Aplicações Lineares

Aplicação Linear

- U e V são espaços vetoriais.
- Uma aplicação linear de U em V é uma aplicação $f: U \to V$:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(u+v) = f(u) + f(v) \\ f(\lambda u) = \lambda f(u) \\ \forall u,v \in U \wedge \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{array}}$$

Expressão Analítica

- Seja $f: U \to V$
- U tem dim n e $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ é base de U:

$\hookrightarrow \forall u \in U$, $\underbrace{u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n}_{\text{Combinação linear}}$

$$\boxed{f(u) = a_1 f(1) + \dots + a_n f(u_n)}$$

- Se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ então:

$$\boxed{f(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \; a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)}$$

Imagem de um S.V.

- Seja $f: U \to V$. S é subespaço v. de U, então a imagem de S é:

$$\boxed{f(S) = \{f(u) : u \in S\}}$$

é subespaço v. de V

Se: $\boxed{S = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle}$

$$\boxed{f(S) = \langle f(v_1), \dots, f(v_k) \rangle}$$

Imagem ou Contra Domínio

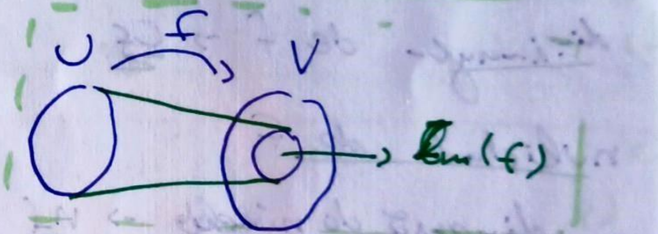
- Se $f: U \to V$.

Ao subespaço v. $f(U)$ de V chama-se imagem de f e denota-se por $\boxed{\mathrm{Im}(f)}$:

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \{f(u), u \in U\}}$$

Se B é uma base de U:

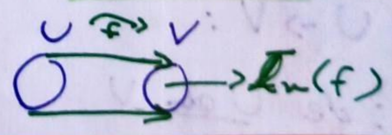
$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \langle f(u_1), \dots, f(u_n) \rangle}$$



A.L. Sobrejetiva

- seja $f: U \to V$, é sobrejetiva se

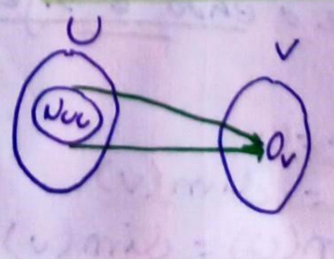
$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = V}$$



Núcleo

seja $f: U \to V$; O núcleo de f é:

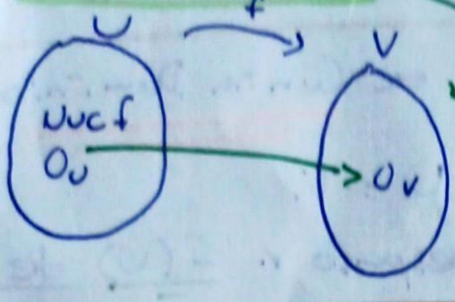
$$\boxed{\mathrm{Nuc}(f) = \{u \in U : f(u) = 0_V\}}$$



A.L. Injetiva -> $\dim(Nuc) = 0$

• $f: U \to V$ é injetiva se:

$$\boxed{Nuc(f) = \{0_U\}}$$



Teorema da dimensão

• Seja V um espaço V. de dim finita:

$$\boxed{\dim(Im(f)) + \dim(Nuc(f)) = \dim(V)}$$

$(f: U \to V)$

-> característica de f

↳ dim imagem de f -> c_f

-> nulidade de f

↳ dimensão do núcleo -> n_f

$$\boxed{c_f + n_f = \dim(U)}$$

Morfismos

• Seja $f: U \to V$:

- homo- : de U em V
- mono- : se é injetiva
- epi- : se é sobrejetiva
- iso- : se é bijetiva
- endo- : se $U = V$
- auto- : se o endo é bijetivo

• mono se $n_f = 0$
• epi se $c_f = \dim(V)$
• iso se $\dim(U) = \dim(V)$

Matriz Canónica

• $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ à matriz do tipo nxm cujas colunas são as imagens da base canónica de $\mathbb{R}^n$

$$M_f = [f(e_1)\ f(e_2) \dots f(e_n)]$$

$$[f(u)] = M_f [u]$$

$$Im(f) = \langle f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n) \rangle$$

$$\dim(Im(f)) = r(M_f)$$

$$Nuc(f) = \{(x_1, \dots, x_n) \in : M_f [x_1 \dots x_n]^T = 0\}$$

$$\dim(Nuc(f)) = n - r(M_f)$$

$$c_f = r(M_f) \quad n_f = n - r(M_f)$$

$$c_f + n_f = n = \dim(\mathbb{R}^n)$$

se:

- $n > m$ - f não é injetiva
- $n < m$ - f não é sobrejetiva
- $n = m$ - f é injetiva sse é sobre

Aplicações Lineares 2

D3

Matriz de uma A.L.

Seja $f: U \to V$ e as bases ordenadas $\beta_U = (u_1, \dots, u_n)$ e $\beta_V = (v_1, \dots, v_m)$

Matriz de f nas bases $\beta_U\ \beta_V$:

$$M(f, \beta_U, \beta_V) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

em particular:

$$M(f, C_{\mathbb{R}^n}, C_{\mathbb{R}^m}) = M_f$$

$$M_f[u_1 \cdots u_n] = [v_1 \cdots v_m]\, M(f, B, B')$$

$$M_f[B] = [B']\, M(f, B, B')$$

$$M_f = B'\, M(f, B, B')\, [B]^{-1}$$

$$M(f, B, B') = [B']^{-1} M_f [B]$$

Operações com A.L.

Seja $f: U \to V$ e $g: U \to V$:

→ $f+g: U \to V$ tal que $(f+g)(u) = f(u) + g(u)$ é uma A.L.

→ $kf: U \to V$ tal que $(kf)(u) = kf(u)$ é uma A.L.

Em particular, se U e V têm dimensão finita:

$$M(f+g, B_U, B_V) = M(f, B_U, B_V) + M(g, B_U, B_V)$$

$$M(kf, B_U, B_V) = kM(f, B_U, B_V)$$

Composição de A.L.

→ Se $f: U \to V$ e $g: V \to W$ são A.L.

$g \circ f: U \to W$ tal que $(g \circ f)(u) = g(f(u))$ é A.L.

→ Em particular

$$M(g \circ f, B_U, B_W) = M(g, B_V, B_W) \times M(f, B_U, B_V)$$

Inversa de uma A.L.

→ Se $f: U \to V$ é uma A.L. bijetiva,

$f^{-1}: V \to U$ tal que $(f^{-1} \circ f)(u) = u$ é uma A.L.

→ Em particular:

$$M(f^{-1}, B_V, B_U) = (M(f, B_V, B_U))^{-1}$$