LUCRAREA DE LABORATOR Nr. 5

TEMA: DETERMINAREA FLUXULUI MAXIM ÎNTR-O REŢEA DE TRANSPORT

1. SCOPUL LUCRĂRII:

- Studierea noţiunilor de bază leagate de reţelele de transport;
- Programarea algoritmului Ford-Fulkerson pentru determinarea fluxului maxim într-o reţea de transport.

2. NOTE DE CURS

Reţele de transport

Un graf orientat $G = (X, U)$ se numeşte *reţea de transport* dacă satisface următoarele condiţii:

a) există un vârf unic a din X în care nu intră nici un arc sau $d\_(a)=0$;
b) există un vârf unic b din X din care nu iese nici un arc sau $d^+(a)=0$;
c) G este conex şi există drumuri de la a la b în G;
d) s-a definit o funcţie c: $U \rightarrow R$ astfel încât $c(u) \geq 0$ pentru orice arc u din U.

Vârful a se numeşte intrarea reţelei, vârful b se numeşte ieşirea reţelei, iar $c(u)$ este capacitatea arcului u.

O funcţie f: $U \rightarrow R$ astfel încât $f(u) \geq 0$ pentru orice arc u se numeşte *flux* în reţeaua de transport G cu funcţia de capacitate c, care se notează $G = (X, U, c)$, dacă sunt îndeplinite următoarele două condiţii:

a) Condiţia de conservare a fluxului: Pentru orice vârf x diferit de a şi b suma fluxurilor pe arcele care intră în x este egală cu suma fluxurilor pe arcele care ies din x.
b) Condiţia de mărginire a fluxului: Există inegalitatea $f(u) \leq c(u)$ pentru orice arc $u \in U$.

Dacă $f(u) = c(u)$ arcul se numeşte *saturat*. Un *drum* se va numi *saturat* dacă va conţine cel puţin un arc saturat. Fluxul, toate drumurile căruia sunt saturate se va numi *flux complet*. Cel mai mare dintre fluxurile complete se numeşte *flux maxim*.

Pentru orice mulţime de vârfuri $A \in U$ vom defini o *tăietură* $w\_(A) = \{(x, y) \mid x \notin A, y \in A, (x,y \in U\}$, adică mulţimea arcelor care intră în mulţimea A de vârfuri.

Prin $w^+(A)$ vom nota mulţimea arcelor care ies din mulţimea A de vârfuri.

Este justă afirmaţia: suma $f(u)$ pentru $u \in w^+(A)$ este egală cu suma $f(u)$ pentru arcele $u \in w\_(A)$. Această valoare comună se va nota f_b.

Algoritmul Ford-Fulkerson

Are loc următoarea **teoremă** (Ford-Fulkerson):

Pentru orice reţea de transport $G = (X, U, c)$ cu intrarea a şi ieşirea b valoarea maximă a fluxului la ieşire este egală cu capacitatea minimă a unei tăieturi, adică:

$$max\ f_b = min\ c(w\_(A)).$$

În baza acestei teoreme a fost elaborat următorul algoritm de determinare a fluxului maxim (Ford-Fulkerson) la ieşirea b a unei reţele de transport $G = (X, U, c)$, unde capacitatea c ia numai valori întregi:

1. Se defineşte fluxul iniţial având componente nule pe fiecare arc al reţelei, adică $f(u) = 0$ pentru orice arc $u \in U$;

2. Se determină lanţurile nesaturate de la a la b pe care fluxul poate fi mărit, prin următorul procedeu de etichetare:

a) Se marchează intrarea a cu [+];

b) Un vârf x fiind marcat, se va marca:

cu [+x] oricare vârf y nemarcat cu proprietatea că arcul $u = (x, y)$ este nesaturat, adică $f(u)<c(u)$;

cu [-x] - orice vârf y nemarcat cu proprietatea că arcul $u = (x, y)$ are un flux nenul, adică $f(u)>0$.

Dacă prin acest procedeu de marcare se etichetează ieşirea b, atunci fluxul f_b obţinut la pasul curent nu este maxim. Se va considera atunci un lanţ format din vârfurile etichetate (ale căror etichete au respectiv semnele + sau -) care uneşte pe a cu b şi care poate fi găsit uşor urmărind etichetele vârfurilor sale în sensul de la b către a.

Dacă acest lanţ este v, să notăm cu v^+ mulţimea arcelor (x, y), unde marcajul lui y are semnul "+", deci care sunt orientate în sensul de la a către b şi cu $v\_$ mulţimea arcelor (x, y), unde marcajul lui y are semnul "-", deci care sunt orientate în sensul de la b către a.

Determinăm cantitatea:

$e = min\ \{min(c(u) - f(u)), min\ f(u)\}.\ u \in v^+, u \in v\_$

Din modul de etichetare rezultă $e > 0$.

Vom mări cu e fluxul pe fiecare arc u din v^+ şi vom micşora cu e fluxul pe fiecare arc $u \in v\_$, obţinând la ieşire un flux egal cu f_b+e. Se repetă aplicarea pasului 2 cu fluxul nou obţinut.

Dacă prin acest procedeu de etichetare nu putem marca ieşirea b, fluxul f_b are o valoare maximă la ieşire, iar mulţimea arcelor care unesc vârfurile marcate cu vârfurile care nu au putut fi marcate constituie o tăietură de capacitate minimă (demonstraţi că se va ajunge în această situaţie după un număr finit de paşi).

3. SARCINA DE BAZĂ

1. Realizaţi procedura introducerii unei reţele de transport cu posibilităţi de verificare a corectitudinii datelor introduse;
2. În conformitate cu algoritmul Ford-Fulkerson elaboraţi procedura determinării fluxului maxim pentru valori întregi ale capacităţilor arcelor;
3. Elaboraţi programul care va permite îndeplinirea următoarelor deziderate:
   - introducerea reţelei de transport în memorie;
   - determinarea fluxului maxim pentru reţeaua concretă;
   - afișarea datelor obţinute (fluxul maxim şi fluxul fiecărui arc)

4. ÎNTREBĂRI DE CONTROL

1. Ce se numeşte reţea de transport?
2. Formulaţi noţiunile de flux şi capacitate.
3. Ce este un arc saturat? Dar un drum saturat?
4. Ce se numeşte flux complet? Ce este un flux maxim?
5. Definiţi noţiunea de tăietură.
6. Formulaţi teorema Ford-Fulkerson.
7. Descrieţi algoritmul de determinare a fluxului maxim.