Matrizes

Definição

- Uma matriz real (complexa) A do tipo $m \times n$ é um quadro com mn números reais (complexos) em m linhas e n colunas

  ↳ $\boxed{A_{m \times n}}$

- O nº na linha i, coluna j chama-se entrada (i, j) de A e denota-se por $\boxed{A_{ij}}$

Igualdade de matrizes

- Duas matrizes A e B são iguais se $\boxed{\forall i, j,\ a_{ij} = b_{ij}}$

  Assim, $\boxed{A = B}$

Matriz coluna → $\boxed{m \times 1}$

Matriz linha → $\boxed{1 \times n}$

Matriz Quadrada de ordem n é do tipo $n \times n$ e representa-se por $\boxed{A_n}$

→ elementos principais → $\boxed{a_{ii}}$

→ diagonal principal à sequência $\boxed{(a_{11}, \dots, a_{nn})}$

Matriz triangular

→ Superior → se $a_{ij} = 0$, para $\boxed{i > j}$

→ Inferior → se $a_{ij} = 0$, para $\boxed{i < j}$

Matriz Diagonal

↳ Se $a_{ij} = 0$, para $\boxed{i \neq j}$

ex: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$

Matriz Escalar

↳ Se é diagonal e todos os elementos principais são iguais

ex: $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $\boxed{\begin{bmatrix} \sqrt{2} \end{bmatrix}}$

Matriz identidade $\boxed{I_n}$

↳ (de ordem n) é uma escalar com todos os principais = 1

Matriz nula $\boxed{O_{m \times n} \text{ ou } O}$

↳ Tem todas as entradas iguais a zero

Submatriz

↳ Eliminar linhas e/ou colunas de A.

- Denota-se por:

$\boxed{A[i_1,\dots,i_k \mid j_1,\dots,j_I]}$ a submatriz de A com as linhas $i_1,\dots$ a i_k e colunas $j_1,\dots$ a j_I

$\boxed{A(i_1,\dots,i_k \mid j_1,\dots,j_I)}$ a submatriz após eliminar essas linhas/colunas.

Matriz Transposta

↳ Dada $A_{m\times n}$, A^T é $n\times m$ onde $\boxed{(A^T)_{ij} = a_{ji}}$

trocar coordenadas

Matriz Simétrica

- Se $\boxed{A = A^T}$
- Se é quadrada e os elementos posicionados simétricamente em relação à diagonal principal são iguais.

ex:

$$[1] \; ; \; \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} 0 & -5 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz Anti-Simétrica

- Se $\boxed{A = -A^T}$
- entradas principais nulas
- elementos posicionados simetricamente em relação à diagonal principal são simétricos

ex:

$$[0] \; ; \; \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Soma de Matrizes

- Dado $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$ a matriz da soma das duas tem

$$\boxed{(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

Nota: se não são do mesmo tipo então diz-se que a soma não está definida.

- $\boxed{A + O = A}$
- $\boxed{A + (-A) = O}$

↳ trocar sinal de todos os elementos de A

- $\boxed{(A+B)^T = A^T + B^T}$

- $\boxed{A + (-B) = A - B}$

Matrizes 2

Multiplicação matriz/escalar

• Dada $A_{m\times n}$ e α um nº real (complexo), a matriz da sua multiplicação denota-se por

$$\boxed{(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}}$$

→ multiplicar todos os elems por α

Propriedades

- $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$
- $1A = A$; $-1A = -A$; $0A = 0$
- $(\alpha A)^T = \alpha(A^T)$

Multiplicação de Matrizes

↳ $\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$

Dada $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$, a sua multiplicação é $\boxed{AB}$

ex:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1\times 2 + 3\times 0 & 1\times 6 + 3\times 3 & 1\times 4 + 3\times 1 \\ 5\times 2 + 2\times 0 & 5\times 6 + 2\times 3 & 5\times 4 + 2\times 1 \end{bmatrix}$$

Nota: $\boxed{AB \neq BA}$
↳ atenção a $\boxed{m\times p}$

→ se $AB = AC$; B pode ser $\neq C$

→ se $AB = 0$, e A e B podem ser $\neq 0$

→ se $A_{m\times n}$ ⇒ $\boxed{AI_n = A}$ e $\boxed{I_n A = A}$

Potência de matriz

• Seja A uma matriz quadrada...

$$\boxed{\begin{cases} A^0 = I_n \ldots \\ A^k = A^{k-1}A, \; k \in \mathbb{N} \end{cases}}$$

Matrizes Invertíveis

→ Seja A uma matriz quadrada de ordem n...

$$\boxed{AI_n = A = I_n A}$$

→ A é invertível se existir uma matriz X de ordem n tal que:

$$\boxed{AX = I_n = XA}$$

se $AY = I_n = YA$, então

$$\boxed{Y = YI_n = Y(AX) = (YA)X = I_n X = X}$$

Inversa de matriz quadrada

• Seja A invertível, chama-se matriz inversa de A → $\boxed{A^{-1}}$ a que verifica: $\boxed{AA^{-1} = I_n = A^{-1}A}$

AA^{-1} tem de ser igual a:

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}$$

Propriedades

- se $AB = I_n \Rightarrow B = A^{-1}$
- se $BA = I_n \Rightarrow B = A^{-1}$
- se A^{-1} é invertivel... $(A^{-1})^{-1} = A$
- se A^T " " ... $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- " AB " " ... $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- " A^k " " ... $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$
- " αA " " ... $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$

Matriz Ortogonal

Se A é inversivel e se

$$\boxed{A^{-1} = A^T}$$

ex:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$