Wydział: Fizyki i Informatyki Stosowanej
Kierunek: Informatyka Stosowana
Rok: 2020/21
Semsetr: letni
Typ: stacjonarne
Nr albumu: 401984
Data: 10.05.2021

Sprawozdanie - Laboratorium nr 9
Aproksymacja Pade funkcji exp($-x^2$)

Spis treści

opracował:
Tomasz Szkaradek

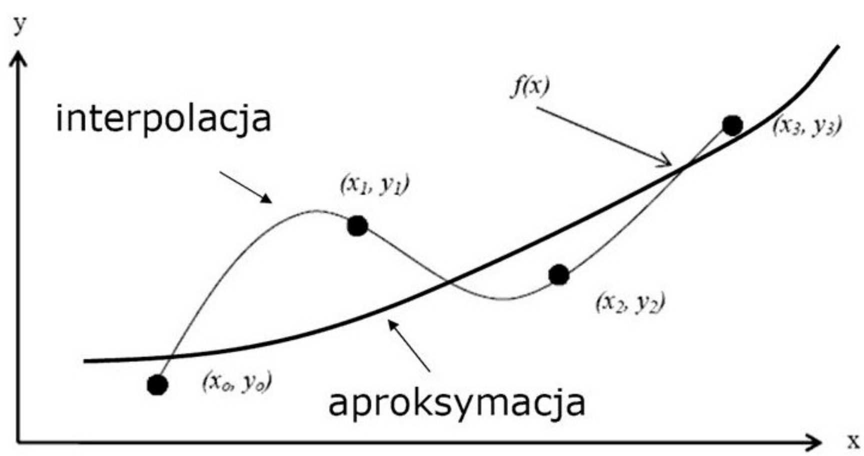
1 Wstęp teoretyczny

1.1 Aproksymacja funkcji

Aproksymacja - procedura zastępowania jednej funkcji (funkcja aproksymowana) inną funkcją (funkcja aproksymująca) w taki sposób, aby funkcje te niewiele się różniły w sensie określonej normy. Najczęściej aproksymację stosuje się do przedstawienia pewnej funkcji f(x) w innej, zazwyczaj prostszej postaci umożliwiającej efektywne rozwiązanie postawionego problemu. Z taką sytuacją mamy do czynienia na przykład :

- przy obliczaniu całek oznaczonych z funkcji, które nie dają się scałkować ściśle
- przy rozwiązywaniu równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych, kiedy poszukuje się niewiadomych funkcji
- przy opracowywaniu wyników pomiarów znanych tylko na dyskretnym zbiorze punktów (np. w meteorologii)

Aproksymacja może być dokonywana na różne sposoby i dlatego można poszukiwać aproksymacji optymalnej w ściśle określonym sensie.



Rysunek 1: Różnica miedzy interpolacją a aproksymacją

Aproksymacje można wykorzystać, gdy nie istnieje funkcja analityczna pozwalająca na wyznaczenie wartości dla dowolnego z jej argumentów, a jednocześnie wartości funkcji są dla pewnego zbioru jej argumentów znane. Aproksymacja funkcji powoduje pojawienie się błędów, zwanych błędami aproksymacji, jednak dużą jej zaletą w stosunku do interpolacji jest fakt, że aby dobrze przybliżyć funkcję, funkcja aproksymująca nie musi być wielomianu wysokiego stopnia. Jedną z najpopularniejszych miar błędu aproksymacji jest średni błąd kwadratowy. Istnieje wiele metod aproksymacji np.: aproksymacja liniowa, średniokwadratowa, jednostajna czy Padego.

1.2 Aproksymacja Padego

Aproksymacja Padego – metoda aproksymacji funkcji za pomocą funkcji wymiernych danego rzędu. Często daje lepszy wynik niż szereg Taylora dla tej samej liczby współczynników, kiedy funkcja posiada bieguny. Funkcję aproksymowaną przybliżamy funkcją wymierną tj. ilorazu dwóch wielomianów. Dla danej funkcji f i dwóch liczb naturalnych M, N $\in \mathbb{N}_0$, przybliżeniem Padégo rzędu (M, N) jest funkcja wymierna:

$$R_{N,M} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_Mx^M} \tag{1}$$

której pochodne równają się pochodnym f(x) do najwyższego możliwego rzędu:

$$f(0) = R(0)$$

$$f'(0) = R'(0)$$

$$f''(0) = R''(0)$$

$$f'''(0) = R'''(0)$$

$$\cdots = \cdots$$

$$f^{(M+N)}(0) = R^{(N+M)}(0)$$

Niech poszukiwane przybliżenie ma postać:

$$R_{N,M} = \frac{P_N(x)}{Q_M(x)} \tag{2}$$

gdzie:

$$P_N(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N \tag{3}$$

$$Q_M(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_Mx^M \tag{4}$$

przy czym $b_0 = 1$ oraz n = N + M
Należy znaleźć n+1 współczynników P_N oraz Q_M tak aby w $x_0 = 0$ funkcje aproksymowana i aproksymująca miały jak najwięcej równych pochodnych.
Dlatego musimy rozwinąć f(x) w szereg Maclaurina

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_ix^i \tag{5}$$

Przyjmijmy, ze N + M + 1 = n + 1, czyli tyle, ile wyrazów zawiera szereg Maclaurina funkcji f(x) do rzędu n.

Obliczamy błąd aproksymacji (w celu otrzymania zależności współczynniki a_i oraz b_i):

$$f(x) - R_{N,M} = \frac{(\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i)(\sum_{i=0}^{M} b_i x) - \sum_{i=0}^{N} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{M} b_i x^i} \tag{6}$$

Wykorzystujemy warunki z ciągłością pochodnych w x=0

$$f^{(m)}(x)|_{x=0} - R_{N,M}^{(m)}(x)|_{x=0} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \cdots, M+N \tag{7}$$

Powyższy warunek będzie spełniony, gdy licznik zapiszemy jako

$$(\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i)(\sum_{i=0}^{M} b_i x^i) - \sum_{i=0}^{N} a_i x^i = \sum_{j=1}^{\infty} d_{n+j} x^{n+j} \tag{8}$$

Dla warunku:

$$f(0) - R_{N,M} = 0 \tag{9}$$

dostajemy równanie

$$(b_0 + b_1 x + \cdots + b_M x^M)(c_0 + c_1 x + \cdots) = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N) \tag{10}$$

z którego wydobywamy zależności

$$a_0 = b_0 c_0$$
$$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0$$
$$a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0$$
$$\cdots = \cdots$$

i ostatecznie wzór ogólny

$$a_r = \sum_{j=0}^{r} = c_{r-j} b_j, \quad r = 0, 1, 2, \cdots, N \tag{11}$$

Wykorzystujemy też założenie o równości pochodnych (do rzędu N+M+1) co daje dodatkową zależność

$$\sum_{j=0}^{M} = c_{N+M-s-j} b_j = 0 \quad s = 0, 1, 2, \cdots, M-1 \tag{12}$$

Sposób postępowania:

1. Wyznaczamy współczynniki szeregu McLaurina. Numerycznie dokładnie – tylko przy użyciu liczb dualnych, ilorazy różnicowe są niedokładne. W niektórych przypadkach (rzadko) możliwe jest wykorzystanie wzoru analitycznego na pochodne.

2. Tworzymy układ równań, którego rozwiązanie to współczynniki b_i

$$\begin{bmatrix} c_{N-M+1} & c_{N-M+2} & \cdots & c_N \\ c_{N-M+2} & c_{N-M+3} & \cdots & c_{N+1} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ c_N & c_{N+1} & \cdots & c_{N+M-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{N+1} \\ -c_{N+1} \\ \vdots \\ -c_{N+M} \end{bmatrix} \tag{13}$$

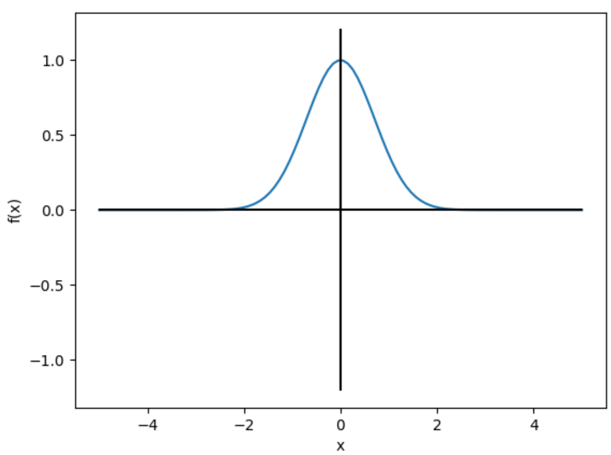
Teraz możemy wyznaczyć kolejno współczynniki a

$$a_i = \sum_{j=0}^{i} = c_{i-j} b_j, \quad i = 0, 1, \cdots, N \tag{14}$$

1.2.1 Aproksymacja Padego funkcji f(x)=exp($-x^2$)

Rozważmy taką funkcję:

$$exp(-x^2), [-5, 5] \tag{15}$$



Rysunek 2: Wykres funkcji f(x)=exp($-x^2$)

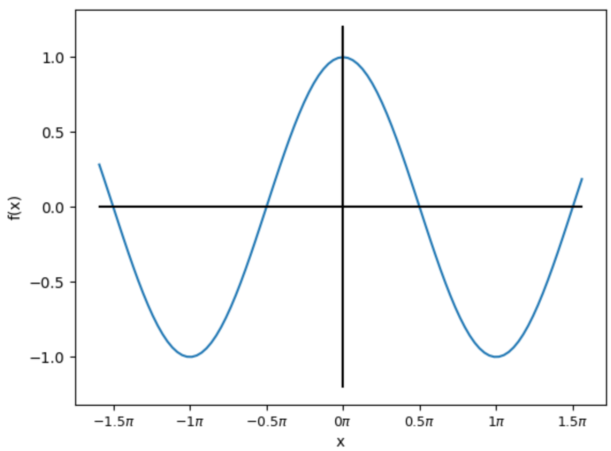
Funkcja jest parzysta, więc wielomiany w liczniku i w mianowniku $R_{N,M}$ będą miały niezerowe współczynniki tylko przy jednomianach o wykładnikach parzystych. Współczynniki szeregu Maclaurina (c_k) otrzymujemy bezpośrednio z rozwinięcia funkcji $\exp(-x^2)$

$$e^{-x^2} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^p}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty} c_k x^k \tag{16}$$

1.2.2 Aproksymacja Padego funkcji f(x)=cos(x)

Rozważmy taką funkcję:

$$cos(x), [-5, 5] \tag{17}$$



Rysunek 3: Wykres funkcji f(x)=cos(x)

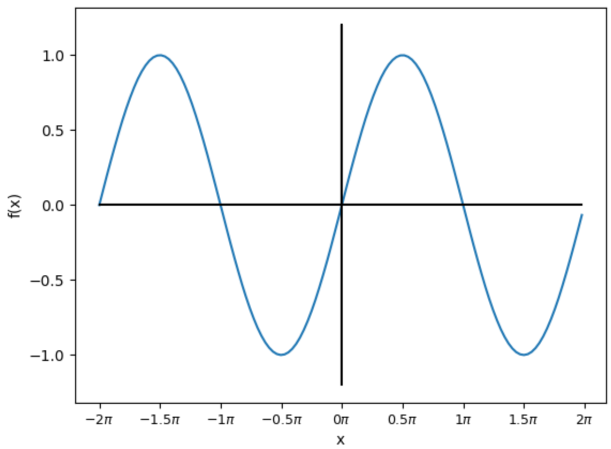
Funkcja jest parzysta, więc wielomiany w liczniku i w mianowniku $R_{N,M}$ będą miały niezerowe współczynniki tylko przy jednomianach o wykładnikach parzystych. Współczynniki szeregu Maclaurina (c_k) otrzymujemy bezpośrednio z rozwinięcia funkcji cos(x)

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{p=0}^{\infty} c_k x^k \tag{18}$$

1.2.3 Aproksymacja Padego funkcji f(x)=sin(x)

Rozważmy taką funkcję:

$$sin(x), [-2\pi, 2\pi] \tag{19}$$



Rysunek 4: Wykres funkcji f(x)=sin(x)

Funkcja aproksymowana jest nieparzysta – niezerowe współczynniki wielomianu P to te stojące przy jednomianach o wykładnikach nieparzystych. Współczynniki szeregu Maclaurina (c_k) otrzymujemy bezpośrednio z rozwinięcia funkcji sin(x)

$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{p=0}^{\infty} c_k x^k \tag{20}$$

2 Zadanie do wykonania

Naszym zadaniem podczas laboratoriów było dokonanie aproksymacji Padego na funkcji:

$$e^{-x^2} \tag{21}$$

przyjmując kolejno za (N,M) następujące wartości:
(2, 2), (4, 4), (6, 6), (2, 4), (2, 6), (2, 8).
Przybliżenie wykonywaliśmy przy pomocy funkcji wymierne

$$R_{N,M} = \frac{P_N(x)}{Q_M(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{j} b_i x^i} \tag{22}$$

Aby wyliczyć współczynniki a oraz b a w konsekwencji wartość funkcji aproksymującej wykonaliśmy następujące kroki:

- Wyznaczamy współczynniki szeregu Maclaurina tj. c_k bezpośrednio z rozwinięcia funkcji e^{-x^2} w szereg:

$$e^x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!} \tag{23}$$

$$e^{-x^2} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^p}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty} c_k x^k \tag{24}$$

  Wartości współczynników c_k zachowujemy w wektorze $\vec{c} = [c_0, c_1, \cdots, c_n]$

- Rozwiązujemy układ równań:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{y} \tag{25}$$

  gdzie macierz A oraz wektor y tworzymy według wzoru(13) podanego we wstępie teoretycznym.

$$A_{i,j} = c_{N-M+i+j+1}, \quad i, j = 0, 1, \cdots, M-1 \tag{26}$$

$$y_i = -c_{N+1+i}, \quad i, j = 0, 1, \cdots, M-1 \tag{27}$$

  Podczas rozwiązywania podanego wyżej równania korzystamy z pomocy funkcji linalg.inv (Python) z biblioteki numpy do odwracania macierzy.
  Następnie otrzymujemy wektor współczynników b dla wielomianu $Q_M(x)$ pamiętając że:

$$b_0 = 1 \text{ oraz } b_{M-i} = x_i \quad i = 0, 1, \cdots, M-1 \tag{28}$$

  Ostatecznie otrzymujemy $\vec{b} = [b_0, b_1, \cdots, b_n]$

- Wyznaczamy współczynniki wielomianu $P_N(x)$ zgodnie z wzorem:

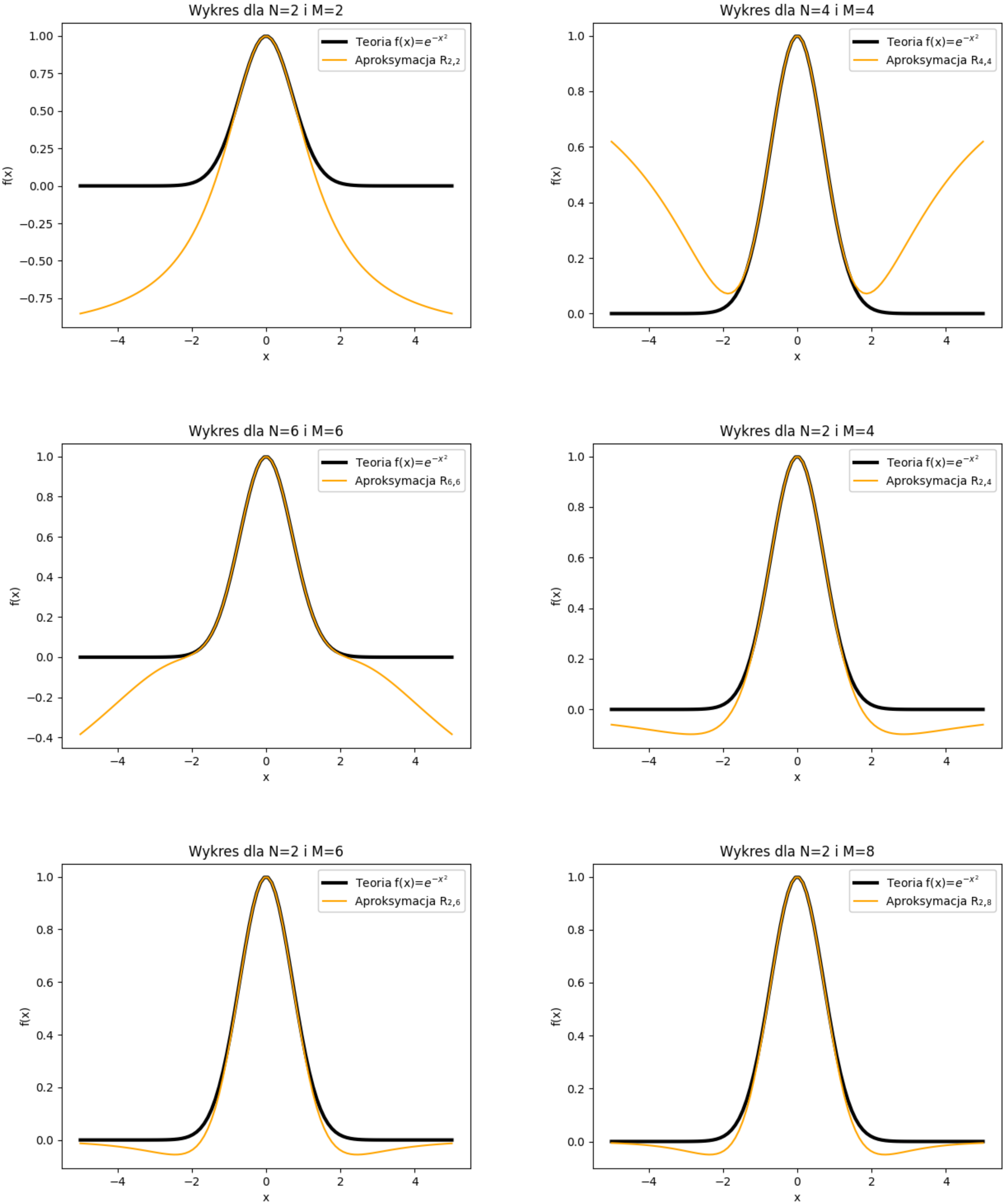
$$a_i = \sum_{j=0}^{i} = c_{i-j} b_j \tag{29}$$

  Dzięki czemu otrzymujemy wektor współczynników wielomianu $P_N(x)$ $\vec{a} = [a_0, a_1, \cdots, a_n]$

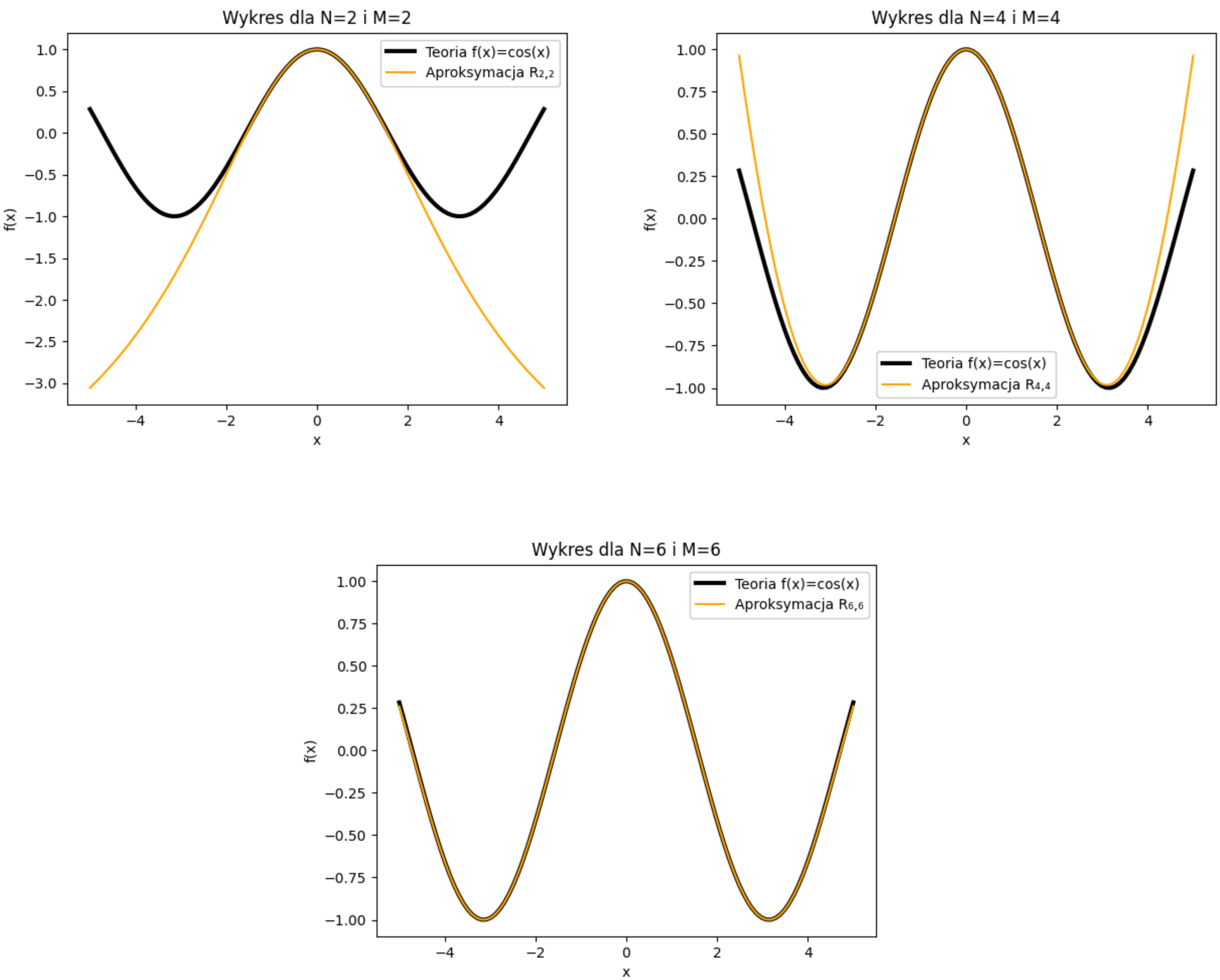
- Na sam koniec funkcją linespace tworzymy (n=100) punktów $x \in [-5, 5]$ a następnie wyliczmy dla nich wartość teoretyczna $f(x) = e^{-x^2}$. Następnie wyliczamy wartości wielomiany $R_{N,M}$ dla tych samych punktów x a na sam koniec nanosimy nasze dane na wykres za pomocą biblioteki matplotlib

3 Wyniki

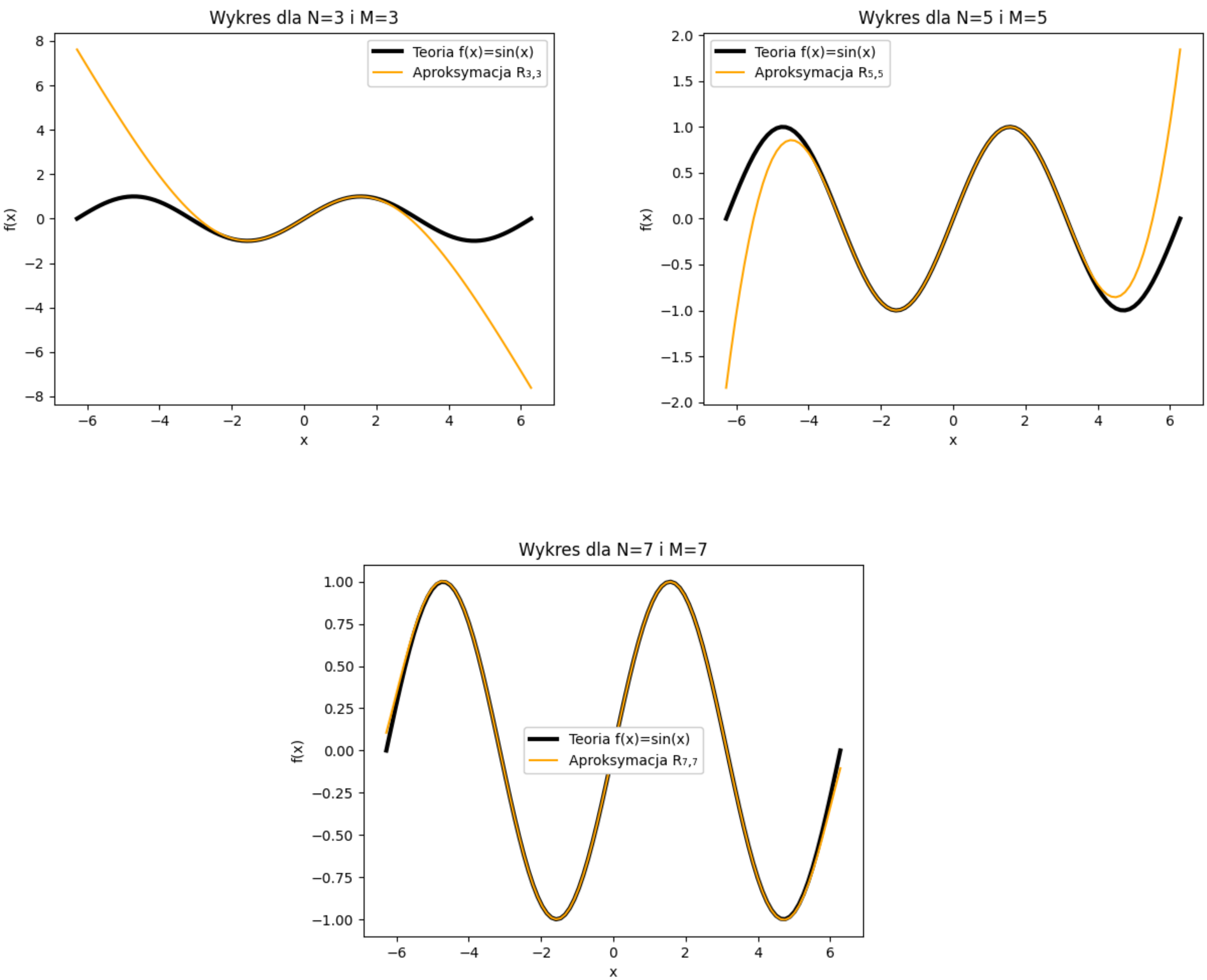
Cały program został napisany w języku Python. Za pomocą funkcji bibliotecznej matplotlib wyrysowaliśmy wykresy. Zostały one umieszczone poniżej na których widać, że im większe są stopnie wielomianów N oraz M, tym bardziej dokładne przybliżenie dostaniemy.



Rysunek 5: Wykresy dla funkcji f(x)=exp($-x^2$)



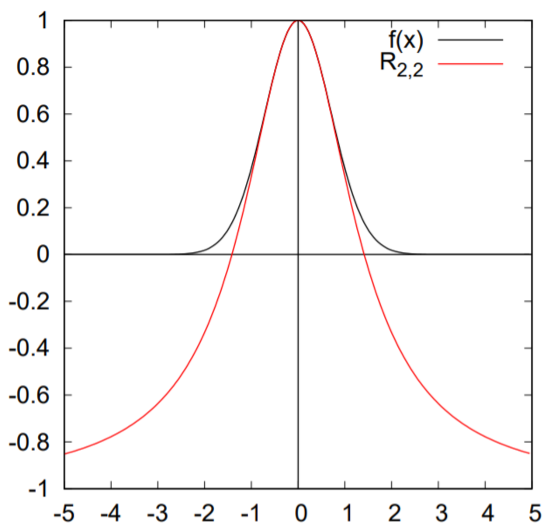
Rysunek 6: Wykresy dla funkcji f(x)=cos(x)

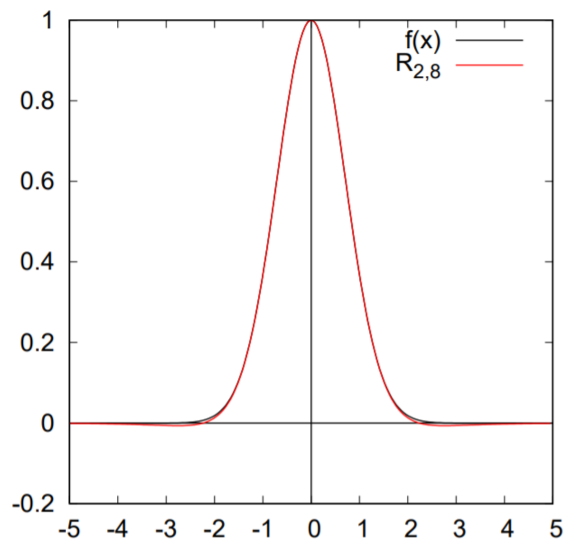


Rysunek 7: Wykresy dla funkcji f(x)=sin(x)

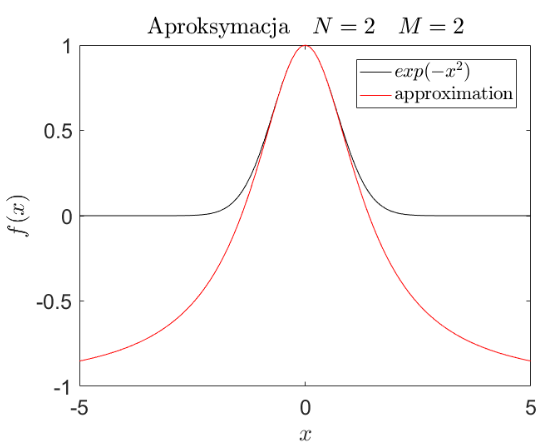
4 Podsumowanie

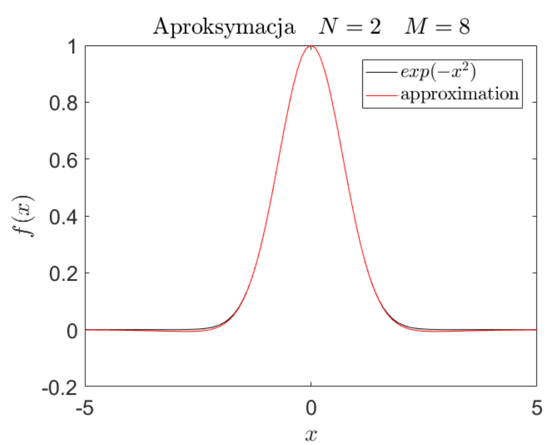
Metoda aproksymacji Pade pozwala na uzyskanie funkcji zbliżonej do funkcji oryginalnej przy jednym warunku: im większe są stopnie wielomianów N oraz M, tym bardziej dokładne przybliżenie dostaniemy.
Dla coraz wyższych N funkcja aproksymująca $R_{N,M}(x)$ coraz dokładniej aproksymuje funkcję f(x). Najdokładniejsza aproksymacja ma miejsce w pobliżu zera, a dla coraz dalszych wartości argumentów x funkcja aproksymująca staje się coraz mniej dokładna. Wyniki są również zgodne z przykładowymi podanymi w poleceniu zadania





oraz tymi podanego przez prowadzącego:





Jak można zauważyć na powyższych wykresach funkcja aproksymująca całkiem dokładnie oddaje funkcję aproksymowaną, zwłaszcza przy dobrym wyborze parametrów. Biorąc również pod uwagę krótki czas obliczeń, można wysnuć wniosek o skuteczności wybranej metody przy rozwiązywaniu tego typu problemu.
Na wykresach przedstawionych w wynikach wyraźnie widać, że dokładność wzrasta wraz z zwiększeniem N oraz M. Na Rysunku 6 dla funkcji f(x) = cos(x) dla N = 6, M = 6 oraz na Rysunku 7 dla funkcji f(x) = sin(x) dla N = 7, M = 7 można nawet stwierdzić, że przybliżenie oraz oryginał się pokrywają. Jak oczekiwano z założeń, zaletą takiego typu przybliżenia są mniejsze błędy niż w aproksymacji wielomianem stopnia N (otrzymanych np. z rozwinięć Taylora czy Maclaurina). Fakt, że aproksymacja niekoniecznie musi przechodzić przez punkty zadane węzłami, sprzyja kolejnym wykresom. Interpolacja nie ma sensu, gdy mamy do czynienia z jakąkolwiek możliwością występowania błędu np. pomiarowego.
Aproksymacja funkcji jest narzędziem przydatnym, gdy do analizowanych danych potrzebne jest ich przybliżenie za pomocą funkcji.
Aproksymacja wielomianowa pozwala na szybkie i dokładne wyznaczenie funkcji, gdy znamy jej wartości w danym zbiorze. Jej dużą zaletą jest fakt, że do przybliżenia wartości funkcji nie potrzebny jest wielomian wysokiego stopnia oraz fakt, że węzły mogą być równoodległe, a mimo to oszacowanie funkcji nie straci na dokładności.

5 Literatura

[1] Tomasz Chwiej, Aproksymacja
http://home.agh.edu.pl/ chwiej/mn/aproksymacja_1819.pdf

[2] Wikipedia, Aproksymacja
https://pl.wikipedia.org/wiki/Aproksymacja