Determinantes

Determinante (slide 5 bom)

↳ Seja A quadrada de ordem n

↳ det(A) ou |A| :

- se $n=1$, $\boxed{\det(A) = a}$
- se $n=2$, $\det(B) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- se $n>2$,

$$\boxed{\det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \det A(1|1) + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} A(1|n)}$$

Nota: $A(1|j)$ é a submatriz de A que se obtém por eliminação da linha 1 e da coluna j

Regra de Sarrus

↳ $n=3$;

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$\boxed{1+2+3} \boxed{-4-5-6} = \det(A)$

Complemento Algébrico

↳ A quadrada de ordem n:

$$\boxed{\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j)}$$

Teorema de Laplace

↳ O determinante de A é igual à soma dos produtos de uma qualquer linha|coluna de A, pelos respetivos complementos algébricos.

$$\det(A) = \hat{a}_{i1} a_{i1} + \dots + \hat{a}_{in} a_{in} \quad L$$

$$\det(A) = \hat{a}_{1j} a_{1j} + \dots + \hat{a}_{nj} a_{nj} \quad C$$

Propriedades

1.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \dots & \alpha a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & \dots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots \\ a_{i1} \dots \\ \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots \\ a'_{i1} \dots \\ \dots \end{vmatrix}$$

3. Se uma linha/coluna de zeros → $\boxed{\det(A) = 0}$

4. Se tem 2 linhas/colunas iguais ou proporcionais $\boxed{\det(A) = 0}$

5. Se trocarmos entre si 2 linhas/colunas, o det(A) muda de sinal

Propriedades 2

(6) Se a uma linha/coluna somarmos um múltiplo de outra linha/coluna, o valor do determinante não se altera

(7) Se A é triangular:

$$\boxed{\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}}$$

(8) $\det(A^T) = \det(A)$

(9) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

(10) $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$

(11) $\det(A^n) = (\det(A))^n$

(12) $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

↳ se $\boxed{\det(A) \neq 0 \text{ ; } A \text{ é invertível}}$

Matriz Adjunta

↳ Define-se matriz adjunta de A:

$$\operatorname{adj}(A) = \left[\hat{a}_{ij}\right]^T = \left[(-1)^{i+j} \det A(i|j)\right]^T$$

↳ Adjunta de $A_{2\times2}$:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Através da adjunta:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)}$$

Regra de Cramer

Se A é invertível, o sistema $Ax = B$ é SPD e tem-se

$$\boxed{x = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \times B}$$

$Ax = B$ só é possível sse $\det(A) \neq 0$ e $B_{n\times1}$

A solução do sistema é calculada por:

$$\boxed{s_k = \frac{\det C_k}{\det A}}$$

onde k é uma coordenada e $\boxed{C_k}$ é uma matriz de A onde se substitui a coluna k por B.

Espaços Vetoriais

Definição

↳ Um conjunto V é um espaço vetorial real se em V estão definidas duas operações:

$\forall u, v \in V$:

$u + v \in V$

$\forall u \in V, \forall a \in \mathbb{R}$:

$au \in V$

Propriedades:

$\forall u, v, w \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

→ $u + v = v + u$

→ $u + (v + w) = (u + v) + w$

→ $1u = u$

→ $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

→ $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

→ $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

→ $\exists (-u) \in V : u + (-u) = 0_V$

→ $\exists 0_V \in V : u + 0_V = u$

Exemplo

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

com operações...

↳ $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots)$

↳ $\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$

É um espaço vetorial o conjunto das matrizes $m \times n$:

$$\mathbb{R}^{m \times n} = \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$$

↳ soma de matrizes

↳ multiplicação de matriz por escalar

Conjunto das M. coluna

Espaço vetorial do conjunto das matrizes coluna com n entradas:

$$\mathbb{R}^{n \times 1} = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} ; a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Dado $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$[u]$ → Matriz Coluna

$= [x_1 \ldots x_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

Conjunto dos Polinómios na incógnita x com coef. reais de grau ≤ n :

$$\mathbb{P}_n[x] = \{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 : \ldots \in \mathbb{R}\}$$

Conjunto das Funções Reais de variável Real

Entre outros exemplos nos slides...

↳ slide ①

Subespaço vetorial

, de V, é um subconjunto não vazio S de V tal que:

$$\boxed{\begin{array}{l} u, v \in S \Rightarrow u+v \in S \\ u \in S, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u \in S \end{array}}$$

↳ as propriedades tbm são aplicáveis

Seja S o conjunto das soluções de um SEL homogéneo com n incógnitas:

$$\boxed{Ax = 0}$$

↳ $\boxed{S \neq \emptyset}$, porque $(0,0,\dots,0) \in S$
↳ solução nula

↳ Se u e $v \in S$...

$\boxed{A[u] = 0 \text{ e } A[v] = 0}$

$\boxed{A[u+v] = A[u] + A[v] = 0}$

$\boxed{u+v \in S}$

↳ Se $k \in \mathbb{R}$ e $u \in S$

$\boxed{A[u] = 0}$

$\boxed{A[ku] = kA[u] = k0 = 0}$

$\boxed{ku \in S}$

+ Subespaço vetorial

↳ o Núcleo de A, ou seja, o conjunto das soluções do SEL homogéneo $Ax = 0$ é um subespaço vetorial de $\boxed{\mathbb{R}^n}$

$$\boxed{N(A) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : A[x_1 \dots x_n]^T = 0\}}$$

É um subespaço vetorial das matrizes quadradas, o conjunto das:

→ simétricas
→ triangulares
→ com diagonal nula
→ diagonais
→ escalares

Não é com:

→ diagonal não nula
→ invertíveis
→ não invertíveis

Interseção e soma

Se S_1 e S_2 são subespaços do espaço vetorial V:

- $\boxed{S_1 \cap S_2}$ é subespaço de V
- $\boxed{S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 : s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}}$ é subespaço de V

Combinação Linear

↳ Seja V um espaço vetorial:

↳ Diz-se que o elemento u de V é combinação linear dos elementos $u_1, \dots, u_k$ de V, se existirem escalares $a_1, \dots, a_k$ ($\in \mathbb{R}$) que:

$$\boxed{u = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k}$$

Subespaço Gerado

↳ O conjunto de todas as combinações lineares dos vetores $v_1, \dots, v_k \in V$ é um subespaço de V, chamado subespaço gerado por $v_1, \dots, v_k$ e denotado por $\boxed{\langle v_1, \dots, v_k \rangle}$

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \{a_1 v_1, \dots, a_k v_k : a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}$$

↳ Os elementos $v_1, \dots, v_k$ são os geradores de S.

↳ Se u_i é combinação linear de $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_k$ então

$$\langle u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_k \rangle$$

Combinação linear nula

↳ O vetor nulo de V, $\boxed{0_V}$ é combinação linear de quaisquer ~~vetores~~ vetores de V:

$$\boxed{0u_1 + 0u_2 + \dots + 0u_k = 0_V}$$

Dependência e Independência Linear

↳ Diz-se que $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$:

linearmente independentes

↳ se a combinação linear nula:

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = 0_V$$

implica q todos os escalares são nulos

linearmente dependentes

↳ se existem escalares não todos nulos tais que:

$$b_1 u_1 + \dots + b_k u_k = 0_V$$

↳ Neste caso, pelo menos um dos vetores é combinação linear dos restantes

(In)dependência linear Propriedades

Sejam $u_1, \dots, u_k$ elementos do espaço vetorial V:

① O vetor nulo, 0_V, é l.d.

② u é l.i. sse $u \neq 0_V$

③ $u_1, \dots, u_k$ $(k \geq 2)$ são l.d. sse pelo menos um deles é combinação linear dos restantes

④ Se algum dos vetores $u_1, \dots, u_k$ ~~são~~ é vetor nulo, então $u_1, \dots, u_k$, são l.d.

⑤ Se $u_1, \dots, u_k$ são l.i., então $u_1, \dots, u_{k+1}$ são l.d. sse u_{k+1} é combinação linear de $u_1, \dots, u_k$.

⑥ Se $u_1, \dots, u_k$ são l.d. e $u_1, \dots, u_m \in S \subseteq V$, então todos os vetores de S são l.d.

⑦ Se $u_1, \dots, u_k$ são l.i., então os vetores de qualquer seu subconjunto são l.i.

Base e dimensão

Um conjunto $\{u_1, \dots, u_n\}$ é base de V se:

- $u_1, \dots, u_n$ são l.i.
- $u_1, \dots, u_n$ são geradores de V

$\{(1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), \dots (0,\dots,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^n$. A esta base dá-se o nome de base canónica de $\boxed{\mathbb{R}^n}$

Se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é base de V ent qualquer base tem n elementos

$$\boxed{\dim(V) = n}$$

$$\boxed{\dim(\mathbb{R}^n) = n}$$

Em geral, qualquer base de $\mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\boxed{\dim(\mathbb{R}^{m \times n}) = m \times n}$$

Em geral, qualquer base de $\mathbb{P}_n(x)$:

$$\boxed{\dim(\mathbb{P}_n(x)) = n + 1}$$

Se $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ é

conjunto gerador de V

$\Updownarrow$

tem todos os elementos l.i.

$\Downarrow$

B é uma base

Nota: Para provar que v_1, v_2, v_3 e v_4 geram $\mathbb{R}^3$, basta mostrar q:

$$\boxed{r([v_1\ v_2\ v_3\ v_4]) = 3 = \dim \mathbb{R}^3}$$

Espaços Vetoriais 3

Coordenadas

↳ Seja V um espaço vetorial de $\boxed{\dim(V)=n}$ e $\boxed{B=(u_1,\dots,u_n)}$ uma base ordenada.

↳ Qualquer elemento u de V escreve-se de maneira única como combinação linear dos elementos de B:

$$\boxed{v = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n}$$

↳ Os escalares únicos $c_1,\dots,c_n$ designam-se por coordenadas de u em relação à base B:

$$\boxed{u = (c_1,\dots,c_n)_B}$$

Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

O núcleo de A:

$$\boxed{S=\left\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0\right\} = N(A)}$$

↳ $\boxed{\dim(S) = n - r(A)}$

↳ o conjunto das soluções geradoras obtidas ao substituir as variáveis livres por 1 e as restantes por 0 é uma base de S

nulidade de A

↳ dimensão do Núcleo de A

$$\boxed{\dim(N(A)) = n - r(A)}$$

Subespaços de $\mathbb{R}^n$

↳ Seja $\boxed{S=\langle u_1,\dots,u_k\rangle}$ um subespaço de $\mathbb{R}^n$, tem-se:

→ $\boxed{\dim(S) = r([u_1 \dots u_k])}$

→ o conjunto dos vetores geradores q ~~...~~ correspondem às colunas dos pivots ~~...~~ $[u_1, \dots u_k]$ é uma base de S

→ Dada $\boxed{A^{n\times k}}$ chama-se espaço das colunas de A o subespaço de $\mathbb{R}^n$ com as colunas de A. → $\boxed{C(A)}$

$$\boxed{\dim(C(A)) = r(A)}$$

Subespaços de $\mathbb{R}^n$ - Equações

Seja S um s.v. de $\mathbb{R}^n$ e $\dim(S)=k$, $0<k<n$:

Se $\{u_1,\dots,u_k\}$ é base de S, então para qq u de S:

$$\boxed{u = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k}$$

↳ equação vetorial de S

esta equação pode separar-se em $\boxed{n \text{ equações paramétricas}}$

↳ S pode ser definido pelo conjunto solução de um SEL homogéneo com $\boxed{n-k \text{ equações}}$ cartesianas de S