Математический анализ

Алексей Владимирович Савватеев и Александр Самулович Тонис

25 июля 2021 г.

Аннотация

В данной лекции рассмотрены некоторые примеры или сюжеты, помогающие понять основы математического анализа такие, как предел последовательности, дифференцирование и приближенное вычисление выражений. Кроме того, приведено простое геометрическое доказательство теоремы Пифагора.

Конспектировал Александр Козлов.

Содержание

1 Как далеко видно с горы

1.1 Формулировка задачи

Рассмотрим следующую задачу. Как далеко может видеть наблюдатель, находящийся на вершине горы высоты h? Землю считать шарообразной, влиянием воздуха пренебречь.

1.2 Строгое решение задачи

Во-первых, ясно, что конечность дальности обзора связанна с кривизной поверхности Земли, если бы планета была плоской, то в отсутствии воздуха ничто бы не препятствовало наблюдению сколь угодно далеких мест на её поверхности. Если наблюдатель смотрит в данном направлении, то его взор охватывает лишь ту часть поверхности Земли, что расположена ниже касательной, проведенной из его глаз к поверхности Земли. Точка касания соответствует точке на горизонте.

Во-вторых, так как в рамках рассматриваемой задачи форма Земли полагается шарообразной, то становится не важным направление, в котором смотрит наблюдатель. В какую бы сторону он не посмотрел -— вид будет тот же самый. Поэтому можно рассматривать лишь сечение системы «наблюдатель-Земля» плоскостью, проходящей через центр Земли и через касательную, соединяющую глаза наблюдателя с точкой на горизонте. Получаем обычную школьную геометрическую задачу.

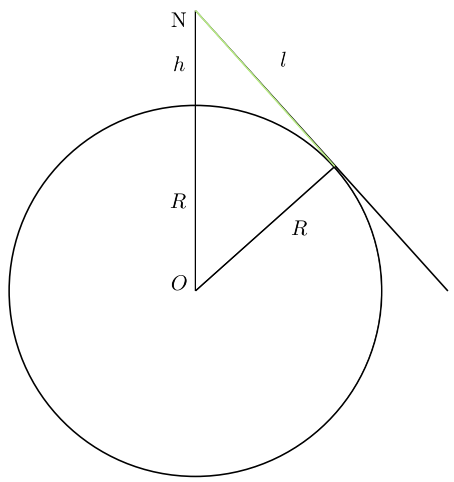

Рис. 1: Чертёж к задаче о дальности обзора. Точка N соответствует положению наблюдателя, точка O отвечает центру Земли.

Нужно найти расстояние l (см. рис. 1). Касательная, радиус Земли и отрезок, соединяющий наблюдателя с центром Земли, образуют прямоугольный треугольник, для сторон которого по теореме Пифагора справедливо:

$$(R+h)^2 = R^2 + l^2 \tag{1}$$

Из данного выражения нетрудно получить искомое расстояние:

$$l = \sqrt{2Rh + h^2} \tag{2}$$

1.3 Упрощение ответа

Полученный результат может быть труден для запоминания. Зададимся вопросом о таком упрощении данной формулы, которое будет крайне слабо отражаться на ответе. То есть мы хотим упростить формулу (заменить её другой, более простой формулой) и не сильно при этом изменить ответ.

Оценим входящие в формулу (2) величины. Радиус Земли R равен примерно 6370 км, в то время как высота горы h не может быть больше 9 км (высота самой большой горы на Земле составляет 8 848 метров). Тогда выходит, что первое подкоренное слагаемое порядка десятков тысяч квадратных километров, а второе порядка десятков квадратных километров. Разумно пренебречь вторым слагаемым, ведь оно крайне слабо влияет на ответ. Оно даёт ошибку только в четвертом знаке, что зачастую не важно. Таким образом приходим к более простой формуле:

$$l = \sqrt{2Rh} \tag{3}$$

Проиллюстрируем графиком (см. рис. 2) тот факт, что используемое приближение и вправду не сильно меняет ответ. Видно, что точный и приближенный результаты почти не различимы. Если рассматривать зависимость от h, то видно, что она не линейная, а корневая, то есть если подняться в сто раз выше, то видно станет лишь в десять раз дальше.

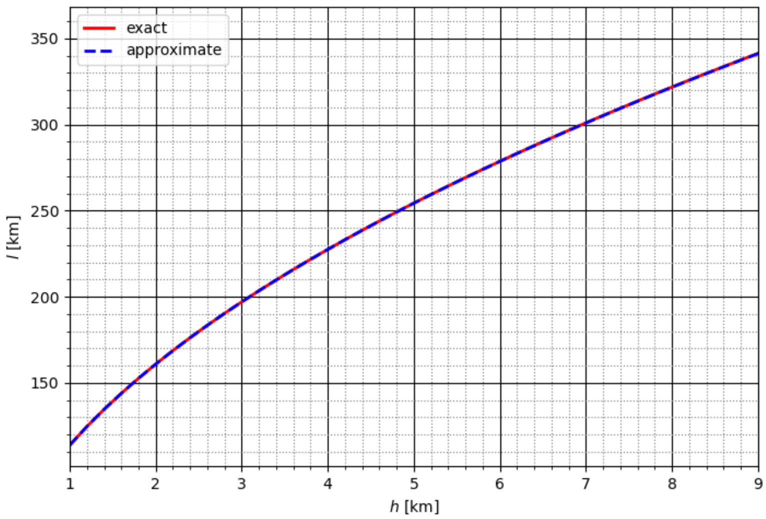

Рис. 2: Зависимость дальности видимости l от высоты горы h.

Выходит, что мы упростили выражение, не потеряв его сути. Этим и занимается математический анализ — разрабатывает методы упрощения выражений, исследует малые и большие величины, как с ними стоит обращаться.

1.4 Геометрическое доказательство теоремы Пифагора

Выше была использована теорема Пифагора, важно помнить её простое геометрическое доказательство. Пускай есть прямоугольный треугольник с катетами a и b, а так же с гипотенузой c (на чертежах ниже он выделен зеленым цветом). Рассмотрим квадрат со стороной $a+b$. Сперва разобьем его на два квадрата со стороной a и со стороной b и на 4 исходных треугольника таким образом, как показано на первом чертеже (см. рис. 3). Получаем, что площадь большого квадрата есть сумма площадей квадратов поменьше (a^2+b^2) и четырех площадей исходного треугольника.

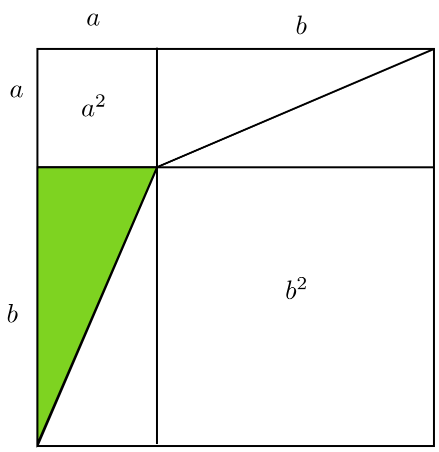

Рис. 3: Чертёж к доказательству теоремы Пифагора. Первое разбиение квадрата. Зеленым выделен исходный прямоугольный треугольник.

Теперь разобьем квадрат так, как показано на втором чертеже (см. рис. 4). То есть сначала строим четыре прямоугольных треугольника, как показано на чертеже. Затем замечаем, что получившийся из их гипотенуз ромб на самом деле является квадратом, ведь, например, развернутый угол $\angle AQD$ состоит из углов $\angle AQP$ и $\angle MQD$, сумма которых равна девяноста градусам по свойству прямоугольного треугольника, а так же из угла $\angle PQM$, которому ничего не остается, кроме как быть прямым (аналогичные рассуждения справедливы для каждого из углов четырехугольника $QPLM$). То есть получилось, что площадь большого квадрата есть сумма площадей четырех прямоугольных треугольников и площади квадрата со стороной c. Ясно, что площадь большого квадрата в том и другом случаях остается неизменной, тогда:

$$a^2 + b^2 + 4S_\triangle = c^2 + 4S_\triangle \tag{4}$$

Если сократить площади треугольников, то получим соотношение, называемое теоремой Пифагора:

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{5}$$

На этом доказательство теоремы завершено.

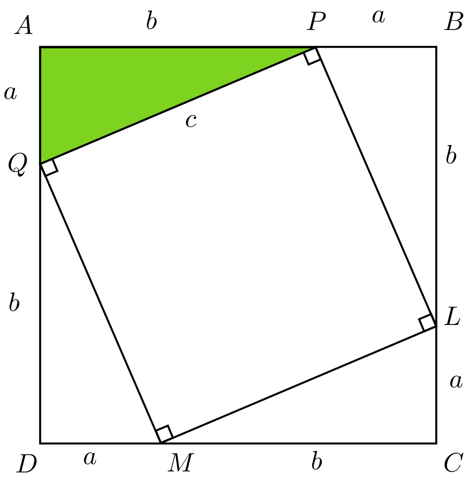

Рис. 4: Чертёж к доказательству теоремы Пифагора. Второе разбиение квадрата. Зеленым выделен исходный прямоугольный треугольник.

2 Вычисление массы Земли

Рассмотрим несколько сюжетов, с помощью которых можно будет проиллюстрировать такое важное для математического анализа понятие, как дифференцирование.

Рассмотрим пример о приближенном вычислении массы Земли. Пускай по некоторым физическим величинам производятся расчеты, но данные физические величины были измерены с ошибкой. Как эта ошибка отразится на результате расчетов?

2.1 Вычисление объема Земли

Обозначим за R *измеренное значение радиуса Земли*. Из-за наличия ошибки измерений можно утверждать, что *фактический радиус Земли* есть $R + \Delta R$, где за ΔR обозначена *ошибка измерений радиуса Земли*. Как же эта ошибка повлияет на вычисленный объем земного шара (Земля полагается шарообразной)? Из школьного курса стереометрии должна быть известна формула объема шара:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{6}$$

Обозначим через V измеренный объем земного шара (он вычисляется по измеренному радиусу). А фактический объем Земли обозначим через $V + \Delta V$, где за ΔV обозначена *ошибка вычислений объема Земли*. Тогда по той же формуле объема шара пишем:

$$V + \Delta V = \frac{4}{3}\pi (R + \Delta R)^3 \tag{7}$$

Отсюда требуется найти ΔV. Если вычесть из уравнения (7) уравнение (6), то получим:

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi\Big((R+\Delta R)^3 - R^3\Big) = \frac{4}{3}\pi\big(3R^2\Delta R + 3R\Delta R^2 + \Delta R^3\big) = 4\pi R^2 \Delta R\left(1 + \frac{\Delta R}{R} + \frac{1}{3}\left[\frac{\Delta R}{R}\right]^2\right) \tag{8}$$

В итоговом виде равенства можно какими-то слагаемыми пренебречь. Например, измерили мы радиус Земли с точностью 1%, тогда в большой скобке выражения (8) стоит сумма трех величин:

$$1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{3}\frac{1}{10000} \tag{9}$$

Видно, что второе и третье слагаемые гораздо меньше первого, поэтому ими можно пренебречь. Тогда можно приближенно записать:

$$\Delta V \approx 4\pi R^2 \Delta R \tag{10}$$

Эта формула имеет простой геометрический смысл (см. рис. 5). Синим обозначен земной шар в представлении тех, кто измерял его радиус, желтой штриховкой обозначен тонкий шаровой слой — отличие измеренного земного шара от фактического. Объем этого шарового слоя обозначается за ΔV. Если ошибка измерений радиуса мала, то площадь шарового слоя приближенно можно вычислить как объем прямоугольного параллелепипеда с площадью основания, равной площади сферы $4\pi R^2$, и высотой ΔR. Тогда и получаем формулу (10).

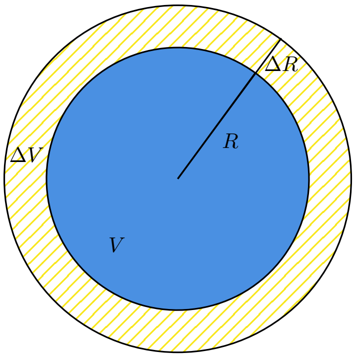

Рис. 5: Геометрическая аналогия к задаче об объеме Земли.

2.2 Завершение вычисления массы Земли

Для того, чтобы определить массу планеты, нужно умножить среднюю плотность планеты на её объем. С последним мы уже разобрались. Средняя плотность Земли может быть измерена в ходе специальных экспериментов. Пускай через ρ обозначено *измеренное значение средней плотности Земли*, через $\rho + \Delta\rho$ обозначим *фактическое значение средней плотности Земли*, где $\Delta\rho$ — *ошибка измерения*. Тогда *измеренная масса* M будет равна:

$$M = \rho V \tag{11}$$

Фактическая масса $M + \Delta M$ будет вычисляться по формуле:

$$M + \Delta M = (\rho + \Delta\rho)(V + \Delta V) \tag{12}$$

Тогда ошибка вычисления массы Земли будет:

$$\Delta M = \Delta\rho\Delta V + \Delta\rho V + \rho\Delta V \tag{13}$$

Первое слагаемое является малым по сравнению с остальными, им можно пренебречь. Можно показать малость данного слагаемого геометрической аналогией (см. рис. 6). Рассмотрим прямоугольник со сторонами V и ρ. Его площадь будет равна измеренной массе Земли M. Тогда ошибки измерений можно представить как маленькие добавки к сторонам прямоугольника. Добавка к площади прямоугольника разбивается на три, площадь самого малого из добавочных прямоугольников соответствует слагаемому $\Delta\rho\Delta V$. Это показывает разумность пренебрежения им. Таким образом мы получаем:

$$\Delta M \approx \Delta\rho V + \rho\Delta V \tag{14}$$

2.3 Комментарии о значении полученных результатов

Теперь приведем несколько комментарием о значениях этих формул для понимания математического анализа. Первая приближенная формула (10) для ошибки вычисления объема земного шара представляет собой частный случай *формулы производной от степенной функции*. Чтобы не давать строгих определений, запишем общую формулу в виде приближенного равенства:

$$\Delta(x^n) \approx nx^{n-1}\Delta x \tag{15}$$

Она читается: «Приращение функции x^n есть произведение nx^{n-1} на приращение x». В нашем случае $n = 3$ и добавлен несущественный множитель 4π.

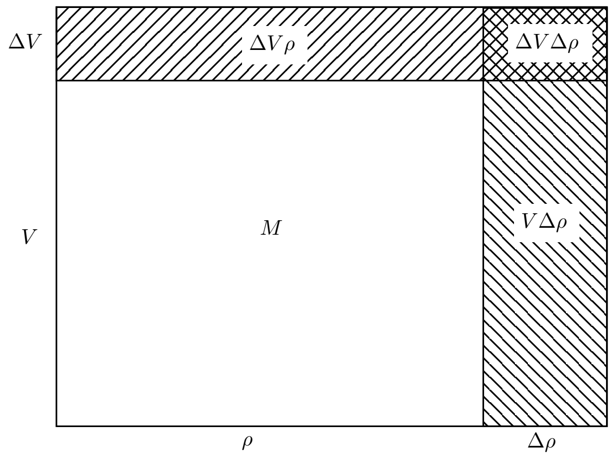

Рис. 6: Геометрическая аналогия к задаче о массе Земли

Вторая приближенная формула (14) есть не что иное, как *правило дифференцирования произведения*. То есть приращение произведения двух величин есть сумма двух слагаемых: произведения приращения первой величины на вторую и произведения приращения второй величины на первую.

Попробуем то же самое записать в терминах относительной погрешности. Относительная погрешность есть отношение абсолютной погрешности к измеренной величине. Например, относительная погрешность измерения радиуса:

$$\varepsilon_R = \frac{\Delta R}{R} \tag{16}$$

Для объёма получаем:

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = 3\frac{\Delta R}{R} = 3\varepsilon_R \tag{17}$$

Для массы относительная погрешность будет:

$$\varepsilon_M = \frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta V}{V} \tag{18}$$

То есть относительная погрешность произведения двух величин равна сумме их относительных погрешностей.

2.4 Немного цифр

Рассмотрим численные значения физических величин, чтобы лучше понимать, о чём шла речь ранее. Радиус Земли можно оценить, как:

$$R = 6.4 \cdot 10^6 \text{м} \pm 1\% \tag{19}$$

То есть относительная погрешность измерения радиуса Земли составляет 1%. Для плотности Земли имеем:

$$\rho = 5.5 \tfrac{\text{т}}{\text{м}^3} \pm 1\% \tag{20}$$

Тогда для объёма Земли получаем:

$$V = 1.1 \cdot 10^{21} \text{м}^3 \pm 3\% \tag{21}$$

Для массы Земли справедлив следующий ответ:

$$V = 6.05 \cdot 10^{21} \text{т} \pm 4\% \tag{22}$$

3 Треугольники и окружности

3.1 Постановка задачи

В данном сюжете мы затронем вопрос о пределе последовательности. Рассмотрим следующую задачу. Пускай задан любой треугольник с некоторыми углами α_0, β_0 и γ_0 (см. рис. 7). В него можно вписать единственным образом окружность. На точках касания вписанной окружности сторон треугольника строим следующий треугольник. Его углы обозначаем теми же буквами, что и противолежащие углы большего треугольника, но с индексами большими на единицу. Затем снова вписываем в данный треугольник с углами α_1, β_1 и γ_1 окружность и по точкам касания вписанной окружности сторон треугольника строим следующий треугольник с углами α_2, β_2 и γ_2 и так далее. Можно заметить, что треугольники становятся с каждым шагом более похожи на равносторонние. Покажем, что действительно имеет место подобное стремление.

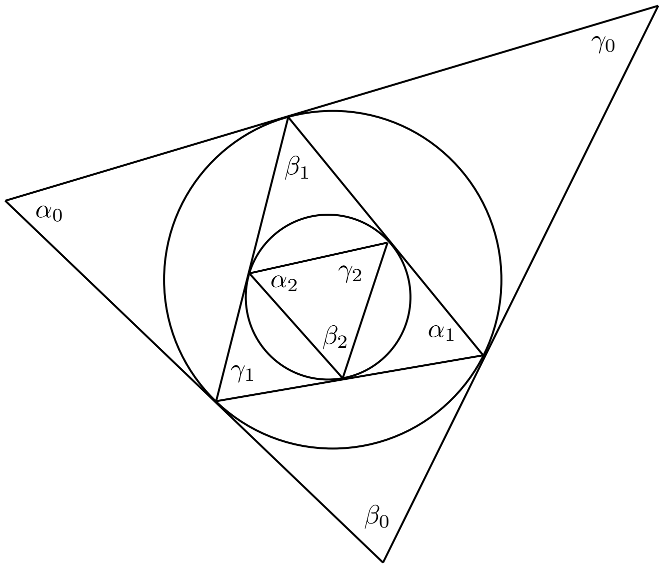

Рис. 7: Чертёж к задаче о вписанных в треугольники окружностях

3.2 Формальное геометрическое решение

Для этого рассмотрим любой треугольник ABC с углами α_0, β_0 и γ_0 (см. рис. 8). Обозначения для точек касания приведены на чертеже. Из свойств касательных к окружности следует, что треугольники AMK и BNM являются равнобедренными. Из свойства равнобедренного треугольника получаем, что углы при основании равны:

$$\angle AMK = \angle MKA, \quad \angle BNM = \angle NMB \tag{23}$$

Так как сумма углов треугольника равна 180°, то отсюда можно найти углы при основании равнобедренных треугольников:

$$\angle AMK = 90^\circ - \frac{\alpha_0}{2}, \quad \angle NMB = 90^\circ - \frac{\beta_0}{2} \tag{24}$$

Но угол $\angle AMB$ является развёрнутым, поэтому:

$$\gamma_1 = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha_0}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\beta_0}{2}\right) = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} \tag{25}$$

Ясно, что аналогичные соотношения справедливы и для других углов треугольника MNK:

$$\alpha_1 = \frac{\gamma_0 + \beta_0}{2}, \quad \beta_1 = \frac{\gamma_0 + \alpha_0}{2} \tag{26}$$

Такую же связь можно получить для углов первого и второго треугольников, второго и третьего треугольников и так далее. Поэтому можно записать в общем виде:

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_n + \beta_n}{2}, \quad \beta_{n+1} = \frac{\gamma_n + \alpha_n}{2}, \quad \gamma_{n+1} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} \tag{27}$$

3.3 Завершение доказательства

Отложим углы на числовой прямой. Без ограничения общности будем полагать:

$$\alpha_0 < \beta_0 < \gamma_0 \tag{28}$$

Прежде всего отложим углы α_0, β_0 и γ_0 (см. рис. 9). Затем по полученным формулам (25) и (26) определяем положение следующего набора углов. α_1 будет лежать посередине между β_0 и γ_0, γ_1 будет лежать посередине между α_0 и β_0, β_1 будет лежать посередине между α_0 и γ_0.

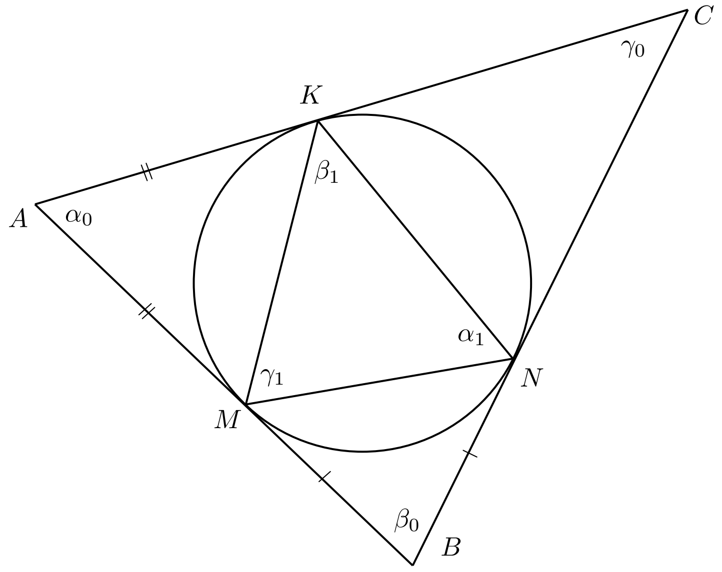

Рис. 8: Чертёж к нахождению связи между углами нулевого и первого шага

Тут можно заметить, что если расстояние между углами α_1 и γ_1 уменьшилось в два раза по сравнению с расстоянием между углами α_0 и γ_0. Действительно:

$$\gamma_1 - \alpha_1 = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} - \frac{\beta_0 + \gamma_0}{2} = \frac{\alpha_1 - \gamma_1}{2} \tag{29}$$

Таким образом, разница между самым большим и самым маленьким углом новой последовательности в два раза меньше разницы между самым большим и самым маленьким углом предыдущей последовательности.

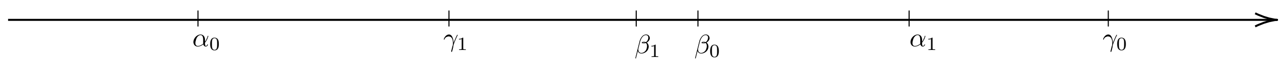

Рис. 9: Числовая прямая с углами

Данный результат можно обобщить следующим образом:

$$|\alpha_{n+1} - \gamma_{n+1}| = \frac{|\alpha_n - \gamma_n|}{2} \tag{30}$$

Если начать с углов α_0, β_0 и γ_0, последовательно применяя формулу (30) n раз, то получится связь:

$$|\alpha_{n+1} - \gamma_{n+1}| = \frac{|\alpha_0 - \gamma_0|}{2^n} \tag{31}$$

Отсюда видно, что если применять формулу очень много раз, то интервал возможных значений углов будет сужаться около 60° (потому что интервал возможных значений α, β и γ сжимается в точку в то время, как их сумма должна оставаться равной 180°).

3.4 Пример

Продемонстрируем данный вывод на примере треугольника с сильно разными углами:

$$\alpha_0 = 16^\circ, \quad \beta_0 = 20^\circ, \quad \gamma_0 = 144^\circ \tag{32}$$

Тогда уже на седьмом шаге получим, что разброс значений, которые могут принимать углы α_7, β_7 и γ_7, составляет всего лишь 1°:

$$|\alpha_7 - \gamma_7| = \frac{16^\circ - 144^\circ}{2^7} = 1^\circ \tag{33}$$

То есть на седьмом шаге получается треугольник сильно похожий на равносторонний.