Sistema de Equações Lineares

Equação Linear

↳ forma canónica:

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b}$$

$\underbrace{a_1, \dots, a_n}_{\text{coeficientes}}, \underbrace{b}_{\text{termo independente}} \in \mathbb{R}$

Solução da equação

↳ sequência $\boxed{(c_1, c_2, \dots, c_n)}$ é solução se a substituição de x_i por c_i produz uma proposição verdadeira (P.V.)

Conjunto solução é o conjunto de todas as soluções.

Sistema de equações lineares (SEL)

↳ forma canónica:

$$\begin{cases} a_1x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

↳ forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$(AX = B)$

Solução de um SEL

↳ sequência $\boxed{(c_1, \dots, c_n)}$ é solução do SEL se for solução de todas as equações

↳ são equivalentes se tiverem o mesmo conjunto de soluções.

Classificação de SEL

↳ Possível
- Determinado (uma solução)
- Indeterminado (mais q uma solução)

↳ Impossível - não tem solução

Resolver é calcular a solução

Método de Eliminação de Gauss

1º Somar múltiplos da 1ª eq às restantes para eliminar a incógnita x_1 dessas equações.

2º Somar múltiplos da nova 2ª eq às restantes a partir da 3ª para eliminar a incógnita x_2.

3º Repetir até não ser possível continuar mais

Um SEL com incógnitas ordenadas está na forma de $\boxed{\text{escada}}$ se x_i é a 1ª incógnita dessa eq; então $x_1, \dots x_i$ não aparecem nas seguintes

O primeiro coeficiente da 1ª incógnita chama-se $\boxed{\text{pivot}}$

↳ o mesmo também é feito na matriz:

Matriz na forma de escada

↳ $\boxed{\text{ou condensada}}$

- se o 1º elemento não nulo numa linha está na coluna j, então a linha seguinte começa com pelo menos j elementos nulos
- se existirem linhas todas constituídas por zeros então aparecem dps de todas as outras

Resolver SELs

1º Transformar o sistema $\boxed{AX=B}$ no sistema equivalente $\boxed{UX=B}$ com U matriz em escada

2º Substituição ascendente

Característica de uma Matriz

- Qualquer matriz em escada obtida a partir de uma matriz M tem o mesmo nº de pivots (ou de linhas não nulas)
- A este número chama-se Característica de M

$\boxed{r(M)}$ ou $\boxed{c(M)}$

Operação em matrizes de SEL

$\boxed{L_i \leftrightarrow L_j}$ - troca de linhas

$\boxed{L_i' = L_i + kL_j}$ - substituir com a soma dela com outra

$\boxed{L_i' = kL_i}$ - substituir com múltiplo

Classificação de SEL

↳ Um SEL $AX=B$ com n incógnitas é:

- SI - impossível $\boxed{r(A) < r(A|B)}$
- SPD - possível determinado - $\boxed{r(A) = r(A|B) = n}$
- SPI - possível indeterminado - $\boxed{r(A) = r(A|B) < n}$

↳ infinitas soluções

Grau de indeterminação (GI)

↳ nº de variáveis independentes (livres)

$\boxed{GI = n - r(A)}$

Sistemas com Parâmetros

↳ Analisar as alternativas com variáveis e classificar

↳ Evitar aumentar o nº de entradas com parâmetros

↳ Troca de colunas na matriz simples

↳ corresponde à troca da ordem das incógnitas no sistema

Sistemas Homogéneos

Sistemas Homogeneos

↳ Todos os termos independentes iguais a zero:

$$\boxed{Ax = 0}$$

↳ São possíveis:

$$\boxed{r(A) = r(A|0)}$$

↳ Têm sempre a solução nula:

$$\boxed{A \times 0 = 0}$$

caso SPD

↳ a única solução é a nula

$$\boxed{r(A) = r(A|B) = n}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{SPD}$$

$$\boxed{\text{Solução: } (0, \dots, 0)}$$

caso SPI

↳ a solução nula é uma dos infinitos e é obtida substituindo as variáveis livres por zero

$$\boxed{r(A) = r(A|B) < n}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{SPI}$$

$$\boxed{\text{Solução: } \underbrace{(-z+t,\ z+t,\ z,\ t)}_{\text{exemplo}}}$$

ex.

Núcleo de Matriz (ou espaço nulo)

↳ Dada $A_{m \times n}$, o núcleo é o conjunto das soluções do sistema $\boxed{Ax = 0}$

↳ Representa-se por $\boxed{N(A)}$

Solução geral

(slide 9 é bom)

↳ Se $Ax = B$ é possível e

↳ se $\boxed{sp}$ é uma solução particular, então o conjunto solução é:

$$\boxed{sp + N(A) = \{sp + n : n \in N(A)\}}$$

ex:

$$S: (-2-z+t,\ -3+z+t,\ z,\ t) =$$

$$= (-2, -3, 0, 0) + \underline{(-z+t,\ z+t,\ z,\ t)}$$

$$= \underbrace{(-2, -3, 0, 0)}_{sp} + \overline{N(A)}$$

Intrepretação Geométrica

↳ SEL de 3 incógnitas e m linhas (cada linha é um plano)

- SI - não se intersetam
- SPD - num ponto
- SPI
  - GI=1 - uma reta
  - GI=2 - um plano

Cálculo da matriz inversa

$\boxed{Ax = I \Rightarrow X = A^{-1}}$

Uma matriz A quadrada de ordem n é:

não singular → se $r(A) = n$
singular → se $r(A) < n$
↳ não é invertível

se é não singular, pode ser calculada por eliminação:

$$\boxed{[A|I] \xrightarrow{\text{eli-inação descendente}} [A'|B] \xrightarrow{\text{eliminação ascendente}} [I|A^{-1}]}$$

escada
$r(A) = n$