

Исследование полиномов

Алексей Савватеев

Александр Тонис

3 сентября 2021 г.

Математический анализ отличается от математики, изучаемой в школе, во-первых, тем, что математический анализ оперирует понятием предела (см. [1]), во-вторых, тем, что в математическом анализе рассматривают объекты различной размерности, а не только одномерные. Проиллюстрируем эти различия на примере многочленов.

1 Многочлены и их графики

Напомним читателю некоторые важные факты о многочленах. Прежде всего введём определение многочлена.

Определение 1.1. *Многочленом натуральной степени n называется функция, представляющая из себя сумму следующего вида:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k, \quad (1)$$

где a_n не равно нулю.

Важно заметить, что если a_k было равно нулю, то многочлен не зависит от k -ой степени аргумента x . Поэтому в определении многочлена степени n присутствует требование

$$a_n \neq 0. \quad (2)$$

Качественно изучим график многочлена некоторой натуральной степени. Можно заметить, что если старший коэффициент (a_n) положительный, то при стремлении аргумента x к плюс бесконечности многочлен степени n неограниченно растёт (см. рис. 1), что можно записать следующим образом:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty. \quad (3)$$

Действительно, так как все коэффициенты $\{a_k\}_{k=0}^n$ являются фиксированными величинами, то при росте аргумента быстрее всего растёт слагаемое с наибольшей степенью. Например, рассмотрим функцию

$$f(x) = 2x^7 - 28x^5 + 98x^3 - 72. \quad (4)$$

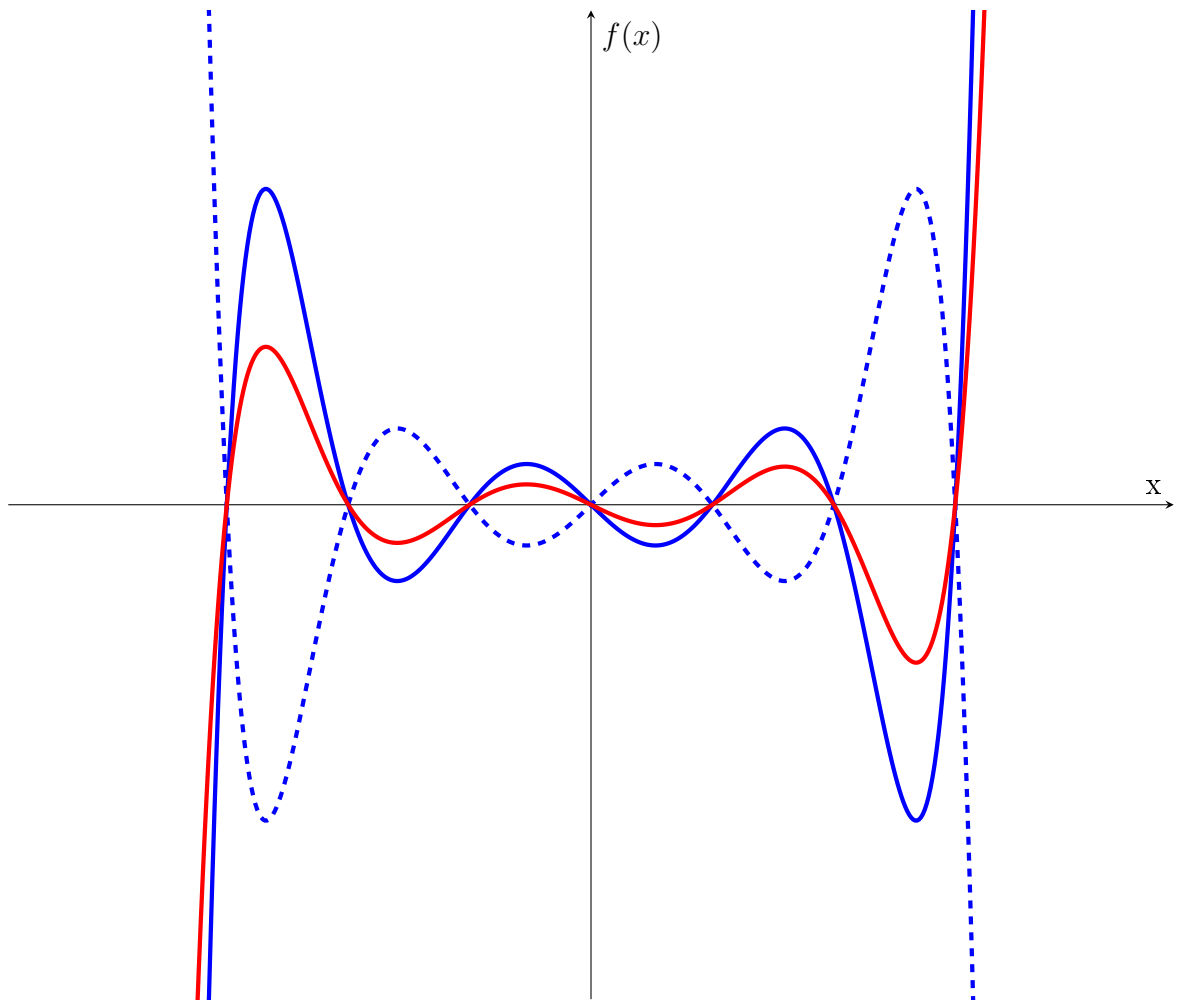


Рис. 1: График полиномов нечетной степени. В синий цвет окрашен график функции $2x^7 - 28x^5 + 98x^3 - 72x$, в зелёный — график функции $x^7 - 14x^5 + 49x^3 - 36x$. Пунктирная синяя кривая является графиком функции $-2x^7 + 28x^5 - 98x^3 + 72x$. Видно, что с ростом x синий график неограниченно растёт, синий пунктирный же неограниченно убывает, красный график тоже растёт, как и синий, но медленнее.

Уже при $x = 1000$ имеем следующее значение функции:

$$f(1000) = 2 \cdot 10^{21} - 28 \cdot 10^{15} + 98 \cdot 10^9 - 72. \quad (5)$$

Видно, что *старшее* слагаемое (слагаемое большей степени) на несколько порядков (в несколько миллионов раз) превосходит остальные слагаемые по абсолютному значению, то есть все слагаемые, кроме главного члена, вносят незначительный вклад в значение функции. Главный член многочлена с ростом x продолжает увеличиваться, затмевает собой остальные члены, поэтому функция неограниченно растёт.

Представляется очевидным такой вывод. Если коэффициент при главном члене многочлена будет отрицательным, то и стремиться выражение будет к отрицательной бесконечности (см. рис. 1).

Мы установили, что знак бесконечности, к которой стремится значение многочлена $f(x)$ при стремлении x к положительной бесконечности, определяется только знаком старшего коэффициента. При рассмотрении

$$x \rightarrow -\infty \quad (6)$$

предел, к которому стремится $f(x)$ начинает зависеть ещё и от степени многочлена. Так, например, из рисунка 1 видно, что при положительном старшем коэффициенте и нечетной степени многочлена

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty. \quad (7)$$

Ясно, что при отрицательном a_n стремиться многочлен при неограниченном уменьшении x будет к плюс бесконечности. То есть *при нечетной степени многочлена его "хвосты" (ветки, уходящие на бесконечности) направлены в разные стороны.*

А что будет при четной степени многочлена? Установим ответ на данный вопрос, обратившись к простому примеру. Если вспомнить график параболы x^2 (см. рис. 2), то можно заметить, что *"хвосты" графика направлены в одном направлении.* Это общий результат для всех многочленов четного порядка и связан он с тем, что $(x)^2 = (-x)^2$, то есть для четных степеней знак аргумента в рассматриваемом вопросе не важен.

Одной из основных задач алгебры является задача поиска корней уравнения типа

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k = 0. \quad (8)$$

То есть рассматривается уравнение, представляющее из себя многочлен степени n , приравненный к нулю. В силу свойств уравнений, можно поделить равенство (8) на значение старшего коэффициента a_n , благо оно отлично от нуля в силу определения многочлена степени n . Тогда получим *приведённый* многочлен, который можно записать так:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} \cdot x^k + x^n = 0. \quad (9)$$

Уравнения (8) и (9) тождественны друг другу, что означает совпадение их корней. А как при этом соотносятся графики многочленов? Вновь обратимся к рисунку 1. На

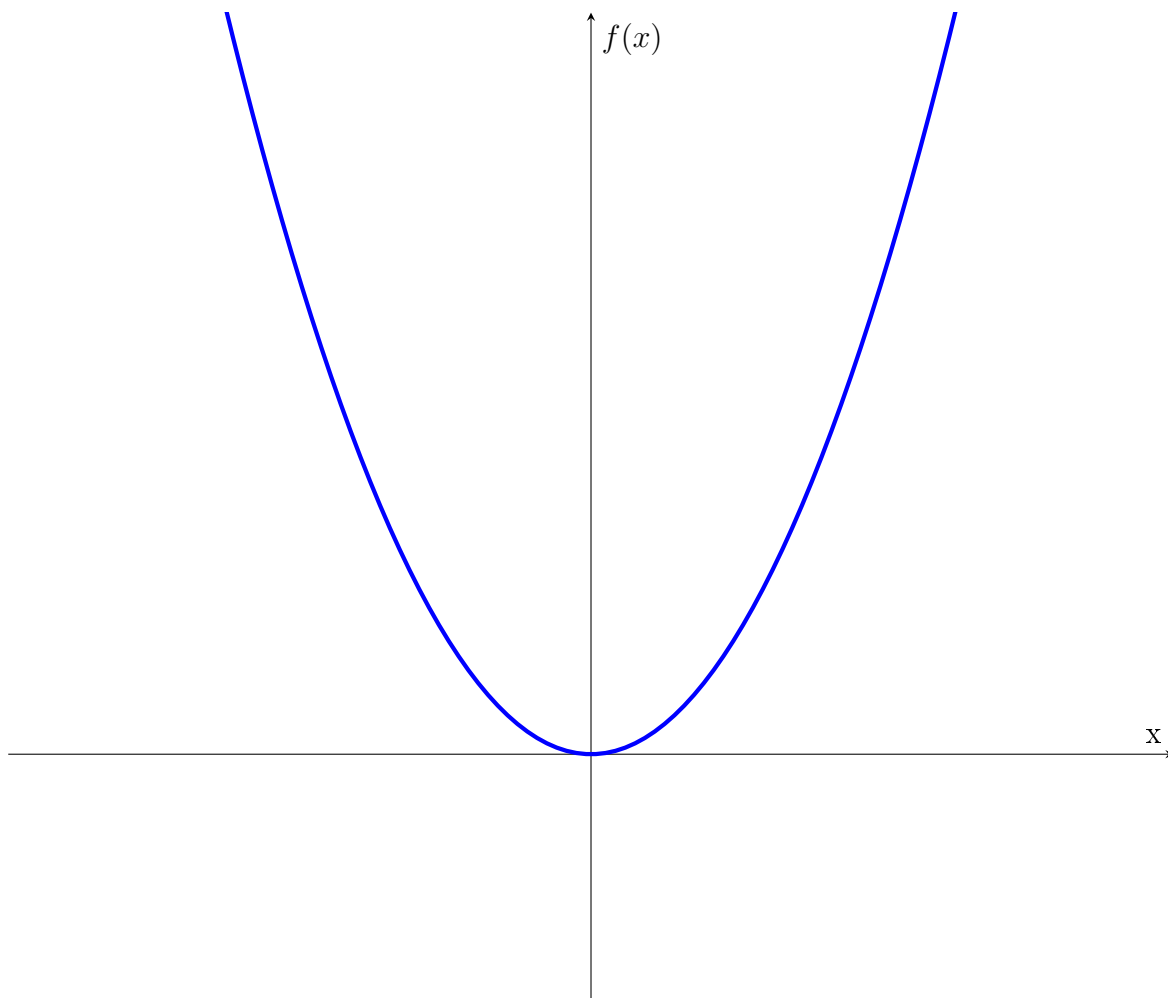


Рис. 2: График параболы.

нѐм видно, что при пропорциональном уменьшении всех коэффициентов многочлена на одно и тоже число (то есть при делении многочлена на число, большее единицы) график многочлена прижимается к оси абсцисс, поведение функции при этом не меняется, то есть точки экстремума не меняют своего положения и сохраняется направление роста при стремлении x к бесконечностям.

2 Теорема Безу

Посмотрим для начала на рисунок 1, графики всех функций пересекают ось абсцисс ровно семь раз. Это означает, что функции имеют семь корней. Оказывается, если полином имеет семь корней, то можно утверждать, что степень данного полинома больше либо равна семи. Как будет показано дальше такой вывод следует из теоремы Безу. То есть просто по количеству корней возможно получить ограничение на степень полинома.

2.1 Формулировка и доказательство

Чтобы логично подступить к формулировке рассматриваемой теоремы, поговорим сперва о делении многочленов с остатком (бегло вспомнить данную тему повожет Wikipedia [2]). Если многочлен степени n делится на линейную функцию $x - a$ с остатком b , то это равносильно такой записи:

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k \cdot (x - a) + b. \quad (10)$$

Из данного соотношения и следует теорема Безу, формулирующаяся следующим образом.

Теорема 2.1. *Число a является корнем многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ делится без остатка на $(x - a)$.*

Доказательство. Пускай $f(x)$ делится без остатка на $(x - a)$, тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k \cdot (x - a). \quad (11)$$

Очевидно, что если подставить в правую часть $x = a$, то получим 0, что и требовалось доказать.

Мы доказали теорему только с одной стороны, так как мы утверждаем эквивалентность двух утверждений, то требуется доказательство и с другого подступа. Пускай теперь число a является корнем многочлена $f(x)$. Тогда остаётся верным равенство (10), откуда при $x = a$ получаем

$$f(a) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot a^k = \sum_{k=0}^{n-1} b_k a^k \cdot (a - a) + b = b. \quad (12)$$

Но левая часть равна нулю, значит и $B = 0$. Значит, делится многочлен на $(x - a)$ без остатка. \square

2.2 Следствие

Из приведённой теоремы существует следствие, о котором говорилось в начале лекции. Придём к нему методом математической индукции. Сначала рассмотрим некоторый полином $f_{(1)}(x)$ неизвестной нам степени n , имеющий один корень $x = c_1$. Для такого полинома работает теорема Безу, из которой следует

$$f_{(1)}(x) = g_1(x) \cdot (x - c_1), \quad (13)$$

где $g_1(x)$ является полиномом степени $(n - 1)$. Это значит, что степень полинома $f_{(1)}(x)$ должна быть как минимум 1.

Пусть теперь полином $f_{(2)}(x)$ некоторой неизвестной нам степени n имеет два различных действительных корня c_1 и c_2 , тогда сначала применяем теорему Безу для первого корня и получаем равенство

$$f_{(2)}(x) = g_1(x) \cdot (x - c_1). \quad (14)$$

Так как c_2 так же является корнем полинома $f_{(2)}(x)$, то

$$f_{(2)}(c_2) = g_1(c_2) \cdot (c_2 - c_1) = 0. \quad (15)$$

Если $c_1 \neq c_2$, то для того, чтобы удовлетворить соотношению (15), нужно положить, что c_2 является корнем полинома $g_1(x)$. Применяем для $g_1(x)$ те же рассуждения, что были проведены выше для $f_{(1)}(x)$, и получаем

$$f_{(2)}(x) = g_2(x) \cdot (x - c_2) \cdot (x - c_1). \quad (16)$$

Данное равенство означает, что степень полинома $f_{(2)}(x)$ должна быть как минимум двойкой.

Если взять два приведённых примера в качестве базиса метода математической индукции, то удастся доказать следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Если некоторый полином $f_{(m)}(x)$ неизвестной нам степени n имеет t различных корней $\{c_k\}_{k=1}^m$, то степень полинома n больше либо равна t .*

3 Производные и локальные экстремумы

Рассмотрим некоторый приведённый многочлен степени n

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0. \quad (17)$$

Мы рассматриваем именно приведённый многочлен, так как для настоящих изысканий старший коэффициент не представляет важности (при делении многочлена на старший коэффициент график многочлена может лишь сжаться, либо растянуться или же зеркально отобразиться около оси абсцисс). Для многих практических задач является важным найти точки максимума либо минимума рассматриваемого полинома. Как редуцировать задачу поиска точек экстремума к задаче о поиске корней многочлена и можно ли это сделать вообще?

3.1 Производная степенной функции

Чтобы ответить на данный вопрос, нужно ввести понятие производной для степенной функции (ещё раз, прошлые попытки были сделаны на прошлых лекциях [1]). Производная есть мера наклона кривой в данной точке. В качестве меры наклона выбирают тангенс угла наклона. Углом наклона называют угол между положительным направлением оси абсцисс и касательной к графику, проведённой к рассматриваемой точке.

Строгое определение производной записывается с помощью предела.

Определение 3.1. Производная функции $f(x)$ обозначается через $f'(x)$ и определяется следующим образом:

$$f'(\bar{x}) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}. \quad (18)$$

То есть это ни что иное, как тангенс угла наклона. Действительно, из рисунка 3 видно, что если стремиться точку x к \bar{x} , то точка C' будет стремиться к C , то есть тангенс угла $\angle BAC'$ будет стремиться к тангенсу угла наклона $\angle BAC$.

Посчитаем по определению 3.1 производную функции $f(x) = x^n$, где под n понимается натуральное число. Общая идея вычисления производных по определению заключается в том, что нужно избыть неопределённость типа $0/0$ под знаком предела. Такая неопределённость появляется прямо из определения 3.1, ведь, очевидно, что пределы числителей и знаменателей равны нулю. Чтобы избыть данную неопределённость нужно сократить на общий множитель (который и стремиться к нулю) числитель и знаменатель.

Проиллюстрируем этот принцип с помощью вычисления производной от степенной функции $f(x) = x^n$. Для этого воспользуемся формулой сокращенного умножения [3] для разности n -ых степеней

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}). \quad (19)$$

Тогда можно вычислить производную следующим образом:

$$\begin{aligned} f'(\bar{x}) &= \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{x^n - \bar{x}^n}{x - \bar{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{(x - \bar{x}^n) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2}\bar{x} + \dots + x\bar{x}^{n-2} + \bar{x}^{n-1})}{x - \bar{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \bar{x}} x^{n-1} + x^{n-2}\bar{x} + \dots + x\bar{x}^{n-2} + \bar{x}^{n-1} \\ &= \bar{x}^{n-1} + \bar{x}^{n-2}\bar{x} + \dots + \bar{x}\bar{x}^{n-2} + \bar{x}^{n-1} \\ &= n\bar{x}^{n-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом производной от n -ой степенной функции x^n является тоже степенная функция, только степени на единицу меньше $n\bar{x}^{n-1}$.

3.2 Локальные экстремумы

Локальным экстремум в общем случае называют те точки, в которых касательные параллельны оси абсцисс, то есть те точки, где углы наклона равны 0. А если угол наклона

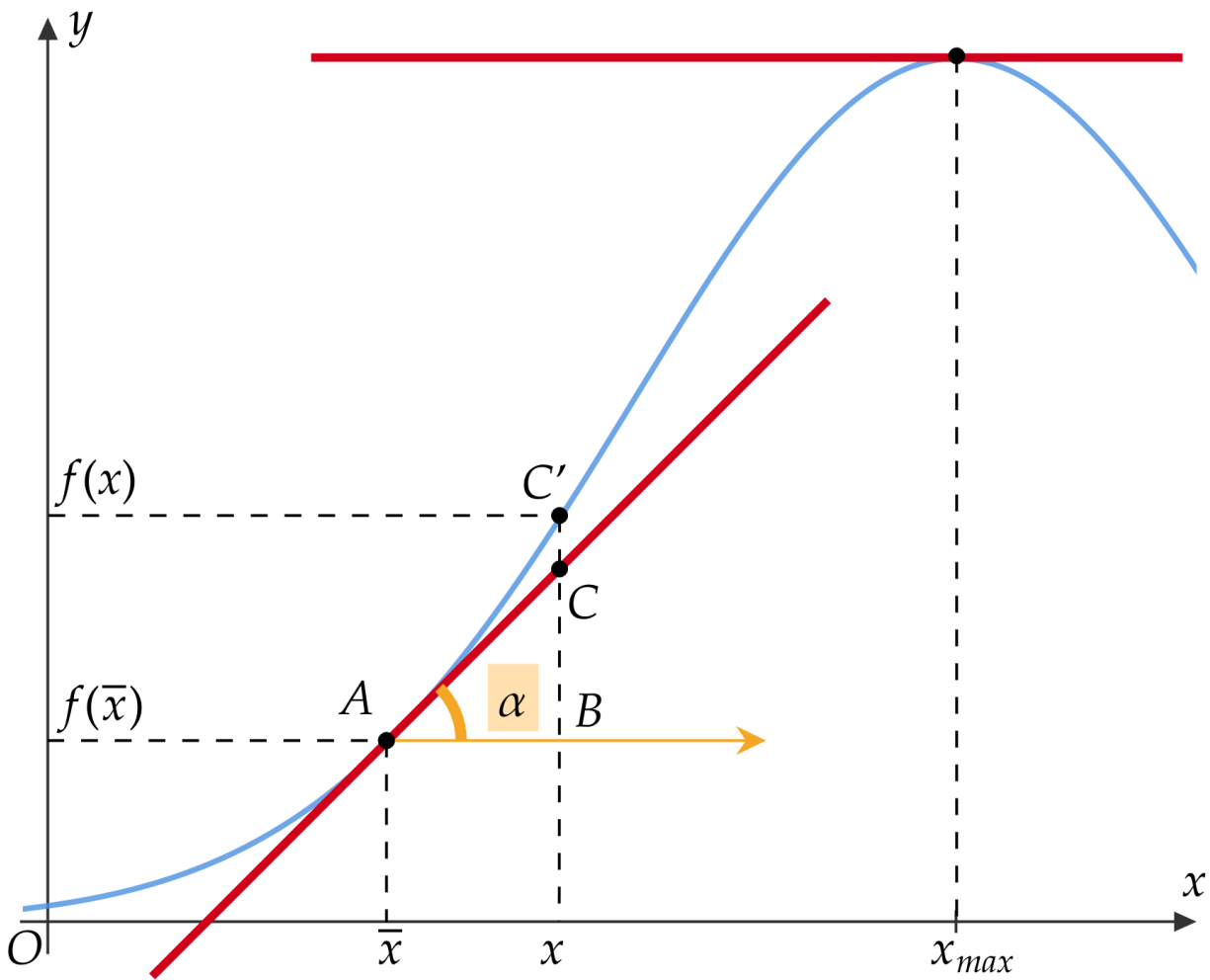


Рис. 3: График некоторого полинома. Красным обозначены касательные в графику. Желтой стрелкой обозначается положительное направление оси абсцисс.

равен нулю, то и его тангенс равен нулю, значит, производная в точках локального экстремума равна 0. Отсюда получаем уравнение на корни многочлена, который является производной от исходного многочлена. Это и есть редуцирование задачи о поиске локального экстремума к задаче о поиске корней многочлена.

Действительно, если исследовать многочлен

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad (21)$$

на точки экстремума, то для того, чтобы найти эти точки, нужно найти корни уравнения

$$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + 2a_2x + a_1, \quad (22)$$

что представляет собой уравнение на корни многочлена $f'(x)$.

4 Старшие производные

4.1 Примеры

Начнём с некоторых примеров. Рассмотрим сперва обычную параболу $f(x) = x^2$. Возьмём первую производную от данной функции. По формуле (20) получаем

$$(x^2)' = 2x. \quad (23)$$

Не будем останавливаться на достигнутом и попробуем посчитать производную от производной, то есть *вторную производную*. Тогда имеем

$$(x^2)'' = 2. \quad (24)$$

Если посчитать третью производную, то получим

$$(x^2)''' = 0. \quad (25)$$

Все вычисленные производные (отличные от тождественного нуля) изображены на графике 4.

Рассмотрим теперь параболу в более общем случае, а именно следующую функцию:

$$f(x) = ax^2 + bx + c. \quad (26)$$

Так как предел суммы равен сумме пределов, то и производная суммы равна сумме производных. Это обстоятельство позволяет нам вычислять производные от суммы степенных функций. Тогда производная от параболы (26) будет

$$f'(x) = 2ax + b. \quad (27)$$

Вторая же производная запишется следующим образом:

$$f''(x) = 2a. \quad (28)$$

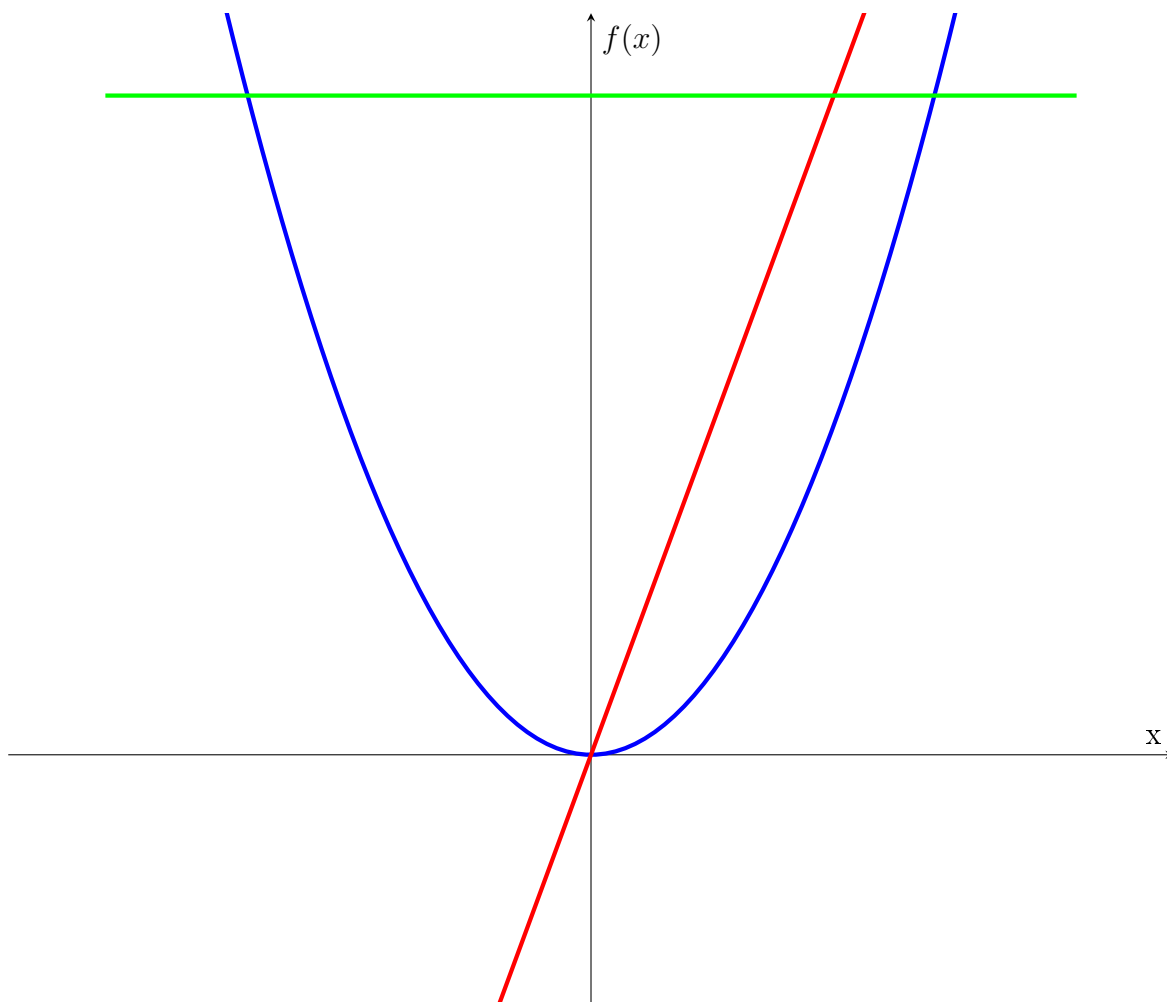


Рис. 4: График параболы $f(x) = x^2$ изображён синей кривой. Красной кривой обозначен график первой производной $f'(x) = 2x$, а зелёным цветом нарисована вторая производная $f''(x) = 2$.

Так как вторая производная является константой, то третья будет тождественным нулём, так как угол наклона касательной к функции, которая и так параллельна всюду оси абсцисс, будет нулём, а тангенс от нуля это тоже нуль.

Для конкретного примера

$$f(x) = -x^2 + x - 1 \quad (29)$$

данные производные посчитаны и их графики построены (см. рис. 5).

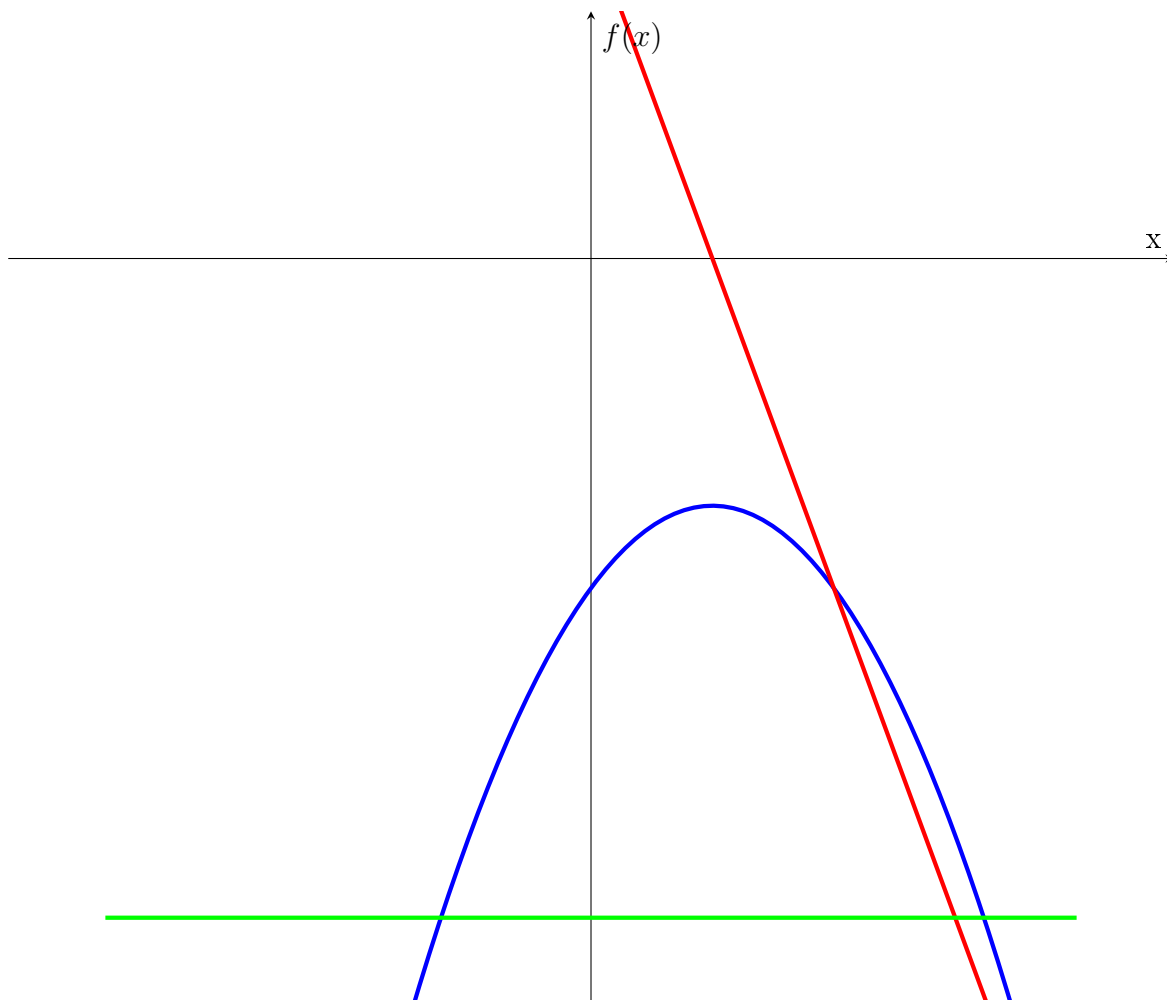


Рис. 5: График параболы $f(x) = -x^2 + x - 1$ изображён синей кривой. Красной кривой обозначен график первой производной $f'(x) = -2x + 1$, а зелёным цветом нарисована вторая производная $f''(x) = -2$.

Из приведённых примеров можно вывести (пока что чисто эмпирически, а далее в курсе мы сможем более строго это рассмотреть) следующее утверждение. *Если функция $f(x)$ имеет третью производную равной нулю, то она имеет вид*

$$f(x) = ax^2 + bx + c. \quad (30)$$

4.2 Смысл производных

Разберёмся со смыслом производных. Первая производная имеет своим смыслом отражать наклон кривой в данной точке или, что то же самое, скорость роста функции, ведь чем круче идёт кривая, тем быстрее она растёт. Кроме того, отсюда становится ясно, почему в точках локального максимума или минимума, где функция локально никуда не растёт, производная обращается в нуль.

В чём же смысл второй производной? Она является производной от первой производной, следовательно, она отражает скорость роста первой производной, то есть скорость роста скорости роста исходной функции. В кинематике материальной точки на уроках физики в школе такую характеристику именуют ускорением. Там, где скорость роста исходной функции возрастает, вторая производная растёт, где скорость роста начальной функции уменьшается — вторая производная имеет отрицательный знак. Значит, в точках, где скорость роста функции меняет направление роста, вторая производная обращается в нуль.

Как знак второй производной влияет на исходную функцию? Обратимся для иллюстрации к рисунку 6. На нём видно, что при $x < 0$ (то есть в области положительных значений второй производной) график исходной функции выпуклый, а при $x > 0$ (в области отрицательных значений второй производной) вогнутый.

Были использованы слова "выпукл" и "вогнут" может появиться вопрос, что они значат? Интуитивно понятно, что вогнутый на данном интервале график есть график, который как бы выталкивают на данном интервале в положительном направлении оси ординат, а выпуклый (иногда используется просторечие "впуклый") график — выталкивают в направлении отрицательных значений оси ординат. Если же подходить к данному вопросу строго, то функция называется вогнутой на данном интервале, если для каждой точки данного интервала график находится ниже касательной, проведённой к точке данного интервала. А выпуклой на некотором интервале называется функция такая, что график находится выше касательной. Данные определения могут быть проиллюстрированы касательными на рисунке 6.

4.3 Полином, факториал и дифференциальные уравнения

Исследуем производные больших порядков от приведённого полинома степени n

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0. \quad (31)$$

Будет действовать последовательно. Сперва рассмотрим первую производную, тогда получим

$$f'(x) = nx^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \dots + a_1. \quad (32)$$

Степень полученного полинома меньше на единицу степени исходного полинома. Продолжаем вычислением второй производной, которая записывается следующим образом:

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = n(n-1)x^{n-2} + a_{n-1}(n-1)(n-2)x^{n-3} + \dots + a_2. \quad (33)$$

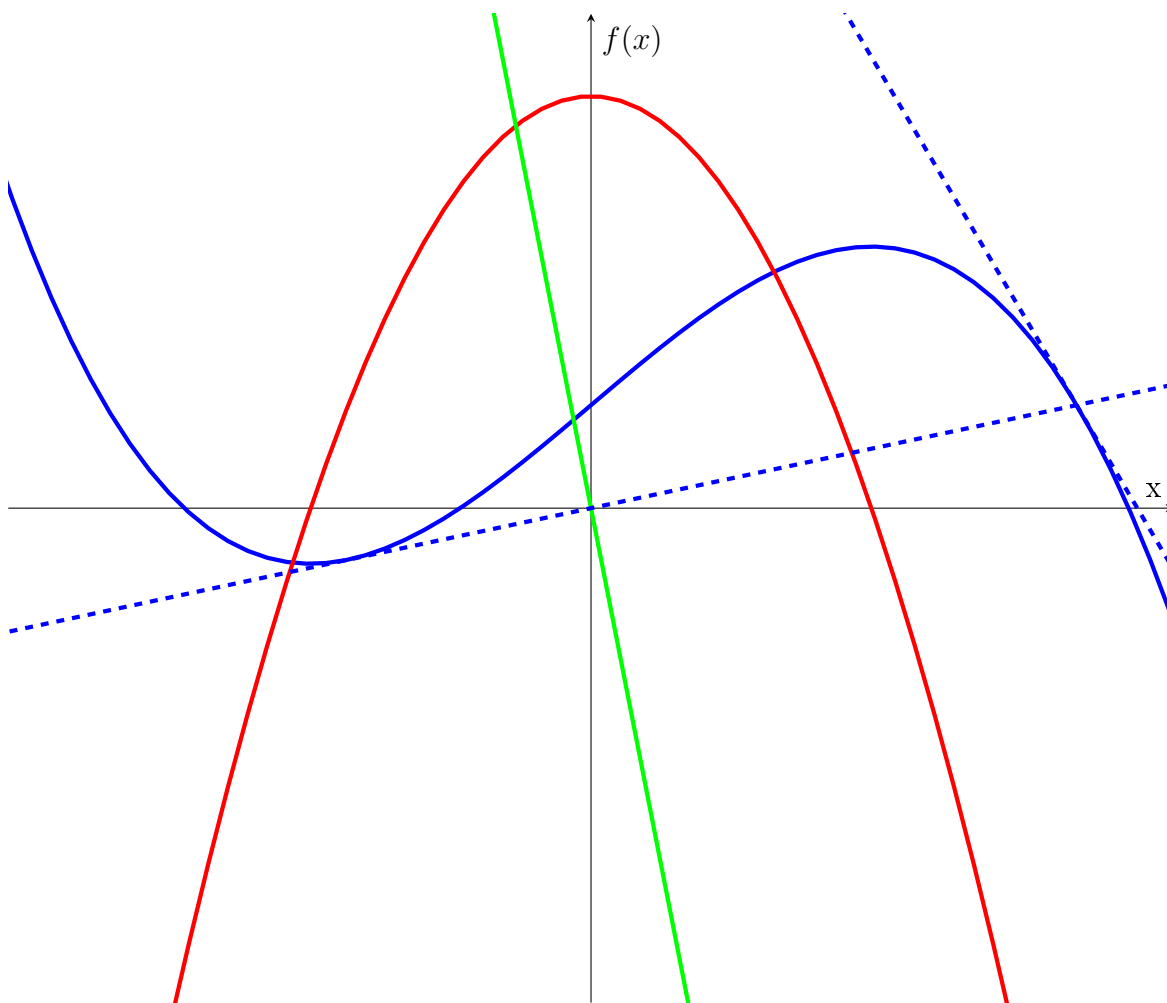


Рис. 6: График параболы $f(x) = -x^3 + x + 0.25$ изображён синей кривой. Красной кривой обозначен график первой производной $f'(x) = -3x^2 + 1$, а зелёным цветом нарисована вторая производная $f''(x) = -6x$. Синей штриховкой нарисованы касательные к графику функции.

В данном выражении использованы обозначения Лагранжа для производных, которая заключается в том, что производная m -ого порядка (то есть в выражении снизу m штрихов) обозначается так:

$$f^{''\dots}(x) = f^{(m)}(x). \quad (34)$$

Итак, рассмотрим теперь n -ую производную. Так как при взятии каждой последующей производной степень полинома всё больше и больше сокращается, то результатом взятия n -ой производной будет константа. Так как при взятии каждой новой производной уходят члены, которые в исходном полиноме были членами степени, меньшей, чем номер берущийся производной, то при взятии n -ой производной останется лишь первый член (он соответствовал в исходном полиноме x^n). Данный член при каждом дифференцировании умножался на степень, а степень x при этом уменьшалась на единицу. Таким образом, получаем следующий результат:

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 = n!. \quad (35)$$

Производные же более высоких порядков будут равняться тождественным нулям, так как

$$f^{(n)}(x) \equiv \text{const}, \quad (36)$$

а производные от констант равны тождественно нулю. Данные соображения наводят на следующую теорему.

Теорема 4.1. *Если для функции $f(x)$ справедливо, что она дифференцируема $(n+1)$ раз и*

$$f^{(n+1)}(x) \equiv 0, \quad (37)$$

то $f(x)$ является многочленом степени не большей, чем n .

То есть полиномы степени n являются решениями следующего так называемого дифференциального уравнения:

$$f^{(n+1)}(x) \equiv 0. \quad (38)$$

Под дифференциальным уравнением понимают выражение, содержащие суперпозицию производных функций, решением которого является некоторый набор функций. То есть, в отличие от алгебраических уравнений, тут решением является функциональная зависимость, а не число.

5 Поиск нулей и особых точек

Применим на практике знания, полученные выше. Рассмотрим многочлен третьей степени

$$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1. \quad (39)$$

Требуется найти нули, точки экстремума, точки перегиба и построить график данного многочлена.

5.1 Поиск корней многочлена

Начнём с поиска корней многочлена. Рассматриваемый многочлен имеет третью степень, а, значит, существуют общая формула, называемая формулой Кардано [4], для нахождения корней многочлена третьей степени. Однако данная формула крайне громоздка и не будет нами использована.

Рассматриваемый многочлен допускает нахождение как минимум одного корня способом угадывания. Действительно, если просто подставить $x = 1$, то можно увидеть, что многочлен занулился. Значит, нами найден первый корень многочлена

$$x_1 = 1. \quad (40)$$

Чтобы найти следующие корни, нужно поделить исходный многочлен третьей степени на линейный двучлен $x - x_1$, то есть на $x - 1$. Деление столбиком продемонстрировано на рисунке 7.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 - x - 1 & x - 1 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} & \\ 2x^2 - x & \\ \underline{-(2x^2 - 2x)} & \\ x - 1 & \\ \underline{-(x - 1)} & \\ 0 & \end{array}$$

Рис. 7: Деление столбиком многочлена $x^3 + x^2 - x - 1$ на линейный двучлен $x - 1$.

Таким образом, мы приходим к тому, что осталось разрешить простое квадратное уравнение. Ведь исходный полином третьей степени поделился без остатка на $x - 1$, что равноценно записи

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + 2x + 1). \quad (41)$$

Отсюда и следует, что корни полинома

$$x^2 + 2x + 1 \quad (42)$$

будут корнями и исходного многочлена. Пользуемся формулами сокращенного умножения и записываем полученный квадратный трёхчлен в следующей форме:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2. \quad (43)$$

Отсюда сразу становится видно, что следующим корнем будет число -1 , но это будет корень кратности два, что отражается в такой записи:

$$x_2 = x_3 = -1. \quad (44)$$

5.2 Поиск локальных экстремумов

Как было показано ранее, чтобы найти локальные экстремумы, нужно приравнять первую производную от функции к нулю. В нашем случае имеем следующее уравнение на экстремумы:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0. \quad (45)$$

Разрешить полученное квадратное уравнение не составляет труда. Получаем корни

$$x = -1; \frac{1}{3}. \quad (46)$$

Из предыдущих результатов ясно, что

$$f(-1) = 0, \quad (47)$$

а значение в точки $1/3$ нужно вычислять, оно составляет

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{32}{27}. \quad (48)$$

5.3 Точки перегиба

Чтобы завершить исследование функции, осталось лишь исследовать её на выпуклость и вогнутость и найти в каких точках одно переходит в другое, если вообще переходит. Для этого потребуется вычислить вторую производную. Производя несложные вычисления, находим, что

$$f''(x) = 6x + 2. \quad (49)$$

Таким образом, точкой перегиба будет точка $x = -1/3$, до неё (при $x < -1/3$) график функции вогнутый, а после — выпуклый. Результат наших изысканий отображён на рисунке 8.

Список литературы

- [1] Савватеев А., Тонис А., *Применение пределов в математическом анализе*
<https://enabla.com/ru/pub/0000>
- [2] Wikipedia, *Деление многочленов столбиком*
https://ru.wikipedia.org/wiki/Деление_многочленов_столбиком
- [3] Wikipedia, *Формулы сокращенного умножения многочленов*
https://ru.wikipedia.org/wiki/Формулы_сокращенного_умножения_многочленов
- [4] Wikipedia, *Формула Кардано*
https://ru.wikipedia.org/wiki/Формула_Кардано

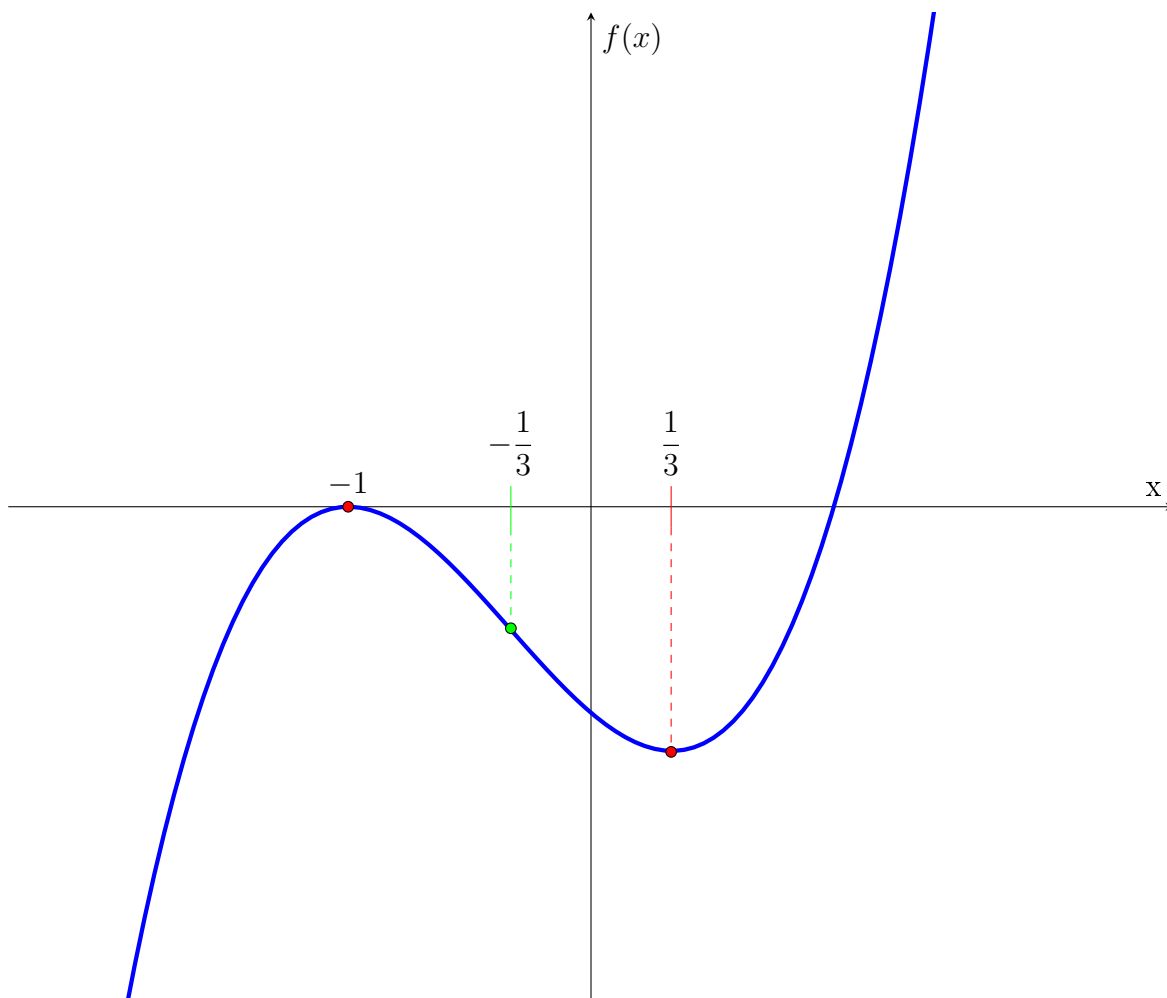


Рис. 8: График функции $x^3 + x^2 - x - 1$. Красными точками отображены экстремумы функции. Зеленой точке соответствует точка перегиба.