Wydział: Fizyki i Informatyki Stosowanej
Kierunek: Informatyka Stosowana
Rok: 2020/21
Semsetr: letni
Typ: stacjonarne
Nr albumu: 401984
Data: 08.03.2021

Sprawozdanie - Laboratorium nr 2
Rozwiązywanie UARL metodami bezpośrednimi

Spis treści

opracował:
Tomasz Szkaradek

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Metoda LU

Metoda LU (lower – dolny, upper górny) – metoda rozwiązywania układu równań liniowych. Nazwa pochodzi od użytych w tej metodzie macierzy trójkątnych, tj. L dolnotrójkątnej i U górnotrójkątnej. Proces rozkładania macierzy na macierz L oraz U nazywamy dekompozycją. Dekompozycja LU polega na zamianie macierzy A na jej odpowiednik, złożony z dwóch macierzy trójkątnych L i U. Metoda pozwala także na szybkie wyliczenie macierzy odwrotnej oraz wyznacznika macierzy. Aby rozwiązać taki układ równań gdzie wektor x jest niewiadoma postępujemy z następujący sposób

$$A \cdot x = b$$

aby obliczyć macierz L i U posługujemy się Metoda Doolittle'a: Z definicji iloczynu macierzy można wyznaczyć następujące wzory na elementy macierzy L i U

$$l_{i,j} = \frac{1}{u_{j,j}} \cdot (A_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{i,k} \cdot u_{k,j}), \quad u_{i,j} = A_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k} \cdot u_{k,j}$$

$$A = L \cdot U$$

gdzie

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$A = L \cdot U \cdot x = b$$

łatwo możemy policzyć tymczasowy wektor z

$$L \cdot z = b$$

następnie z drogiego równania wyliczmy wektor x

$$U \cdot x = z$$

1.2 Obliczanie wyznacznika macierzy

Posługując się metoda LU założyliśmy ze macierz A można zapisać jako $A = L \cdot U$ oraz pamiętając fakt z algebry iż $det(A) = det(L \cdot U) \Rightarrow det(A) = det(L) \cdot det(U)$.Będąc w posiadaniu macierzy L oraz macierzy U jesteśmy w łatwy sposób wyznaczyć wyznacznik macierzy A. Na pierwszy rzut oka można uznać że zamiast jednego współczynnika wyliczamy 2 jednak pamiętajmy że wyznacznik macierzy trójkątnej jest iloczynem liczb na diagonalnej a w przypadku L samych jedynek

$$det(A) = det(L \cdot U) \Rightarrow det(A) = det(L) \cdot det(U)$$

$$det(L) = 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1, \quad det(U) = u_{1,1} \cdot u_{2,2} \cdots u_{n,n}$$

$$det(A) = det(U)$$

1.3 Odwracanie macierzy

Rozkład LU jest również przydatny do odwracania macierzy. By to zrobić, trzeba rozwiązać N układów równań z wektorami wyrazów wolnych postaci:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots \quad b_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Następnie po rozwiązaniu n układów otrzymujemy n wektorów c które tworzą kolumny macierzy odwrotnej A

1.4 Wskaźnik uwarunkowania

Wskaźnik uwarunkowania określa, w jakim stopniu błąd reprezentacji numerycznej danych wejściowych danego problemu wpływa na błąd wyniku. Wskaźnik uwarunkowania definiuje się jako maksymalny stosunek błędu względnego rozwiązania do błędu względnego danych. Problem o niskim wskaźniku uwarunkowania nazywamy dobrze uwarunkowanym, zaś problemy o wysokim wskaźniku uwarunkowania – źle uwarunkowanymi. Dane o zbyt dużym wskaźniku uwarunkowania nie bardzo się nadają do rozwiązywania numerycznego, ponieważ sam błąd, który wynika z numerycznej reprezentacji liczb, wprowadza nieproporcjonalnie duży błąd w wynikach obliczeń
Wskaźnik wyrażamy wzorem:

$$\kappa(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$$

gdzie $||A||$ to norma macierzy A.Jak obliczyć normę? Aby ja wyliczyć musimy znaleźć max z sum wartości bezwzględnych kolumn

$$||A||_{1,\infty} = max|a_{i,j}|, gdzie \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

1.5 Schemat Hornera

Schemat Hornera jest algorytmem służącym do bardzo szybkiego obliczania wartości wielomianu. Redukuje on ilość mnożeń do minimum. Przeanalizujmy następujący wielomian:

$$W(x) = 3x^3 + 3x^2 - 2x + 11$$

Zapisany schematem Hornera:

$$W(x) = ((3x + 3)x - 2) + 11$$

a więc gdy nasz wielomian jest tej postaci:

$$W(x) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i x^i = (\cdots((c_{N-1}x + c_{N-2})x + c_{N-3})x + \cdots + c_1)x + c_0$$

możemy znacząco zredukować liczbę wykonanych mnożeń

2 Zadanie do wykonania

Naszym zadaniem w trakcie laboratoriów było wykonanie różnych operacji na macierzy A, oraz rozwiązać układ równań$A \cdot x = b$ w naszym przypadku postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{N-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{N-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & x_N^{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

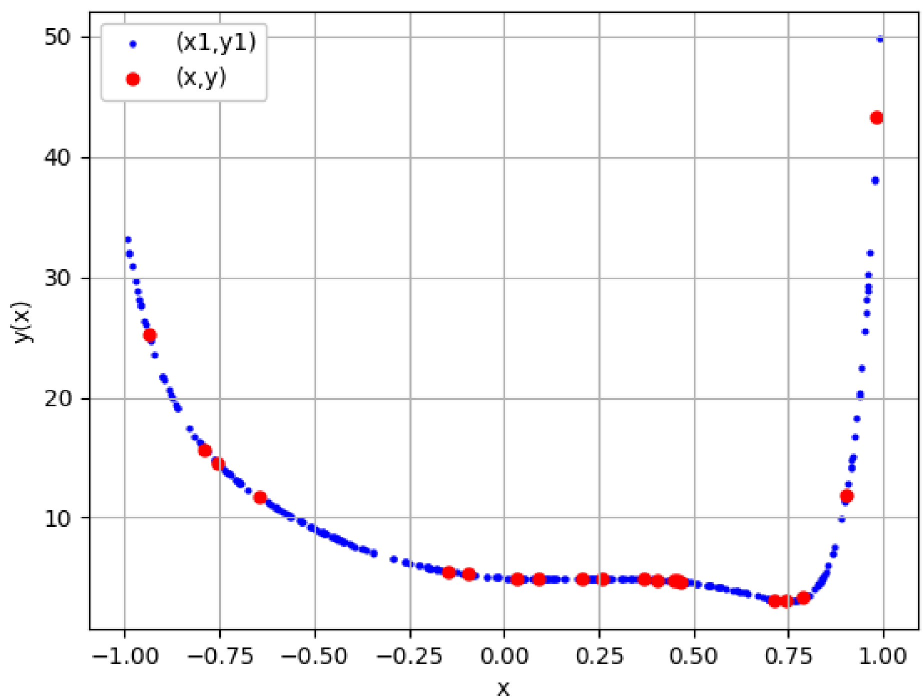
gdzie A to to tak zwana macierz Vandermonde'a Podczas laboratoriów wykonywaliśmy następując kroki:

1. Losujemy wektor x (z którego tworzymy macierz A),oraz c oba o wymiarze [N],gdzie N=20. Do tego zadania skorzystaliśmy z funkcji uniform w przedziale od -1 do 1
2. Następnym krokiem było obliczenie ilorazu macierzy A oraz wektora x korzystając z schematu Hornera
3. Kolejno zakładając iż znamy macierz A oraz wektor wyrazów wolnych y ale nie znamy wektora c1 rozwiązujemy układ równań (3) korzystając z metody LU
4. Tworzymy teraz wektor x1 w przedziale od (-1,1) o wymiarze [N1], gdzie N=200 korzystając ze schematu Hornera o otrzymujemy y1 o wymiarze [N1]
5. Rysujemy wykres punktowy y(x) który wyliczyliśmy w kroku 2 oraz y1(x) który policzyliśmy w korku 4 odpowiednio je zaznaczając
6. Następnym zadaniem było obliczenie macierzy odwrotnej uzyskaliśmy ją poprzez rozwiązywanie n układów równań z kolejnymi wektorami bazy kanonicznej, otrzymując w taki sposób odpowiednie kolumny macierzy odwrotnej. Do rozwiązywania wszystkich układów została użyta jedna dekompozycja.

7. Obliczalnie wyznacznika macierzy było kolejnym zadaniem do rozwiązania Posiadając dekompozycje macierzy A było to stosunkowo proste ponieważ uzyskujemy go poprzez pomnożenie wartości na diagonali macierzy U
8. Pozostaje kwestia wyliczenia wskaźnika uwarunkowania macierzy uzyskujemy go poprzez pomnożenie normy macierz A oraz nomy macierzy do niej odwrotnej, innymi słowy znaleźliśmy kolumnę w której suma bezwzględna poszczególnych komórek macierzy A jest największa a następnie mnożymy tą sumę razy maksymalną sumę bezwzględną komórek w danej kolumnie macierzy odwrotnej A

3 Wyniki

Wyniki programu przedstawiają się następująco:



Rysunek 1: Wykres zależność y(x) od x

Wyznacznik macierzy:

$$det(A) = -3.658225385675001e - 66$$

Współczynnik uwarunkowania macierzy:

$$\kappa(A) = 35369100588094.5$$

4 Podsumowanie

Metoda LU pozwala uzyskać wyznacznik macierzy, odwrócić ją, obliczyć wskaźnik uwarunkowania macierzy czy rozwiązać układ równań w łatwy sposób. Liczenie wyznacznika macierzy A jest trywialne, gdy posiadamy rozkład LU jest on równy wyznacznikowi macierzy trójkątnej U, czyli iloczynowi elementów na przekątnej macierzy U.Wskaźnik uwarunkowania określa wrażliwość wyniku na zaburzenia danych. Zadanie dobrze uwarunkowane, czyli z niskim wskaźnikiem powoduje iż niewielkie zmiany danych powodują niewielkie zmiany wyniku.W naszym przypadku ten wskaźnik najczęściej jest rzędu 13 $\kappa(A) = 35369100588094.5$. Tak jak pokazuje nam wskaźnik uwarunkowania, nasza macierz jest niestabilna i rozwiązanie obarczone jest błędem obliczeń komputerowych.