгебры). Примеры. Минимальное кольцо, содержащее полукольцо. Понятие наименьшего кольца, алгебры, сигма-алгебры, содержащей систему множеств.

Определение 8.1. Система множеств S называется *полукольцом*[3], если:

1. $\emptyset \in S$
2. $\forall A, B \in S : A \cap B \in S$
3. $\forall A, A' \in S (A' \subseteq A \implies \exists A_1, \dots, A_n \in S : A' \sqcup_{i=1}^n A_i = A)$.

Если при этом $\exists E \in S\ \forall A \in S : A \subseteq E$, то S называют **полукольцом с единицей**.

Определение 8.2. Непустая система множеств R называется **кольцом**, если:

$$\forall A, B \in R:\ A \cap B,\ A \triangle B \in S$$

Кольцо с единицей называется **алгеброй** множеств.
Алгебра, замкнутая относительно дополнения и счётного объединения, называется **σ-алгеброй**.
Замена в последнем определении объединения на пересечение даёт **δ-алгебру**.

[1] "Normal distribution may be used as an approximation to the binomial distribution"
[2] "Poisson distribution may be used as an approximation to the binomial distribution, under certain conditions."
[3] никакой связи с полукольцом в смысле абстрактной алгебры, обсуждение на stackexchange

Утверждение 8.1. Кольцо множеств является полукольцом. Более того,

$$\forall A, B \in R : A \cup B,\ A \setminus B \in R$$

Доказательство. Про полукольцо очевидно, а $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B),\ A \setminus B = B \triangle (A \cup B)$. $\square$

Утверждение 8.2. Пересечение любого семейства колец является кольцом.

Утверждение 8.3. Пересечение любого семейства σ-алгебр с одной единицей является σ-алгеброй.

Определение 8.3. Минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые $A \subseteq \mathbb{R}^n$ — **Борелевская**.

Лемма 8.1. Пусть $A, A_1, \ldots, A_n \in S,\ \bigsqcup_{i=1}^n A_i \subseteq A$, тогда

$$\exists A_{n+1}, \ldots, A_s \in S : A = \bigsqcup_{i=1}^{s} A_i$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией по n.
База: при $n = 1$ утверждение следует из определения полукольца.
Шаг: $n > 1$. Пусть

$$A = \left(\bigsqcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{s} B_j\right)$$
$$A_n \subseteq A,\ A_n \in S,\ \forall i < n : A_i \cap A_n = \emptyset$$

По определению полукольца,

$$\exists C_1, \ldots, C_l \in S : A = A_n \bigsqcup \left(\bigsqcup_{k=1}^{l} C_k\right)$$
$$A \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigsqcup_{j=1}^{s} B_j\right) \setminus A_n = \left(\bigsqcup_{j=1}^{s} B_j\right) \bigcap (A \setminus A_n) = \left(\bigsqcup_{j=1}^{s} B_j\right) \bigcap \left(\bigsqcup_{k=1}^{l} C_k\right)$$

Введём обозначения: $D_{j,k} := B_j \cap C_k$.
Тогда $A = \left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup\limits_{j,k} D_{j,k}\right)$ $\square$

Лемма 8.2. Если $A_1, \ldots, A_n \in S$, то найдутся попарно непересекающиеся $B_1, \ldots, B_s \in S$, такие что каждое A_i представляется в виде объединения каких-то из B_j.

Доказательство. Проведём доказательство индукцией по n.
База, $n = 1$: следует из определения полукольца.
Шаг, $n > 1$: пусть $B_1, \ldots, B_l$ — искомые множества для $A_1, \ldots, A_{n-1}$.
Пересечём A_n с каждым из B_j и применим предыдущую лемму.
Введём обозначения $C_j := B_j \cap A_n$.
По лемме 8.1, $A_n := (\bigsqcup_{j=1}^{l} C_j) \sqcup (\bigsqcup_{k=1}^{m} D_k),\ D_k \in S$.
Далее, по определению полукольца, $B_j := C_j \sqcup (\bigsqcup_{k=1}^{m_j} E_{j,k}),\ E_{j,k} \in S$.
Полученные множества $\{C_j\}, \{D_k\}, \{E_{j,k}\}$ — искомые для $A_1, \ldots, A_n$. $\square$

Теорема 8.1 (О минимальном кольце $R(S)$, содержащем полукольцо S)**.**
Минимальное продолжение полукольца S до кольца $R(S) := \{\bigsqcup_{i=1}^n A_i \mid A_i \in S\}$.

Доказательство. Введём обозначение $K(S) := \{\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \mid A_i \in S\}$.
Докажем, что $K(S)$ — кольцо.
Рассмотрим $A := \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i,\ B := \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j$.
Введём обозначение $C_{i,j} := A_i \cap B_j$. По построению $C_{i,j} \in S$.
Тогда $A \cap B = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m} C_{i,j} \in K(S)$.
По лемме 8.1, $\begin{cases} A_i = (\bigsqcup_{j=1}^{m} C_{i,j}) \sqcup (\bigsqcup_{k=1}^{s} D_{i,k}) & 1 \le i \le n \\ B_j = (\bigsqcup_{i=1}^{n} C_{i,j}) \sqcup (\bigsqcup_{k=1}^{l} E_{k,j}) & 1 \le j \le m \end{cases}$
Отсюда $A \triangle B = (\bigsqcup_{k=1}^{s} D_{i,k}) \sqcup (\bigsqcup_{k=1}^{l} E_{k,j}) \in K(S)$.
Очевидно, всякое кольцо, продолжающее S, содержит $K(S)$.
Значит, $R(S) := K(S)$ — минимальное продолжение полукольца S до кольца. □

Теорема 8.2. Для всякой системы множеств X существует минимальное кольцо $R(X)$.

Доказательство. Введём обозначения $U := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda,\ X := \{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.
Пусть $\mathcal{R} := \{R_\beta(X)\}_{\beta \in \Gamma}$ — совокупность всех колец, содержащих X и содержащихся в 2^U.
Положим $R(X) := \cap_{\beta \in \Gamma} R_\beta(X)$. По предложению 8.2., $R(X)$ — кольцо.
Его минимальность очевидна по построению.[1] □

9 Меры на полукольцах. Классическая мера Лебега на полукольце промежутков и ее сигма-аддитивность.

Определение 9.1. Пусть S — полукольцо множество, тогда отображение $m : S \to [0; +\infty]$ называют **мерой**, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- $m(\emptyset) = 0$
- **Монотонность**: $\forall A, B \in S : A \subseteq B \implies m(A) \le m(B)$
- **Конечная аддитивность**: $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i,\ A_i \in S \implies m(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} m(A_i)$

В общем случае[2] требуется неотрицательность, монотонность и конечная аддитивность.

Лемма 9.1. [3] Мера m на полукольце S монотонна, т.е. $\forall A, B \in S : B \subseteq A \implies m(B) \le m(A)$

Доказательство. Если $A, A_1, \ldots, A_n \in S$ и:

- Если $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, то $m(A) \le \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$.
  Применим лемму 8.2. к множествам $A, A_1, \ldots, A_n$. Получим набор непересекающихся множеств B_j из S. Поскольку всякое B_j, входящее в разложение A, войдёт в разложение хотя бы одного из A_i, а в разложение $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ каждое B_j войдёт хотя бы раз, верна оценка:
  $$\sum_{i=1}^{n} m(A_i) \ge \sum_{j=1}^{m} m(B_j) \ge m(A)$$
- Если $\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A$, то $\sum_{i=1}^{n} m(A_i) \le m(A)$.
  По лемме 8.1 $\exists A_{n+1}, \ldots, A_s : A = \bigsqcup_{i=1}^{s} A_i$, откуда:
  $$m(A) = \sum_{i=1}^{s} m(A_i) \ge \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$
  (если A_i могут пересекаться, то нужно будет ещё воспользоваться леммой 8.2)

[1] требование лежать в булеане продиктовано возможностью построения колец сколь угодно большой мощности, что приводит к теоретико-множественным парадоксам при попытке определить $\mathcal{R}$.
[2] читай "для произвольной системы множеств".
[3] её зачем-то разбивают на две части, но мне это кажется необоснованным

$\square$

Следствие 9.1.
Если m — мера на полукольце S и $A, A_1, \ldots \in S$, $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A$, то $m(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$.

Доказательство.

$$\forall n : \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A, \text{ значит } m(A) \geq \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

$$\text{откуда } m(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

$\square$

Определение 9.2. Классической мерой Лебега на полукольце промежутков называют меру, сопоставляющую n-мерным брусам $\times_{i=1}^{n}\{a_i, b_i\}$ объём $\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$.

Теорема 9.1. Определённая таким образом функция — σ-аддитивная мера.

Доказательство.
Неотрицательность очевидна, потому докажем вначале конечную, а затем и σ-аддитивность.
• **Конечная аддитивность**:
Воспользуемся индукцией по размерности n пространства.
База, $n = 1$: очевидно.
Шаг, $n > 1$: *полезно представлять себе написанное ниже как решение методом сканирующей гиперплоскости задачи об объёме объединения n-мерных брусов в том простом случае, когда они попарно не пересекаются (в предположении, что для размерности* $n-1$ *мы умеем её решать). Идея очень проста: в качестве событий примем проекции брусов на* n*-ую координатную ось (грубо говоря, нарежем объемлющий брус на слои), и для каждого слоя будем прибавлять к ответу объём среза брусов, попадающих в этот слой (т.к. "высота"фиксирована, для вычисления "площади основания"объединения брусов слоя как раз понадобится предположение индукции). Интуитивно очевидно, что по завершении процедуры получится представить искомый объём в виде суммы слагаемых, из которых группировкой можно составить объём каждого из брусов разбиения, чего и хотелось. Всё, что написано дальше — формализация этой идеи.*

Здесь и далее для обозначения произвольного промежутка $I \subset \mathbb{R}$ с концами a, b будем использовать запись $\lfloor a, b \rceil$ (если $a, b \in \mathbb{R}^n$, то запись $\lfloor a, b \rceil$ описывает вид компонент).
Рассмотрим брус $\lfloor a, b \rceil := \lfloor a^1, b^1 \rceil \times \cdots \times \lfloor a^n, b^n \rceil = \lfloor a_1, b_1 \rceil \sqcup \cdots \sqcup \lfloor a_k, b_k \rceil \subset [a, b]$.
"Нарежем"его на слои по n-ой координате, рассмотрев проекцию брусов $\lfloor a_i, b_i \rceil$.
Ими порождается разбиение $a^n = c_0 < c_1 < \cdots < c_l = b^n$.
Для слоёв введём обозначение $L_s := \lfloor a^1, b^1 \rceil \times \cdots \times \lfloor a^{n-1}, b^{n-1} \rceil \times (c_{s-1}, c_s)$.
Для каждого слоя определим, какие из брусов $\lfloor a_i, b_i \rceil$ попадают в него.
Введём обозначения $E_{s,j} := \begin{cases} \lfloor a_j^1, b_j^1 \rceil \times \cdots \times \lfloor a_j^{n-1}, b_j^{n-1} \rceil & \text{если } (c_{s-1}, c_s) \subseteq \lfloor a_j^n, b_j^n \rceil \\ \emptyset & \text{иначе} \end{cases}$.
Тогда основание s-го слоя запишется так: $L_s := \bigsqcup_{j=1}^{k} E_{s,j}$.

Тогда:

$$m\lfloor a,b\rceil = \prod_{i=1}^{n}(b^i - a^i) = \sum_{s=1}^{l} m(L_s)(c_s - c_{s-1}) = \sum_{s=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{k} m(E_{s,j})\right)(c_s - c_{s-1}) =$$

$$= \sum_{s=1}^{l}\left(\sum_{\substack{j=1,\\(c_{s-1},c_s)\subset\lfloor a_j^n,b_j^n\rceil}}^{k}\ \prod_{i=1}^{n-1}(b_j^i - a_j^i)\right)(c_s - c_{s-1}) = \sum_{j=1}^{k}\left(\prod_{i=1}^{n-1}(b_j^i - a_j^i)\sum_{\substack{s=1,\\(c_{s-1},c_s)\subset\lfloor a_j^n,b_j^n\rceil}}^{l}(c_s - c_{s-1})\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\prod_{i=1}^{n}(b_j^i - a_j^i) = \sum_{j=1}^{k} m\lfloor a_j, b_j\rceil$$

• **σ-аддитивность**:[1]
Пусть $\lfloor a,b\rceil := \bigsqcup_{i=1}^{\infty}\lfloor a_i,b_i\rceil \subset \mathbb{R}^n$.
Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $[\alpha,\beta] \subseteq \lfloor a,b\rceil :\ m[\alpha,\beta] > m\lfloor a,b\rceil - \frac{\varepsilon}{2}$, а также семейство:

$$\{(\alpha_i,\beta_i)\}_{i=1}^{\infty} :\ \lfloor a_i,b_i\rceil \subseteq (\alpha_i,\beta_i),\ m(\alpha_i,\beta_i) < m\lfloor a_i,b_i\rceil + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$$

Видно, что $\lfloor \alpha,\beta\rceil \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i)$.
Пусть $\{(\alpha_{i_k},\beta_{i_k})\}_{k=1}^{s}$ — конечное подпокрытие $[\alpha,\beta]$.
Тогда:

$$m\lfloor a,b\rceil < m[\alpha,\beta] + \frac{\varepsilon}{2} \le \sum_{k=1}^{s} m(\alpha_{i_k},\beta_{i_k}) + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{s}\left(m\lfloor a_{i_k},b_{i_k}\rceil + \frac{\varepsilon}{2^{i_k+1}}\right) + \frac{\varepsilon}{2} <$$

$$< \sum_{k=1}^{\infty}\left(m\lfloor a_i,b_i\rceil + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right) + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} m\lfloor a_i,b_i\rceil + \varepsilon$$

В силу произвольности ε, $m\lfloor a,b\rceil \le \sum_{k=1}^{\infty} m\lfloor a_i,b_i\rceil$.
Обратное неравенство получается из следствия леммы 9.1.
Значит, $m\lfloor a,b\rceil = \sum_{k=1}^{\infty} m\lfloor a_i,b_i\rceil$. □

10 Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Наследование сигма-аддитивности при продолжении меры. Внешние меры Лебега и Жордана. Мера Лебега. Свойства. Сигма-алгебра измеримых множеств. Сигма-аддитивность меры Лебега на сигма-алгебре измеримых множеств.

Теорема 10.1. Пусть m — мера на полукольце S.
Тогда существует её единственное продолжение ν на кольцо $R(S)$, задаваемое формулой:

$$\nu\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) := \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

Доказательство. Для начала, проверим корректность определения ν.
Пусть $A := \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j$. Положим $C_{i,j} := A_i \cap B_j$, тогда:

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m(C_{i,j}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m(C_{i,j}) = \sum_{j=1}^{m} m(B_j)$$

[1]Доказательство немотивированное. Непонятно, с чего бы выбирать именно такие брусы. Нужно найти другое.

Далее, докажем, что ν — мера.
Её неотрицательность и монотонность[1] очевидны.
Докажем аддитивность: пусть $A, A_1, \ldots, A_n \in R(S)$ и $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$.
По определению $R(S)$ имеем:

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i = \bigsqcup_{i=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_i} A_{i,j} \in R(S),\ A_{i,j} \in S \implies \nu(A) = \sum_{i=1}^n \nu(A_i)$$

$\square$

Теорема 10.2. Если m — σ-аддитивна на S, то ν — σ аддитивна на $R(S)$.

Доказательство. Пусть $A, A_1, \dots \in R(S),\ A := \bigsqcup_{i=1}^\infty A_i$.
По определению $R(S)$ имеем $A = \bigsqcup_{i=1}^n B_i,\ A_i = \bigsqcup_{j=1}^{m_i} B_{i,j}$, где $B_i, B_{i,j} \in S$.
Положим $C_{i,j,k} := B_i \cap B_{j,k}$. Тогда:

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^n m(B_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^{m_j} m(C_{i,j,k}) = \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^{m_j} \sum_{i=1}^n m(C_{i,j,k}) = \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^{m_j} m(B_{j,k}) = \sum_{j=1}^\infty \nu(A_j)$$

где второе равенство возможно в силу σ-аддитивности m на S. $\square$

Следствие 10.1.
Если ν — σ-аддитивная мера на кольце R и $A, A_1, \dots \in R,\ A \in \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, то $\nu(A) \le \sum_{i=1}^\infty \nu(A_i)$.

Доказательство. Стандартная конструкция: $B_1 := A \cap A_1,\ B_n := (A \cap A_n) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i$.
Все эти множества лежат в $R(S)$ в силу замкнутости относительно пересечения, дополнения и конечного объединения.
Тогда

$$A := \bigcup_{n=1}^\infty B_n$$
$$\nu(A) = \sum_{n=1}^\infty \nu(B_n) \le \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n)$$

$\square$

Условимся далее, что на полукольце S с единицей E задана σ-аддитивная мера m, а ν — её продолжение на $R(S)$. Покажем, как продолжить ν до μ — σ-аддитивной меры на $\sigma(S)$.

Определение 10.1. Внешняя мера Жордана:

$$\forall A \subset E,\ \mu^*(A) := \inf_{\substack{A_1,\ldots,A_n \in S \\ A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i}} \sum_{i=1}^n m(A_i)$$

Определение 10.2. Внешняя мера Лебега:

$$\forall A \subset E,\ \mu^*(A) := \inf_{\substack{A_1,A_2,\dots \in S \\ A \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i}} \sum_{i=1}^n m(A_i)$$

Теорема 10.3 (О σ-полуаддитивности внешней меры Лебега)**.**
Если $A, A_1, A_2, \ldots E$ и $A \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, то $\mu^*(A) \le \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i)$

[1] По лемме 8.2.

Доказательство. По определению инфимума,

$$\forall\varepsilon>0\ \forall i\ \exists\{A_{i,j}\}_{j=1}^{\infty},\ A_{i,j}\in S : A_i\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{i,j},\ \sum_{j=1}^{\infty}m(A_{i,j})<\mu^*(A_i)+\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$$

Ясно, что $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{i,j}$. По счётной аддитивности меры m,

$$\mu^*(A)\le m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}A_{i,j}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}m(A_{i,j})<\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)+\varepsilon$$

В силу произвольности ε, $\mu^*(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$. □

Следствие 10.2. $\forall A,B\subseteq E:\ |\mu^*(A)-\mu^*(B)|\le\mu^*(A\triangle B)$

Доказательство. Пусть для определённости $\mu^*(A)\ge\mu^*(B)$, тогда $A\subseteq B\cup(A\triangle B)$.
По полуаддитивности, $\mu^*(A)\le\mu^*(B)+\mu^*(A\triangle B)$. □

Определение 10.3 (Критерий измеримости по Лебегу)**.**
$A\subseteq E$ **измеримо по Лебегу**, если:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists A_\varepsilon\in R(S):\mu^*(A\triangle A_\varepsilon)<\varepsilon$$

Совокупность всех измеримых подмножеств E обозначим через $\mathcal{M}(\mu)$.

Лемма 10.1. $\mathcal{M}(\mu)$ — алгебра.

Доказательство. $E\in\mathcal{M}(\mu)$, т.к. $\mu^*(E)=m(E)$.
Пусть $A,B\in\mathcal{M}(\mu)$. Нужно показать, что $A\triangle B,\ A\cap B\in M$.
Для данного $\varepsilon>0$ выберем $A_{\varepsilon/2},B_{\varepsilon/2}$ из определения измеримости по Лебегу. Тогда:

$$\begin{cases}(A\cap B)\triangle(A_{\varepsilon/2}\cap B_{\varepsilon/2}) & \subseteq(A\triangle A_{\varepsilon/2})\cup(B\triangle B_{\varepsilon/2}),\\ (A\triangle B)\triangle(A_{\varepsilon/2}\triangle B_{\varepsilon/2}) & \subseteq(A\triangle A_{\varepsilon/2})\cup(B\triangle B_{\varepsilon/2})\end{cases}\implies\begin{cases}\mu^*((A\cap B)\triangle(A_{\varepsilon/2}\cap B_{\varepsilon/2})) & <\varepsilon,\\ \mu^*((A\triangle B)\triangle(A_{\varepsilon/2}\triangle B_{\varepsilon/2})) & <\varepsilon\end{cases}$$

Следовательно, $A\triangle B,\ A\cap B\in\mathcal{M}(\mu)$ □

Лемма 10.2. Сужение μ внешней меры Лебега μ^* на класс $\mathcal{M}(\mu)$ измеримых множеств аддитивно.

Доказательство.
Достаточно показать, что $\mu^*(A)=\mu^*(B)+\mu^*(C)$ при $B,C\in\mathcal{M}(\mu)$ и $A:=B\sqcup C$.
$\mathcal{M}(\mu)$ — алгебра, значит, $A\in\mathcal{M}(\mu)$. μ^* монотонна, значит, $\mu^*(A)\le\mu^*(B)+\mu^*(C)$.
Осталось доказать, что $\mu^*(A)\ge\mu^*(B)+\mu^*(C)$.
Выберем $B_\varepsilon,C_\varepsilon\in R(S)$ из определения измеримости по Лебегу.
Докажем, что имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\mu(A)\ge\mu(B_\varepsilon\cup C_\varepsilon)-\mu(A\triangle(B_\varepsilon\cup C_\varepsilon))= \tag{1}$$
$$=(\mu(B_\varepsilon)+\mu(C_\varepsilon)-\mu(B_\varepsilon\cap C_\varepsilon))-\mu(A\triangle(B_\varepsilon\cup C_\varepsilon))> \tag{2}$$
$$(\mu(B)+\mu(C)-2\varepsilon-\mu(B_\varepsilon\cap C_\varepsilon))-\mu(A\triangle(B_\varepsilon\cup C_\varepsilon))> \tag{3}$$
$$(\mu(B)+\mu(C)-4\varepsilon)-\mu(A\triangle(B_\varepsilon\cup C_\varepsilon))> \tag{4}$$
$$\mu(B)+\mu(C)-6\varepsilon \tag{5}$$

(1) По следствию из теоремы 10.3: $\mu^*(A)-\mu^*(B_\varepsilon\cup C_\varepsilon)\ge-\mu^*(A\triangle(B_\varepsilon\cup C_\varepsilon))$

(2) Формула включений-исключений для меры ν на $R(S)$.

(3) По следствию из теоремы 10.3: $\mu^*(B_\varepsilon) - \mu^* B \geq -\mu^*(B \triangle B_\varepsilon) > -\varepsilon$

(4) $B \cap C = \emptyset$, значит $B_\varepsilon \cap C_\varepsilon \subseteq (B_\varepsilon \setminus B) \cup (C_\varepsilon \setminus C) \subseteq (B_\varepsilon \triangle B) \cup (C_\varepsilon \triangle C)$, откуда $\mu^*(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) < 2\varepsilon$.[1]

(5) Поскольку $A \triangle (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) \subseteq (B \triangle B_\varepsilon) \cup (C \triangle C_\varepsilon)$, имеем $\mu^*(A \triangle (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)) < 2\varepsilon$.[2]

□

Теорема 10.4. $\mathcal{M}(\mu)$ — σ-алгебра.[3]

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \dots \in M$ и $A := \bigcup_{i=1}^\infty A_i$.
Перейдём к дизъюнктному объединению: $B_i := A_i \setminus \left(\bigcup_{j<i} A_j\right)$, $A = \bigsqcup_{i=1}^\infty B_i$.
Рассмотрим два возможных случая:

1. Пусть $\mu^*(A) < \infty$.
   Тогда ряд $\sum_{i=1}^\infty \mu(B_i)$ сходится, т.к. $\forall k : \sum_{i=1}^k \mu(B_i) \leq \mu^*(A)$.
   Найдём такой номер N, что хвост $\sum_{i=N+1}^\infty \mu(B_i) < \varepsilon$.
   Найдём $C_\varepsilon \in R(S) : \mu\left(C_\varepsilon \triangle \bigsqcup_{i=1}^N B_i\right) < \varepsilon$.
   Поскольку $A \triangle C_\varepsilon \subseteq \left(C_\varepsilon \triangle \bigsqcup_{i=1}^N B_i\right) \cup \left(\bigsqcup_{i=N+1}^\infty B_i\right)$.[4]
   Значит, $\mu^*(A \triangle C_\varepsilon) < 2\varepsilon$, откуда следует, что $A \in \mathcal{M}(\mu)$.

2. Пусть $\mu^*(A) = \infty$.[5].

□

Теорема 10.5. Сужение μ внешней меры Лебега μ^* на класс $\mathcal{M}(\mu)$ измеримых множеств σ-аддитивно.

Доказательство. Пусть $A := \bigsqcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{M}(\mu)$.
По σ-полуаддитвности, $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$.
В силу аддитивности μ, $\forall n : \mu(A) \geq \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$.
Переходя к пределу, получим, что $\mu(A) \geq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$.
Значит, $\mu(A) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$. □

11 Полнота и непрерывность мер. Теоремы о связи непрерывности и сигма-аддитивности.

Определение 11.1. Пусть μ — конечная мера на кольце R.
Пусть также для всех $\{A_i\}_{i=1}^\infty$, где $A_i \in R$, $A_{i+1} \subseteq A_i$ и $A := \bigcap_{i=1}^\infty A_i$ верно $\mu(A) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$.
Тогда говорят, что мера μ **непрерывна**.

Теорема 11.1 (Критерий непрерывности меры)**.**
Конечная мера μ на кольце непрерывна тогда и только тогда, когда она σ-аддитивна.

Доказательство.

[1] Пояснение: очевидно, что точка из $B_\varepsilon \cap C_\varepsilon$ не может лежать одновременно в B и C. Значит, бессмысленно рассматривать те точки B_ε, которые лежат в B, аналогично — точки C_ε, лежащие в : они уж точно не войдут в пересечение. Значит, $B_\varepsilon \cap C_\varepsilon$ лежит в том, что осталось, т.е. в $(B_\varepsilon \setminus B) \cup (C_\varepsilon \setminus C)$.

[2] Доказательство разбором случаев: рассмотреть все возможные варианты $x \in B^{\alpha_1} \cap C^{\alpha^2} \cap B_\varepsilon^{\alpha_3} \cap C_\varepsilon^{\alpha_4}$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$.

[3] В учебнике Дьяченко-Ульянова доказан только первый случай. В общем случае ниоткуда не следует, что единица кольца имеет конечную меру. Очевидный пример — $R(S)$, где S — полукольцо промежутков вещественной прямой. Тем не менее, своя логика в таком построении курса есть: мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ сигма-конечна, потому достаточно уметь оперировать мерой Лебега на брусах, где единица кольца как раз имеет конечную меру.

[4] Достаточно понять, что $(A \sqcup B) \triangle C \subseteq (A \triangle C) \cup B$, нарисовав картинку.

[5] И доказательство, которое дали на семинаре, проходит только в случае σ-конечности меры Лебега на X

- *σ-аддитивна $\implies$ непрерывна.*

  Пусть μ σ-аддитивна. Положим $B_i := A_i \setminus A_{i+1}$, тогда $A_1 \setminus A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$.

  Тогда $\mu(A_1 \setminus A) = \mu(A_1) - \mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n-1} (\mu(A_i) - \mu(A_{i+1})) = \mu(A_1) - \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
  Значит, $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

- *Непрерывна $\implies$ σ-аддитивна.*

  Пусть μ непрерывна и $C := \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i \in R,\ C_i \in R$.

  Положим $D_n := \bigsqcup\limits_{i=n}^{\infty} C_i = C \setminus \bigsqcup\limits_{i=1}^{n-1} C_i \in R$.

  Тогда $D_{i+1} \subseteq D_i$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} D_i = \emptyset$.
  По непрерывности μ, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(D_n) = 0$.
  Значит, $\mu(C) - \lim\limits_{n\to\infty} \mu\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{n-1} C_i\right) = \mu(C) - \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n-1} \mu(C_i) = 0$.
  То есть, $\mu(C) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(C_i)$.

□

Определение 11.2. Заданная на кольце $R(X) \subseteq 2^X$ мера μ называется **полной**, если

$$\forall A \in R(X) : \mu(A) = 0 \implies \forall B \subset A (\mu(B) = 0)$$

Иными словами, все подмножества множества меры нуль измеримы и также имеют меру нуль.

12 Мера Бореля. Меры Лебега-Стилтьеса на прямой и их сигма-аддитивность.

Определение 12.1. Мера Бореля — сужение меры Лебега на семейство борелевских подмножеств бруса $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$. Как и мера Лебега, она σ-аддитивна, однако её область определения уже в силу существования измеримых по Лебегу неборелевских множеств. В частности, мера Бореля необязательно полна. Пополнение меры Бореля — ещё один способ конструкции меры Лебега.

Определение 12.2. Пусть $\phi : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ — неубывающая непрерывная слева ограниченная функция. Далее, пусть $S := \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \overline{\mathbb{R}}\}$ — полукольцо с единицей. Определим на S меру $m([a, b)) := \phi(b) - \phi(a)$, лебеговское продолжение которой называется **мерой Лебега-Стилтьеса**.

Теорема 12.1. Определённая таким образом мера m σ-аддитивна на S.

Доказательство. Пусть $[a, b) = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i),\ a, b \in \mathbb{R}$.
Пользуясь непрерывностью слева, выберем такие $c < b,\ c_i < a_i$, что:

$$[a, c] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (c_i, b_i), \quad \phi(b) - \phi(c) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \phi(a_i) - \phi(c_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$$

Из полученного открытого покрытия выберем конечное подпокрытие $\{(c_{i_k}, b_{i_k})\}_{k=1}^{n}$.
Приведём все промежутки к полуоткрытым справа интервалам, получим: $[a, c) \subset \bigcup_{k=1}^{n} [c_{i_k}, b_{i_k})$.

$$m([a,b)) < m([a,c)) + \frac{\varepsilon}{2} \le \sum_{k=1}^{n} m([c_{i_k}, b_{i_k})) + \frac{\varepsilon}{2} <$$

$$< \sum_{k=1}^{n} \left(m([a_i,b_i)) + \frac{\varepsilon}{2^{i_k+1}} \right) + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=1}^{\infty} m([a_i,b_i)) + \varepsilon$$

[1] Значит, $m([a,b)) \le \sum_{i=1}^{\infty} m([a_i,b_i))$.

Если $a = -\infty$ и $(-\infty, b) := \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, то:

$$m((-\infty,b)) = m\left(\lim_{n\to\infty}[-n,b)\right) = m\left(\lim_{n\to\infty} \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap [-n,b)\right) \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_k \cap [-n,b)) \le \sum_{n=1}^{\infty} m(A_i)$$

где переход с первой строки на вторую допустим по доказанному для случая $a, b \in \mathbb{R}$.
Доказательство для случая $b = +\infty$ аналогично.
Обратное неравенство во всех случаях следует из монотонности меры m (лемма 9.1.).[2] $\square$

13 Сигма-конечные меры.

Мотивировка. σ-конечные меры обладают рядом полезных свойств:

- Для них единственно Лебегово продолжение меры — теорема Каратеодори.
- На их основе можно задать вероятностную меру на той же σ-алгебре.[3]
- Для них работает теорема Фубини-Тонелли, без которой вычисления превращаются в ад.
- В их терминах формулируется теорема Радона-Никодима, вводится плотность вероятности.

Подробнее об этом можно прочесть в англоязычной Википедии.

Определение 13.1. σ-аддитивная мера μ, определённая на σ-алгебре $\Sigma \subseteq 2^X$ называется **σ-конечной**, если $X = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\forall i : \mu(A_i) < +\infty$ ("The measure μ is called σ-finite if X is the countable union of measurable sets with finite measure. A set in a measure space is said to have σ-finite measure if it is a countable union of measurable sets with finite measure"— σ-finite measure, Wikipedia).
Более конструктивно процесс построения σ-конечной меры можно описать так[4]:
Пусть на полукольце $S \subseteq 2^X$ с единицей X задана σ-аддитивная мера m и $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \in S$.
Продлим её до σ-аддитивной меры ν на кольце $R(S)$. Теперь можно представить X в виде $\bigsqcup_{i=1}^{n} B_i$, где $B_i := A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \in R(S)$. Тогда $\forall i : R_i := R(S) \cap B_i$ — кольцо с единицей B_i.
На каждом из R_i продолжим сужение ν до σ-аддитивной меры μ_i на σ-алгебре Σ_i.

---

[1]

$$\phi(b_i) - \phi(c_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \Leftrightarrow \phi(b_i) < \phi(c_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \phi(b_i) - \phi_{a_i} < (\phi(c_i) - \phi_{a_i}) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \Leftrightarrow m([a_i,b_i)) < m([a_i,c_i)) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$$

[2] Но не оба неравенства, потому что в одну из сторон лемма работает только в конечном случае.
[3] Пояснение на английской Википедии.
[4] Ульянов-Дьяченко, стр.28

Определение 13.2. Множество $A \subseteq X$ называется *измеримым*, если $\forall i : A \cap B_i \in \Sigma_i$.
При этом:

$$\mu(A) := \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A \cap B_i)$$

Теорема 13.1. Совокупность M[1] измеримых подмножеств X образуется σ-алгебру.

Доказательство. Заметим, что $X \in M$.
Далее, пусть $C, D \in M$. По определению, $\forall i : C \cap B_i,\ D \cap B_i \in \Sigma_i$.
Значит,

$$\forall i \in \mathbb{N} : \begin{cases} (C \cap D) \cap B_i & = (C \cap B_i) \cap (D \cap B_i) \in M_i, \\ (C \triangle D) \cap B_i & = (C \cap B_i) \triangle (D \cap B_i) \in M_i \end{cases} \implies \begin{cases} C \cap D & = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} (C \cap D) \cap B_i \in M, \\ C \triangle D & = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} (C \triangle D) \cap B_i \in M \end{cases}$$

Для счётного объединения множеств из M доказательство аналогично. $\square$

Теорема 13.2. Мера μ σ-аддитивна.

Доказательство. Пусть $A := \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in M$. Тогда, по σ-аддитивности μ_i:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} (A_j \cap B_i) \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_i(A_j \cap B_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A_j \cap B_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

$\square$

Лемма 13.1. Рассмотрим два различных представления X: $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i$ и $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i'$.
Пусть μ, μ' — порождаемые ими σ-конечные меры.
Пусть для некоторых i, j множество $C_{i,j} := B_i \cap B_j' \neq \emptyset$.
Тогда если $A \subseteq C_{i,j}$ и $A \in M$, то $A \in M'$, причём $\mu'(A) = \mu(A)$.

Доказательство. На $C_{i,j}$ и μ, и μ' совпадают как продолжение меры ν с кольца $R(S) \cap C_{i,j}$.[2] $\square$

Теорема 13.3. Мера μ корректно определена.

Доказательство. Пусть $A \in M$, тогда $\forall C_{i,j} \neq \emptyset : A \cap C_{i,j} \in M$.
При этом $\mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap B_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(A \cap C_{i,j})$.
По лемме 13.1, $A \cap C_{i,j} \in M'$ и $\mu(A \cap C_{i,j}) = \mu'(A \cap C_{i,j})$.
Тогда $A \in M'$ и $\mu'(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu'(A \cap C_{i,j}) = \mu(A)$. $\square$

14 Неизмеримые множества. Теорема о структуре измеримых множеств.

Теорема 14.1 (О неизмеримом подмножестве отрезка)**.**
Отрезок $[0, 1]$ содержит неизмеримое относительно классической меры Лебега подмножество.

[1] «M» for «Measurable», «V» for «Vendetta».
[2] Caratheodory's extension theorem: Лебегово продолжение σ-конечной меры единственно.

Доказательство. Введём отношение эквивалентности: $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$.
Пусть E — множество представителей классов эквивалентности по этому отношению.
Пусть $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}} := \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$.
Рассмотрим множество $X := \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq [-1, 2],\ E_n := E + r_n$
По построению очевидно, что $[0, 1] \subset X$.
Предположим, что E измеримо.
Пусть какое-то E_n содержит измеримое подмн-во $C_n : \mu(C_n) = d > 0$[1].
Тогда $\mu(C_m := C_n - r_n + r_m) = \mu(C_n),\ C_m \subseteq E_m$.[2]
Тогда $\bigsqcup\limits_{n=0}^{\infty} C_n \subseteq \bigsqcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n \subseteq [-1, 2]$.
Откуда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(C_n) = +\infty > 3 = \mu([-1, 2])$.
Отсюда следует неизмеримость E. □

Теорема 14.2 (О множествах Витали)**.**
Пусть $A \subseteq [0, 1]$ измеримо относительно классической меры Лебега и $\mu(A) > 0$.
Тогда у A есть неизмеримое подмножество.[3]

Доказательство. Продолжая доказательство предыдущей теоремы, запишем $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A \cap E_n$. Если все $A \cap E_n$ измеримы, то хотя бы одно из них должно содержать подмножество положительной меры, что приводит к тому же противоречию: тогда A должно иметь бесконечную меру. □

Теорема 14.3. Всякое множество ненулевой меры Лебега в $\mathbb{R}^n$ имеет неизмеримое подмножество.

Доказательство.

- **Случай** $\mathbb{R}$ (для $\mathbb{R}^n$ конструкция аналогична):
  math.stackexchange, док-во на основе теоремы Штайнхауса (Steinhaus).
  Альтернатива — обобщение конструкции Витали и сведение к случаю отрезка.

- В общем случае это неверно. Контрпример — считающая мера на $\mathbb{N}$.
  Она σ-конечна, и всякий элемент σ-алгебры $2^{\mathbb{N}}$, очевидно, измерим.

□

Теорема 14.4 (О структуре измеримых множеств)**.**
Пусть μ — σ-конечная мера Лебега на σ-алгебре Σ, полученная продолжением σ-аддитивной меры с полукольца S, $A \in \Sigma$, $\mu(A) < \infty$. Тогда[4]

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \setminus A_0,\ A_0 \in \Sigma,\ \mu(A_0) = 0$$

Множества $A_{i,j}$ все лежат в $R(S)$ и при каждом i образуют возрастающий флаг $A_{i,j} \subseteq A_{i,j+1}$.
Если же положить $B_i := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$, то получим убывающий флаг $B_{i+1} \subseteq B_i$, причём $\mu(B_1) < \infty$.

[1] А хотя бы одно такое E_n должно быть, иначе мера отрезка должна быть нулевой, что абсурд.
[2] Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ инвариантна относительно сдвига.
[3] Эта же конструкция демонстрирует отсутствие счётной аддитивности внешней меры Лебега. Более того, в случае полной меры внешняя мера всякого неизмеримого множества отлична от нуля.
[4] А где в доказательстве A_0? Оно нужно для доказательства следствия, т.к. в $\mathbb{R}^n$ элементарное множество отличается от открытого на множество лебеговой меры нуль, а из элементарных уже можно получить все открытые.

Доказательство.
Пользуясь определением меры Лебега, выберем и обозначим через C_i $\frac{1}{i}$-близкое покрытие A:

$$C_i := \bigcup_{j=1}^{\infty} D_{i,j},\ \mu(C_i \setminus A) < \frac{1}{i},\ D_{i,j}\ \in S$$

Видно, что $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} D_{i,j}$, но не выполняется условие $D_{i,j} \subseteq D_{i,j+1}$.
Определим потому далее $B_1 := C_1,\ B_{i+1} := B_i \cap C_{i+1}$.
Несложно показать по индукции, что $B_i = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} E_{i,l},\ E_{i,l} \in S$.
Также $\mu(B_1) < \infty,\ \mu\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i \setminus A\right) = 0$.
Тогда достаточно положить $A_{i,j} := \bigcup\limits_{l=1}^{j} E_{i,l} \in R(S)$. □

В переводе на человеческий, любое измеримое относительно такой меры множество является пересечением не более чем счётного семейства представителей σ-алгебры, возможно, без некоторого множества нулевой меры. Полезно рассмотреть частный случай $\mathbb{R}^n$:

Следствие 14.1. Пусть μ — классическая мера Лебега на $\mathbb{R}^n$ и множество A измеримо п Лебегу. Тогда справедливы представления:

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i \setminus P_i \quad \text{и} \quad A = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \cup P_2$$

где $\{G_i\}$ — убывающий флаг открытых множеств,
$\{F_j\}$ — возрастающий флаг замкнутых множеств,
$\mu(P_1) = \mu(P_2) = 0$.

Теорема 14.5 (О структуре открытых множеств)**.**
Открытое множество в $\mathbb{R}$ — объединение не более чем счётного числа интервалов.

Доказательство. Пусть A — некоторое открытое множество.
Разобьём его на компоненты связности — счётное семейство непересекающихся интервалов.
Формально — введём отношение эквивалентности: $x \sim y \iff [x, y] \subset A$.
Покажем, что каждый класс K является интервалом.
Прямолинейная связность очевидна по построению.
Пусть $a := \inf K,\ b := \sup K$, причём $a, b \in \mathbb{R}$.[1] Покажем, что $a, b \notin A$.
Если, к примеру, $a \in A$, то $\exists \delta > 0 : (a - \delta, a + \delta) \subset A$, т.к. A открыто.
Положим $\delta' := \min(\delta, (b - a)/2)$, тогда $[a - \delta', a + \delta'] \subset A$.
Известно, что $a + \delta' \in K$. Но тогда K можно расширить, а значит это не класс. □

Следствие 14.2.
Открытое подмножество в $\mathbb{R}$ — объединение не более чем счётного числа компактов.

Доказательство. $(a, b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$, остальные случаи — аналогично. □

[1] Случай бесконечной крайней точки тривиален.

15 Измеримые функции. Их свойства. Измеримые функции и предельный переход.

Определение 15.1. Тройка (X, Σ, μ), где Σ — σ-алгебра с единицей X, $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ — σ-аддитивная мера, называется **измеримым пространством**. Если $\mu(X) < \infty$, то его называют *конечным*, а если мера μ σ-конечна, то *σ-конечным*.

Определение 15.2. $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ — **измеримая функция**, если $\forall c \in \mathbb{R} : f^{-1}((c, +\infty]) \in \Sigma$.[1]

Определение 15.3. Предикат $P(x)$ верен **почти всюду**, если $\mu(\{x : \neg P(x)\}) = 0$.

Лемма 15.1. Если f измерима на (X, Σ, μ), то $\forall a, b \in \overline{\mathbb{R}} : f^{-1}((a, b)) \in \Sigma$.

Доказательство.

$$f^{-1}(+\infty) := \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}([n, +\infty)) \in \Sigma, \qquad f^{-1}(-\infty) := X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}([-n, +\infty)) \in \Sigma$$

откуда тривиально следует, что $\forall a, b \in \overline{\mathbb{R}} : f^{-1}((a, b)) \in \Sigma$:

$$f^{-1}([c, +\infty]) := \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(c - \frac{1}{n}, +\infty\right]\right) \in \Sigma \qquad f^{-1}((a, b)) := f^{-1}((a, +\infty]) \setminus f^{-1}([b; +\infty]) \in \Sigma$$

□

Теорема 15.1. Если f измерима на (X, Σ, μ) и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, то $f^{-1}(B) \in \Sigma$.

Доказательство.
Введём обозначение $\Theta := \{A \subset \mathbb{R} \mid f^{-1}(A) \in \Sigma\}$ и покажем, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \Theta$.
По лемме 15.1. Θ содержит все открытые подмножества $\mathbb{R}$.
Взятие обратного отображения перестановочно с $\bigcup_i$, $\bigcap_i$, $\setminus$, $\triangle$, потому Θ — σ-алгебра.
Тогда $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \Theta$ по определению. □

Теорема 15.2 (О композиции непрерывной и измеримой)**.**
Пусть f измерима и ограничена на (X, Σ, μ), причём $f(X) \subseteq G \subset \mathbb{R}$, где G открыто, а $g \in C(G)$. Тогда $g \circ f$ измерима на (X, Σ, μ).

Доказательство.

$$\forall c \in \mathbb{R} : (g \circ f)^{-1}((c, +\infty]) = (g \circ f)^{-1}((c, +\infty)) = f^{-1}(g^{-1}((c, +\infty))) \in \Sigma$$

Первое равенство следует из конечности $g \circ f$[2], принадлежность Σ — из теоремы 15.1. □

Теорема 15.3 (О замкнутости класса измеримых относительно арифметических операций)**.**
Если f, g — измеримы и конечны на (X, Σ, μ), то $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (при $g \neq 0$) также измеримы.

Доказательство.

[1]Более корректно следующее определение: измерима та функция, прообраз каждого борелевского множества относительно которой лежит в σ-алгебре. Тем не менее, такое определение проверять технически проще, и далее будет доказано, что они эквивалентны, т.к. борелевская σ-алгебра подмножеств $\mathbb{R}$ порождается открытыми лучами.

[2]Поскольку непрерывная на G функция g не может принимать бесконечных значений в конечных точках из G, а f принимает только конечные значения по условию.

(1) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha f,\ f + \alpha$ измеримы по теореме 15.2.
Далее, для всякой пары измеримых h_1, h_2 измеримо множество $\{x \in X : h_1(x) > h_2(x)\}$:

$$\{x \in X \mid h_1(x) > h_2(x)\} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(h_1^{-1}((q_n, +\infty]) \cap h_2^{-1}([-\infty, q_n])\right) \in \Sigma$$

для некоторой нумерации $\mathbb{Q} = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, откуда:

$$(\alpha f + \beta g)^{-1}((c, +\infty]) = \{x \in X \mid \alpha f(x) > c - \beta g(x)\} \in \Sigma$$

значит, $\alpha f + \beta g$ — измерима.

(2) $(x+y)^2$ измерима по теореме 15.2., значит, $f \cdot g = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$ — измерима по (1).

(3) $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, где $\frac{1}{x}$ непрерывна при $x \neq 0$, тогда по (2) $\frac{f}{g}$ — измерима.

$\square$

Теорема 15.4. Если $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых функций на пространстве (X, Σ, μ), то функции $\varphi(x) := \sup\limits_n f_n(x),\ \psi(x) := \varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \inf\limits_n \sup\limits_{m \geq n} f_m(x)$ — также измеримы.[1]

Доказательство.

- $\varphi^{-1}((c, +\infty]) = \{x \in X : \exists n\ (f_n(x) > c)\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((c, +\infty]) \in \Sigma$[2]
-

$$\psi^{-1}((c, +\infty]) = \{x \in X : \exists m\ \forall n \exists\ k \geq n\ (f_k(x) > c + \frac{1}{m})\} =$$
$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} f_k^{-1}\left(\left(c + \frac{1}{k}, +\infty\right]\right) \in \Sigma$$

Т.к. в определении верхнего предела фигурирует инфимум, отделение от c добавочным слагаемым $\frac{1}{k}$ необходимо, т.к. без него не выйдет отфильтровать случай $\psi(x) = c$. $\square$

Следствие 15.1.
В тех же условиях функция $F(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ измерима на области определения.[3]

Теорема 15.5. Если f, g измеримы на (X, Σ, μ), то $|f|,\ \min\{f, g\},\ \max\{f, g\}$ также измеримы.

Доказательство.

- $\{\min\{f, g\} > c\} = \{f > c\} \cap \{g > c\}$
- $\{\max\{f, g\} > c\} = \{f > c\} \cup \{g > c\}$
- $|f| = \max\{f, 0\} - \min\{f, 0\}$

$\square$

[1] Для inf доказательство аналогично.
[2] Если для данного x существует какое-то n, такое что $f_n(x) > c$, то $\sup\limits_n f_n(x) > c$ и подавно.
[3] Т.к. для существования предела необходимо существование и совпадение верхнего и нижнего частичных пределов, которые измеримы по доказанной теореме.

16 Множество Кантора и кривая Кантора. Теорема о существовании композиции измеримой от непрерывной, не являющейся измеримой функцией.

Определение 16.1. **Множество Кантора** $\mathcal{C}$ — подмножество $[0,1]$, полученное в ходе следующего процесса: отрезок разбивается на три части, центральный интервал выбрасывается, с оставшимися частями рекурсивно делается то же самое.
В формальной записи процедура построения Канторова множества записывается так:
Через $J_j^i,\ 1 \le j \le 2^i$ обозначим j-ый по порядку отрезок после i-ой итерации, $J_1^0 := [0,1]$.
Через $I_k^i,\ 1 \le k \le 2^{i-1}$ обозначим интервалы, удаляемые на i-м шаге. Мера каждого — $\frac{1}{3^i}$.
Пусть $G := \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigsqcup\limits_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^n$, тогда $\mathcal{C} := [0,1] \setminus G = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \bigsqcup\limits_{k=1}^{2^n} J_k^n$.

Утверждение 16.1 (Основные свойства Канторова множества)**.**
$\mathcal{C}$ замкнуто, нигде не плотно, имеет мощность континуума и Лебегову меру ноль.

Доказательство. Первые три свойства тривиальны, докажем четвёртое[1].

$$\mu(\mathcal{C}) = 1 - \mu(G),\ \mu(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \mu(I_k^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

□

Определение 16.2.
Кривая Кантора — построенная на основе Канторова множества функция $\mathbf{c} : [0,1] \to [0,1]$, заданная индуктивно по следующему правилу:
Пусть $\mathbf{c}_0(0) = 0,\ \mathbf{c}_0(1) = 1$.
Далее, пусть $J_j^i = [a,b]$, а $J_{2j-1}^{i+1} = [a,c],\ J_{2j}^{i+1} = [d,b],\ a < c < d < b$.
Тогда $\mathbf{c}_{i+1}(a) := \mathbf{c}_i(a),\ \mathbf{c}_{i+1}(b) := \mathbf{c}_i(b),\ \mathbf{c}_{i+1}(c) = \mathbf{c}_{i+1}(d) := (\mathbf{c}(a) + \mathbf{c}(b))/2$.
Когда $\mathbf{c}$ уже определена на концах всех J_j^i, она доопределяется: $\mathbf{c}(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{y \le x} \mathbf{c}_n(y)$.

Утверждение 16.2 (Основные свойства Канторовой лестницы)**.**
$\mathbf{c}$ монотонно неубывает и непрерывна на $[0,1]$, а $\mathbf{c}'(x) = 0$ почти всюду на $[0,1]$.

Теорема 16.1. Существует измеримое по Лебегу неборелевское множество.

Доказательство. Рассмотрим гомеоморфизм $f : [0,1] \to [0,1],\ f(x) := \frac{1}{2}(\mathbf{c}(x) + x)$.
Заметим, что:

$$\mu(f(I_j^i)) = \mu(f(a_{i,j}, b_{i,j})) = \frac{1}{2}(\mathbf{c}(b_{i,j}) + b_{i,j}) - \frac{1}{2}(\mathbf{c}(a_{i,j}) + a_{i,j}) =$$
$$= \frac{1}{2}(b_{i,j} - a_{i,j}) = \frac{1}{2}|I_j^i|$$

Значит, $\mu(f(G)) = \mu(f([0,1] \setminus \mathcal{C})) = \frac{1}{2}$, потому:

$$\mu(f([0,1] \setminus \mathcal{C})) = \mu(f([0,1]) \setminus f(\mathcal{C})) = \mu(f([0,1])) - \mu(f(\mathcal{C})) = \mu([0,1]) - \mu(f(\mathcal{C})) = \frac{1}{2}$$
$$\implies \mu(f(\mathcal{C})) = \frac{1}{2}$$

По теореме 14.1. $f(\mathcal{C})$ содержит неизмеримое подмножество F.
Значит, $H := f^{-1}(F) \notin \mathcal{B}([0,1])$, т.к. иначе обязательно $f(H) \in \mathcal{B}([0,1])$, ведь f — гомеоморфизм.
Тем не менее, H измеримо по Лебегу как подмножество множества меры нуль. □

Следствие 16.1. Мера Бореля может быть неполна.

[1] Заметим при этом, что нетрудно по той же процедуре построить т.н. **fat cantor set** — множество, обладающее свойствами 1-3, но имеющее ненулевую меру Лебега: достаточно каждый раз выбрасывать менее трети интервала.

17 Сходимость по мере и почти всюду. Их свойства (критерий Коши сходимости по мере, арифметические, связь сходимостей, Теорема Рисса).

Здесь и далее пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $f(x)$ — измеримые и конечные на (X, Σ, μ) функции [1].

Определение 17.1. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ **сходится по мере** к $f(x)$ ($f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$), если:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

Докажем, что свойства предела по мере во многом похожи на свойства поточечного предела последовательности (единственность, коммутирование с арифметическими операциями). Более того, поточечная сходимость влечёт сходимость по мере, а обратное, вообще говоря, неверно.

Определение 17.2. Функции f, g называют **эквивалентными**, если они равны почти всюду.

Теорема 17.1 (О единственности предела по мере)**.**
Предел посл-ти функций сходящихся по мере, единственен с точностью до эквивалентности.

Доказательство. Пусть $f_n(x) \xrightarrow{\mu} f(x)$, $f_n(x) \xrightarrow{\mu} g(x)$. Тогда[2]:

$$\forall \varepsilon > 0 : \{x \in X : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\} \subseteq \{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon/2\} \cup \{x \in X : |g(x) - f_n(x)| > \varepsilon/2\} \implies$$
$$\implies \forall \varepsilon > 0\ \forall \gamma > 0 : \mu(\{|f - g| > \varepsilon\}) < \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} < \gamma$$

Значит, $\mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| > 0\}) = 0$. □

Теорема 17.2 (Предел по мере коммутирует со сложением)**.**
Если $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $g_n \xrightarrow{\mu} g$, то $f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$.

Доказательство. Аналогично предыдущему[3],

$$\{x \in X \mid |(f(x) + g(x)) - (f_n(x) + g_n(x))| > \varepsilon\} \subseteq$$
$$\subseteq \{x \in X \mid |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon/2\} \cup \{x \in X \mid |g(x) - g_n(x)| > \varepsilon/2\}$$

□

Теорема 17.3 (Теорема о пределе композиции)**.**
Если $\mu(X) < \infty$, $G \subset \mathbb{R}$ открыто, $g \in C(G)$ и $f_n \xrightarrow{\mu} f$, причём $f_n, f : X \to G$, то $g \circ f_n \xrightarrow{\mu} g \circ f$.

Доказательство. [4]
Выберем $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$.

По следствию из теоремы 14.3., $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, где K_n — компакты, причём $K_i \subset K_{i+1} \ldots$[5]

Рассмотрим $E_n := f^{-1}(K_n)$. По определению $\{K_n\}$ имеем $E_i \subseteq E_{i+1}$ и $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

По непрерывности меры Лебега, $\exists r : \mu(A) := \mu\left(X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{r} E_n\right) < \frac{\gamma}{2}$.

Пусть $\rho := d\left(K := \bigcup\limits_{n=1}^{r} K_n,\ \mathbb{R} \setminus G\right)$.

[1] Хотя бы для того, чтобы выражения вида $|f_n(x) - f(x)|$ имели смысл

[2] Полезно нарисовать картинку.

[3] Только мне совсем не кажется очевидным это включение... Оно точно верно?

[4] Доказательство очень техническое, тяжело парсится. Стоит найти другое. Здесь было бы очень уместно добавить иллюстрацию, на которой будут указаны все участвующие в доказательстве множества.

[5] Вложенность нужна для того, чтобы воспользоваться непрерывностью меры Лебега.

Определим компакт $K' := \{y \in \mathbb{R} \mid \min\limits_{x\in K} |x-y| \le \rho/2\} \subset G$.
По равномерной непрерывности g на K':

$$\exists \delta > 0\ \forall x, y \in K' : |x-y| < \delta \implies |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

По определению сходимости по мере,

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \implies \exists N\ \forall n > N : \mu(B_n) := \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \ge \min(\rho/2, \delta)\}) < \gamma/2$$

Тогда $\mu(A \cup B_n) < \gamma$, а

$$\begin{gathered}\forall n \ge N\ \forall x \in X \setminus (A \cup B_n) : f(x) \in K \subset K',\ f_n(x) \in K',\ |f_n(x) - f(x)| < \delta \implies \\ \implies |g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon\end{gathered}$$

Значит,

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0\ \forall \gamma > 0\ \exists N\ \forall n > N : \mu(\{|g \circ f_n - g \circ f| > \varepsilon\}) \le \gamma \implies \\ \implies g \circ f_n \xrightarrow{\mu} g \circ f\end{gathered}$$

□

Следствие 17.1. Если $\mu(X) < \infty$ и $f_n \xrightarrow{\mu} f$, то $f_n^2 \to f^2$, а при $f, f_n \ne 0$ и $\frac{1}{f_n} \xrightarrow{\mu} \frac{1}{f}$.
Замечание: условием конечности меры нельзя пренебречь.
Контрпример: $f_n(x) := x + \frac{1}{n},\ X = \mathbb{R}$. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \{x \in \mathbb{R} : |f_n^2(x) - f^2(x)| > \varepsilon\} = \lim_{n\to\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}\right| > \varepsilon\right\} \ne 0$$

В самом деле, $\{x \in \mathbb{R} : |f_n^2(x) - f^2(x)| > \varepsilon\} = \left(\frac{n\varepsilon}{2} - \frac{1}{n}, +\infty\right]$.

Следствие 17.2. Если $\mu(X) < \infty$ и $f_n \xrightarrow{\mu} f, g_n \xrightarrow{\mu} g$, то $f_n \cdot g_n \xrightarrow{\mu} f \cdot g$

Доказательство.

$$\begin{aligned} f_n(x)g_n(x) &= \frac{1}{2}((f_n(x) + g_n(x))^2 - f_n^2(x) - g_n^2(x)) \\ f(x)g(x) &= \frac{1}{2}((f(x) + g(x))^2 - f^2(x) - g^2(x)) \end{aligned}$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f(x)g(x) - f_n(x)g_n(x)| > \varepsilon\}) = 0$ по т. 17.2, 17.3 и следствию 17.1. □

Следствие 17.3. Если $\mu(X) < \infty$ и $f_n \xrightarrow{\mu} f,\ g_n \xrightarrow{\mu} g$, причём $\forall x \in X : g_n(x),\ g(x) \ne 0$, то $\frac{f_n}{g_n} \xrightarrow{\mu} \frac{f}{g}$.

Теорема 17.4 (Критерий Коши сходимости по мере)**.**

$$\begin{gathered}\{f_n(x)\}_n^\infty \xrightarrow{\mu} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0, \gamma > 0\ \exists N\ \forall n, m \ge N : \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) < \gamma \\ \text{где } f, f_n \text{ измеримы и конечны на } X\end{gathered}$$

Доказательство.
Для удобства записи введём обозначение $\Delta_X(f, g, \varepsilon) := \{x \in X : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}$.

- **Необходимость:** $f_n \xrightarrow{\mu} f \implies$ условие Коши

$$\begin{gathered}f_n \xrightarrow{\mu} f \implies \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \ge N : \mu(\Delta_X(f_n, f, \varepsilon/2)) < \gamma/2 \\ \text{Тогда } \forall n, m \ge N : \mu(\Delta_x(f_n, f_m, \varepsilon)) \le \mu(\Delta_X(f_n, f, \varepsilon/2)) + \mu(\Delta_X(f_m, f, \varepsilon/2)) < \gamma \\ \text{Т.к. } \Delta_X(f_n, f_m, \varepsilon) \subseteq \Delta_X(f_n, f, \varepsilon/2) \cup \Delta_X(f_m, f, \varepsilon/2)\}\end{gathered}$$

- **Достаточность:** условие Коши $\implies f_n \xrightarrow{\mu} f$[1]

Часть 1: *Убедимся, что предельная функция f измерима почти всюду. Рассмотрим множество всех тех точек x_0, в которых последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, и доопределим её нулём во всех остальных. Тогда f будет измерима на X.*

Рассмотрим подпосл-ть функций $\{f_{n_i}\}_{n=1}^{\infty}$ и посл-ть множеств A_i, такие что:

$$A_i := \Delta_X(f_{n_{i+1}}, f_{n_i}, 2^{-i}),\ \mu(A_i) < 2^{-i}$$

Положим $A := \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=m}^{\infty} A_i$[2]. По построению, $\mu(A) = 0$.
Если же $x_0 \in X \setminus A$, то $\{f_{n_i}(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, а значит $\exists \lim\limits_{i\to\infty} f_{n_i}(x_0) =: f(x_0)$.
По следствию 15.1. определённая таким образом $f(x)$ измерима на $X \setminus A$.
Доопределив её нулём на A получим измеримость на X.

Часть 2: *Докажем сходимость по мере. Из определения $f(x)$ следует, что элементами последовательности $\{f_{n_i}(x_0)\}_{i=1}^{\infty}$ при $x_0 \in X \setminus A$ можно сколь угодно хорошо приблизить $f(x_0)$, откуда получается первая часть оценки: $\mu(\Delta_X(f_{n_i}, f, \varepsilon/2)) < \gamma/2$. Из фундаментальности последовательности $\{f_{n_i}(x_0)\}_{i=1}^{\infty}$ следует вторая часть оценки: $\mu(\Delta_X(f_n, f_r, \varepsilon/2)) < \gamma/2$, откуда по неравенству треугольника имеем $\mu(\Delta_X(f_n, f, \varepsilon)) < \gamma$.*
Таким образом, от $f_{n_i} \xrightarrow{\mu} f$ осуществляется переход к $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Покажем теперь, что $f_n \xrightarrow{\mu} f$ на X.
В первую очередь, если $x \notin \bigcup\limits_{i=m+1}^{\infty} A_i$, то:

$$i, j \geq m+1,\ i < j \implies |f_{n_j}(x) - f_{n_i}(x)| \leq \sum_{k=i}^{j-1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < \sum_{r=m+1}^{\infty} 2^{-r} = 2^{-m}$$

Отсюда для фиксированных $\varepsilon > 0, \gamma > 0$ можно подобрать такое N, что:

$$n, r \geq N \implies \mu(\Delta_X(f_n, f_r, \varepsilon/2)) < \gamma/2$$

Отсюда также $|f(x) - f_{n_i}(x)| = \left|\lim\limits_{j\to\infty} f_{n_j}(x) - f_{n_i}(x)\right| = \lim\limits_{j\to\infty} |f_{n_j}(x) - f_{n_i}(x)| < 2^{-m}$.
Потому при $i \geq m+1$ имеем:

$$\mu(\Delta_X(f_{n_i}, f, 2^{-m})) = \lim_{j\to\infty} \mu(\Delta_X(f_{n_i}, f_{n_j}, 2^{-m})) \leq \sum_{r=m+1}^{\infty} \mu(A_r) < 2^{-m}$$

Выберем такое m, что $2^{-m} < \min(\varepsilon/2, \gamma/2)$, и $n_i > N$ с $i \geq m+1$. Тогда:

$$n \geq N \implies \mu(\Delta_X(f_n, f, \varepsilon)) < \mu(\Delta_x(f_n, f_{n_i}, \varepsilon/2)) + \mu(\Delta_X(f_{n_i}, f, \varepsilon/2)) < \gamma$$

Тогда по определению $f_n \xrightarrow{\mu} f$, что и требовалось.

□

Как и ранее, пусть f_n, f — измеримые конечные функции на измеримом пространстве (X, Σ, μ).

---

[1] И снова неочевидные построение. Для чего выбираются именно такие множества A_i, что это даёт?
[2] Словами: A — все такие точки, в которых соседние члены последовательности различаются более чем на некоторый эпсилон. Иными словами, все такие точки, в которых последовательность нефундаментальна.

Определение 17.3. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f[1] **почти всюду** ($f_n \xrightarrow{\text{п.вс.}} f$), если:

$$\mu(\{x \in X : f_n(x) \not\to f(x)\}) = 0$$

Лемма 17.1 (О структуре множества точек расходимости)**.**
Пусть $E \subseteq X$ — множество, на котором $f_n \to f$, тогда:

$$X \setminus E = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\right\}$$

Доказательство. По определению поточечной сходимости[2],

$$x \in X \setminus E \implies f_n \not\to f \implies \exists \varepsilon := \frac{1}{m}\ \forall n\ \exists k > n : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon$$

Формальная запись этого условия даёт утверждение теоремы. □

Теорема 17.5 (Критерий сходимости почти всюду)**.**
Пусть $\mu(X) < \infty$[3], тогда:

$$f_n \xrightarrow{\text{п. вс.}} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in X : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = 0$$

Доказательство.
Введём обозначения $H_{k,m} := \left\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\right\}$.
Достаточно доказать, что:

$$f_n \xrightarrow{\text{п. вс.}} f(x) \iff \forall m : \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} H_{k,m}\right) = 0$$

В обозначениях леммы 17.1.: $f_n \xrightarrow{\text{п. вс.}} f(x) \iff \mu(X \setminus E) = 0$.
Тогда $\mu\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} H_{k,m}\right) = 0$, откуда следует, что $\forall m : \mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} H_{k,m}\right) = 0$
Определим для произвольного m последовательность $G_n := \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} H_{k,m}$.
Тогда $\forall i : G_{i+1} \subseteq G_i$ и можно воспользоваться непрерывностью меры μ:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(G_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) \implies \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} H_{k,m}\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} H_{k,m}\right) = 0$$

□

Следствие 17.4. $\mu(X) < \infty,\ f_n \xrightarrow{\text{п. вс.}} f \implies f_n \xrightarrow{\mu} f$

Утверждение 17.1 (Пример Рисса)**.**
Существует последовательность, сходящаяся по мере на $[0, 1]$, но не сходящаяся почти всюду.

---

[1] В случае полноты меры μ можно не требовать заранее измеримости функции f.

[2] For those rusty in analysis:

$$f_n \to f \iff \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in X\ \exists N\ \forall n \geq N :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

[3] Пример $f_n := I([-n, n])$ показывает, что без требования конечности пространства теорема и её следствие неверны, а именно: $f_n \xrightarrow{\text{п. вс.}} 1$, но $\forall n\ \forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < 1 \implies \mu\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} \{x \in X : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = +\infty$, и $f_n \overset{\mu}{\not\to} 1$.

Доказательство.

$$\phi_{n,k} := I\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right),\ n \in \mathbb{N},\ k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$$

Поскольку $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists! n_m, k_m < 2^{n_m} \in \mathbb{N} : m = 2^{n_m} + k_m$, положим $f_m := \phi_{n_m,k_m}$.
Тогда:

$$\lim_{m\to\infty} \mu(\{x \in [0,1] : |f_m(x)| > 0\}) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2^{n_m}} = 0$$

Откуда следует $f_m \xrightarrow{\mu} 0$.
В то же время $\forall x_0 \in [0,1]$ бесконечно много членов последовательности $\{f_m(x_0)\}_{m=1}^{\infty}$ равно 0 и бесконечно много членов равно 1, откуда следует, что сходимости нет ни в одной точке. □

Теорема 17.6 (Рисса)**.**
Пусть $f_n \xrightarrow{\mu} f$ на σ-конечном измеримом пространстве (X, Σ, μ).
Тогда существует подпоследовательность $f_{n_i} \overset{..}{\to} f$.

Доказательство.
Часть 1: Предположим вначале, что $\mu(X) < \infty$.
Положим $n_0 := 1$ и выберем n_k так, чтобы $\mu\left(\Delta_X\left(f_{n_k}, f, \frac{1}{k}\right)\right) < \frac{1}{2^k}$.
Докажем, что $f_{n_k} \xrightarrow{\text{п.в.}} f$.
При заданных $\varepsilon > 0, \delta > 0$ можно подобрать m_0 так, чтобы $\frac{1}{m_0} < \varepsilon$ и $\frac{1}{2^{m_0-1}} < \gamma$.
Тогда

$$\forall m > m_0 : \mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \Delta_X(f_{n_k}, f, \varepsilon)\right) \le \mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \Delta_X\left(f_{n_k}, f, \frac{1}{k}\right)\right) \le \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}} < \gamma$$

и сходимость почти всюду следует из теоремы 17.5.
Часть 2: Пусть теперь $\mu(X) = \infty$:
По условию $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_i,\ \mu(B_i) < \infty$, откуда получаем, что $f_n \xrightarrow{\mu} f \implies f_n \xrightarrow[B_i]{\mu} f$.
По части 1, можно выделить подпоследовательности $f_{n(k,i)} \xrightarrow[B_i]{\text{п.в.}} f$.
Объединим их в единую подпоследовательность $\{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ и покажем, что $f_{n_j} \overset{..}{\to} f$.
Пусть $F_i := \{x \in X : f_{n(k,i)}(x) \not\to f(x)\}$, тогда:

$$\mu\left(\{x \in X : f_{n_j}(x) \not\to f(x)\}\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) = 0$$

□

18 Теоремы Егорова и Лузина.

Теорема 18.1 (Егорова[1])**.**
Если $\mu(X) < \infty$[2] и последовательность функций $f_n(x) \to f(x)$ почти всюду на X, то:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \text{ измеримое } E_\varepsilon \subseteq X : \mu(X \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon \wedge \{f_n(x)\} \overset{E_\varepsilon}{\rightrightarrows} f(x)$$

[1] Сходящаяся на множестве конечной меры последовательность функций сходится на нём равномерно за вычетом множества пренебрежимо малой меры.
[2] Для сигма-конечных пространств теорема Егорова не имеет места.

Доказательство. [1]

По критерию сходимости почти всюду (т. 17.5.), для всякого m найдётся такое n_m, что

$$\mu\left(G_m := \bigcup_{k=n_m}^{\infty}\left\{|f_k - f| > \frac{1}{m}\right\}\right) \le \frac{\varepsilon}{2^m}$$

Неформально говоря, G_m — множество точек, мешающих равномерной сходимости, т.е. всех таких точек, на которых f_k при достаточно больших k отклоняется от f более чем на $\frac{1}{m}$. Вся идея доказательства заключается в том, что, в силу доказанных ранее утверждений, мы можем все плохие множества сделать сколь угодно малыми в совокупности.

Покажем, что все точки, мешающие равномерной сходимости, будут лежать в $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} G_m$.

Выпишем отрицание определения равномерной сходимости на X:

$$f_n \not\rightrightarrows f \iff \exists\varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \ge N\ \exists x_0 \in X : |f_n(x_0) - f(x_0)| > \varepsilon$$

Выберем такое m_0, что $\varepsilon > \frac{1}{m_0}$. Тогда при $n \ge n_{m_0}$ имеем $x_0 \in G_{m_0}$.

Положим далее $E_\varepsilon := X \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} G_m$.

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=n_m}^{\infty} \Delta_X\left(f_k, f, \frac{1}{m}\right) \implies$$

$$X \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} X \setminus G_m = \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcap_{k=n_m}^{\infty} X \setminus \left\{|f_k - f| > \frac{1}{m}\right\}$$

Таким образом, в E_ε отфильтровываются точки, которые мешают равномерной сходимости.

$$\mu(X \setminus E_\varepsilon) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m\right) \le \sum_{m=1}^{\infty}\mu(G_m) < \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^m} < \varepsilon$$

Пусть теперь задано некоторое $\gamma > 0$. Можно подобрать m так, чтобы $\frac{1}{m} < \gamma$.
Тогда при $k > n_m$:

$$\forall x \in E_\varepsilon : |f_k(x) - f(x)| \le \frac{1}{m} < \gamma$$

Т.к. все точки, для которых $|f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{m}$, были отброшены при построении E_ε.
Значит, на E_ε верно $f_n \rightrightarrows f$. □

Теорема 18.2 (Лузина[2]).
Пусть f ограничена и измерима относительно классической меры Лебега на $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$. Тогда:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists g \in C([a, b]) :\ \mu(\{x \in [a, b] \mid f(x) \ne g(x)\}) < \varepsilon$$

19 Интеграл Лебега для конечно-простых функций и его свойства. Определение интеграла Лебега в общем случае. Основные свойства интеграла Лебега.

Определение 19.1. Измеримая на σ-конечном пространстве (X, Σ, μ) функция $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ называется **простой**, если она принимает конечное множество значений и $\forall y \in \mathrm{Im} f : \mu(\{f = y\}) < \infty$.

[1] Есть ещё неплохое доказательство на Википедии

[2] Ограниченная измеримая по Лебегу функция на отрезке сколь угодно хорошо приближается непрерывными. Стоит отметить, что теорема Лузина является важным приложением теоремы Егорова: она устанавливает взаимосвязь понятий непрерывности и измеримости на брусах в $\mathbb{R}^n$.

Иными словами,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{I}_{E_k}(x), \quad E_k \in \Sigma,\ X = \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k$$

$$c_1 \le \dots \le c_n, \quad c_k \ne 0 \implies \mu(E_k) < \infty$$

Определение 19.2. Интеграл Лебега для конечно-простых функций:

$$\int_X f d\mu := \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k)$$

Лемма 19.1. Определение корректно, т.е. не зависит от разбиения X.

Доказательство. Пусть $X = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} E_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} D_j$ и $f \cdot \mathbf{I}_{E_i} \equiv c_i,\ f \cdot \mathbf{I}_{D_j} \equiv d_j$.
Положим $C_{i,j} := E_i \cap D_j$. Тогда

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{m} \mu(C_{i,j}) = \sum_{j=1}^{m} d_j \sum_{i=1}^{n} \mu(C_{i,j}) = \sum_{j=1}^{m} d_j \mu(D_j)$$

□

Теорема 19.1 (Линейность интеграла Лебега)**.**

$$f, g \text{ — простые на } X \implies \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$$

Доказательство. Пусть $f(x) := \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \mathbf{I}_{E_i},\ g(x) := \sum\limits_{j=1}^{m} d_j \mathbf{I}_{D_j}$.
Тогда $\alpha f + \beta g := \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} (\alpha c_i + \beta d_j) \mathbf{I}_{E_i \cap D_j}$ — также простая функция.
Потому

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha c_i + \beta d_j) \mu(E_i \cap D_j) = \alpha \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{m} \mu(E_i \cap D_j) + \beta \sum_{j=1}^{m} d_j \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \cap D_j) =$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i) + \beta \sum_{j=1}^{m} d_j \mu(D_j) = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$$

□

Утверждение 19.1. $f \ge 0$ — простая $\implies \int_X f d\mu \ge 0$.

Следствие 19.1. f, g — простые и $f \ge g \implies \int_X f d\mu \ge \int_X g d\mu$.

Утверждение 19.2. $\left| \int_X f d\mu \right| \le \int_X |f| d\mu$.

Утверждение 19.3. $X = A \sqcup B \implies \int_X f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$

Теорема 19.2. Пусть (X, Σ, μ) — σ-конечное измеримое пространство и $E \in M$.
Тогда если $g_n : E \to \mathbb{R}^+$ — неубывающая последовательность простых функций и

$$g : E \to \mathbb{R}^+,\ g(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{I}_{E_i}(x),\ 0 < a_1 < \dots < a_n,\ \bigsqcup_{i=1}^{n} E_i \subseteq E,\ \mu(E_i) < \infty$$

— также простая функция, причём $\forall x_0 \in E : \lim\limits_{n \to \infty} g_n(x_0) \ge g(x_0)$, то

$$\lim_{n \to \infty} \int_E g_n(x) d\mu \ge \int_E g(x) d\mu$$

Доказательство. В случае бесконечного предела неравенство очевидно.
Пусть предел конечен.
Для произвольного $\varepsilon > 0$ определим множества $F_n := \{x \in E : g_n(x) < g(x) - \varepsilon\}$.
Положим $F := \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} E_i$.
В силу монотонности, $F_{n+1} \subseteq F_n$, причём $\mu(F_1) \leq \mu(F) < \infty$.
Далее, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$, поскольку $\forall x_0 \in E : \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x_0) \geq g(x_0)$.
Тогда по непрерывности меры заключаем, что $\mu(F_n) \to 0$.
Из написанного выше следует цепочка оценок:[1]

$$\int_E g d\mu = \int_{F_n} g d\mu + \int_{F\setminus F_n} g d\mu \leq \int_{F_n} g d\mu + \int_F (g_n + \varepsilon) d\mu =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(F_n \cap E_i) + \int_F g_n(x) d\mu + \varepsilon\mu(F) \leq a_n\mu(F_n) + \lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu + \varepsilon\mu(F)$$

Переходя к пределу по n и пользуясь произвольностью в выборе ε, окончательно получаем:

$$\int_E g d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu$$

□

Определение 19.3. Пусть (X, Σ, μ) — σ-конечное измеримое пространство, $E \in M$, $f : E \to \mathbb{R}^+$ — простая функция. Пусть также $\mathrm{SF}(f) := \{h : E \to \mathbb{R}^+ : h$ — простая и $\forall x \in E : h(x) \leq f(x)\}$.
Тогда

$$\int_E f d\mu := \sup_{h\in \mathrm{SF}(f)} \int_E h d\mu$$

Если этот интеграл конечен, то говорят, что f **интегрируема по Лебегу** на E ($f \in L(E)$).

Определение 19.4. Пусть f измерима на E. Тогда говорят, что f интегрируема на Лебегу на E, если $f_+, f_- \in L(E)$, где $f_+(x) := \max\{f(x), 0\}, \ f_-(x) := \max\{-f(x), 0\}$ и полагают:

$$\int_E f d\mu = \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu$$

.

Следствие 19.2. $f \in L(E) \iff |f| \in L(E)$ для простых f.[2]

Следствие 19.3. Из данных определений следует, что если $E, A \in \Sigma, \ A \subset E, f$ — измерима на E, то $f \in L(A) \iff f(x)\mathrm{I}_A \in L(E)$ и тогда $\int_A f d\mu = \int_E (f \circ \mathrm{I}_A) d\mu$

Утверждение 19.4. Если $g_n : E \to \mathbb{R}^+$ — такая неубывающая последовательность простых функций, что $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$, то[3]

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x) d\mu = \int_E g(x) d\mu$$

[1] Первое равенство следует из того, что F отличается от E только тем куском, на котором $g(x) = 0$.

[2] Здесь наглядно демонстрируется фундаментальное отличие интеграла Лебега от интеграла Римана. В частности, по этой же причине $\sin(x)/x$ интегрируемо на $\mathbb{R}$ в несобственном смысле по Риману, но не по Лебегу. Оно отражает, что процесс несобственного интегрирования следует рассматривать обособленно, т.к. на любом отрезке всякая интегрируемая по Риману функция будет интегрируема по Лебегу (хотя обратное неверно).

[3] Основная ценность интеграла Лебега — обилие предельных теорем. В частности, с их помощью устанавливается, что пространство интегрируемых по Лебегу функций полно, что неверно для интегрируемых по Риману. Этот факт имеет фундаментальное значение для построения теории Фурье и оснований квантовой механики.

Доказательство. Существование и измеримость $g(x)$ следует из теоремы 15.4.
Из определения интеграла ясно, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n d\mu \le \int_E g d\mu$$

Обратно, если $h \in \mathrm{SF}(g)$, то начиная с некоторого n верно $g_n \ge h$, откуда по т. 19.2 имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n d\mu \ge \int_E h d\mu$$

Переходя к $\sup\limits_{h\in \mathrm{SF}(f)}$, получаем искомое равенство. □

Лемма 19.2. Пусть $f(x) : E \to \mathbb{R}^+$ — измеримая функция. Тогда $\exists\{f_n\}\uparrow$: $f_n \xrightarrow{E} f$, где $f_n \ge 0$ — простые функции.

Доказательство. В силу σ-конечности X, можно получить представление вида

$$E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n,\ \mu(E_n) < \infty$$

Положим[1]

$$f_m(x) := \begin{cases} \frac{k-1}{2^m}, & \text{если } \frac{k-1}{2^m} \le f(x) < \frac{k}{2^m} \text{ и } x \in \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} E_j \\ 2^m, & \text{если } f(x) \ge 2^m \text{ и } x \in \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} E_j \\ 0, & \text{если } x \notin \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} E_j \end{cases}$$

в литературе также встречаются альтернативные записи:

$$f_m(x) := \mathbf{I}_{\bigsqcup\limits_{j=1}^{m} E_j}(x)\cdot \sup\left\{\frac{k}{2^m} : k\in\mathbb{N},\ \frac{k}{2^m} \le \min(f(x), 2^m)\right\}$$

$$f_m(x) := \left(2^m \mathbf{I}_{f^{-1}([2^m,+\infty))}(x) + \sum_{k=1}^{2^{2m}-1} \frac{k}{2^m}\mathbf{I}_{f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^m},\frac{k+1}{2^m}\right)\right)}(x)\right)\cdot \mathbf{I}_{\bigsqcup\limits_{j=1}^{m} E_j}(x)$$

Докажем, что определённая таким образом последовательность удовлетворяет условию теоремы.

- $\{f_n\}\uparrow$:
  1. Пусть $f_m(x_0) = 0$, тогда $f_{m+1}(x_0) \ge 0 = f_m(x_0)$.
  2. Если $f_m(x_0) = 2^m$, то $f(x) \ge 2^m$ и точно $f_{m+1}(x_0) \ge 2^m = f_m(x_0)$.
  3. Если $f_m(x_0) = \frac{k}{2^m}$, то $f(x_0) \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right) = \left[\frac{2k}{2^{m+1}}, \frac{2(k+1)}{2^{m+1}}\right)$, значит либо $f_{m+1}(x_0) = \frac{2k}{2^{m+1}} = f_m(x_0)$, либо $f_{m+1}(x_0) = \frac{2k+1}{2^{m+1}} > f_m(x_0)$.
- $f_n \xrightarrow{E} f$:
  Если $f(x_0) < +\infty$ (иначе тривиально), тогда $\exists m_0 : f(x_0) \in \bigsqcup\limits_{n=1}^{m_0} E_n,\ f(x_0) < 2^{m_0}$.
  Потому $\forall n \ge m_0$ имеем $|f_n(x_0) - f(x_0)| \le 2^{-n}$.

□

[1]Важно хотя бы раз нарисовать эту конструкцию.

Теорема 19.3 (Аддитивность интеграла Лебега от неотрицательных функций).
Если $f, g : E \to \mathbb{R}^+$ — неотрицательные измеримые функции, то

$$\int_E (f+g)d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$$

Далее, если $E = A \sqcup B$, то

$$\int_E f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$

Доказательство. Пусть $f_n \uparrow f,\ g_n \uparrow g$ — последовательности простых функций из леммы 19.2. Тогда несложно проверить, что $(f_n + g_n) \uparrow (f+g)$.
Используя линейность интеграла Лебега от простых функций и предложение 19.4 о предельном переходе под знаком интеграла, получим[1]:

$$\int_E (f+g)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E (f_n + g_n)d\mu =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$$

Также используя аналогичное свойство для интеграла Лебега от простых функций и предложение 19.4. получим, что:

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_B f_n d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$

□

Теорема 19.4 (Свойства класса интегрируемых функций).
На σ-конечном измеримом пространстве:

1. Измеримые функции интегрируемы на множествах меры нуль, и их интеграл равен нулю.
2. Если мера полна[2], то интегралы эквивалентных функций равны.
3. Интегрируемая функция принимает бесконечные значения только на множестве меры нуль.

Доказательство.

(1) Очевидно из определения.

(2) Достаточно доказать для неотрицательных функций $f, g : E \to \mathbb{R}^+$. Заметим, что в случае полноты меры все эквивалентные функции либо измеримы, либо неизмеримы одновременно. Пусть $E' := \{f = g\}$, тогда $\mu(E \setminus E') = 0$ и, пользуясь пунктом (1),

$$\int_E g d\mu = \int_{E'} g d\mu + \int_{E\setminus E'} g d\mu = \int_{E'} g d\mu =$$
$$= \int_{E'} f d\mu = \int_{E'} f d\mu + \int_{E\setminus E'} f d\mu = \int_E f d\mu$$

[1] Возможность перехода с первой строки на вторую обусловлена тем, что интегрируются простые функции и всё сводится к предельному переходу в числовой сумме. В общем случае это не должно быть верно.

[2] Если от этого условия отказаться, то придётся потребовать измеримости обеих функций

(3) И снова достаточно доказать для $f : E \to \mathbb{R}^+,\ f \in L(E),\ E \in \Sigma$.
Положим $E_\infty := \{f = \infty\}$ и выберем $F_\infty \in \Sigma,\ F_\infty \subset E_\infty,\ \mu(F_\infty) < \infty$[1].
Рассмотрим последовательность функций из $\mathrm{SF}(f)$: $h_n := n\mathbf{I}_{F_\infty}$.
По определению интеграла Лебега[2],

$$+\infty > \int_E f d\mu \geq \sup_n \int_E h_n d\mu = \sup_n n\mathbf{I}_{F_\infty} = +\infty \cdot \mu(F_\infty)$$

Значит, если возможно выбрать F_∞ таким, что $\mu(F_\infty) > 0$, то не может быть, что $f \in L(E)$.
Значит, $\mu(E_\infty) = 0$.

□

Утверждение 19.5. Если $f \in L(E)$, то $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha f \in L(E),\ \int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$

Доказательство. Измеримость αf была доказана ранее.
Рассмотрим случаи:

- $\alpha = 0$: Тогда и $\int_E \alpha f d\mu = 0$, независимо от $\mu(E)$.
- $\alpha > 0$: Для простых функций — тривиально.
  Иначе положим $f = f_+ - f_-$ и покажем, что $\int_E \alpha f_+ d\mu = \alpha \int_E f_+ d\mu$.

  $$\int_E f_+\ d\mu = \sup_{h \in Q_{f_+}} \int_E h d\mu = \frac{1}{\alpha} \sup_{h \in Q_{f_+}} \int_E \alpha h d\mu = \frac{1}{\alpha} \int_E \alpha f_+ d\mu.$$

  Для f_- — аналогично.
- $\alpha < 0$: Аналогично.

□

Теорема 19.5 (Линейность интеграла Лебега)**.**

$$f, g \in L(E) \implies f + g \in L(E),\ \int_E (f+g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$$

Доказательство. И вновь достаточно провести доказательство для знакопостоянных функций.
Для удобства, предположим вначале, что $f \geq 0, g \leq 0$.
Разделим множество значений на $E_+ := \{f + g \geq 0\}$ и $E_- := \{f + g < 0\}$.
По теореме 19.3. $\int_E (f+g) d\mu = \int_{E_+} (f+g) d\mu + \int_{E_-} (f+g) d\mu$.
Вычислим по отдельности $\int_{E_+} (f+g) d\mu,\ \int_{E_-} (f+g) d\mu$.
По теореме 19.3. и утверждению 19.5. получаем, что

$$\int_{E_+} f d\mu = \int_{E_+} (f+g) d\mu + \int_{E_+} -g d\mu = \int_{E_+} (f+g) d\mu - \int_{E_+} g d\mu$$
$$-\int_{E_-} g d\mu = \int_{E_-} (-f-g) d\mu + \int_{E_-} f d\mu = -\int_{E_-} (f+g) d\mu - \int_{E_-} f d\mu$$

Откуда видно, что $\int_E (f+g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$.
Случай $f \leq 0, g \geq 0$ рассматривается аналогично.
Случаи $f \geq 0,\ g \geq 0$ и $f \leq 0,\ g \leq 0$ разобраны в теореме 19.3. □

[1] Пользуясь σ-конечностью меры, пересечём E_∞ со всеми множествами X_i, где $X := \bigsqcup_{i=1}^{\infty} X_i$, тогда $E_\infty = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_\infty \cap X_i$ и в случае, когда $\mu(E_\infty) > 0$, хотя бы одно такое пересечение будет иметь положительную конечную меру.
[2] Пользуясь соглашением $\infty \cdot 0 = 0$

Следствие 19.4.

$$f, g \in L(E) \implies \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f + \beta g \in L(E),\ \int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$$

Следствие 19.5. $f \in L(E) \iff |f| \in L(E)$

Доказательство.

- $f \in L(E) \implies |f| \in L(E)$: По определению, $f \in L(E) \iff f_+,\ f_- \in L(E)$.
  Поскольку $|f| = f_+ + f_-$, по линейности получаем $f \in L(E) \implies |f| \in L(E)$.
- $|f| \in L(E) \implies f \in L(E)$: Аналогично.

□

Следствие 19.6. $\left|\int_E f d\mu\right| \le \int_E |f| d\mu$

Теорема 19.6. Пусть f, g измеримы на E, $f \in L(E)$, $|g| \le |f|$, тогда

$$g \in L(E),\ \int_E |g| d\mu \le \int_E |f| d\mu$$

В частности, интеграл Лебега от неотрицательной функции неотрицателен.

Доказательство.
Согласно следствию 19.5 достаточно провести рассуждения для неотрицательных f, g.

$$h \in \mathrm{SF}(g) \implies f \ge h \implies \int_E h d\mu \le \sup_{\substack{q \in \mathrm{SF}(f) \\ q \ge h}} \int_E q d\mu = \int_E f d\mu \implies \sup_{h \in \mathrm{SF}(g)} \int_E h d\mu = \int_E g d\mu \le \int_E f d\mu$$

□

Следствие 19.7 (Ограниченная функция интегрируема на множестве конечной меры)**.**
Если $\mu(E) < \infty, f$ — измерима на E и $\exists C \in \mathbb{R}^+ : |f| \le C$, то

$$f(x) \in L(E),\ \left|\int_E f d\mu\right| \le \int_E |f| d\mu \le C\mu(E)$$

Следствие 19.8.

$$f, g \in L(E),\ g \le f \implies \int_E g d\mu \le \int_E f d\mu$$

Утверждение 19.6 (Интеграл Лебега как предел интегральных сумм[1])**.**
Пусть $\mu(E) < \infty$, f — измерима на E, причём $-\infty < A < f(x) < B < +\infty$. Пусть также T — разбиение $[A, B] : A = t_0 < t_1 < \dots < y_n = B$. Тогда

$$\Delta_i := [t_{i-1}, t_i),\ \lambda(T) := \max_{1 \le i \le n} (t_i - t_{i-1}),\ F_T := \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \mu(\{f \in \Delta_i\}), \implies$$

$$\implies \lim_{\lambda(T) \to 0} F_T := \int_E f d\mu$$

[1] Именно так в случае множества конечной меры его определял его сам А. Лебег.

Доказательство. Введём простую функцию, интегралом которой будет F_T:

$$f_T := \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{I}_{\Delta_i}, \ \ F_T = \int_E f_T d\mu$$

В силу неравенства $|f_T - f| \le \lambda(T)$ получаем

$$\left| F_T - \int_E f d\mu \right| = \left| \int_E (f_t - f) d\mu \right| \le \int_E |f_t - f| d\mu \le \lambda(T) \cdot \mu(E) \to 0 \implies$$
$$\implies \lim_{\lambda(T)\to 0} F_T = \int_E f d\mu$$

□

20 Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега (теорема Б.Леви, лемма Фату, теорема Лебега).

Будем далее полагать, что (X, Σ, μ) — σ-конечное измеримое пространство, $E \in \Sigma$.

Теорема 20.1 (Беппо-Леви, Monotone convergence theorem)**.**
Пусть f_n измеримы на E, причём $0 \le f_1, \ f_n \uparrow$. Тогда

$$f := \lim_{n\to\infty} f_n \implies \int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Доказательство. Определим вспомогательную последовательность $g_1 := f_1, \ g_n := f_n - f_{n-1}$. Видно, что все $g_n \ge 0$ и измеримы. Приблизим каждую из них последовательностью $\psi_{m,n} \uparrow g_n$ простых функций из доказательства леммы 19.2.
Определим $F_m := \sum\limits_{n=1}^{m} \psi_{m,n}$, тогда $F_{m+1} - F_m = \sum\limits_{n=1}^{m} (\psi_{m+1,n} - \psi_{m,n}) + \psi_{m+1,m+1} \ge 0$.
Кроме того,

$$\forall m : F_m \le \sum_{n=1}^{m} g_n = f_m \le f$$

$$\forall N : \lim_{m\to\infty} F_m \ge \sum_{n=1}^{N} \lim_{m\to\infty} \psi_{m,n} = \sum_{n=1}^{N} g_n = f_N$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{m\to\infty} F_m = f$, т.к. $F_m \uparrow f$.
Т.к. предельный переход и интегрирование по Лебегу перестановочны в случае простых функций с сохранением равенства и неравенств (утверждение 19.4), имеем $\lim\limits_{m\to\infty} \int_E F_m d\mu = \int_E f d\mu$.
В то же время, по монотонности интеграла Лебега получаем, что

$$\forall m : 0 \le F_m \le f_m \le f \implies \int_E F_m d\mu \le \int_E f_m d\mu \le \int_E f d\mu$$

Переходя к пределу по m, по теореме о зажатой функции получаем, что

$$\lim_{m\to\infty} \int_E f_m d\mu = \int_E f d\mu$$

□

Следствие 20.1. Пусть $f_n \uparrow, \ f_n \in L(E)$ и $\exists C > 0 : \sup\limits_n \int_E f_n d\mu \le C$, тогда

$$f := \lim_{n\to\infty} f_n \in L(E), \ \int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Доказательство. Последовательность $\psi_n := f_n - f_1$ удовлетворяет условию т. Беппо-Леви. Потому для $\psi := \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n = f - f_1$ верно

$$\int_E \psi d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} \psi_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \psi_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu - \int_E f_1 d\mu$$

Интегрируемость ψ следует из условия, потому $f = \psi + f_1 \in L(E)$. Навешиванием интеграла и использованием установленного выше равенства получаем искомое. □

Следствие 20.2. Пусть f_n — последовательность измеримых неотрицательных функций. Тогда

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n \implies \int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu$$

Доказательство. Введём последовательность $\psi_n := \sum_{k=1}^n f_k$, $f = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n$. По т. Беппо-Леви

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \psi_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_E f_k d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu$$

□

Следствие 20.3.

$$f \in L(E),\ E := \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n,\ \forall n : E_n \in \Sigma \implies \forall n : f \in L(E_n),\ \int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $f \geq 0$.
Очевидно, что $\forall n : |f \cdot \mathbf{I}_{E_n}| \leq f$, откуда $f \in L(E_n)$.
Кроме того, $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f \cdot \mathbf{I}_{E_n}$.
Тогда по следствию 20.2. имеем $\int_E f d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$. □

Лемма 20.1 (Фату, Fatou's lemma)**.**
Пусть μ полна[1], а f_n — последовательность измеримых неотрицательных функций. Тогда[2]

$$f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f \implies \int_E f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

В англоязычной литературе *теоремой* Фату принято называть следующий результат:

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$

Доказательство. Положим $g_n := \inf\limits_{k\geq n} f_k$, тогда $g_n \leq f_n$, $g_n \uparrow f$ и

$$\forall x \in E'\ (\mu(E \setminus E') = 0) : \lim_{n\to\infty} g_n = \liminf_{n\to\infty} f_n = f$$

Применяя теорему Беппо-Леви, получим:

$$\int_{E'} f d\mu = \int_{E'} \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E'} g_n d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_{E'} g_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{E'} f_n d\mu$$

□

[1]Здесь и далее это условие важно для того, чтобы утверждение оставалось верно почти всюду.
[2]For those rusty in analysis:

$$\liminf_{n\to\infty} f_n := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} f_k = \sup_n \inf_{k\geq n} f_k$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} f_k = \inf_n \sup_{k\geq n} f_k$$

Замечание 20.1. Неравенство нельзя заменить на равенство. Контрпример — $f_n := n \cdot \mathbf{I}_{(0, \frac{1}{n})}$.

Доказательство. □

Теорема 20.2 (Лебега, Dominated convergence theorem).
Пусть μ полна, $f_n,\ f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$ — такая посл-ть измеримых, что $\exists F \in L(E)\ \forall n : |f_n| \le F$. Тогда

$$f(x) \in L(E),\ \int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Доказательство. Во первых, $f_n \in L(E)$ т.к. интегрируема их мажоранта.
В силу полноты меры, f измерима и $f \in L(E)$ (т.к. мажорируется интегрируемой F).
Рассмотрим последовательности функций $\varphi_n := F + f_n,\ \psi_n := F - f_n$.
Все они неотрицательны, интегрируемы и п.в. на E имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = F + f,\ \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n = F - f$.
По лемме Фату,

$$\int_E F d\mu + \int_E f d\mu = \int_E (F+f) d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E (F + f_n) d\mu = \int_E F d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Аналогично для $F - f$:

$$\int_E F d\mu - \int_E f d\mu = \int_E (F-f) d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E (F - f_n) d\mu = \int_E F d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Отсюда

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \le \int_E f d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

т.е. существует

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

□

21 Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Критерий интегрируемости по Лебегу на множестве конечной меры. Неравенство Чебышева.

Теорема 21.1 (Об абсолютной непрерывности интеграла Лебега).

$$f \in L(E) \implies \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall A \in \Sigma :$$
$$A \subseteq E,\ \mu(A) < \delta \implies \int_A |f| d\mu < \varepsilon$$

Доказательство.
Из условия ясно, что достаточно рассмотреть случай неотрицательной f. Выберем

$$h \ge 0 \in \mathrm{SF}(f),\ h = \sum_{i=1}^n a_i X_{E_i} : 0 \le \int_E f d\mu - \int_E h d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

Возьмём $\delta := \frac{\varepsilon}{2\left(\max\limits_{1\le i\le n} a_k + 1\right)}$, тогда если $A \in \Sigma,\ A \subset E,\ \mu(A) < \delta$, то

$$\int_A f d\mu = \int_E f d\mu - \int_E h d\mu + \int_E h d\mu \le$$
$$\le \int_A f d\mu = \int_E f d\mu - \int_E h d\mu + \int_E \sum_{i=1}^n (a_k \cdot \mathrm{I}_{E_i \cap A}) d\mu <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^n a_k \mu(\mathrm{I}_{E_i \cap A}) \le \frac{\varepsilon}{2} + \max_{1\le i\le n} a_i \sum_{k=1}^n \mu(E_k \cap A) \le \frac{\varepsilon}{2} + \max_{1\le k\le n} a_k \cdot \mu(A) \le \varepsilon$$

□

Теорема 21.2 (Критерий интегрируемости по Лебегу на множествах конечной меры)**.**
Пусть $\mu(E) < \infty$ и f измерима на E. Тогда[1]

$$f \in L(E) \iff \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq k\}) < \infty$$

Например, ограниченная измеримая функция на мн-ве конечной меры интегрируема по Лебегу.

Доказательство. Достаточно доказать теорему для неотрицательных функций, т.к. $f \in L(E) \iff |f| \in L(E)$.
Положим $h := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{I}_{\{|f| \geq k\}}$, тогда $h \leq f \leq h+1$, потому $f \in L(E) \iff h \in L(E)$.
По счётной аддитивности интеграла Лебега

$$\int_E h d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E \mathbf{I}_{\{|f| \geq k\}} d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq k\})$$

□

Теорема 21.3 (Неравенство Чебышева)**.**

$$f \geq 0 \in L(E),\ E_\lambda := \{f > \lambda\} \implies \mu(E_\lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \int_E f d\mu$$

Доказательство. По аддитивности интеграла Лебега

$$\int_E f d\mu = \int_{E \setminus E_\lambda} f d\mu + \int_{E_\lambda} f d\mu \geq \int_{E_\lambda} f d\mu \geq \int_{E_\lambda|} \lambda d\mu = \lambda \cdot \mu(E_\lambda)$$

□

Следствие 21.1. Если $f \geq 0$ измерима на E такова, что $\int_E f d\mu = 0$, то $f = 0$ п.в. на E.

Доказательство. Из неравенства Чебышева имеем: $\forall n : \mu(\{f > \frac{1}{n}\}) = 0$.
Поскольку $\{|f| > 0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{f > \frac{1}{n}\}$, получаем

$$\mu(\{|f| \neq 0\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left\{|f| > \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

□

22 Связь между интегралами Римана и Лебега на отрезке.

Теорема 22.1. Всё, что интегрируемо по Риману на брусах в $\mathbb{R}^n$, интегрируемо по Лебегу и

$$\text{R-}\int\limits_{[a,b]} f(x) dx = \text{L-}\int\limits_{[a,b]} f(x) d\mu$$

Доказательство.
Рассмотрим последовательность покоординатных разбиение бруса на 2^r частей равной длины

$$t_{r,i} := a + \frac{i}{2^r}(b-a),\ 0 \leq i \leq 2^r$$
$$\Delta r, i := [t_{r,i-1}, t_{r,i}]$$

[1] Наглядный пример того, почему это работает — интегрируемость по Лебегу функции $f(x) := x^{-\frac{1}{2}}$ на $[0,1]$

Рассмотрим все элементарные кубики, из которых составлено разбиение[1]

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n_{2^r} : E_{r,\mathbf{x}} := \Delta^1_{r,x_1} \times \dots \times \Delta^n_{r,x_n}$$

Выпишем простые-функции-аналоги верхней и нижней сумм Дарбу:

$$m_{r,\mathbf{x}} := \inf_{x \in E_{r,\mathbf{x}}} f(x), \quad M_{r,\mathbf{x}} := \sup_{x \in E_{r,\mathbf{x}}} f(x)$$
$$\underline{f}_r := \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n_{2^r}} m_{r,\mathbf{x}} \cdot \mathbf{I}_{E_{r,\mathbf{x}}} \quad \overline{f}_r := \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n_{2^r}} M_{r,\mathbf{x}} \cdot \mathbf{I}_{E_{r,\mathbf{x}}}$$

По критерию интегрируемости по Риману на брусе в терминах сумм Дарбу:

$$\lim_{r\to\infty} \text{L-}\int\limits_{[a,b]} \underline{f}_r d\mu = \lim_{r\to\infty} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n_{2^r}} m_{r,\mathbf{x}}\ \mu(E_{r,\mathbf{x}}) = I = \lim_{r\to\infty} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n_{2^r}} M_{r,\mathbf{x}}\ \mu(E_{r,\mathbf{x}}) = \lim_{r\to\infty} \text{L-}\int\limits_{[a,b]} \overline{f}_r d\mu$$

По построению очевидно, что $\underline{f}_r \le f \le \overline{f}_r$, причём $\underline{f}_r \uparrow,\ \overline{f}_r \downarrow$.
Переходя к пределу по r получим $\lim\limits_{r\to\infty} \underline{f}_r =: \underline{f} \le f \le \overline{f} := \lim\limits_{r\to\infty} \overline{f}_r$.
Поскольку $\sup\limits_r \int_E \underline{f}_r \le I \le \sup\limits_r \int_E \overline{f}_r$, по следствию 20.1. имеем[2]

$$\underline{f},\ \overline{f} \in L(E),\ \text{L-}\int\limits_{[a,b]} \underline{f} d\mu = I = \text{L-}\int\limits_{[a,b]} \overline{f} d\mu$$

Отсюда

$$\int\limits_{[a,b]} |\overline{f} - \underline{f}| d\mu = \int\limits_{[a,b]} (\overline{f} - \underline{f}) d\mu = 0$$

По следствию 21.1. из неравенства Чебышева заключаем, что $\mu\{\overline{f} - \underline{f} \neq 0\} = 0$.
Отсюда следует, что $\underline{f} = f = \overline{f}$ почти всюду на $[a,b]$. Значит

$$\text{L-}\int\limits_{[a,b]} f d\mu = I$$

□

23 Контрпримеры и задачи

Утверждение 23.1. Для всякого $n \in \mathbb{N}$ существует полукольцо $S : |S| = n$.

Доказательство. $S := \{\emptyset, \{1\}, \dots, \{n-2\}, \{1, 2, \dots, n-2\}\}$. □

Задача 23.1. Построить пример конечно-аддитивной неотрицательной функции на полукольце, не являющейся мерой.

Утверждение 23.2. Классическая внешняя мера Лебега не аддитивна:

$$\exists A, B \subset [0,1] : \mu^*(A) + \mu^*(B) \neq \mu^*(A \sqcup B)$$

[1] $\mathcal{R}_n := \{0, 1 \dots, n\}$

[2] Разве отсюда, в силу монотонности интеграла Лебега, всё не следует? Зачём всё, что дальше написано? Я уже молчу про то, что интегрируемость по Риману на брусе влечёт ограниченность на этом брусе, а по критерию всякая ограниченная функция на множестве конечной меры интегрируема по Лебегу.

Доказательство. Рассмотрим конструкцию множества Витали из теоремы 14.1.
Пусть E, X — множества из её доказательства.
Поскольку μ^* счётно-полуаддитивна, $\mu^*(E) > 0$[1]
Говоря точнее, $\exists n \in \mathbb{N} : \mu^*(E) > \frac{1}{n}$.
Но тогда достаточно рассмотреть объединение $3n$ множеств E_m, чтобы прийти к противоречию: внешняя мера их объединения будет больше меры отрезка $[-1, 2]$. □

Утверждение 23.3. Если $f, g \in L(E)$, то $\min\{f, g\},\ \max\{f, g\} \in L(E)$.

Доказательство.

- **Вариант 1**:

$$\min\{f, g\} \leq \max\{f, g\} \leq \max\{|f|, |g|\} \leq |f| + |g|$$

  а $\min, \max$ сохраняют измеримость функций.

- **Вариант 2**:

$$\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \quad \max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

  а класс интегрируемых по Лебегу замкнут относительно арифметических операций.

□

[1] Иначе было бы $\mu^*(X) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^* E_n \leq 0$.

Часть II

Теория вероятности, ФИВТ, семестр 4

Часть III

Математическая статистика, ФИВТ, семестр 5

Часть IV

Случайные процессы, ФИВТ, семестр 6