Wydział: Fizyki i Informatyki Stosowanej
Kierunek: Informatyka Stosowana
Rok: 2020/21
Semsetr: letni
Typ: stacjonarne
Nr albumu: 401984
Data: 19.04.2021

Sprawozdanie - Laboratorium nr 7
Interpolacja Newtona z optymalizacją położeń węzłów

Spis treści

opracował:
Tomasz Szkaradek

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Interpolacja

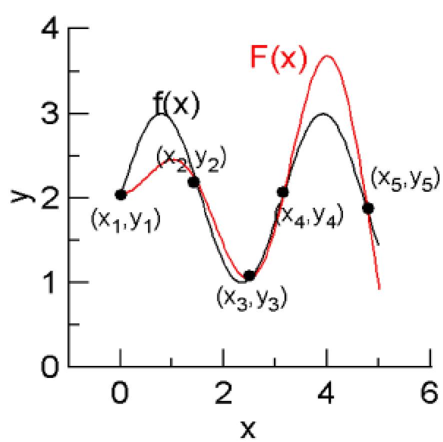
Interpolacja jest to metoda numeryczna, która polega na wyznaczaniu w danym przedziale tzw. funkcji interpolacyjnej F, która przyjmuje w nim z góry zadane wartości w ustalonych punktach nazywanych węzłami. Stosowana jest zarówno w metodach numerycznych (np. przy obliczaniu całek ze skomplikowanych funkcji), jak i w naukach doświadczalnych przy budowaniu funkcji na podstawie danych pomiarowych w skończonej liczbie punktów. Niech będzie dany przedział [a,b] $\subset R^1$ oraz skończony ciąg n + 1 różnych punktów

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \tag{1}$$

Wyrazy $x_0, \ldots, x_n$ powyższego ciągu nazywane będą węzłami.
Wartości funkcji y=f(x) w tych punktach to:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= y_0, \\ f(x_1) &= y_1, \\ &\cdots, \\ f(x_n) &= y_n \end{aligned}$$

Problem interpolacji sprowadza się do znalezienia funkcji interpolującej F(x), która w węzłach przyjmuje wartości takie jak funkcja y=f(x) czyli funkcja interpolowana (której postać funkcyjna może nie być nawet znana).



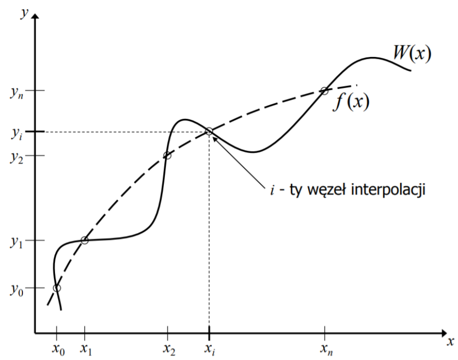
Rysunek 1: Przykładowa interpolacja F(x)

Interpolacja wykorzystywana jest do zagęszczania tablic i efektywniejszego rozwiązywania równań nieliniowych dla stablicowanych wartości funkcji z określonymi położeniami węzłów, w postaci wielomianowej do lokalnego przybliżania dowolnych funkcji, co ułatwia rozwiązywanie modeli fizycznych, a także do całkowania numerycznego i modelowania powierzchni w dwóch i trzech wymiarach.

1.2 Interpolacja Newtona

Istnieje dokładnie jeden wielomian interpolacyjny stopnia co najwyżej n(n $\geqslant$ 0), który w punktach $x_0, \ldots, x_n$ przyjmuje wartości $y_0, \ldots, y_n$ Szukamy wielomianu interpolacyjnego w postaci:

$$W_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{2}$$



Rysunek 2: Przykładowa interpolacja F(x)

Korzystając z faktu, że znamy wartości tego wielomianu w n+1 punktach możemy wielomian interpolacyjny zapisać przy użyciu formuły opisującej n-ty iloraz różnicowy:

$$W_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)\omega_0(x) + f(x_0, x_1, x_2)\omega_1(x) + \cdots + f(x_0, x_1, \cdots, x_n)\omega_{n-1}(x)$$

gdzie:

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

możemy zapisać jako:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(x_0) \cdot \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i) \tag{3}$$

gdzie: $f^{(j)}(x_0)$ to iloraz rzędu j liczony dla węzła x_0, a x_i są położeniami węzłów. Aby wykorzystać poważysz wzór musimy wiedzieć jak obliczyć iloraz różnicowy którego wartości wyznaczamy zgodnie z poniższą zasadą

Funkcja f(x) przyjmuje w punktach x_i gdzie $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ wartości $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \cdots f(x_n)$ oraz $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ Ilorazy różnicowe definiujemy następująco:

1. 1-go rzędu
$$f(x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \tag{4}$$

2. 2-go rzędu
$$f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_{n-1}, x_n) - f(x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}} \tag{5}$$

3. n-go rzędu
$$f(x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+n}) - f(x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i} \tag{6}$$

Zazwyczaj tworzy się tablicę z ilorazami różnicowymi(łatwe do zaprogramowania na komputerze)

y_0	0	0	0	0	0
y_1	$f_{x_0}^{(1)}$	0	0	0	0
y_2	$f_{x_1}^{(1)}$	$f_{x_0}^{(2)}$	0	0	0
y_3	$f_{x_2}^{(1)}$	$f_{x_1}^{(2)}$	$f_{x_0}^{(3)}$	0	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\ddots$	0
y_n	$f_{x_{n-1}}^{(1)}$	$f_{x_{n-2}}^{(2)}$	$f_{x_{n-3}}^{(3)}$	0	$f_{x_0}^{(n)}$

$\Rightarrow$

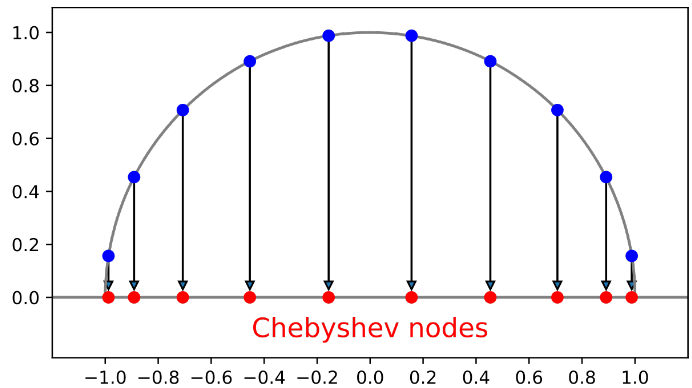
$f_{0,0}$	0	0	0	0	0
$f_{1,0}$	$f_{1,1}$	0	0	0	0
$f_{2,0}$	$f_{2,1}$	$f_{2,2}$	0	0	0
$f_{3,0}$	$f_{3,1}$	$f_{3,2}$	$f_{3,3}$	0	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\ddots$	0
$f_{n,0}$	$f_{n,1}$	$f_{n,2}$	$f_{n,3}$	0	$f_{n,n}$

Tabela 1: Ogólna przykładowa tabela

gdzie: zerowa kolumna (y_i) to wartości funkcji w węzłach, a elementy $f_{j,j}$ to ilorazy różnicowe rzędu j występujące we wzorze (3).
Interpolacja wielomianowa nie jest zbyt efektywna, ponieważ interpolacja wielomianami wysokich stopni przy stałych odległościach węzłów prowadzi do poważnych odchyleń od interpolowanej funkcji zwłaszcza na końcach przedziału. Interpolacja na środkowych częściach przedziału jest natomiast bardzo dobra i użyteczna

1.3 Wielomian Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa – układ wielomianów ortogonalnych tworzący bazę przestrzeni wielomianów; nazwa pochodzi od nazwiska Pafnutija Czebyszowa.



Rysunek 3: Przykładowe węzły Czebyszowa

Wielomiany Czebyszewa są określone wzorem:

$$\begin{aligned} &T_n(x) = \cos[n \cdot arccos(x)], \\ &x \in [-1, 1]. \end{aligned} \tag{7}$$

W postaci rekurencyjnej:

$$\begin{aligned} &T_0(x) = 1 \\ &T_1(x) = \cos[n \cdot arccos(x)] = x \\ &T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), n \geqslant 2. \end{aligned} \tag{8}$$

Z tak zapisanych zależności można wyliczyć zera wielomianów, które są następującej postaci:

$$x_m = cos(\pi \frac{2m+1}{2n+2}), m = 0, 1, 2, ..., n. \tag{9}$$

Po przeskalowaniu przedziału $[-1, 1]$ na $[a, b]$ otrzymujemy:

$$x_m = \frac{1}{2}[(b-a)cos(\pi \frac{2m+1}{2n+2}) + (b+a)] \tag{10}$$

W analizie numerycznej węzły Czebyszewa są specyficznymi rzeczywistymi liczbami algebraicznymi, mianowicie pierwiastkami wielomianów Czebyszewa pierwszego rodzaju. Są często używane jako węzły w interpolacji wielomianowej, ponieważ wynikowy wielomian interpolacyjny minimalizuje efekt Rungego, czyli duże oscylacje wielomianu interpolacyjnego przy krańcach przedziału. Fakt, że miejsca zerowe wielomianów Czebyszewa zagęszczają się ku krańcom przedziału, pozwala lepiej związać wielomian zapobiegając naturalnym dla wielomianów wysokiego rzędu oscylacjom.

1.4 Efekt Rungego

Dokładność interpolacji zależy od dobranych do niej węzłów oraz ich ilości. Pozornie wydaje się, że większa liczba węzłów zawsze zwiększa dokładność. W przypadku węzłów równo odległych już tak nie jest - Efektu Rungego.

Jest to pogorszenie jakości interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenia liczby jej węzłów. Początkowo ze wzrostem liczby węzłów n przybliżenie poprawia się, jednak po dalszym wzroście n, zaczyna się pogarszać, co jest szczególnie widoczne na końcach przedziałów.

Takie zachowanie się wielomianu interpolującego jest zjawiskiem typowym dla interpolacji za pomocą wielomianów wysokich stopni przy stałych odległościach węzłów. Występuje ono również, jeśli interpolowana funkcja jest nieciągła albo odbiega znacząco od funkcji gładkiej.

Jednym ze sposobów które niwelują ten efekt jest wykorzystanie zer z wielomianów Czebyszewa zamiast węzłami równoodległymi.

2 Zadanie do wykonania

Na zajęciach mieliśmy samodzielnie zaimplementować procedurę znajdującą wielomian interpolacyjny Newtona $W_n(x)$ dla funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{11}$$

w przedziale x∈[5, 5] wybieramy n+1 węzłów. W pierwszej części zadania węzły sa równo odległe od siebie (wykorzystanie linspace). Natomiast w drugiej części węzły wybieramy jako zera wielomianu Czebyszewa tj:

$$x_m = \frac{1}{2}[(b-a)cos(\pi\frac{2m+1}{2n+2}) + (b+a)] \tag{12}$$

Po wybraniu węzłów obliczamy wartości funkcji dla tych argumentów Następnie uzupełniamy tabelkę (1) posługując się napisaną przez na funkcją w Pythonie

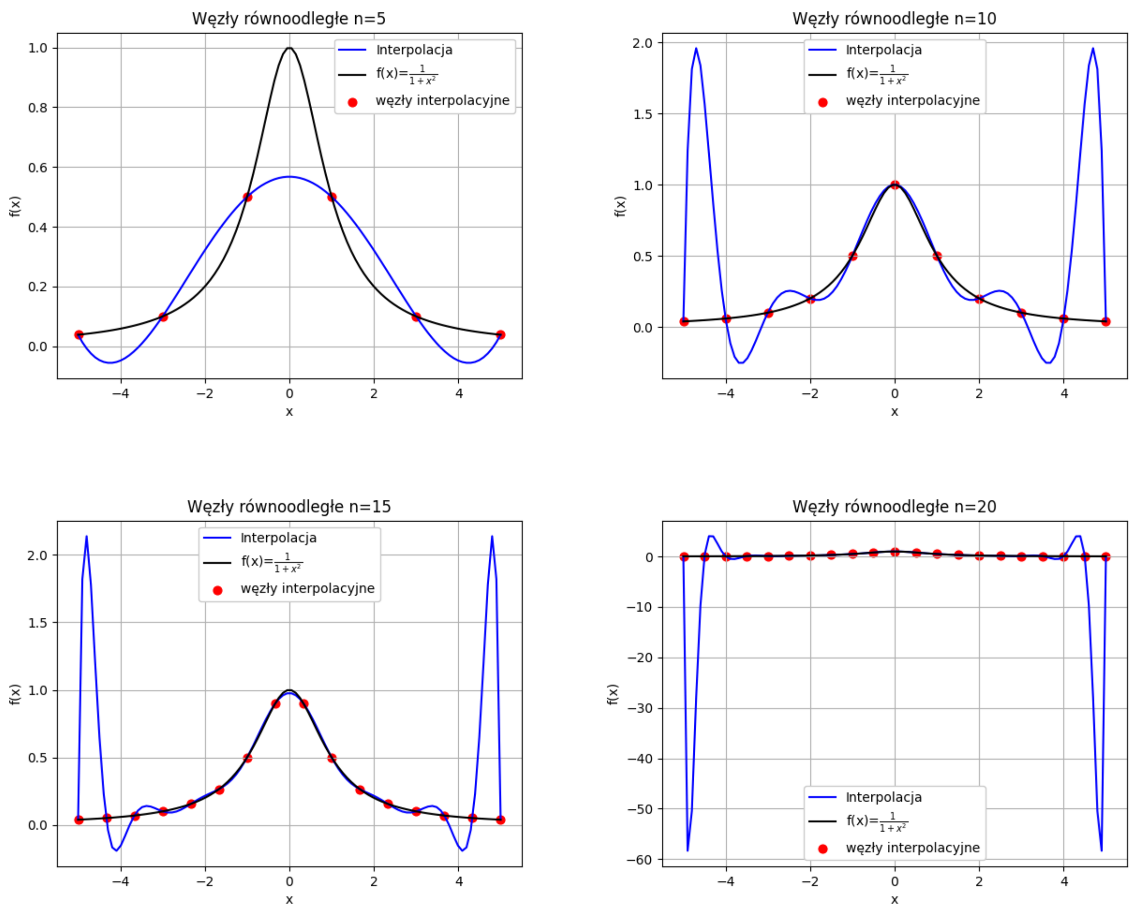
```
import numpy as np

def matrix_derivative(n,x):
    f=np.zeros((n+1,n+1))
    for i in range(n+1):
        f[i,0]=fun(x[i])
    for j in range(1,n+1):
        for i in range(j,n+1):
            f[i,j]=(f[i,j-1]-f[i-1,j-1])/(x[i]-x[i-j])
    return f
```

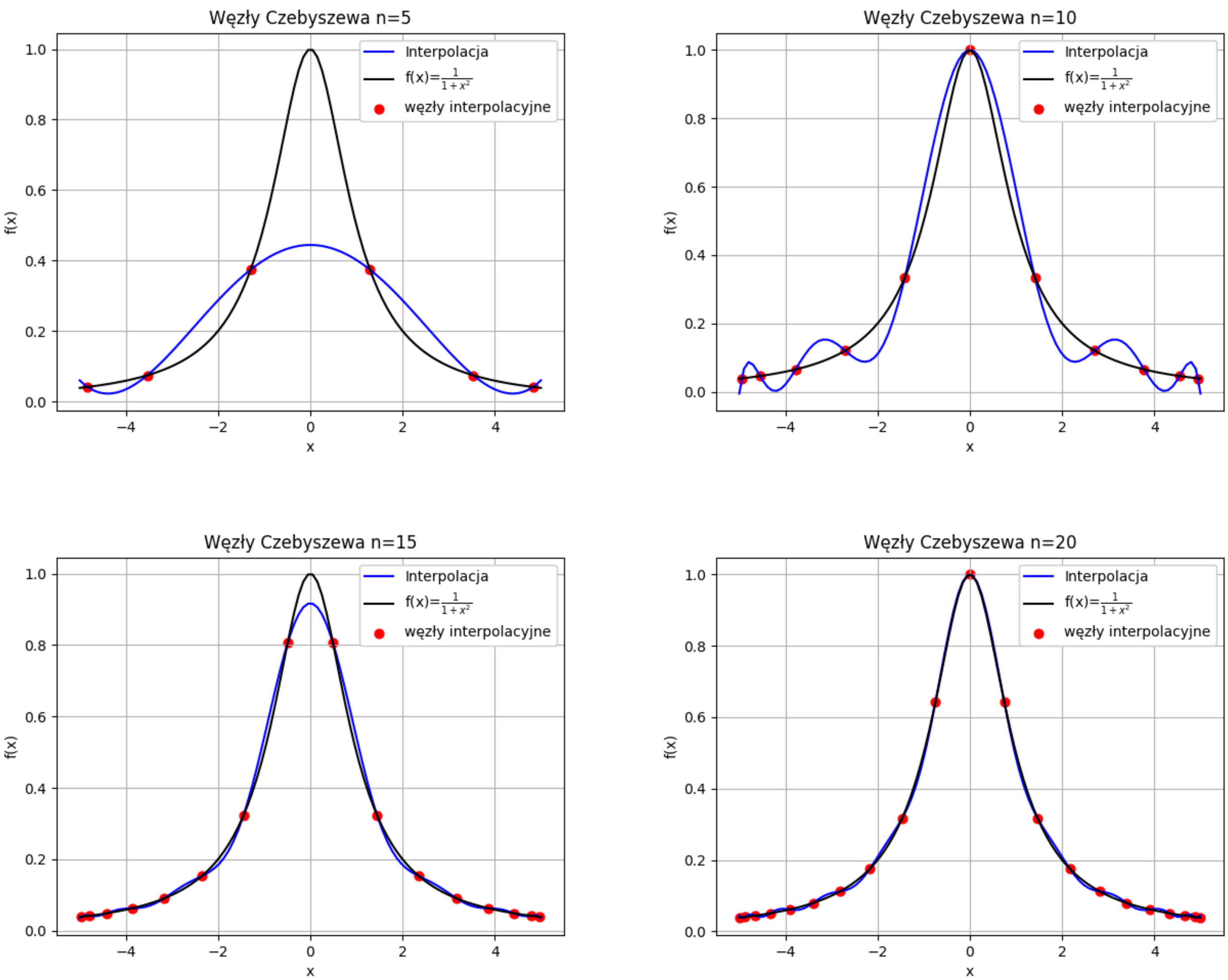
Następnie należało napisać program z zaimplementowaną metodą wyznaczającą przybliżone wartość funkcji w położeniu międzywęzłowym wykorzystując wielomianu interpolacyjnego Newtona. Argumentami dla tej funkcji miały być wektor węzłów stopień wielomianu

oraz wektor argumentów dla którego obliczamy wartości
Następnie korzystając z powyższego programu należało przeprowadzić interpolacje funkcji dla n = 5, 10, 15, 20 równoodległych węzłów oraz sporządzić wykresy funkcji oraz wielomianu interpolacyjnego na jednym rysunku, dla każdego n. Kolejną częścią zadania było zoptymalizowanie położeń węzłów poprzez określenie ich jako zer wielomianów Czebyszewa. Dla tak zoptymalizowanych węzłów należało ponownie przeprowadzić interpolację, dla tych samych wartości n co poprzednio, a następnie sporządzić wykresy funkcji f(x) oraz $W_n(x)$.

3 Wyniki

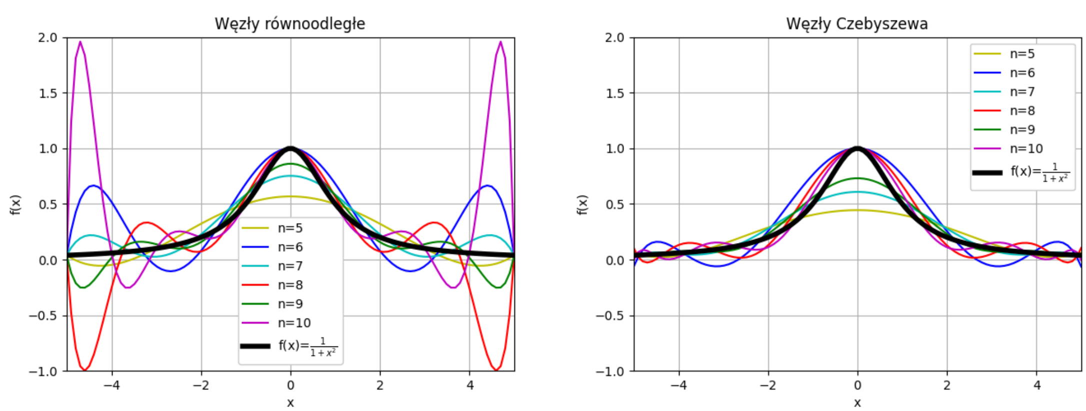
Cały program został napisany w języku Python.




Węzły Czebyszewa n=5
Węzły Czebyszewa n=10
Węzły Czebyszewa n=15
Węzły Czebyszewa n=20
Interpolacja
$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$
węzły interpolacyjne
f(x)
x

4 Podsumowanie

Wartości wielomianu interpolacyjnego dla coraz gęściej rozłożonych punktów coraz bardziej zbliżają się do wartości interpolowanej funkcji jednak z coraz bardziej widoczna oscylacją na krańcach. Dodatkowo dla optymalnego rozłożenia węzłów (w zerach wielomianu Czebyszewa) otrzymane wyniki znacznie lepiej odzwierciedlają funkcję.
Dla 20 węzłów i przy zastosowaniu optymalizacji, wartości wielomianu interpolacyjnego prawie idealnie pokrywają się z funkcją. W przypadku węzłów równoodległych sytuacja poprawiła się jedynie na środku przedziału, na końcach dochodziło do coraz większych oscylacji (skoków wzmacniają się przy wzroście liczby węzłów), które sprawiają, że oszacowanie funkcji nie jest już tak dokładne. Jest to tzw. efekt Rungego czyli pogorszenie jakości interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenia liczby jej węzłów. Nie widzimy tego efektu w drugiej wersji. Przy węzłach wyznaczonych przez miejsca zerowe wielomianu Czebyszewa które zagęszczają się na krańcach przedziału, możemy dokładniej oszacować postać szukanej funkcji. Węzłów jest zdecydowanie więcej przy krańcach przedziału, dzięki czemu nie dochodzi do sytuacji z pierwszej wersji. Dzięki zastosowaniu optymalizacji rozłożenia węzłów czas potrzebny do wykonania obliczeń jest krótki, z czego można wysnuć wniosek że wybrana metoda jest skuteczna w rozwiązaniu postawionego problemu.



Rysunek 6: Porównanie interpolacji Newtona dla kolejnych węzłów

Podsumowując, mała liczba węzłów w metodzie Newtona nie przybliża funkcji wystarczająco dobrze i nie jest opłacalne jej stosowanie. Jeśli jest taka możliwość, powinno się także stosować optymalizację dla ich położeń, np. stosując wielomian Czebyszewa dla jak najlepszej interpolacji funkcji.

5 Literatura

[1] Tomasz Chwiej, Interpolacja
http://home.agh.edu.pl/˜chwiej/mn/interpolacja_2021.pdf

[2] Kwmimkm, Interpolacja funkcji
http://dydaktyka.polsl.pl/kwmimkm/mnwyklad2.pdf

[3] Wikipedia. Wielomiany Czebyszewa
https://pl.wikipedia.org/wiki/Wielomiany_Czebyszewa