Perancangan dan Analisis Algoritma

“ Binary Exponentiation ”

Disusun Oleh :

Mubarakh Hayatna Khairy

21343083

Dosen Pengampu :

Randi Proska Sandra, S.Pd.,M.Sc.

Prodi Informatika

Departemen Elektronika

Fakultas Teknik

Universitas Negeri Padang

1. PENJELASAN PROGRAM/ALGORITMA

Binary Exponential adalah salah satu algoritma yang digunakan untuk mempercepat operasi integer eksponensial. Algoritma ini bekerja dengan cara membagi pangkat menjadi pangkat genap secara berulang-ulang hingga mencapai pangkat yang diinginkan.

Misalnya, jika Anda ingin menghitung 2^10, algoritme Eksponensial Biner mengubahnya menjadi 2^8 * 2^2, yang kemudian dapat dihitung lebih cepat. Dengan cara ini, algoritma Eksponensial Biner mengurangi jumlah operasi yang diperlukan untuk menghitung eksponensial dari O(n) menjadi O(log n), di mana n adalah eksponen.

Berikut adalah langkah-langkah untuk mengimplementasikan Algoritma Eksponensial Biner:

a. Tentukan bilangan yang akan dipangkatkan (basis) dan pangkat yang diinginkan (eksponen).
b. Ubah eksponen menjadi representasi binernya.
c. Mulai dari bit terakhir (LSB) hingga bit pertama (MSB) dalam representasi biner, lakukan hal berikut:
    - Jika bit saat ini adalah 1, kalikan hasil sebelumnya dengan basis.
    - Naikkan basis ke pangkat 2 dan simpan hasilnya sebagai basis baru.
d. Setelah selesai, hasil akhirnya adalah perkalian dari semua iterasi.

Algoritma Eksponensial Biner sangat berguna dalam banyak aplikasi, terutama dalam Matematika dan Ilmu Komputer. Contoh penggunaan algoritma ini adalah dalam enkripsi RSA, menghitung nilai Fibonacci yang besar, menghitung matriks penentu, dan sebagainya.

Algoritma Eksponensial Biner juga dapat diterapkan untuk menghitung eksponensial modular, yaitu menghitung kekuatan modulo n. Untuk menghitung hasil modulo n, setiap kali hasilnya dikuadratkan (atau dikalikan dengan hasil kali dasar dengan hasil sebelumnya), hasilnya harus diambil modulo n.

Misalnya, jika Anda ingin menghitung 2^10 mod 5, algoritme Eksponensial Biner akan mengubahnya menjadi 2^8 mod 5 * 2^2 mod 5 = 1 * 4 = 4. Dalam hal ini, pangkat eksponensial dari 2^ 10 diperoleh dengan mengalikan 2 ^8 mod 5 dengan 2^2 mod 5 lalu keluarkan hasilnya modulo 5.

Selain itu, untuk mengoptimalkan kinerja algoritma Binary Exponentiation dapat dilakukan beberapa optimasi, seperti penggunaan unsigned integer untuk menghindari

integer overflow, penggunaan bit shifting untuk menggantikan operasi pembagian dan modulo, serta pemanfaatan properti integer seperti bilangan genap dan ganjil.

Efisiensi luar biasa aturan Horner berkurang ketika metode ini diterapkan untuk menghitung an, yang merupakan nilai xn pada x = a. Bahkan, itu merosot menjadi kekuatan kasar mengalikan a dengan sendirinya, dengan penambahan angka nol yang tidak berguna di antaranya. Sejak perhitungan an (sebenarnya, mod m) adalah operasi penting dalam beberapa cara penting metode pengujian dan enkripsi primality, kami sekarang mempertimbangkan dua algoritma untuk perhitungan berdasarkan ide perubahan-representasi. Mereka berdua mengeksploitasi representasi biner dari eksponen n, tetapi salah satunya memproses biner ini string kiri ke kanan, sedangkan yang kedua melakukannya dari kanan ke kiri. Membiarkan

$$n = b_1 ... b_i ... b_0$$

menjadi string bit yang mewakili bilangan bulat positif n dalam sistem bilangan biner.

Artinya nilai n dapat dihitung sebagai nilai polinomial

$$p(x) = b_1 x^1 + ... + b_i x^i + ... + b_0 \quad (6.4)$$

pada x = 2. Misalnya, jika n = 13, representasi binernya adalah 1101 dan

$$13 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Mari menghitung nilai polinomial ini dengan menerapkan aturan Horner dan lihat apa yang tersirat dalam pengoperasian metode untuk menghitung daya

$$a^n = a^{p(2)} = a^{b_1 2^1 + ... + b_i 2^i + ... + b_0}$$

2. PSEUDOCODE

```
//Computes an by the left-to-right binary exponentiation
algorithm

//Input: A number a and a list b(n) of binary digits bI
,...,b0

// in the binary expansion of a positive integer n

//Output: The value of an

product ← a

for i ← I - 1 downto 0 do

product ← product * product

if bi = 1 product ← product * a

return produc
```

atau

```
function binaryExponentiation(basis, exponen):

    if exponen = 0:

        return 1


    if exponen is odd:

        return basis * binaryExponentiation(basis,
exponen - 1)


    else:

        temp = binaryExponentiation(basis, exponen / 2)

        return temp * temp
```

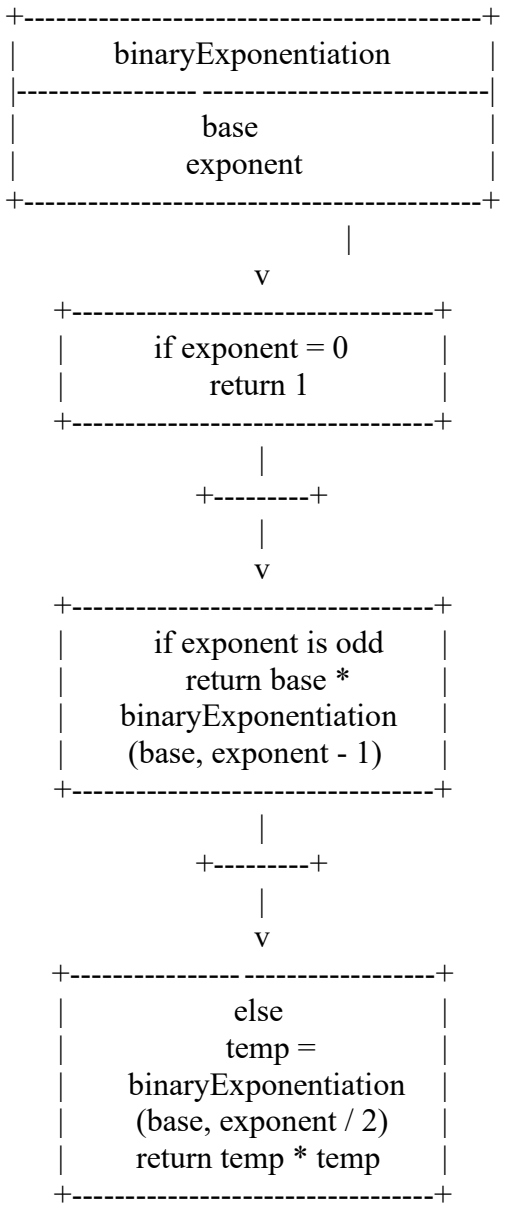
Penjelasan:

Algoritma ini menggunakan fakta bahwa x^n dapat dihitung sebagai (x^2)^(n/2) jika n genap, dan x * x^(n-1) jika n ganjil. Ini mengarah pada pendekatan bagi dan taklukkan yang dapat menghitung eksponensial dalam waktu logaritma.

Fungsi mengambil basis dan eksponen, dan secara rekursif menghitung hasilnya menggunakan rumus di atas. Jika eksponen adalah 0, ia mengembalikan 1 (karena angka apa pun yang dipangkatkan 0 adalah 1). Jika eksponen ganjil, secara rekursif menghitung

hasil untuk eksponen - 1 dan mengalikannya dengan basis. Jika eksponen genap, secara rekursif menghitung hasil untuk eksponen / 2 dan mengkuadratkannya.

Diagram blok untuk pseudocode binary exponentiation dapat diilustrasikan sebagai berikut:



3. SOURCE CODE

Berikut ini adalah contoh program Python yang menggunakan algoritma binary exponentiation:

```
# Fungsi binary exponentiation
def binary_exponentiation(base, exponent, modulus=None):
    """
    Fungsi untuk menghitung bilangan pangkat dengan algoritma binary exponentiation.

    Args:
        base (int): bilangan yang akan dipangkatkan
        exponent (int): pangkat dari bilangan
        modulus (int, optional): bilangan modulus untuk operasi modulo. Defaults to None.

    Returns:
        int: hasil pangkat bilangan
    """
    # Inisialisasi nilai result dengan 1
    result = 1

    # Jika modulus tidak diberikan, maka diambil modulo dengan 1
    base %= modulus if modulus else 1

    # Perulangan selama nilai exponent masih lebih besar dari 0
    while exponent > 0:
        # Jika exponent ganjil, maka result dikalikan dengan base
        if exponent % 2 == 1:
            result = (result * base) % modulus if modulus else result * base

        # Base dikuadratkan
        base = (base * base) % modulus if modulus else base * base

        # Exponent dibagi dua
        exponent //= 2

    # Hasil akhir diambil modulo dengan modulus jika modulus diberikan, atau tidak diambil modulo jika tidak ada modulus
    return result % modulus if modulus else result


# Contoh penggunaan program
if __name__ == '__main__':
    # Memasukkan bilangan yang akan dipangkatkan dan pangkatnya
    base = 237
    exponent = 919

    # Memasukkan bilangan modulus jika diperlukan
    modulus = 1057
```

```
        # Menghitung hasil pangkat dengan menggunakan binary
exponentiation
        result = binary_exponentiation(base, exponent, modulus)

        # Menampilkan hasil pangkat
        print(f"Hasil dari {base}^{exponent} mod {modulus} adalah
{result}")
```

Pada baris ke-3 hingga ke-13, terdapat definisi fungsi binary_exponentiation. Fungsi ini memiliki tiga parameter, yaitu base, exponent, dan modulus. base dan exponent adalah bilangan yang akan dipangkatkan dan pangkatnya, sedangkan modulus adalah bilangan modulus untuk operasi modulo. Jika modulus tidak diberikan, maka fungsi akan mengembalikan hasil pangkat base^exponent. Fungsi ini menggunakan algoritma binary exponentiation untuk menghitung hasil pangkat.

Pada baris ke-17, variabel result diinisialisasi dengan nilai 1. Pada baris ke-20, nilai base diambil modulo dengan modulus jika modulus diberikan, atau 1 jika tidak ada modulus.

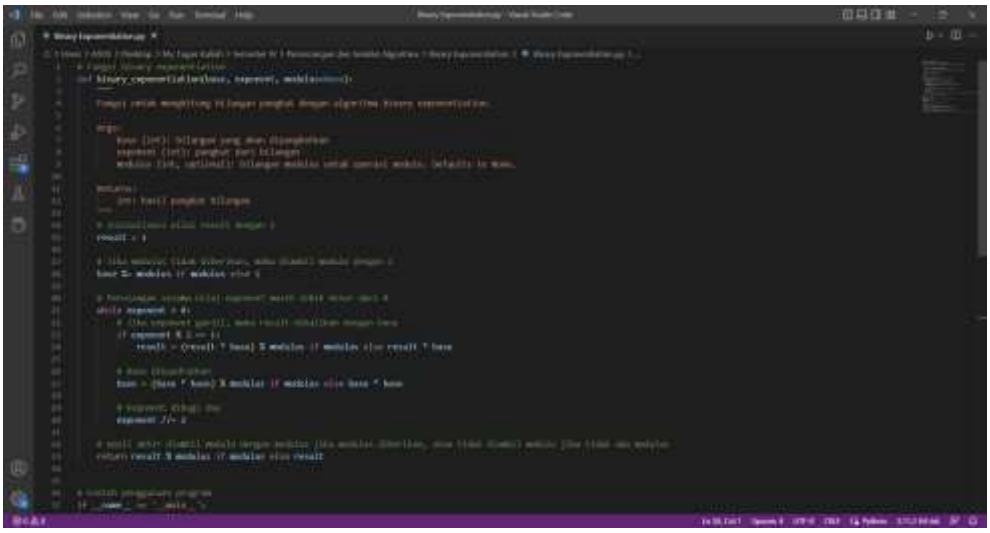
Pada baris ke-23 hingga ke-30, dilakukan perulangan selama nilai exponent masih lebih besar dari 0. Dalam setiap iterasi, dilakukan pengecekan apakah exponent adalah bilangan genap atau ganjil. Jika exponent ganjil, maka result akan dikalikan dengan base dan kemudian diambil modulo dengan modulus jika modulus diberikan, atau tidak diambil modulo jika tidak ada modulus. Kemudian, nilai base akan d ikuadratkan dan kemudian diambil modulo dengan modulus jika modulus diberikan, atau tidak diambil modulo jika tidak ada modulus. Nilai exponent kemudian dibagi dua.

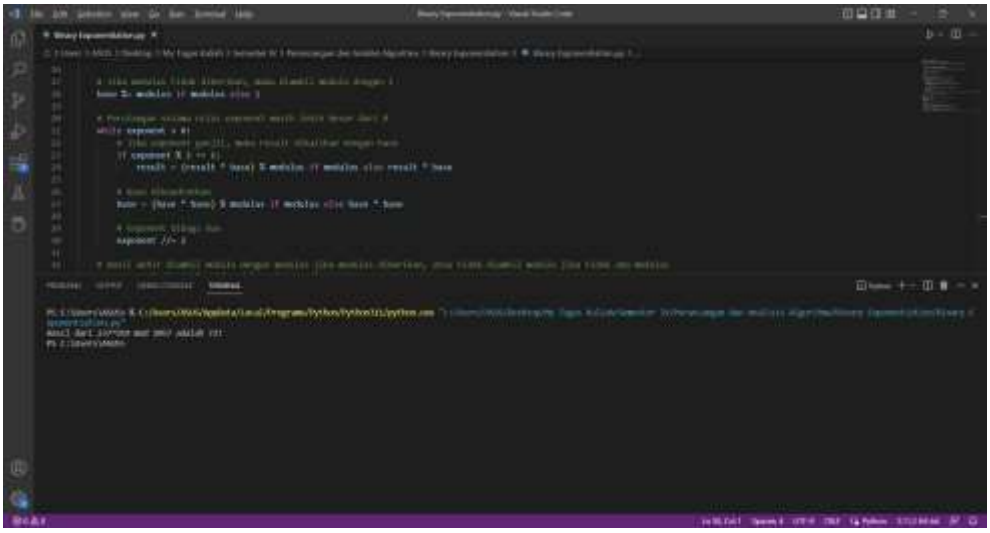
Setelah perulangan selesai dilakukan, pada baris ke-32 hingga ke-35, hasil akhir diambil modulo dengan modulus jika modulus diberikan, atau tidak diambil modulo jika tidak ada modulus. Nilai hasil akhir kemudian dikembalikan oleh fungsi.

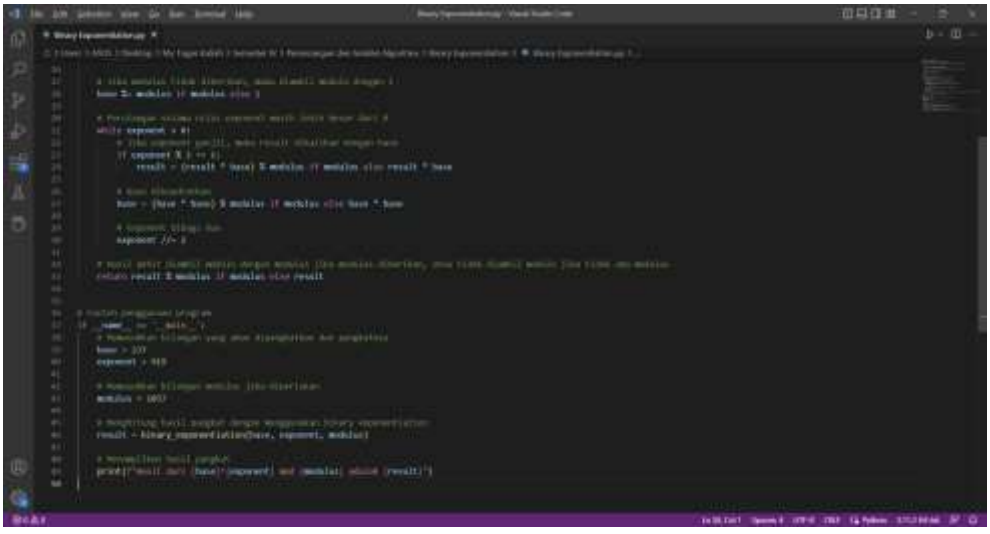
Pada baris ke-38 hingga ke-48, terdapat contoh penggunaan program. Pada contoh ini, base dan exponent diberikan nilai 237 dan 919. modulus juga diberikan nilai 1057. Kemudian, fungsi binary_exponentiation dipanggil dengan tiga parameter tersebut sebagai argumen. Hasil pangkat yang dikembalikan oleh fungsi kemudian disimpan ke dalam variabel result. Hasil pangkat kemudian ditampilkan ke layar menggunakan perintah print.

Dalam program ini, jika ingin menghitung pangkat tanpa menggunakan modulus, maka modulus dapat diabaikan pada saat memanggil fungsi binary_exponentiation. Namun, jika ingin menghitung hasil pangkat dengan menggunakan modulus, maka nilai modulus harus diberikan pada saat memanggil fungsi.

Hasil Program :







4. ANALISIS KEBUTUHAN WAKTU

Binary exponentiation adalah algoritma yang digunakan untuk menghitung pangkat bilangan bulat dengan cepat. Algoritma ini menggunakan sifat eksponen untuk mengurangi jumlah operasi perkalian yang diperlukan untuk menghitung hasil pangkat.

Untuk memperkirakan kebutuhan waktu binary exponentiation, kita dapat menggunakan tiga pendekatan sebagai berikut:

a. Analisis menyeluruh berdasarkan operasi/instruksi yang di eksekusi

Dalam eksponensial biner, ada dua jenis operasi utama yang dilakukan: penambahan dan pengurangan modulus. Operasi penjumlahan menghasilkan sejumlah besar operasi, sedangkan operasi modulus relatif murah. Oleh karena itu, waktu eksekusi tergantung pada jumlah penambahan yang diperlukan.

Untuk menghitung kebutuhan waktu secara keseluruhan, kita dapat menghitung jumlah operasi penjumlahan dan modulus yang dilakukan pada setiap iterasi. Kemudian, jumlah operasi ini dapat dijumlahkan untuk mendapatkan jumlah total operasi yang diperlukan.

b. Analisis berdasarkan jumlah operasi abstrak atau operasi khas

Pendekatan kedua adalah memperhatikan jumlah operasi abstrak atau tipikal yang dilakukan dalam algoritma. Operasi abstrak atau operasi tipikal adalah operasi matematika dasar seperti penjumlahan, pembagian, penjumlahan, dan pengurangan yang sering digunakan dalam algoritma.

Dalam eksponensial biner, operasi tipikal yang dilakukan adalah penjumlahan dan modulus. Oleh karena itu, kebutuhan waktu dapat diperkirakan berdasarkan jumlah operasi inkremental dan modulus yang dilakukan dalam algoritma.

c. Analisis menggunakan pendekatan best-case, worst-case, dan average-case

Pendekatan ketiga adalah dengan mempertimbangkan best-case, worst-case, dan average-case scenario dalam algoritma. Best-case adalah ketika nilai eksponen adalah nol, sehingga algoritma langsung mengembalikan nilai 1 tanpa melakukan operasi perkalian. Worst-case adalah ketika nilai eksponen sangat besar, sehingga algoritma harus melakukan banyak operasi perkalian. Average-case adalah ketika nilai eksponen berada di antara best-case dan worst-case.

Untuk best-case, kebutuhan waktu adalah konstan, yaitu O(1). Untuk worst-case, kebutuhan waktu adalah O(log n) di mana n adalah nilai eksponen. Untuk average-case, kebutuhan waktu juga dapat diperkirakan sebagai O(log n).

Dalam semua tiga pendekatan, kebutuhan waktu binary exponentiation dapat diperkirakan sebagai O(log n), di mana n adalah nilai eksponen. Jumlah operasi perkalian dan modulus serta jumlah operasi abstrak juga dapat diperkirakan sebagai O(log n). Namun, jumlah operasi perkalian lebih dominan dalam algoritma, sehingga waktu eksekusi lebih dipengaruhi oleh jumlah operasi perkalian yang dilakukan.

5. REFERENSI

Introduction to the Design & Analysis of Algorithms 3rd Edition karya Anany Levitin

GeeksforGeeks. (2022). Binary Exponentiation (Power in Logarithmic time). Diakses pada 8 Maret 2023, dari https://www.geeksforgeeks.org/write-a-c-program-to-calculate-powxn/

CP-Algorithms. (2022). Binary Exponentiation. Diakses pada 8 Maret 2023, dari https://cp-algorithms.com/algebra/binary-exp.html

Khan Academy. (2022). Exponentiation algorithms. Diakses pada 8 Maret 2023, dari https://www.khanacademy.org/computing/computer-science/algorithms/recursive-algorithms/a/exponentiation-algorithms

Brilliant. (2022). Binary Exponentiation. Diakses pada 8 Maret 2023, dari https://brilliant.org/wiki/binary-expo/

Baase, S. & Van Gelder, A. (2008). Computer Algorithms: Introduction to Design and Analysis. Pearson Prentice Hall.

6. Lampiran LINK pengumpulan Github

https://github.com/MrKhairy10/Perancangan-Analisis-Algoritma---Transform-and-Conquer---Binary-Exponentiation/upload/main