Wydział: Fizyki i Informatyki Stosowanej
Kierunek: Informatyka Stosowana
Rok: 2020/21
Semsetr: letni
Typ: stacjonarne
Nr albumu: 401984
Data: 31.05.2021

Sprawozdanie - Laboratorium nr 12
Całkowanie numeryczne metodą Simpsona

Spis treści

opracował:
Tomasz Szkaradek

1 Wstęp teoretyczny

Całkowanie numeryczne – metoda numeryczna polegająca na przybliżonym obliczaniu całek oznaczonych. Termin kwadratura numeryczna, często po prostu kwadratura, jest synonimem całkowania numerycznego, w szczególności w odniesieniu do całek jednowymiarowych. Dwu- i wielowymiarowe całkowania nazywane są czasami kubaturami, choć nazwa kwadratura odnosi się również do całkowania w wyższych wymiarach. Proste metody całkowania numerycznego polegają na przybliżeniu całki za pomocą odpowiedniej sumy ważonej wartości całkowanej funkcji w kilku punktach. Aby uzyskać dokładniejsze przybliżenie dzieli się przedział całkowania na niewielkie fragmenty. Ostateczny wynik jest sumą oszacowań całek w poszczególnych podprzedziałach. Najczęściej przedział dzieli się na równe podprzedziały, ale bardziej wyszukane algorytmy potrafią dostosowywać krok do szybkości zmienności funkcji.

1.1 Metody Newtona-Cotesa

Są to metody obliczania wartości całek oznaczonych. Nazwa pochodzi od Isaaca Newtona i Rogera Cotesa. W tych metodach przyjmujemy, że wartości funkcji f są znane w równoodległych punkach x_i. W zależności od danej "podmetody" i znanych nam jeszcze innych wartości opisujących funkcję, możemy przybliżyć wartość całki oznaczonej.
Numerycznie całkę policzyć można z następującego wzoru:

$$S(f) = \sum_{k=0}^{N} A_k f(x_k), \quad x \in [a, b] \tag{1}$$

Powyższy wzór nosi nazwę kwadratury, a punkty $x_1, x_2, \cdots, x_n$ nazywamy węzłami kwadratury. Kwadraturę wyprowadza się ze wzoru na wielomian interpolacyjny Lagrange'a:

$$\varphi(x) = L_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \phi_k(x) F(x_k) \tag{2}$$

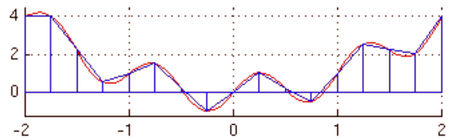
Współczynnik A_k wyraża się następującym wzorem:

$$A_k = h \frac{(-1)^{N-k}}{k!(N-k)!} \int_0^N \frac{t(t-1)\cdots(t-N)}{(t-k)} \tag{3}$$

gdzie:
$h = \dfrac{b-a}{N}$
$f_k = f(a + kh)$

1.2 Metoda trapezów

Metoda trapezów jest jedną z metod Newtona-Cotesa. Polega ona na przybliżaniu funkcji f funkcją liniową, na podprzedziałach, i obliczaniu pól powstałych w ten sposób trapezów.



Rysunek 1: Wizualizacja metody trapezów

Całkę można obliczyć więc w następujący sposób:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(f(x_i)+f(x_{i+1})), \tag{4}$$

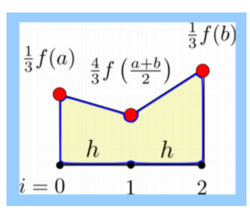
gdzie N to liczba podprzedziałów o długości $h = \frac{b-a}{N}$.

1.3 Metoda Simpsona

Metodą Simpsona – jest jedną z metod przybliżania wartości całki oznaczonej funkcji rzeczywistej. Metoda ma zastosowanie do funkcji stablicowanych w nieparzystej liczbie równo odległych punktów (wliczając końce przedziału całkowania). Metoda opiera się na przybliżaniu funkcji całkowanej przez interpolację wielomianem drugiego stopnia. Funkcja interpolowana jest wielomianem Lagrange'a który ma 3 węzły. Dlatego:

$$h = \frac{b-a}{2} \quad A_0 = \frac{1}{3}h, \quad A_1 = \frac{1}{12}h, \quad A_2 = \frac{1}{3}h \tag{5}$$

$$S(f) = \frac{1}{3}h(f_0 + 4f_1 + f_2) \tag{6}$$



Rysunek 2: Wizualizacja metody Simpsona

Posługując się metodą Simpsona musimy liczyć sie z błędem wyliczanym ze wzoru na błąd wzoru interpolacyjnego dostajemy

$$E(f) = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi) \tag{7}$$

2 Zadanie do wykonania

Naszym zadaniem w trakcie laboratoriów było obliczenie podanej niżej całki metoda Simpsona oraz korzystając z rozwinięcia funkcji w szereg

$$I = \int_0^\pi x^m sin(kx)dx \tag{8}$$

Pierwsza cześć naszych laboratoriów to rozwiniecie naszej funkcji w szereg. Na początku zaczęliśmy od rozwinięcia funkcji sin(x) w szereg:

$$sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \tag{9}$$

Wstawiając powyższe rozwinięcie pod całkę i wykonując całkowanie każdego elementu szeregu dostajemy:

$$I = \int_a^b x^m sin(kx)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{(kx)^{2i+1}}{(2i+1)!}x^m = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{(kx)^{2i+m+2}}{k^{m+1}(2i+1)!(2i+m+2)}\Bigg|_a^b \tag{10}$$

Na podstawie otrzymanych danych wykonaliśmy wykresy zależności wartości sumy w kolejnych iteracji od 1 do 30 oraz moduł różnicy pomiędzy wartością obliczoną a dokładną $|C - I|$ gdzie:
I jest wartością dokładną całki,
C jest wartością całki obliczoną numerycznie.
Aby to uczynić potrzebujemy współczynników m i k oraz dokładna wartość I

- m = 0, k = 1 (I = 2)
- m = 1, k = 1 (I = π)
- m = 5, k = 5 (I = 56.363569)

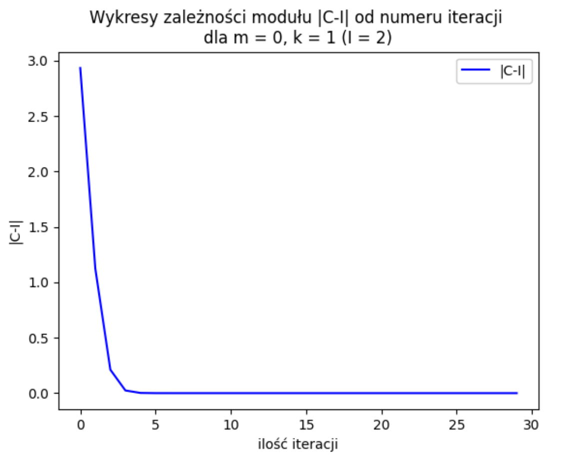
W drugim etapie mieliśmy obliczyć wartość całki metodą Simpsona opisaną we wstępie teoretycznym dla następującej liczby węzłów n = 2p + 1 = 11, 21, 51, 101, 201 oraz poniższych przypadków:

- m = 0, k = 1 (I = 2)
- m = 1, k = 1 (I =π)
- m = 5, k = 5 (I = 56.363569)

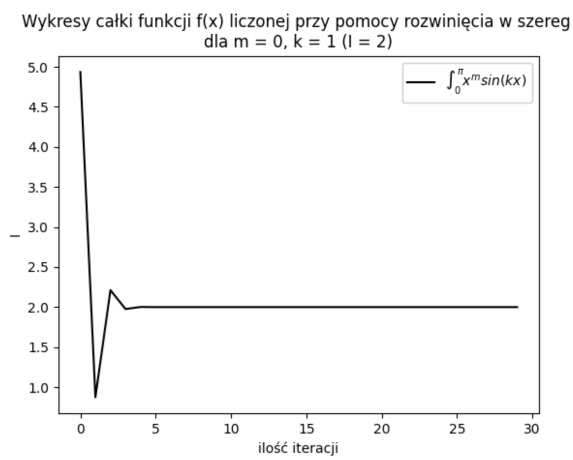
W sprawozdaniu sporządziliśmy odpowiednie wykresy zależności $|C - I|$ od ilości węzłów.

3 Wyniki

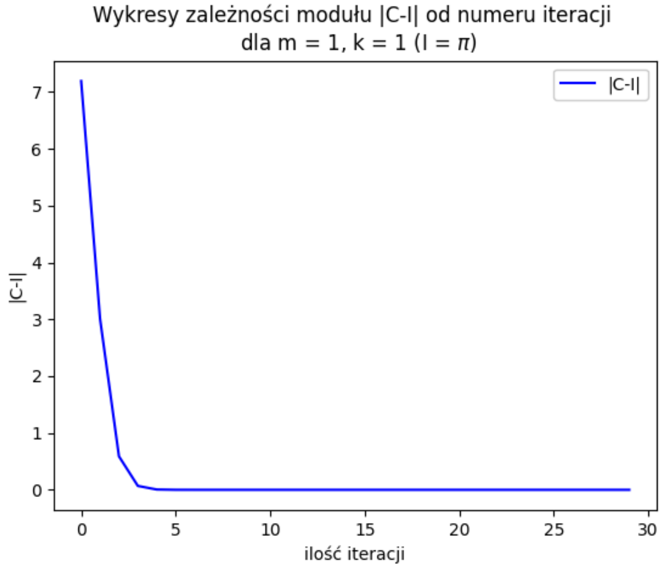
Cały program został napisany w języku Python.



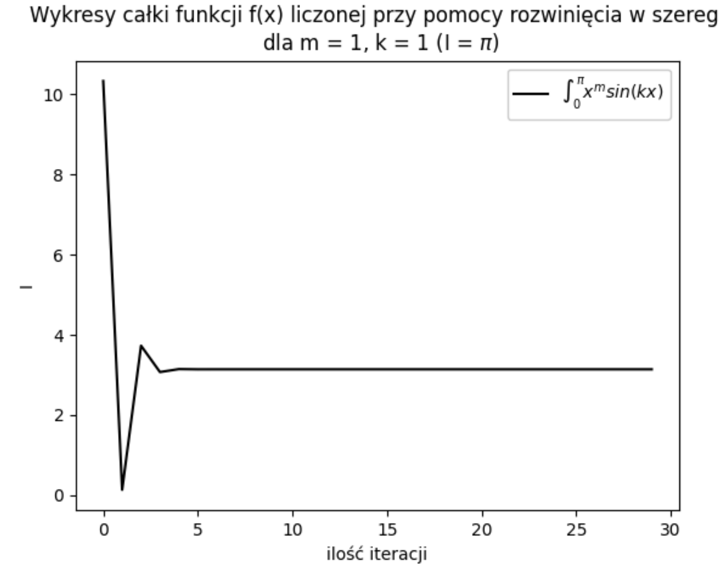
Rysunek 3: Wykres zależności $|C – I|$ od ilości wyrazów dla m = 0, k = 1 (I = 2)



Rysunek 4: Wykres wartości całki obliczonej za pomocą rozwinięcia w szereg dla m = 0, k = 1 (I = 2)

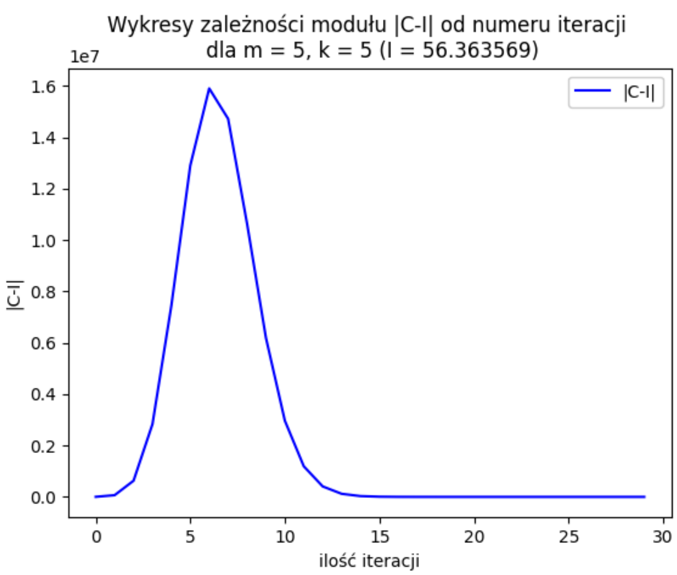


(a) Wykres $|C–I|$ od ilości iteracji

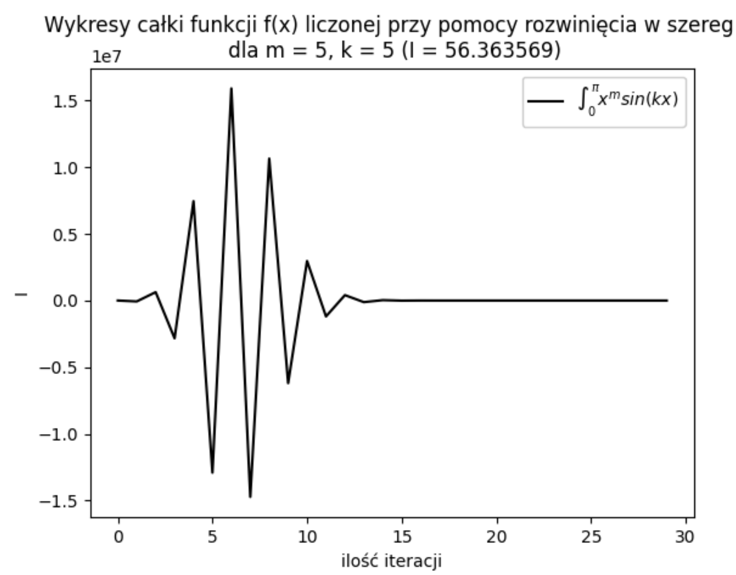


(b) Wykres $|C–I|$ od ilości iteracji

Rysunek 5: Wykresy dla m = 1 k = 1 (I = π)

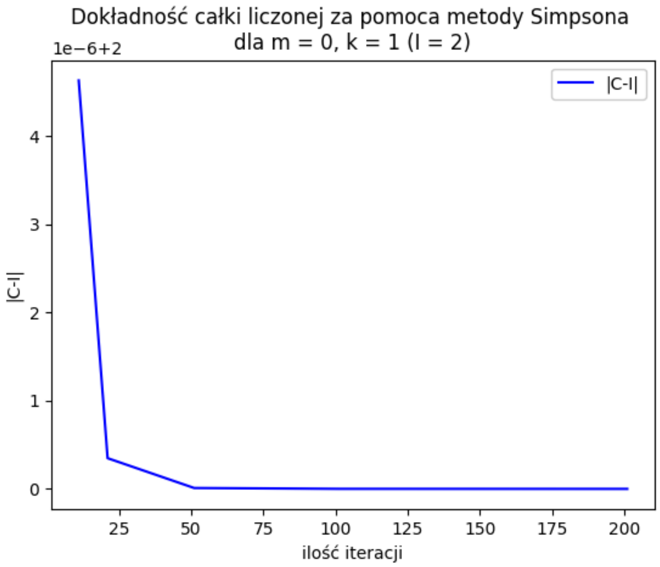


(a) Wykres $|C–I|$ od ilości iteracji

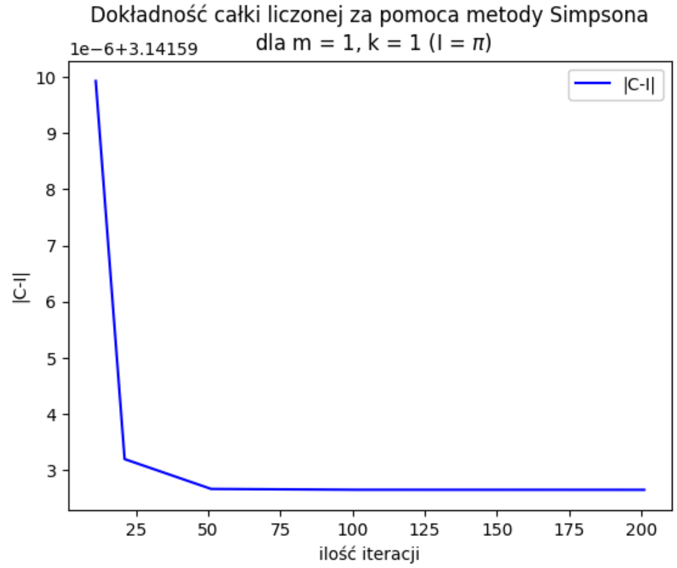


(b) Wykres wartości całki od k

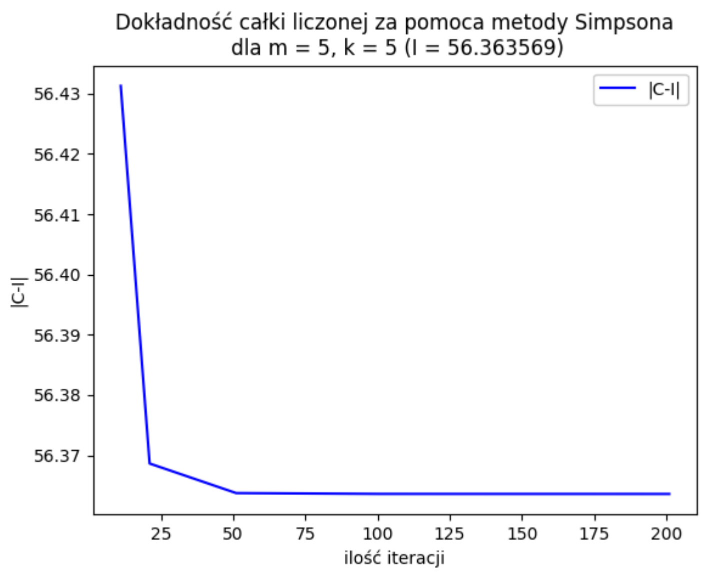
Rysunek 6: Wykresy dla m = 5 k = 5 (I = 56.363569)



(a) Wykres $|C{-}I|$ od ilości iteracji dla m = 0 k = 1



(b) Wykres $|C{-}I|$ od ilości iteracji dla m = 1 k = 1



(a) Wykres $|C{-}I|$ od ilości iteracji dla m = 5 k = 5

4 Podsumowanie

Podsumowując można powiedzieć iż dzięki metodzie Simpsona która jest stosunkowo prosta możemy szybko obliczyć daną całek oznaczoną.
Jak widać dla Wykresu 3 obliczone przybliżenie jest równe dokładnej wartości (z dokładnością do 6 miejsc po przecinku) po 8 iteracjach.
Dla przypadku 5a) dzieje się to po 9 iteracjach, a dla przypadku 6a) po 26 iteracjach dochodzimy do dokładności do 5 miejsc po przecinku. Przybliżenie dla pierwszych dwóch przypadków jest bardzo szybkie. Zauważyć można pewne skoki oraz oscylujące wokół dokładnego wyniku na otrzymanych wykresach. Najlepiej widać to w przypadku 6. W przypadkach 7a), 7b) oraz 7c) możemy zauważyć, że największy wzrost przybliżenia obserwujemy do 21 węzła. Potem im dokładniejsze przybliżenie mamy tym wolniej dochodzimy do dokładnego wyniku. Dla przypadków 7a) oraz 7b) po 51 węźle obliczona wartość w ogóle równała się wartości rzeczywistej. Ogólny wniosek w zadaniu jest taki, że metoda Simpsona działa bardzo dobrze nawet dla niewielkiej (dobrze już nawet dla 21 węzłów) ilości węzłów, oczywiście zwiększając ich ilość można zwiększyć dokładność obliczeń. Metoda ta jest szybka, a jej implementacja jest stosunkowo łatwa Przy rozwijaniu funkcji w szereg dla kolejnych iteracji funkcja zmierza do punktu zbieżności.Dodatkowo biorąc pod uwagę krótki czas obliczeń, można wysnuć wniosek o dużej skuteczności wybranej metody w rozwiązywaniu postawionego problemu.

5 Literatura

[1] Tomasz Chwiej, Całkowanie numeryczne przy użyciu kwadratur
http://home.agh.edu.pl/ chwiej/mn/calkowanie_1819.pdf

[2] Wikipedia, Metody Newtona-Cotesa
https://www.wikipedia.com/pl/Metody_Newtona-Cotesa