Задача 8

Козлов А.

26 декабря 2021 г.

1 Формулировка

Гамильтониан взаимодействия электрона с внешним полем

$$A^{\mu}(r) = \left(0,\, 0,\, 0,\, ae^{-\beta^2 r^2}\right),$$

где a, $\beta = \text{const}$, имеет вид

$$\hat{\boldsymbol{H}}(x) = e\hat{\overline{\boldsymbol{\psi}}}(x)\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\hat{\boldsymbol{\psi}}(x)A_{\mu}(r).$$

В низшем порядке теории возмущений найти дифференциальное сечение рассеяния для неполяризованных электронов.

2 Решение

На лекциях была формула для первого порядка теории возмущений для амплитуды рассеяния при взаимодействии электрона с электромагнитным полем. Заменим в той формуле центральную матрицу γ^{μ} на то, что стоит в центре нашего гамильтониана, а именно выполним замену

$$\gamma^{\mu} \to \gamma^{\mu}(1-\gamma_5),$$

чтобы получить в первом порядки теории возмущений формулу для амплитуды рассеяния

$$S_{fi}^{(1)} = -ie\int \mathrm{d}^4x\ \langle 0|\hat{\boldsymbol{b}}_f\hat{\overline{\boldsymbol{\psi}}}(x)\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)\hat{\boldsymbol{\psi}}(x)\hat{\boldsymbol{b}}_i^{\dagger}|0\rangle \cdot A_{\mu}(r). \tag{1}$$

Мы оставили лишь операторы $\hat{b}$, так как они отвечают электронам, а у нас других частиц нет. Сворачивая эти операторы с операторами поля и учитывая то, что поле только вдоль одной пространственной координаты отлично от нуля, получаем

$$S_{fi}^{(1)} = -ie\int \mathrm{d}^4x\,\overline{\Psi}_f(x)\gamma^3(1-\gamma_5)A_3(r)\Psi_i(x), \tag{2}$$

где

$$\overline{\Psi}_f(x) = \sqrt{\frac{m}{VE_f}}\overline{u}(f)e^{ip_f x}, \quad \Psi_i(x) = \sqrt{\frac{m}{VE_i}}u(i)e^{ip_i x}.$$

Проинтегрируем (1) по x

$$S_{fi}^{(1)} \sim \int \mathrm{d}t\, e^{-i\left(E_i-E_f\right)t} \int \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}\, e^{i\vec{\boldsymbol{x}}(\vec{\boldsymbol{p_i}}-\vec{\boldsymbol{p_f}})} A_3(r). \tag{3}$$

Первый интеграл даст

$$2\pi\delta(E_f - E_i),$$

а второй надо вычислить. Предварительно введём обозначение $\vec{\boldsymbol{p_i}} - \vec{\boldsymbol{p_f}} = \vec{\boldsymbol{q}}$. Для этого перейдём в сферическую систему координат и поднимем индекс компоненты поля (чтобы подставить её в явном виде)

$$\int \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}\, e^{i\vec{\boldsymbol{x}}\vec{\boldsymbol{q}}} A_3(r) = -\int \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi\, r^2 \sin\theta e^{irq\cos\theta} a e^{-\beta^2 r^2}.$$

Так как интегрант не зависит от φ, то интеграл по данному углу даст 2π, а интеграл по углу θ сложнее и даст

$$\int \mathrm{d}\theta \sin\theta e^{irq\cos\theta} = 2\frac{\sin rq}{rq}.$$

Тогда остаётся интеграл

$$\int \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}\, e^{i\vec{\boldsymbol{x}}\vec{\boldsymbol{q}}} = -2\pi a \int \mathrm{d}r\, 2\frac{\sin rq}{rq} \cdot r^2 \cdot e^{-\beta^2 r^2} = -\frac{4\pi a}{q} \int \mathrm{d}r\, r \cdot \sin rq \cdot e^{-\beta^2 r^2}.$$

Беря последний интеграл, получаем

$$\int \mathrm{d}r\, r \cdot \sin rq \cdot e^{-\beta^2 r^2} = \frac{\sqrt{\pi} q e^{-q^2/(4\beta^2)}}{4|\beta|^3}.$$

Тогда получаем, что

$$\int \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}\, e^{i\vec{\boldsymbol{x}}\vec{\boldsymbol{q}}} = -\frac{\pi^{3/2} a e^{-q^2/(4\beta^2)}}{|\beta|^3}.$$

А интеграл (3) запишется в итоге так:

$$\int \mathrm{d}t\, e^{-i\left(E_i-E_f\right)t} \int \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{x}}\, e^{i\vec{\boldsymbol{x}}(\vec{\boldsymbol{p_i}}-\vec{\boldsymbol{p_f}})} A_3(r) = -\frac{2\pi^{5/2} a e^{-q^2/(4\beta^2)}}{|\beta|^3}\delta(E_f - E_i).$$

Подставляя этот результат в выражение для амплитуды рассеяния, имеем

$$S_{fi}^{(1)} = i\frac{2\pi^{5/2} aem \exp\left(-q^2/(4\beta^2)\right)}{V\sqrt{E_i E_f}|\beta|^3}\delta(E_f - E_i)\left[\overline{u}(f)\gamma^3(1-\gamma_5)u(i)\right]. \tag{4}$$

Далее стоит определить число переходов в единицу времени

$$R = \frac{\left|S_{fi}^{(1)}\right|^2 V\, \mathrm{d}^3\vec{\boldsymbol{p_f}}}{T(2\pi)^3}$$

и понимать $(\delta(E_f - E_i))^2$ как $\delta(E_f - E_i)T/(2\pi)$. Распишем скорость переходов

$$R = \frac{\pi a^2 e^2 m^2 \exp\left(-q^2/(2\beta^2)\right)}{4VE_iE_f|\beta|^6}\delta(E_f - E_i)\left|\overline{u}(f)\gamma^3(1-\gamma_5)u(i)\right|^2 \mathrm{d}^3\boldsymbol{\vec{p}_f}\,.$$

Далее по аналогии с теми действиями, что производились на лекциях, приходим к формуле для дифференциального сечения

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\lambda_i, \lambda_f) = \frac{\pi a^2 e^2 m^2}{4|\beta|^6}\exp\left(-q^2/(2\beta^2)\right)\left|\overline{u}(f)\gamma^3(1-\gamma_5)u(i)\right|^2. \tag{5}$$

Эта формула работает, если мы знаем поляризацию электронов как до, так и после взаимодействия. Но у нас неполяризованные электроны, значит надо просуммировать имеющуюся формулу по конечным спиральностям и взять полусумму по начальным спиральностям

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda_i,\lambda_f}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\lambda_i, \lambda_f). \tag{6}$$

От поляризации зависит лишь обложенное функциями u комбинация гамма–матриц. Поэтому задача сводится к поиску

$$\sum_{\lambda_i,\lambda_f}\left|\overline{u}(f)\gamma^3(1-\gamma_5)u(i)\right|^2.$$

Поработаем с данной суммой

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda_i,\lambda_f}\left|\overline{u}(f)\gamma^3(1-\gamma_5)u(i)\right|^2 &= \sum_{\lambda_i,\lambda_f}\overline{u}_\alpha(f)\big(\gamma^3(1-\gamma_5)\big)_{\alpha\beta}u_\beta(i)u^\dagger_\lambda(i)\big(\gamma^3(1-\gamma_5)\big)^\dagger_{\lambda\delta}\gamma^0_{\delta\sigma}u_\sigma(f) \\
&= \sum_{\lambda_i,\lambda_f}\overline{u}_\alpha(f)\big(\gamma^3(1-\gamma_5)\big)_{\alpha\beta}u_\beta(i)u^\dagger_\lambda(i)\gamma^0_{\lambda\xi}\big(\gamma^3(1-\gamma_5)\big)_{\xi\eta}\gamma^0_{\eta\delta}\gamma^0_{\delta\sigma}u_\sigma(f) \\
&= \sum_{\lambda_i,\lambda_f}\overline{u}_\alpha(f)\big(\gamma^3(1-\gamma_5)\big)_{\alpha\beta}u_\beta(i)\overline{u}_\xi(i)\big(\gamma^3(1-\gamma_5)\big)_{\xi\eta}\delta_{\eta\sigma}u_\sigma(f) \\
&= \sum_{\lambda_f}\overline{u}_\alpha(f)\big(\gamma^3(1-\gamma_5)\big)_{\alpha\beta}\left(\sum_{\lambda_i}u_\beta(i)\overline{u}_\xi(i)\right)\big(\gamma^3(1-\gamma_5)\big)_{\xi\eta}u_\eta(f).
\end{aligned}$$

Пользуемся условием полноты из четвёртой лекции и пишем

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda_i,\lambda_f}\left|\overline{u}(f)\gamma^3(1-\gamma_5)u(i)\right|^2 &= \sum_{\lambda_f}\overline{u}_\alpha(f)\big(\gamma^3(1-\gamma_5)\big)_{\alpha\beta}\left(\frac{\hat{p}_i+m}{2m}\right)_{\beta\xi}\big(\gamma^3(1-\gamma_5)\big)_{\xi\eta}u_\eta(f) \\
&= \sum_{\lambda_f}\overline{u}_\alpha(f)\left(\gamma^3(1-\gamma_5)\frac{\hat{p}_i+m}{2m}\gamma^3(1-\gamma_5)\right)_{\alpha\eta}u_\eta(f).
\end{aligned}$$

Применяем условие полноты ещё раз

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda_i,\lambda_f}\left|\overline{u}(f)\gamma^3(1-\gamma_5)u(i)\right|^2 &= \left(\gamma^3(1-\gamma_5)\frac{\hat{p}_i+m}{2m}\gamma^3(1-\gamma_5)\right)_{\alpha\eta}\left(\frac{\hat{p}_f+m}{2m}\right)_{\eta\alpha} \\
&= \mathrm{tr}\left[\gamma^3(1-\gamma_5)\frac{\hat{p}_i+m}{2m}\gamma^3(1-\gamma_5)\frac{\hat{p}_f+m}{2m}\right].
\end{aligned}$$

Задача свелась к вычислению следа некоторой матрицы. Не трудно вычислить данную матрицу в явном виде. Для этого сначала посчитаем матрицу

$$\gamma^3(1-\gamma_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(1 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Далее вспоминаем, что $\hat{p}_i = p_\mu(i)\gamma^\mu = p_i^0\gamma^0 - \vec{\boldsymbol{p}}_i\vec{\boldsymbol{\gamma}}$. Значит, для дальнейших рассуждений будет полезно знание следующих матричных произведений:

$$\gamma^3(1-\gamma_5)\gamma^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^3(1-\gamma_5)\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^3(1-\gamma_5)\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & i \\ i & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & i \\ i & 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^3(1-\gamma_5)\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда не сложно видеть, что, например, $\gamma^3(1-\gamma_5)\hat{p}_i$ будет иметь блочный вид

$$\gamma^3(1-\gamma_5)\hat{p}_i = \begin{pmatrix} A_i & A_i \\ A_i & A_i \end{pmatrix},$$

где имеет вид

$$A_i = \begin{pmatrix} -p_i^0 + p_i^3 & p_i^1 - ip_i^2 \\ -p_i^1 - ip_i^2 & p_i^0 + p_i^3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда сразу же следует, что

$$\gamma^3(1-\gamma_5)\hat{p}_i\gamma^3(1-\gamma_5)\hat{p}_f = \begin{pmatrix} A_i & A_i \\ A_i & A_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_f & A_f \\ A_f & A_f \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} A_iA_f & A_iA_f \\ A_iA_f & A_iA_f \end{pmatrix}.$$

Это сильно упрощает задачу, ведь теперь след можно получить, как (тут важно не потерять множитель $(4m^2)^{-1}$)

$$\operatorname{tr}\left[\gamma^3(1-\gamma_5)\hat{p}_i\gamma^3(1-\gamma_5)\hat{p}_f\right] = \frac{4}{4m^2}\operatorname{tr}[A_iA_f] = \frac{1}{m^2}\operatorname{tr}[A_iA_f].$$

Считаем получившийся след

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}[A_i A_f] &= (-p_i^0 + p_i^3)(-p_f^0 + p_f^3) + (p_i^1 - ip_i^2)(-p_f^1 - ip_f^2) + (-p_i^1 - ip_i^2)(p_f^1 - ip_f^2) + (p_i^0 + p_i^3)(p_f^0 + p_f^3) \\
&= p_i^0 p_f^0 - p_i^0 p_f^3 - p_i^3 p_f^0 + p_i^3 p_f^3 - p_i^1 p_f^1 - ip_i^1 p_f^2 + ip_i^2 p_f^1 - p_i^2 p_f^2 - p_i^1 p_f^1 + ip_i^1 p_f^2 - ip_i^2 p_f^1 - p_i^2 p_f^2 \\
&\quad + p_i^0 p_f^0 + p_i^0 p_f^3 + p_i^3 p_f^0 + p_i^3 p_f^3 \\
&= 2\big(p_i^0 p_f^0 + p_i^3 p_f^3 - p_i^1 p_f^1 - p_i^2 p_f^2\big) = 2(2p_i^3 p_f^3 - p_i p_f).
\end{aligned}
$$

Выберем систему координат таким образом, что ось z направлена по импульсу начального электрона. Кроме того, заметим, что из выражения (4) следует, что при рассеянии в данном потенциале энергия, а, значит, и модуль вектора импульса сохраняются

$$
E_i = E_i = E, \quad |\vec{\boldsymbol{p}}_i| = \left|\vec{\boldsymbol{p}}_f\right| = |\vec{\boldsymbol{p}}|.
$$

Ещё в свете введённых обозначений можно выразить модуль вектора $\vec{\boldsymbol{q}}$ (получали такое на лекциях)

$$
|\vec{\boldsymbol{q}}|^2 = 4|\vec{\boldsymbol{p}}|^2 \sin^2\frac{\theta}{2}.
$$

Тут и ниже θ является углом рассеяния. Через него, модуль импульса и энергию можно выразить составляющие следа

$$
p_i^3 p_f^3 = |\vec{\boldsymbol{p}}|^2 \cos\theta, \quad p_i p_f = E^2 - |\vec{\boldsymbol{p}}|^2 \cos\theta.
$$

Учитывая связь энергии и импульса

$$
E^2 = m^2 + |\vec{\boldsymbol{p}}|^2,
$$

след можно записать так:

$$
\operatorname{tr}\left[\gamma^3(1-\gamma_5)\hat{p}_i\gamma^3(1-\gamma_5)\hat{p}_f\right] = \frac{2}{m^2}(E^2 + |\vec{\boldsymbol{p}}|^2\cos\theta) = \frac{2}{m^2}\left(m^2 + 2|\vec{\boldsymbol{p}}|^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right).
$$

Фактически на этом решение задачи подходит к концу, надо лишь подставить всё в формулу для дифференциального сечения. Ответ будет следующим:

$$
\frac{\mathrm{d}\overline{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\pi a^2 e^2}{4|\beta|^6}\exp\left(-\frac{2|\vec{\boldsymbol{p}}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\beta^2}\right)\left(m^2 + 2|\vec{\boldsymbol{p}}|^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{7}
$$