Valores e Vetores Próprios

-f é um endomorfismo de U

$\boxed{f: U \to U}$

Valor e Vetor próprio

-> Seja $f: U \to U$; um vetor u não nulo de U diz-se um vetor próprio de f, associado ao valor próprio $\lambda \in \mathbb{R}$ se

$$\boxed{f(u) = \lambda u}$$

-> Seja A uma matriz quadrada de ordem n; um vetor $u \in \mathbb{R}^n$ não nulo diz-se vetor próprio de A, associado ao valor próprio $\lambda \in \mathbb{R}$, se

$$\boxed{A[u] = \lambda[u]}$$

Espectro

-> Chama-se espectro de f ao conjunto de todos os valores próprios de f. $\boxed{\varepsilon(f)}$

Nota: O mesmo para matriz

Cálculo de valores próprios

-> Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e A a matriz canónica de f.

-> Os valores próprios de f são as soluções da eq. $\boxed{\det(A - \lambda I_n) = 0}$

-> Os vetores próprios são as soluções não nulas do SEL Homogéneo

$$\boxed{(A - \lambda I_n)X = 0}$$

Polinómio Característico

-> Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

-> Ao polinómio de grau n na variável x:

$$\boxed{p(x) = \det(A - x I_n)}$$

chama-se polinómio característico de f.

-> Se λ é valor próprio de f

↳ λ é raiz do polinómio

à multiplicidade de λ como raiz chama-se multiplicidade algébrica de λ e denota-se por $\boxed{m.a.(\lambda)}$

Nota: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tem no máx. n valores próprios

Subespaço próprio

-> O subespaço de $\mathbb{R}^n$ constituído pelas soluções do sistema homogéneo $(A - \lambda I_n)X = 0$ chama-se subespaço próprio associado ao valor próprio λ

$$\boxed{\begin{aligned} S_\lambda &= \{u \in \mathbb{R}^n : f(u) = \lambda u\} \\ &= \{u \in \mathbb{R}^n : A[u] = \lambda[u]\} \end{aligned}}$$

A $\dim(S_\lambda)$ chama-se multiplicidade geométrica de λ e representa-se por $\boxed{m.g.(\lambda)}$

→ Seja S_λ o subespaço próprio de $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

→ Se $\lambda \neq 0$ então $\boxed{f(S_\lambda) = S_\lambda}$

↳ f deixa S_λ invariante

→ Se $\lambda = 0$ então $\boxed{f(S_\lambda) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}}$

↳ $S_\lambda = S_0 = Nuc(f)$ e f não é injetiva nem sobrejetiva

Multiplicidades

→ Se λ é valor próprio de f :

↳ $\boxed{1 \leq m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda)}$

Vetores próprios e dependência linear

→ Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ valores próprios de f.
Se $u_1, u_2, \dots, u_k$ são vetores próprios associados respetivamente, então são **linearmente independentes**

Diagonalização

↳ Uma A.L. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diz-se diagonizável se existe uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios de f.

↳ Seja $\mathcal{B}$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^n$, então a $\boxed{M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \text{ é diagonal}}$

Aplicação Diagonalizável

→ f é diagonalizável

→ a soma das m.g. dos valores próprios de f é igual a n

→ existe uma base de $\mathbb{R}^n$ em relação à qual a matriz de f é diagonal

Matriz diagonalizável

→ A matriz A quadrada de ordem n é diagonalizável se for semelhante a uma matriz diagonal

$$\boxed{D = P^{-1} A P}$$

- P e D são quadradas de ordem n
- P é invertível
- D é diagonal
- P é uma matriz diagonalizadora de A

Diagonal → valores próprios
Diagonalizante → vetores próprios

Produto Interno

Definição

- Produto interno (canónico) ou produto escalar entre dois vetores é:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

Propriedades

- $u \cdot v = v \cdot u$
- $(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
- $u \cdot (v+w) = u \cdot v + u \cdot w$
- $u \cdot (kv) = k(u \cdot v) = (ku) \cdot v$
- $u \cdot u \geq 0$
- $u \cdot u = 0$ se $u = 0_{\mathbb{R}^n}$

Norma / Comprimento

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

Propriedades

- $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, então $\|u\| > 0$
- $\|ku\| = |k| \, \|u\|$
- se $\|u\| = 1 \rightarrow u$ é unitário
- se u não é nulo, o versor de u:

$$\text{vers } u = \frac{1}{\|u\|} u \quad \text{é unitário}$$

- $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$
  - ↳ Desigualdade triangular
    - ↳ igualdade se $u = kv$, $v = ku$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$$

havendo igualdade se forem linearmente dependentes

Ângulo

(número entre 0 e π)

$$\measuredangle(u,v) = \arccos\left(\frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}\right)$$

$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos(\measuredangle(u,v))$$

- $u \cdot v > 0$ - agudo
- " $= 0$ - reto
- " < 0 - obtuso

Distância

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

Vetores Ortogonais

↳ vetores são ortogonais ou perpendiculares se $u \cdot v = 0$

$$u \perp v$$

Projeção ortogonal

Se $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, a proj. orto. de v sobre u:

$$\text{proj}_u v = \frac{u \cdot v}{\|u\|^2} u = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} u$$

↳ "vetor"

$$\text{perp}_u v = v - \text{proj}_u v$$ → é ortogonal a u

$$v = proj_u v + (v - proj_u v)$$
$$(v - proj_u v) \perp u$$

Bases ortogonais e ortonormadas

- Base ortogonal
  ↳ se os vetores são ortogonais 2 a 2:
  $$u_i \cdot u_j = 0 \text{ se } i \neq j$$
- Base ortonormada se é ortogonal e os vetores são unitários
  ↳ base canónica é ortonormada

Método de ortogonalização Gram - Schmidt

- Seja $\beta = \{v_1, \dots, v_k\}$ uma base de um subespaço W de $\mathbb{R}^n$.
- A base $\{u_1, \dots, u_k\}$:

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 - proj_{u_1} v_2 \\ \vdots \\ u_k = v_k - proj_{u_1} v_k - \dots - proj_{u_{k-1}} v_k \end{cases}$$

é base ortogonal de S.

Projeção ortogonal sobre subespaço

$proj_S v$ → S é subespaço
→ v é vetor

$$(v - proj_S v) \perp S$$

Nota: se $\{u_1, \dots, u_k\}$ é uma base ortogonal de S, então:

$$proj_S v = proj_{u_1} v + \dots + proj_{u_k} v$$

Complemento ortogonal de subespaço

- todos os vetores ortogonais aos vetores de S

$$S^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : v \cdot u = 0 \text{ para } \forall u \in S\}$$

Propriedades

- $S^\perp$ é subespaço de $\mathbb{R}^n$
- $(S^\perp)^\perp = S$
- $S \cap S^\perp = 0_{\mathbb{R}^n}$
- $\mathbb{R}^n = S + S^\perp$
- $\dim(S) = k \Rightarrow \dim(S^\perp) = n - k$

Produto externo

- $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, \; -u_1 v_3 + u_3 v_1, \; u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Cálculo de Produto externo

$e_1 = (1,0,0)$
$e_2 = (0,1,0)$
$e_3 = (0,0,1)$

$$\boxed{u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}}$$

Se u e v são l.d. => $\boxed{u \times v = 0_{\mathbb{R}^n}}$

Se u e v são l.i. => $(u \times v) \perp u$ e $(u \times v) \perp v$

- Se u e v são vetores de $\mathbb{R}^3$ l.i.

$\boxed{\{u, \text{perp}_u v, u \times v\}}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$