Wydział: Fizyki i Informatyki Stosowanej
Kierunek: Informatyka Stosowana
Rok: 2020/21
Semsetr: letni
Typ: stacjonarne
Nr albumu: 401984
Data: 01.03.2021

Sprawozdanie - Laboratorium nr 1
Rozwiązywanie układu równań liniowych metodami bezpośrednimi

Spis treści

opracował:
Tomasz Szkaradek

1 Wstęp teoretyczny

Tematem laboratorium numer 1 były układy algebraicznych równań liniowych i rozwiązywanie ich metodami bezpośrednimi. Układy równań często zapisujemy w poniższej formie:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1x_4 = e_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2x_4 = e_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 + d_3x_4 = e_3 \\ a_4x_1 + b_4x_2 + c_4x_3 + d_4x_4 = e_4 \end{cases} \tag{1}$$

jednak o wiele wygodniejszą formą zapisu jest postać macierzowa.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$A \cdot x = b \tag{3}$$

Dzięki tej postaci możemy skorzystać z pewnych metod by rozwiązać układ np. metody Gaussa-Jordana.

1.1 Metoda Eliminacji Gaussa

Metoda eliminacji Gaussa służy do rozwiązywania układów równań pierwszego stopnia. Polega na sprowadzeniu macierzy A do postaci macierzy trójkątnej, czyli o uzyskanie zer pod przekątną (przyjęło się, że pod przekątną jednak można też nad przekątną) macierzy, ułatwieniem może też być utworzenie jedynki na przekątnej jednak to nie jest konieczne. Postępowanie przy rozwiązywaniu układu równań za pomocą eliminacji Gausa przedstawia się następująco

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & = & \cdots \\ a_{n1}^{(1)}x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n & = & b_1^{(n)} \end{cases} \tag{4}$$

w pierwszej iteracji odejmujemy od i tego wiersza (i = 2, 3, 4, $\cdots$, n) pierwszy wiersz przemnożony przez

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \tag{5}$$

następnie w drugiej iteracji odejmujemy od i tego wiersza (i=3,4,5, $\cdots$, n) drugi wiersz przemnożony przez

$$l_{i1} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \tag{6}$$

następnie dla trzeciej iteracji, czwartej i tak dalej aż dochodzimy do postaci macierzy górnotrójkątnej

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}^{(n)}x_1 & + & a_{12}^{(n)}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}^{(n)}x_n & = & b_1^{(n)} \\
0 & + & a_{22}^{(n)}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}^{(n)}x_n & = & b_2^{(n)} \\
\cdots & + & \cdots & + & \cdots & + & \cdots & = & \cdots \\
0 & + & 0 & + & \cdots & + & a_{nn}^{(n)}x_n & = & b_n^{(n)}
\end{array}$$

z której jesteśmy (w miarę prosto) policzyć wektor rozwiązań x

$$x_n = \frac{b_{(n)}^n}{x_{nn}^n} \tag{7}$$

$$x_i = \frac{b_i^n - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^n x_j}{x_{ij}^{(n)}} \tag{8}$$

1.2 Metoda Gaussa-Jordana

Metoda Gaussa-Jordana jest metodą dosyć żmudną, ale bez porównania mniej żmudną niż próba obliczania z wykorzystaniem dopełnień algebraicznych macierzy odwrotnych wymiaru 4*4 i większych. Opiera się ona na zastosowaniu sztuczek wykorzystywanych już w metodzie Gaussa, ale musimy doprowadzamy macierz $A^{(1)}$ (macierz w pierwszym kroku) do macierzy jednostkowej w kroku $A^{(n)}$. Przekształcamy macierz wejściową A do postaci macierzy jednostkowej operując na wierszach(dodając i skalując je) Z układu równań

$$A \cdot x = b \tag{9}$$

otrzymujemy

$$I \cdot x = b' \tag{10}$$

ostatecznie otrzymujemy od razu wektor niewiadomych x_i

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(n)} \\ b_2^{(n)} \\ \dots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix} \tag{11}$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu (1):

Jednym ze źródeł UARL mogą być równania różniczkowe. Dla prostego oscylatora harmonicznego z drugiej zasady dynamiki Newtona mamy:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t) \tag{12}$$

Przybliżając występującą po lewej stronie równania drugą pochodną położenia x_w chwili t ilorazem różnicowym:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t}{(\Delta t)^2} \tag{13}$$

i wprowadzając oznaczenia $\Delta t = h, x_1 = x(ih)$ otrzymujemy z równania (1) iteracyjny przepis pozwalający na wyznaczenie x_{i+1} w zależności od $x_i i x_{i+1}$:

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2)x_1 + xi - 1 = 0 \tag{14}$$

Do jednoznacznego rozwiązania potrzeba jeszcze informacji o wartościach $x_0 = 1, A = 1$ czyli maksymalne wychylenie z położenia równowagi i x_1 obliczając ze wzoru na początkowa wartość prędkości $(x_1 - x_0)/h = v_0$ dla $v_0 = 0$. Naszym problemem do rozwiązania było najpierw zapisać w postaci macierzowej równania dla N=100

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\omega^2h^2-2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ v_0h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

a następnie rozwiązanie układu metodą Gaussa-Jordana, narysować zależność wychylenia z położenia równowagi dla k/m= 1 i kroku całkowemu h= 0.1

2.2 Opis problemu (2):

W następnym zadaniu byliśmy zobligowani do rozwiązania UARL metodami bezpośrednimi a mianowicie wyliczyć wektor x z podanego niżej układ równań $A \cdot x = b$ gdzie:

$$a = \begin{bmatrix} 2q \cdot 10^{-4} & 1 & 6 & 9 & 10 \\ 2 \cdot 10^{-4} & 1 & 6 & 9 & 10 \\ 1 & 6 & 6 & 8 & 6 \\ 5 & 9 & 10 & 7 & 10 \\ 3 & 4 & 9 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \text{ oraz } b = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 9 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{16}$$

następnie musimy policzyć iloraz $c = A \cdot x$ warto zauważyć dla q=1 układ będzie sprzeczny a dla wartości q bliskich jedynce macierz A będzie bliska osobliwości i wystąpi problem niejednoznaczności Dlatego dla każdej kolejnej wartości q (od 1/5 do 5) obliczamy błąd średniokwadratowy tego iloczynu ($c = A \cdot x$) od wektora b według podanego wzoru

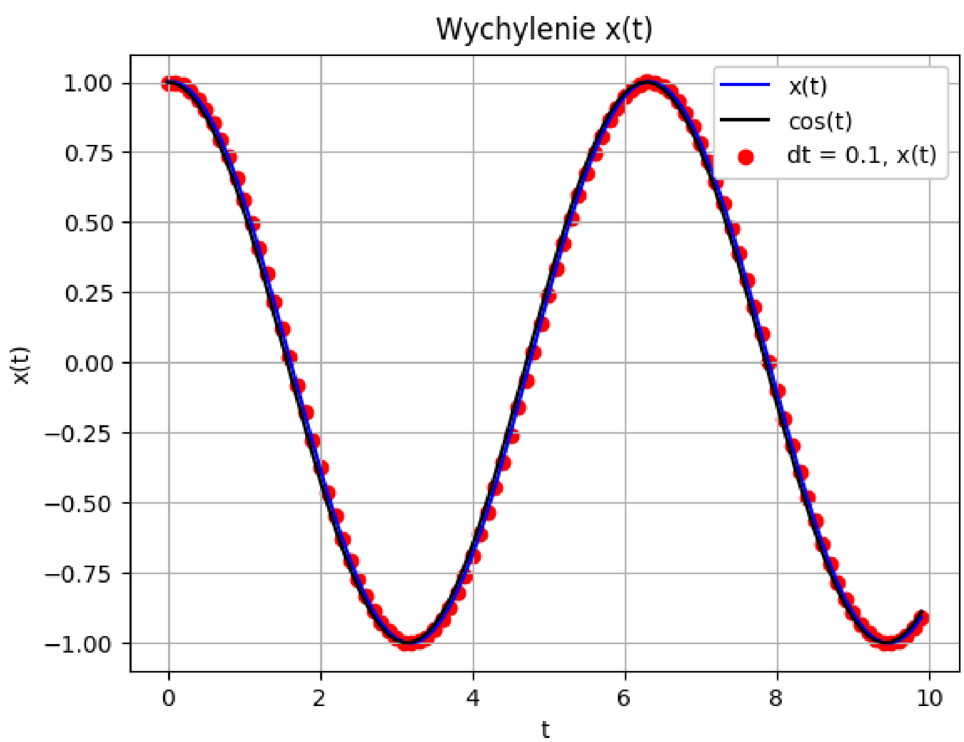
$$o(q) = \frac{1}{5}\sqrt{\sum_{i-1}^{5}(c_i - b_i)^2} \tag{17}$$

3 Wnioski

Dane wejściowe:

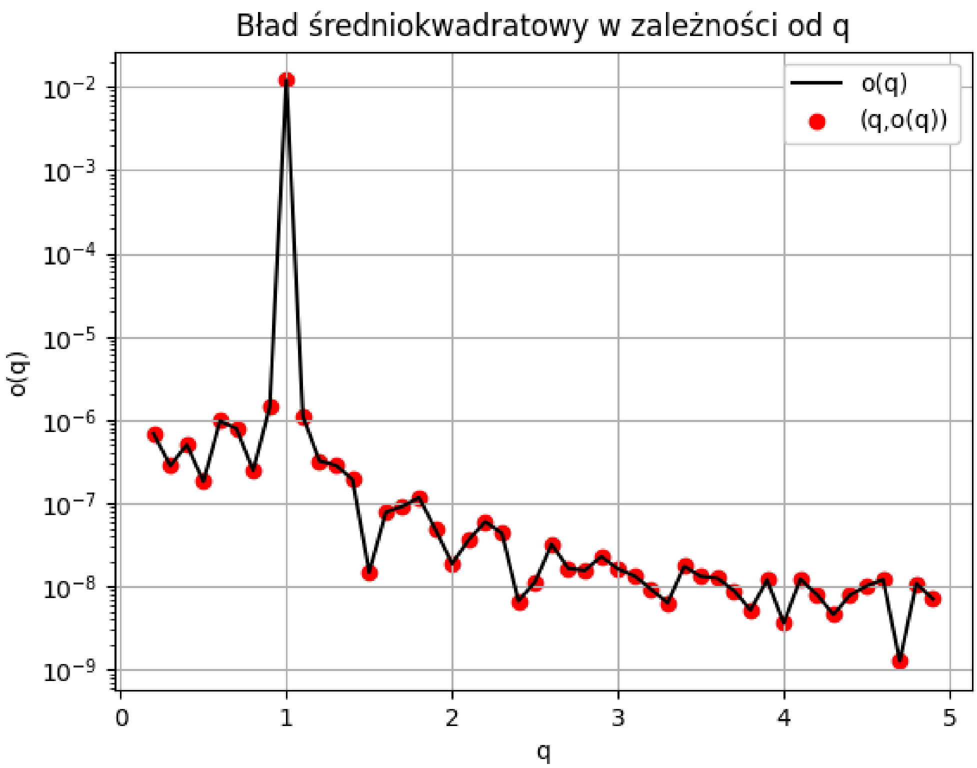
- A = 1
- $v_0 = 0$
- k/m = 1
- h = 0.1 krok całkowania
- N=100 wymiar

W pierwszym zadaniu skorzystaliśmy z funkcji ustaw() która ustawia nam wartości macierzy A tak jak w równaniu (16) następnie wywołujemy funkcje policz która rozwiązywania układów równań liniowych $A \cdot x = b$ metodą Gaussa-Jordana. Wyniki przedstawiliśmy na wykresie razem ze znanymi już zależnościami analitycznymi.



Rysunek 1: Wykres zależność x(t) od t

W drugim zadaniu wywołujemy funkcje mean_squared_error() dla zmiennej q w zakresie od 1/5 do 5 z krokiem 0.1 Funkcja ta ustawia nam macierz a, b i rozwiązuje równanie $A \cdot x = b$ przez co otrzymujemy wektor x który mnożymy przez kopie A(pierwotna macierz A) dzięki czemu otrzymujemy wartości c które porównujemy z b wykorzystując błąd średniokwadratowy. Licząc błąd w ten sposób dla q z zakresu (1/5,5) z krokiem 0.1 otrzymujemy wartości o(q) które nanosimy na wykres



Rysunek 2: Wykres o(q)