MATERIAL VISUAL CON RESPECTO A MATEMÁTICAS (COMPUTACIONALES?) // COMBINATORIA

ENTRENAMIENTO EN LÍNEA PARA COBAEV RUMBO A OVI 2020

TEMARIO

- Diagramas de Árbol vs Análisis Combinatorio
- Principio de la Adición
- Principio de la Multiplicación
- Combinaciones de *m* elementos tomados de *n* en *n*
- Variaciones de *m* elementos tomados de *n* en *n*
- Variaciones con repetición de *m* elementos tomados de *n* en *n*
- Permutaciones de *m* elementos
- Permutaciones de *m* elementos con repetición
- Permutaciones circulares

- **EXTRAS**
  - Combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n
  - Teorema generalizado del Binomio
  - Triángulo de Pascal
  - Diagrama de Venn

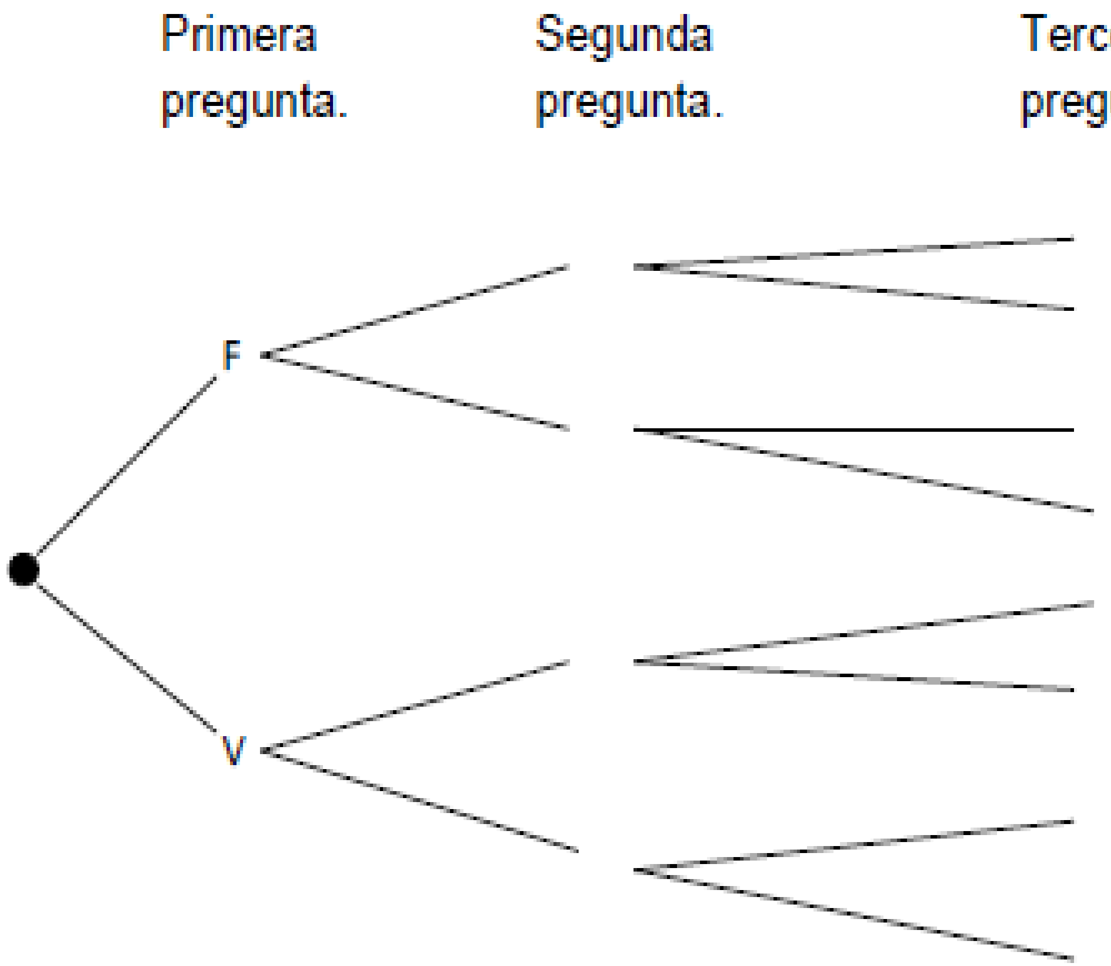
DIAGRAMAS DE ÁRBOL VS ANÁLISIS COMBINATORIO

- Los diagramas de árbol nos sirven para mostrar gráficamente el número de resultados posibles de un fenómeno, pero esta ordenación tiene un inconveniente, pues a medida que aumenta el número de objetos dicha ordenación se complica, por lo que hay que recurrir a otro proceso más sencillo para determinar el número total de resultados.

- Para ello existen otras técnicas tales como:
  - **Principio fundamental de conteo.**
  - **Permutaciones.**
  - **Combinaciones.**

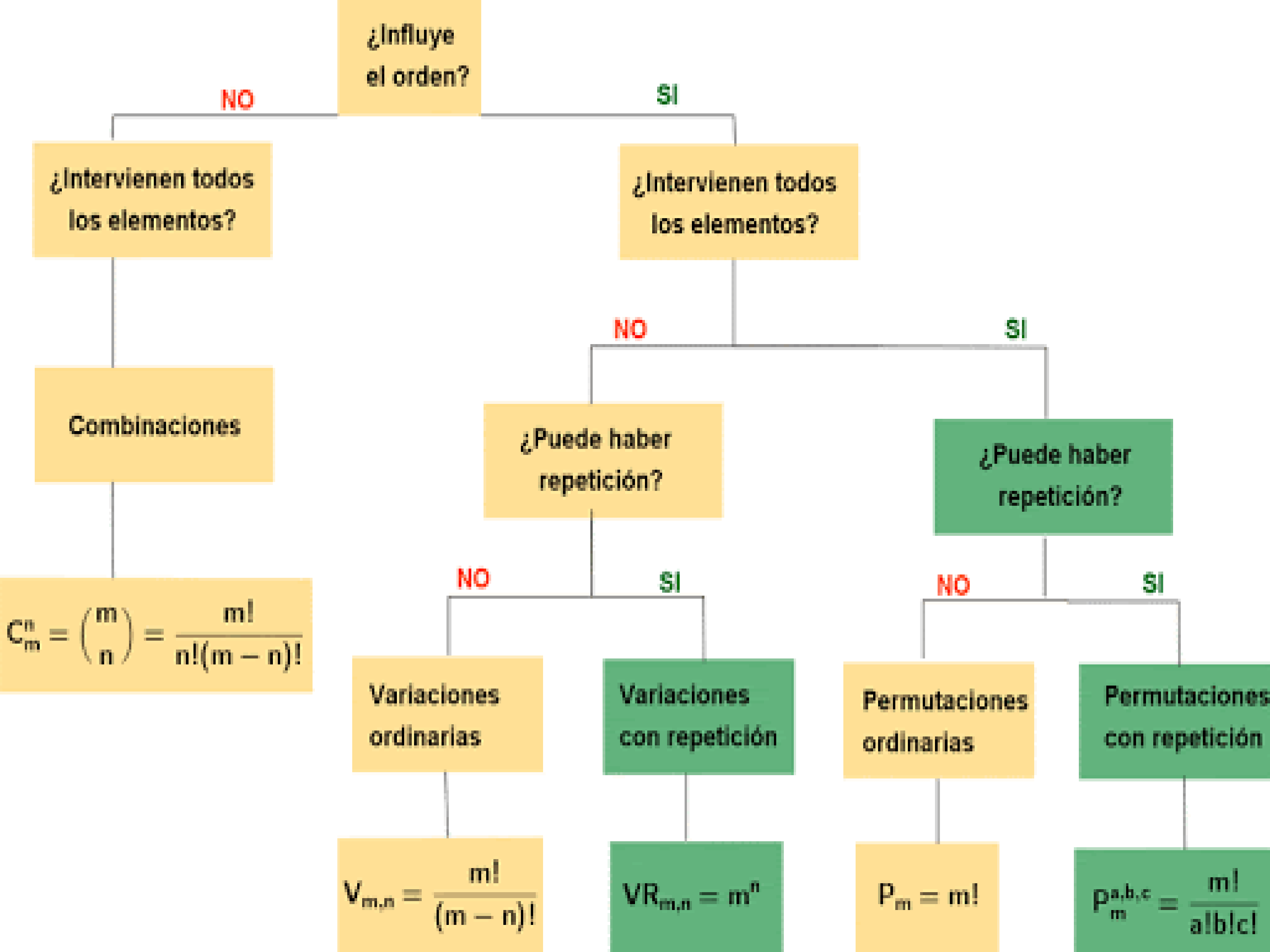
Ejemplo 1.

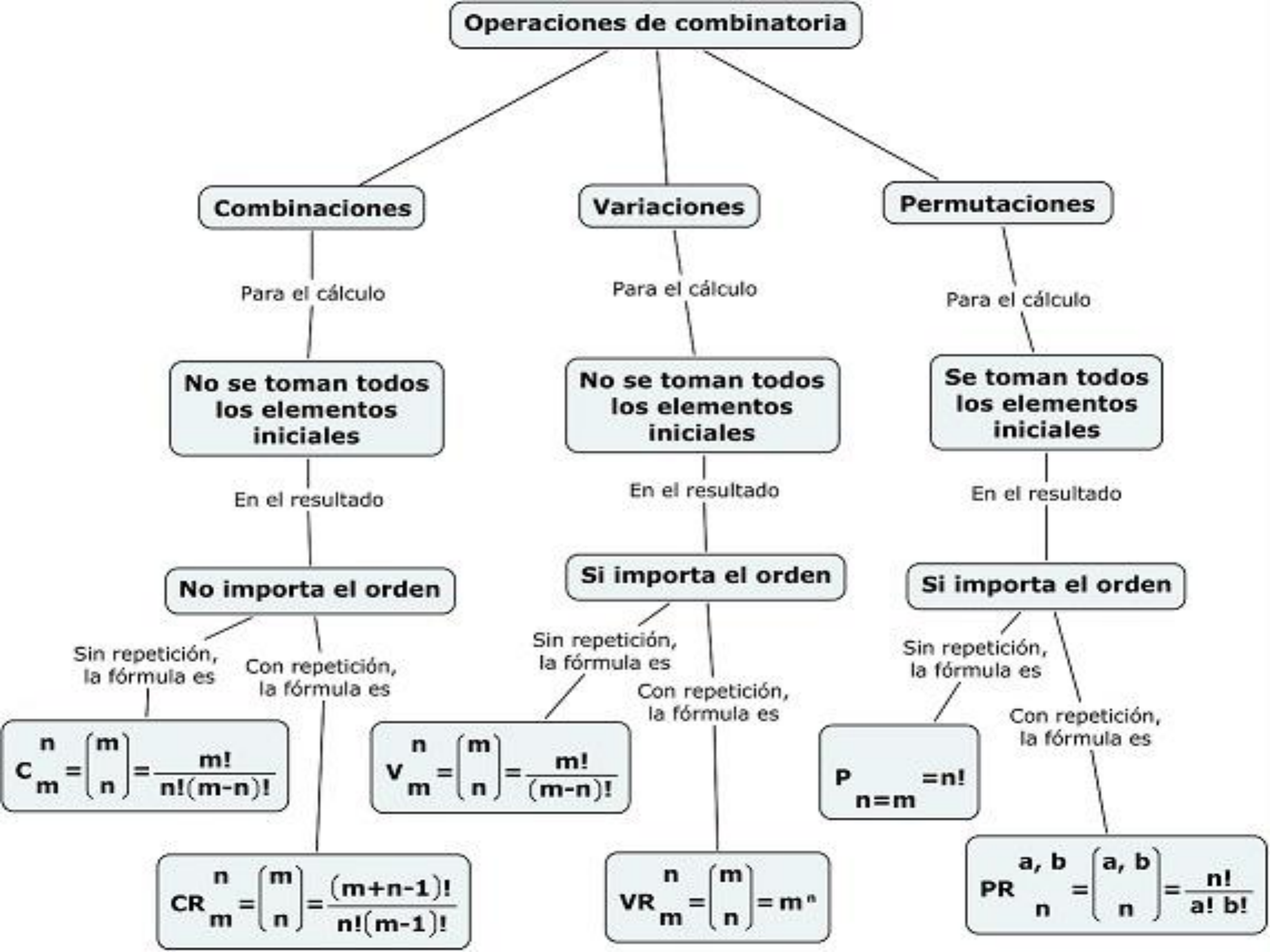
Construir el diagrama de árbol para encontrar el total de posibles formas de resolver un examen de 3 preguntas de falso o verdadero.



$$\boldsymbol{f(x) = 2^x}$$
$$\boldsymbol{f(3) = 2^3}$$

Por lo tanto el espacio muestral es: **S**= {FFF, FFV, FVF, FVV, VFF, VFV, VVF, VVV}


¿Influye el orden?
NO
SI
¿Intervienen todos los elementos?
¿Intervienen todos los elementos?
Combinaciones
$C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$
NO
SI
¿Puede haber repetición?
¿Puede haber repetición?
NO
SI
NO
SI
Variaciones ordinarias
Variaciones con repetición
Permutaciones ordinarias
Permutaciones con repetición
$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$
$VR_{m,n} = m^n$
$P_m = m!$
$P_m^{a,b,c} = \frac{m!}{a!b!c!}$



Operaciones de combinatoria
Combinaciones
Variaciones
Permutaciones
Para el cálculo
Para el cálculo
Para el cálculo
No se toman todos los elementos iniciales
No se toman todos los elementos iniciales
Se toman todos los elementos iniciales
En el resultado
En el resultado
En el resultado
No importa el orden
Si importa el orden
Si importa el orden
Sin repetición, la fórmula es
Con repetición, la fórmula es
$C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$
$CR_m^n = \binom{m}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$
Sin repetición, la fórmula es
Con repetición, la fórmula es
$V_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!}$
$VR_m^n = \binom{m}{n} = m^n$
Sin repetición, la fórmula es
Con repetición, la fórmula es
$P_{n=m} = n!$
$PR_n^{a,\,b} = \binom{a,\,b}{n} = \frac{n!}{a!\,b!}$

Principio de adición. Supongamos que un procedimiento, designado como 1, se puede hacerse de n_1 maneras. Supongamos que un segundo procedimiento, designado como 2, se puede hacer de n_2 maneras. Supongamos además que **no** es posible que **ambos**, 1 y 2, se hagan juntos. Entonces el número de maneras como se puede hacer 1 **o** 2 es $n_1 + n_2$.

También este principio puede generalizarse como sigue: si hay k procedimientos, y el i-ésimo procedimiento se puede hacer en n_i maneras, $i = 1,2,\ldots,k$, entonces el número de maneras como podemos hacer el procedimiento 1, **o** el procedimiento 2 **o** … **o** el procedimiento k está dado por $n_1 + n_2 + \ldots. + n_k$, suponiendo que los procedimientos no se pueden realizar en forma conjunta.

Ejemplo: Supongamos que planeamos un viaje y debemos decidir entre transportarnos por autobús o por tren. Si hay tres rutas para el autobús y dos para el tren, entonces hay $3 + 2 = 5$ rutas diferentes disponibles para el viaje.

Principio de multiplicación. Supongamos que un procedimiento designado como 1, puede hacerse de n_1 maneras. Supongamos que un segundo procedimiento, designado como 2, se puede hacer de n_2 maneras. También supongamos que cada una de las maneras de efectuar 1 puede ser seguida por cualquiera de las maneras de efectuar 2. Entonces el procedimiento que consta de 1 seguido por 2 se puede hacer de $n_1 \cdot n_2$ maneras.

Obviamente este principio puede extenderse a cualquier número de procedimientos. Si hay k procedimientos y el i-ésimo procedimiento se puede hacer de n_i maneras, $i = 1,2,\ldots,k$, entonces el procedimiento que consiste en 1, seguido por 2,..., seguido por el procedimiento k puede hacerse de $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Ejemplo: Un artículo manufacturado debe pasar por tres controles. En cada uno de ellos se inspecciona una característica particular del artículo y se le marca de conformidad. En el primer control hay tres mediciones posibles, mientras que en cada uno de los dos últimos controles hay cuatro mediciones posibles. Por lo tanto, hay $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ maneras de marcar el artículo.

Combinaciones de m elementos tomados de n en n.

Llamaremos combinaciones de m elementos tomados de n en n, a los diferentes grupos que se pueden formar figurando n de estos elementos en cada uno, de modo que cada dos grupos difieran en la naturaleza de, por lo menos, un elemento. Como se ve, no se tiene en cuenta el orden de los elementos en la disposición. Se representa por $C_{(m,n)}$.

El número de grupos que podremos formar de tamaño n, será igual al número de subpoblaciones de tamaño n de una población con m elementos, puesto que en las subpoblaciones no teníamos en cuenta el orden de los elementos extraídos. Así:

$$n!\,C_{(m,n)} = V_{(m,n)}$$

$$C_{(m,n)} = \frac{V_{(m,n)}}{n!} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} = \binom{m}{n}$$

Ejemplo 1.39. BARAJA INGLESA. ¿Cuántas manos diferentes le pueden tocar a un jugador de poker?

Una mano de poker es de *5* cartas y la baraja inglesa consta de *52*; por ende, en cada mano se obtiene, de una en una, la muestra de *5* cartas distintas; para efectos de conteo, a esta manera de tomar la muestra se le denomina muestreo sin reemplazamiento. La primera carta puede ser cualquiera de la *52*, la segunda puede ser cualquiera de las *51* restantes,..., y la quinta, que puede ser cualquiera de las *48* que quedan.

El orden en el que salen las carta no importa y evidentemente no se permite la repetición; por lo tanto, son combinaciones de 52 objetos tomados de *5* en *5*.

$$C_{52}^{5}=\frac{52!}{5!47!}=\frac{52\times 51\times 50\times 49\times 48\times \cancel{47!}}{5\times 4\times 3\times 2\times 1\times \cancel{47!}}=\frac{311'875,200}{120}=2'598,960$$

Variaciones de m elementos tomados de n en n.

Se llaman variaciones de m elementos tomados de n en n, a los diferentes grupos que pueden formarse con los m elementos dados, tomados de n en n, de modo que cada dos grupos difieran entre si, ya por la naturaleza de algún elemento, ya por el orden de sucesión de los mismos. Se representa por $V_{(m,n)}$.

Las variaciones de m elementos tomados de n en n serán igual al número de muestras diferentes de tamaño n seleccionadas mediante un muestreo sin reemplazo de una población de tamaño m, ya que dos grupos se diferencian entre sí, si existen dos elementos diferentes y por el orden de sucesión de los mismos (objetos ordenados). El muestreo que se considera es sin reemplazo, pues las variaciones en las que no se especifique nada se entenderán que son sin repetición. Así:

$$V_{(m,n)} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Ejemplo 1.36. SALÓN DE CLASE. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar los 52 alumnos del grupo de Probabilidad en un salón que dispone de 60 plazas?

El primer alumno que entra al salón puede escoger su lugar de entre 60 posibles, el segundo puede escoger lugar de entre 59 posibles,... y así, sucesivamente, hasta el alumno número 52, que puede escoger lugar de entre 9 posibles. Evidentemente, 8 de los 60 lugares quedarán vacíos; se trata de calcular las ordenaciones de 60 objetos de orden 52:

$$O_{60}^{52} = \frac{60!}{(60-52)!} = \frac{60!}{8!} = \frac{60 \times 59 \times 58 \times \ldots \times 9 \times 8!}{8!} = 2.06374 \times 10^{77} \text{ maneras}$$

Variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n.

Se llaman variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n, a los diferentes grupos que pueden formarse con los m elementos dados, tomados de n en n, en los que eventualmente pueden aparecer elementos repetidos y con la condición de que dos grupos sean distintos entre sí, si tienen distintos elementos, o están situados en distintos lugares. Se representa por $V^1_{(m,n)}$.

Como vemos, también aquí se tiene en cuenta el orden de los elementos de cada grupo y de hecho en lo único en que se diferencian de las variaciones antes definidas es que eventualmente algún elemento puede aparecer repetido en un mismo grupo. Es decir, que el muestreo que hacemos es con reemplazo. Así:

$$V^1_{(m,n)} = \underbrace{m \cdot m \cdots m}_{n\ veces} = m^n$$

Ejemplo 1.37. MONEDAS. Considere el experimento consistente en lanzar tres monedas simultáneamente y observar las caras que quedan hacia arriba. Determine el número de maneras en que puede ocurrir tal experimento.

Nótese que el experimento consistente en lanzar tres monedas simultáneamente es equivalente al experimento de lanzar una moneda tres veces consecutivamente, que fue planteado y resuelto en el ejemplo 1.27.

$$OR_{2^3} = 2^3 = 8$$

Permutaciones de m elementos

Permutaciones de m elementos diferentes son los distintos grupos que pueden formarse entrando en cada uno de ellos los m elementos dados, difiriendo únicamente en el orden de sucesión de sus elementos. Se representa por P_m.

Como se ve por la definición, las permutaciones de m elementos son el número de ordenaciones diferentes de estos m elementos. Así:

$$P_m = V_{(m,m)} = m(m-1)(m-2)\cdots 2\cdot 1 = m!$$

Ejemplo 1.32. LIBROS. Si en el librero de tu casa hay *15* diferentes libros, *6* de los cuales son de matemáticas, *4* son de química y *5* son de física,

a) ¿De cuántas maneras diferentes puedes acomodarlos en el librero?

$$P_{15} = 15! = 1,307,674,368,000 \text{ maneras}$$

b) ¿De cuántas maneras diferentes puedes acomodarlos en tu librero, si los de cada materia deben quedar juntos?

El considerar que los libros de cada materia deben quedar juntos implica distinguir las *3* materias como *3* objetos que se pueden permutar: el primer objeto es el grupo de libros de matemáticas, el segundo objeto es el grupo de libros de química y el tercer objeto es el grupo de libros de física. El número de maneras en que se pueden permutar estos *3* objetos es: $P_3 = 3! = 6$.

Los *6* libros de matemáticas se pueden permutar de $P_6 = 6! = 720$ maneras; los *4* libros de química se pueden permutar de $P_4 = 4! = 24$ maneras; y los *5* libros de física se pueden permutar de $P_5 = 5! = 120$ maneras.

Por el principio fundamental del conteo, el número total de maneras en que se pueden colocar los *15* libros en el librero, haciendo que los de cada materia queden juntos es:

$$P_3\left(P_6P_4P_5\right) = 3!6!4!5! = 6x720x24x120 = 12'441,600 \text{ maneras}$$

Permutaciones con repetición

Llamaremos permutaciones con repetición de k elementos distintos tal que el primero aparece n_1 veces; el segundo n_2 veces;...; el k-ésimo n_k veces, con $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = m$, a las distintas disposiciones que pueden formarse con los k elementos distintos, de tal forma que en cada disposición cada elemento aparezca $n_1, n_2, \ldots, n_k$ veces y esto en un orden determinado, con $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = m$ y $n_i \geq 0$, $\forall i = 1,2,\ldots,k$. Se representa por $P_m^{n_1,\ldots,n_k}$.

Como se tiene en cuenta el orden, determinar el número de disposiciones distintas que se pueden formar con los k elementos es el mismo que determinar el número de particiones diferentes de tamaño k en las cuales se pueden dividir los m elementos de forma que el primer grupo tenga tamaño n_1 (número de 1), ..., el k-ésimo n_k (número de k). Así:

$$P_m^{n_1,\ldots,n_k} = \frac{m!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!} = \frac{m!}{\prod_{i=1}^{k}(n_i)!}$$

Ejemplo 1.34 TORNILLOS. Si para fijar una placa se cuenta con 7 tornillos: 2 son de acero al carbón, 3 son de acero inoxidable y 2 son de bronce. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar tales tornillos, si se distingue el material del que están hechos?

$$P_7^{2,3,2} = \frac{7!}{2!3!2!} = \frac{5040}{24} = 210 \text{ maneras}$$

Ejemplo 1.35. TELÉGRAFO. ¿Cuántos mensajes telegráficos diferentes se pueden enviar utilizando exactamente 4 puntos y 5 rayas?

$$P_9^{4,5} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{362880}{2880} = 126 \text{ mensajes}$$

Permutaciones circulares

Se llaman permutaciones circulares de n objetos a las diferentes maneras en que se pueden colocar esos n objetos alrededor de un círculo; en este tipo de permutaciones, lo que importa son las posiciones relativas de los objetos con respecto a ellos mismos y no las posiciones absolutas de los objetos en el círculo. Notación: PC_n.

Existen n permutaciones lineales que, al ser colocadas en círculo, conducen a una misma permutación circular, porque cada objeto queda en la misma posición relativa respecto a los $(n - 1)$ objetos restantes; de manera que por cada permutación circular hay n permutaciones lineales equivalentes.

Entonces, para calcular el número de permutaciones circulares de n objetos, se divide el número de permutaciones lineales de n objetos entre las n permutaciones equivalentes:

$$PC_n = P_n / n = n!/ n = (n-1)! \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} \ (1.18)$$

Ejemplo 1.33. JUNTA DE COMITÉ. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar 6 personas, para una junta de comité?

a) En fila: $P_6 = 6! = 720$ maneras

b) En fila, si dos personas deben quedar juntas:

$P_5P_2 = 5!2! = 120 \times 2 = 240$ maneras

c) Alrededor de una mesa: $PC_6 = (6-1)! = 5! = 120$ maneras

d) Alrededor de una mesa, si dos personas deben quedar siempre juntas:

$PC_5P_2 = (5-1)!2! = 24 \times 2 = 48$ maneras

EXTRAS

Teorema generalizado del binomio

Los coeficientes binomiales tienen un significado muy claro cuando n y r son enteros no negativos, con $0 \le r \le n$:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\cancel{(n-r)!}}{r!\cancel{(n-r)!}} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

La expresión anterior también tiene sentido si n es un número real cualquiera, en tanto r sea entero no negativo:

$$\binom{-r}{n} = \frac{r!}{n!(-r-n)!} = \frac{-r(-r-1)(-r-2)\ldots(-r-n)!}{n!(-r-n)!} = \frac{-r(-r-1)(-r-2)\ldots(-r-n+1)}{n!}$$

$$= (-1)^n \frac{(r+n-1)(r+n-2)\ldots r}{n!} = (-1)^n \frac{(r+n-1)!}{n!(r-1)!} = (-1)^n \binom{r+n-1}{n}$$

Triángulo de Pascal

Este arreglo triangular de los números combinatorios se conoce con el nombre de Triángulo de Pascal, el que también puede ser expresado, sustituyendo los números combinatorios por sus valores numéricos, como triángulo aritmético:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \cdots & & & & & &
\end{array}
$$

Las propiedades de los números combinatorios analizados previamente, se verifican claramente al observar los dos triángulos anteriores. En efecto:

- Los números combinatorios que se encuentran colocados simétricamente respecto a la vertical que pasa por el vértice superior, son iguales.
- La suma de dos números combinatorios adyacentes pertenecientes a la misma línea horizontal, es igual al número combinatorio localizado inmediatamente debajo de ellos.

Combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n.

Llamaremos combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n a todas las disposiciones distintas que se pueden formar tomando n elementos de los m, entre los que eventualmente pueden aparecer elementos repetidos y con la condición de que dos disposiciones serán distintas entre sí, si tienen distintos elementos. Como se ve no se tiene en cuenta el orden en la disposición. Se representa por $C^1_{(m,n)}$.

El número de disposiciones distintas que se pueden formar tomando n elementos entre los m, será igual al número de subpoblaciones diferentes de tamaño n, seleccionadas de una población de tamaño m, mediante un muestreo con reemplazo , pues pueden aparecer elementos repetidos. Así:

$$C^1_{(m,n)} = \binom{m+n-1}{n} = \binom{m+n-1}{m-1} = \frac{(m+n-1)!}{n!\,(m-1)!}$$

Ejemplos

- ¿Cuántas fichas tiene el juego del dominó?

  Una ficha de dominó es un rectángulo en el que hay dos partes, en cada una de ellas hay una serie de puntos que indican la puntuación de esa parte. Estas puntuaciones van de blanca (0 puntos) a 6. Tenemos pares de puntuaciones de 0 a 6.

  El total de fichas será $CR_{7,2} = \binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = 28$

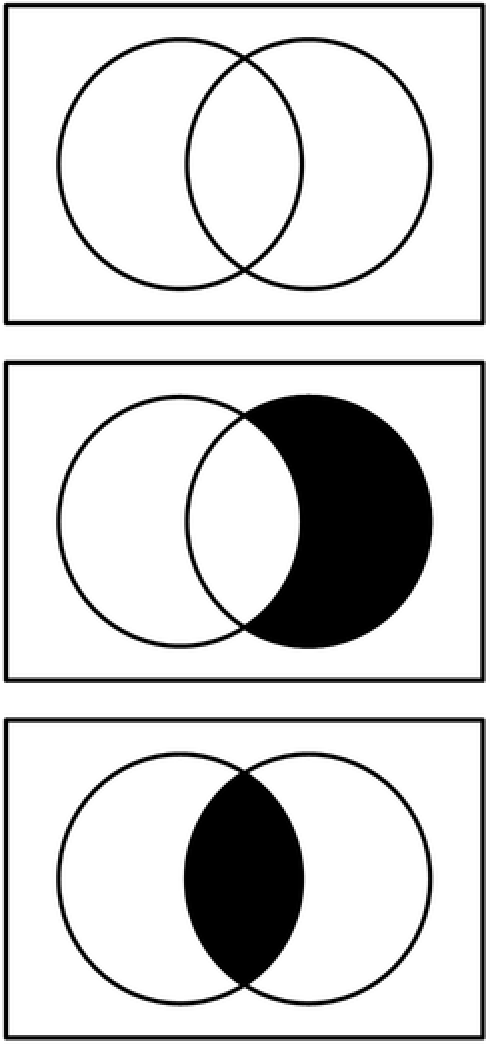
- En una pastelería hay 6 tipos distintos de pasteles. ¿De cuántas formas se pueden elegir 4 pasteles?.

  Nota: Si nos gusta un pastel lo podemos pedir hasta cuatro veces.
  Estamos en el caso en el que no nos importa el orden en que elijamos los pasteles y podemos repetir, son combinaciones con repetición.

  $$CR_{6,4} = \binom{6+4-1}{4} = \frac{9!}{4!5!} = 126$$

DIAGRAMA DE VENN

Son esquemas que muestran colecciones (*conjuntos*) de cosas (*elementos*) por medio de líneas cerradas.



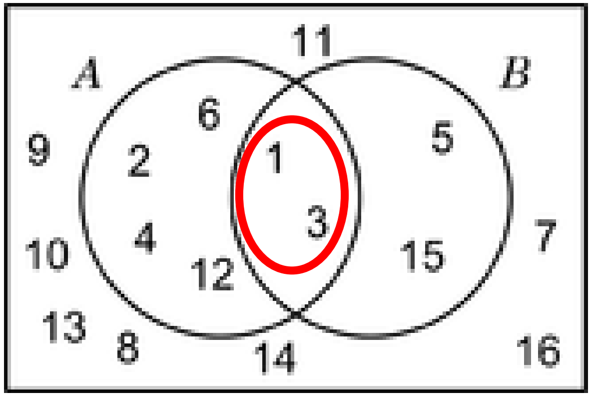
INTERSECCIÓN.

- Dado que los conjuntos pueden tener elementos comunes, las regiones encerradas por sus líneas límite se superponen. **El conjunto de los elementos que pertenecen simultáneamente a otros dos es la *intersección* de ambos.**

$$A = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

$$B = \{1; 3; 5; 15\}$$

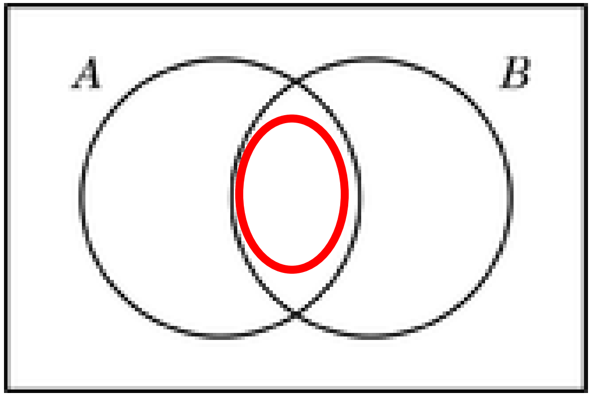
$$U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16\}$$



$$A = \{x \mid x \text{ es divisor natural de } 12\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ es divisor natural de } 15\}$$

$$U = \{x \mid x \text{ es natural menor o igual que } 16\}$$



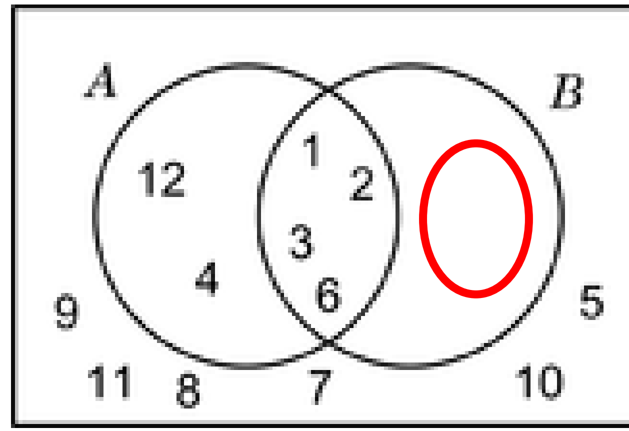
INCLUSIÓN

- Si todos los elementos de un conjunto son parte de los elementos de otro, se dice que el primero es un *subconjunto* del segundo o que *está incluido* en el segundo. **Cuando hay *regiones vacías*, la situación se indica anulándolas (con un color de fondo distinto).**

$$A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12\}$$

$$B = \{1;\ 2;\ 3;\ 6\}$$

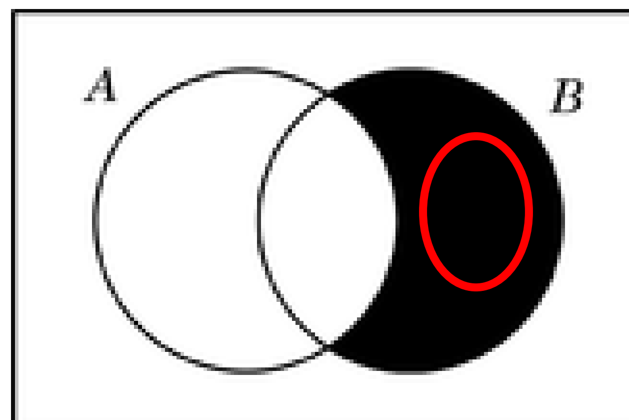
$$U = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12\}$$



$$A = \{x \mid x \text{ es divisor natural de } 12\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ es divisor natural de } 6\}$$

$$U = \{x \mid x \text{ es natural menor o igual que } 12\}$$



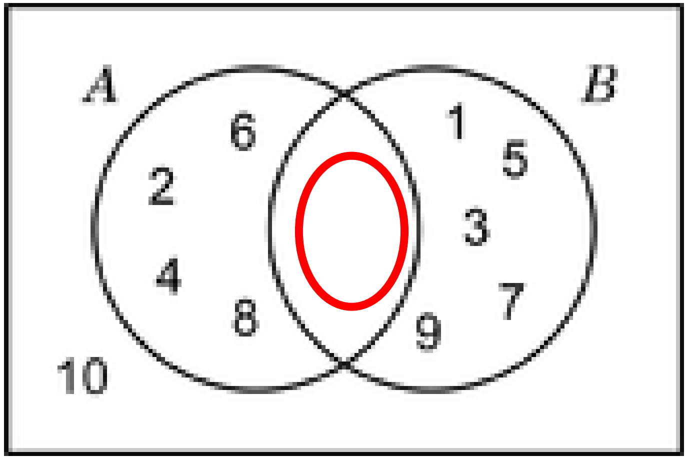
DISYUNCIÓN.

- **Cuando los conjuntos no tienen elementos comunes, la región de superposición queda vacía.**

$A = \{2; 4; 6; 8\}$

$B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$

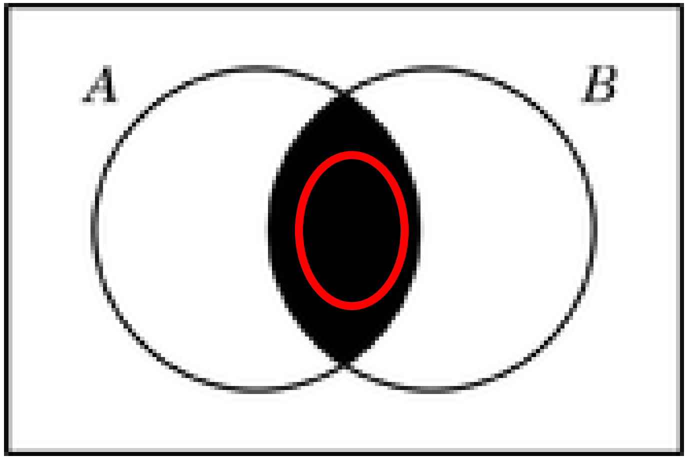
$U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$



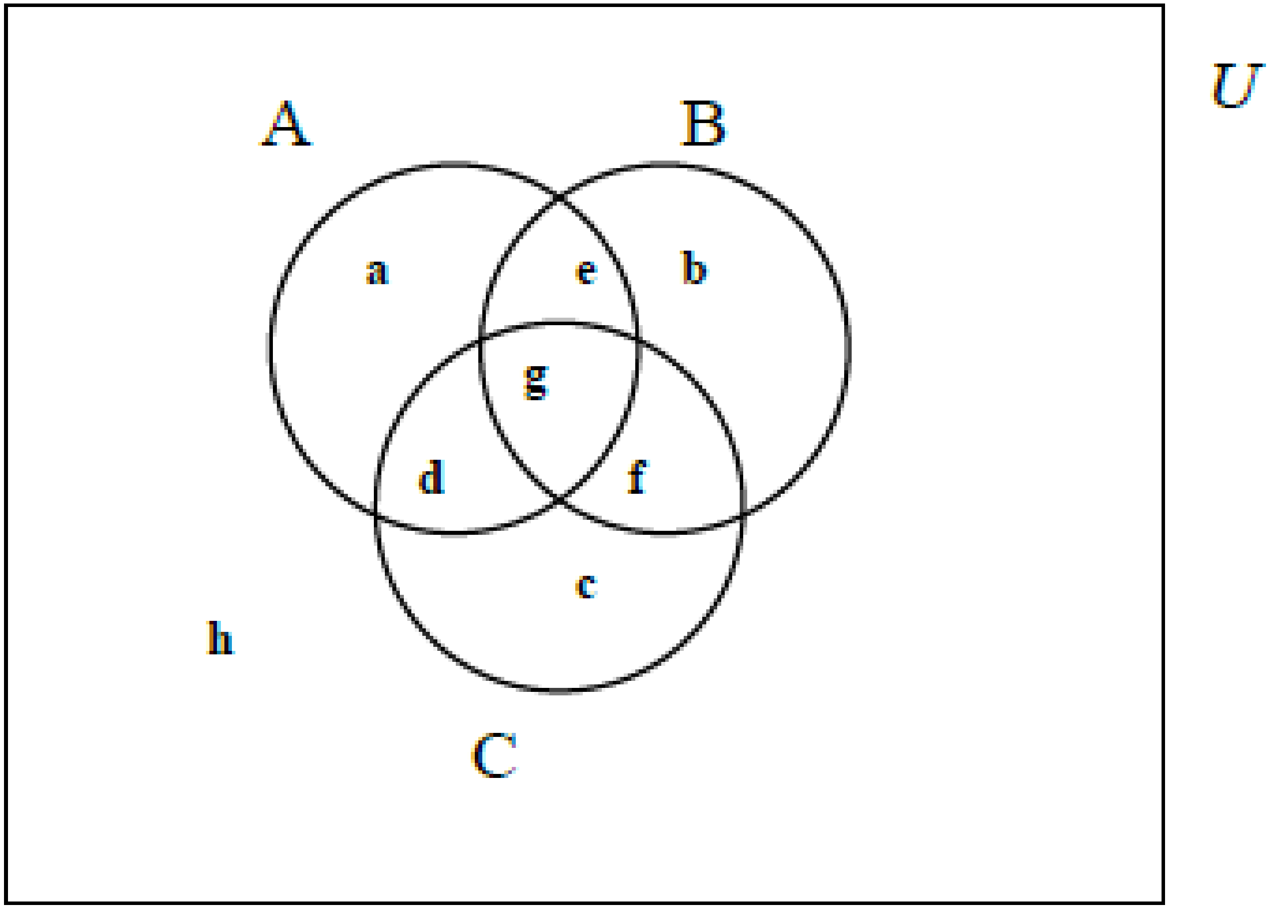
$A = \{x \mid x \text{ es par y de una cifra}\}$

$B = \{x \mid x \text{ es impar y de una cifra}\}$

$U = \{x \mid x \text{ es natural menor o igual que } 10\}$



Para esto resolvemos el sistema:



La ecuación de cardinalidad es:

$$|A \cup B \cup C| = \overset{a}{|A|} + \overset{b}{|B|} + \overset{c}{|C|} - \overset{e}{|A \cap B|} - \overset{d}{|A \cap C|} - \overset{f}{|B \cap C|} + \overset{g}{|A \cap B \cap C|}$$

Ejercicio 1

En una encuesta realizada a 500 profesionales sobre estrategias de ahorro se obtuvo la siguiente información:

- 25 optan por Ahorro Provisional Voluntario (APV) y seguro de Vida & ahorro.
- 80 optan por seguro de vida & ahorro
- 140 optan por APV
- 50 optan por Fondos mutuos y APV
- 40 optan por fondos mutuos y seguro de vida & ahorro
- 5 optan por utilizar los tipos
- 120 no ahorran con ningunos de estos medios.

¿Cuántos profesionales optan por Fondos Mutuos?

Resolver el problema utilizando la fórmula

¿Cuántos profesionales optan por Fondos Mutuos?

Desarrollo:

Conjuntos involucrados:

A: Conjunto formado por los profesionales que optan por APV

B: Conjunto formado por los profesionales que optan por Seguro vida & ahorro

C: Conjunto formado por los profesionales que optan por Fondos mutuos

Cardinalidades conocidas:

$|A \cup B \cup C| = 380$; $|A| = 140$; $|B| = 80$; $|A \cap B| = 25$; $|A \cap C| = 50$; $|B \cap C| = 40$; $|A \cap B \cap C| = 5$.

Observe que con éstos datos se puede llenar inmediatamente el diagrama o bien utilizar la fórmula de cardinalidad para obtener $|C|$

Ejercicio 1

En una encuesta realizada a 500 profesionales sobre estrategias de ahorro se obtuvo la siguiente información:

- 25 optan por Ahorro Provisional Voluntario (APV) y seguro de Vida & ahorro.
- 80 optan por seguro de vida & ahorro
- 140 optan por APV
- 50 optan por Fondos mutuos y APV
- 40 optan por fondos mutuos y seguro de vida & ahorro
- 5 optan por utilizar los tipos
- 120 no ahorran con ningunos de estos medios.

¿Cuántos profesionales optan por Fondos Mutuos?

Resolver el problema utilizando la fórmula

Resolver el problema llenando el diagrama

i) 5 personas optan por las tres estrategias de ahorro, esto implica que $e = 5$

ii) 25 optan por APV y seguro de Vida & ahorro, esto implica que $e + b = 25 \Rightarrow b = 20$

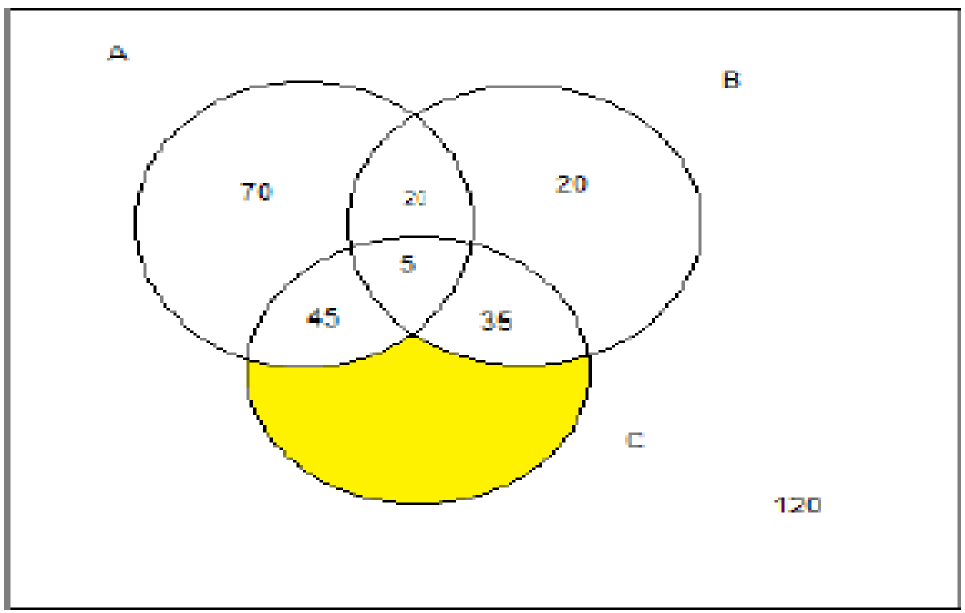
iii) 50 optan por Fondos Mutuos y APV, esto implica que $e + f = 50 \Rightarrow f = 45$

iv) 40 optan por fondos mutuos y seguro de vida & ahorro , $e + d = 40 \Rightarrow d = 35$v

v) 80 optan por seguro de Vida & ahorro (B), esto implica que

$b + c + d + e = 80 \Rightarrow c = 20$

vi) 140 optan por APV, esto implica que $a + b + e + f = 140 \Rightarrow a = 70$



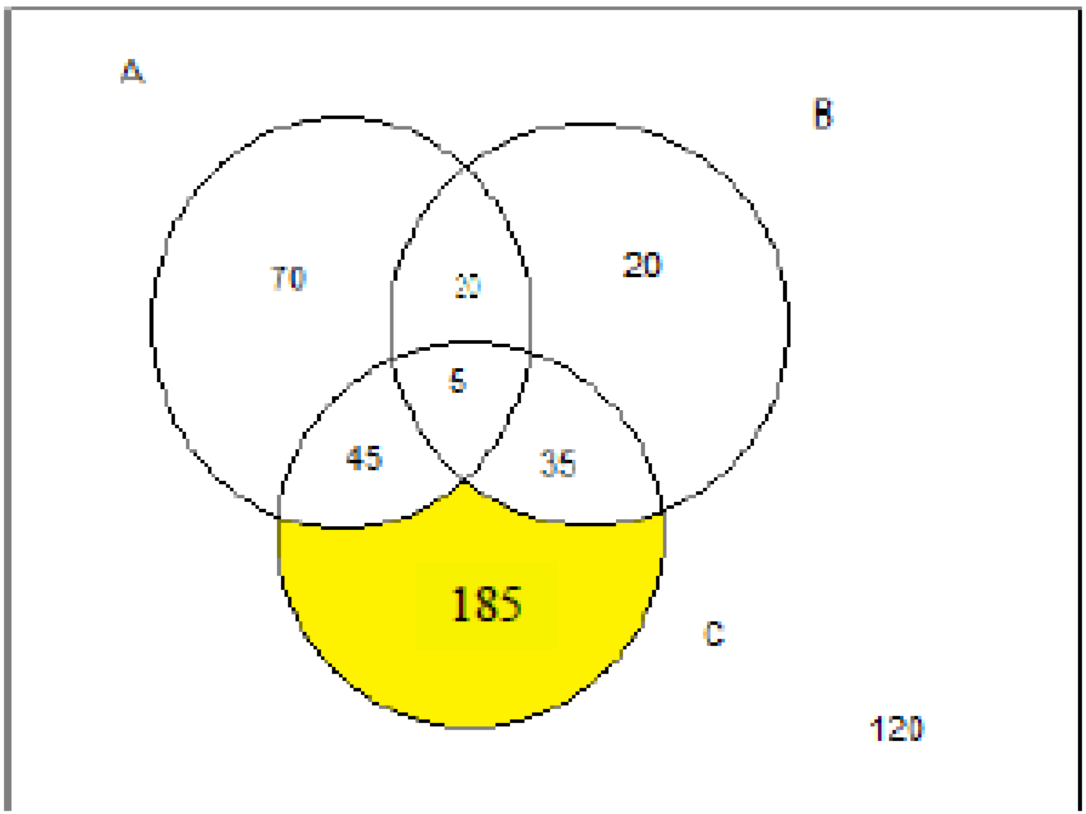
Cuántas personas corresponden a la región amarilla
380-70-20-5-45-20-35=185

Para obtener el valor de g (región amarilla)

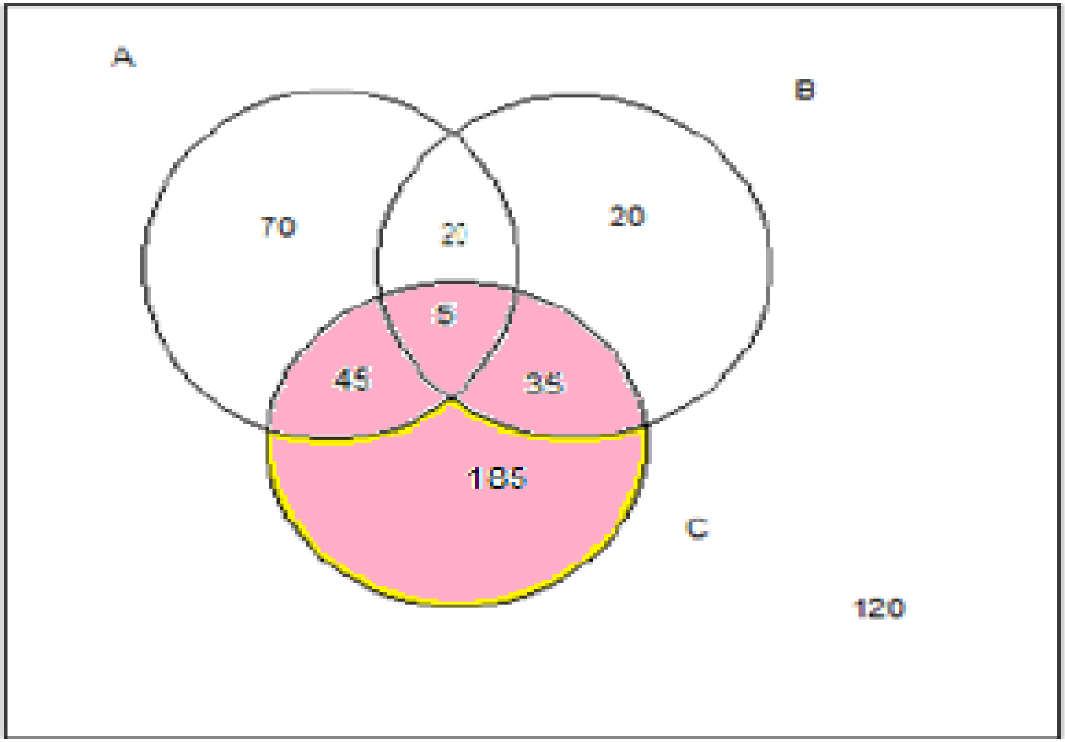
Observe que de las 500 personas 120 no utilizan ninguno, luego 380 utilizan algunas de las formas de ahorro mencionadas , esto implica

$$a + b + c + d + e + f + g = 380 \Longrightarrow g = 185$$

Por lo tanto la región ■ corresponde a 185 personas.



Respondiendo a la pregunta debemos determinar el número que corresponde a la región sombreada del siguiente diagrama



Para responder la pregunta debemos calcular el número que corresponde a la región sombreada:

$$|C| = 45 + 5 + 35 + 185 = 270$$

El número de profesionales que utiliza fondos mutuos es 270 personas

MATERIAL CREADO PARA EL ENTRENAMIENTO EN LÍNEA P/OVI 2020 DE COBAEV

13/ABRIL – 14/ABRIL

Este material puede usarse para explicar los temas ya establecidos.

Los bancos fueron obtenidos a través de libros & páginas web, sus derechos les pertenecen totalmente a las autoras/autores, aquí han sido colocados para fines educativos.

El material fue creado para distribución a partir del COMITÉ DE PROGRAMACIÓN DE COBAEV

*Fabricio Cruz López

@MrKristarlx07 – GitHub

@marbasz - Twitter

BUEN VIAJE!!!