**Wydział:** Fizyki i Informatyki Stosowanej
**Kierunek:** Informatyka Stosowana
**Rok:** 2020/21
**Semsetr**: letni
**Typ:** stacjonarne
**Nr albumu:** 401984
**Data:** 17.05.2021

# Sprawozdanie - Laboratorium nr 10
# Minimalizacja wartości funkcji metodą interpolacji kwadratowej Powella

## Spis treści



*opracował:*
*Tomasz Szkaradek*

# 1 Wstęp teoretyczny

## 1.1 Optymalizacja

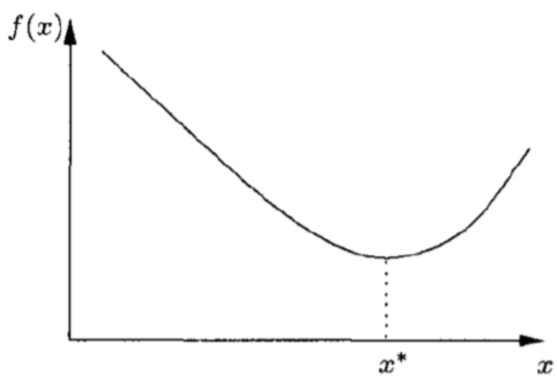
Optymalizacja – metoda wyznaczania najlepszego (optymalnego) rozwiązania (poszukiwanie ekstremum funkcji) z punktu widzenia określonego kryterium (wskaźnika) jakości (np. kosztu, drogi, wydajności). Zadaniem optymalizacji jest poszukiwanie minimum lub maksimum funkcji. Problem ten w praktyce polega na poszukiwaniu minimum, czyli punktu dla którego zachodzi:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{1}$$

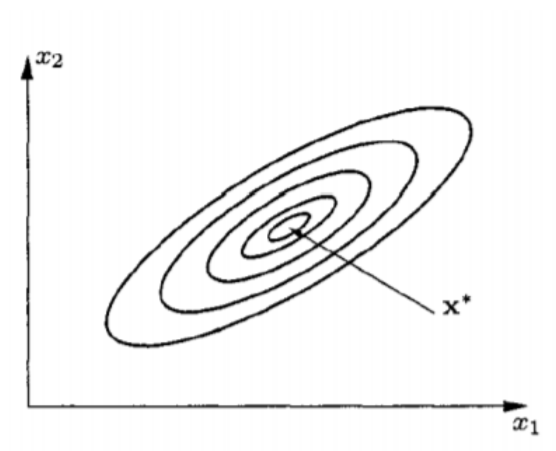
$$min f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x}) \tag{2}$$

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T. \tag{3}$$

z odpowiednimi warunkami:
$g_j(\mathbf{x}) \leqslant 0, j = 1, 2, ..., m$
$h_j(\mathbf{x}), j = 1, 2, ..., r$
gdzie funkcje $f(x), g(x), h(x)$ są funkcjami sklejanymi oraz $f(x)$ jest tzw. funkcja celu, której minimum szukamy
funkcje $g(x), h(x)$ określają warunki, jakie musi spełniać rozwiązanie, ograniczają przestrzeń dopuszczalnych rozwiązań.



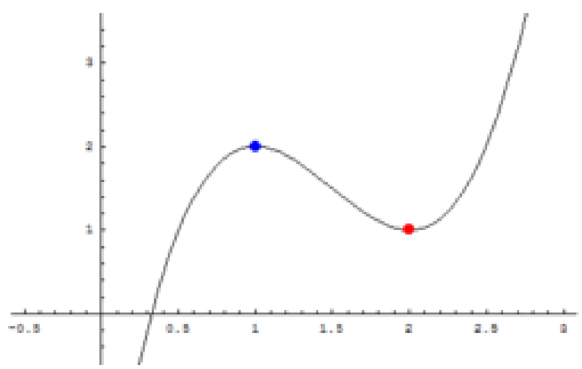

(a) Przykład jednowymiarowy




(b) Przykład dwuwymiarowy

## 1.2 Ekstrumum funkcji

Słowo extremum pochodzi z łaciny i oznacza skraj. Są dwa rodzaje ekstremów funkcji minimum i maksimum.
Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in R$ maximum lokalne (maximum lokalne właściwe), jeżeli istnieje $\delta$ >0 taka, że dla każdego $x \in S(x_0, \delta)$ zachodzi nierówność $f(x) \leqslant (x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$. Innymi słowy wartość funkcji w punkcie $x_0$ w pewnym obszarze przyjmuje największa wartość
Przypomnienie, że symbol $S(x_0, \delta)$ oznacza sąsiedztwo punktu $x_0$ o promieniu dodatnim $\delta$, czyli $S(x_0, \delta) = O(x_0, \delta)$ Tak samo mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in R$ minimum lokalne (minimum lokalne właściwe), jeżeli istnieje $\delta$ >0 taka, że dla każdego $x \in S(x_0, \delta)$ zachodzi nierówność $f(x) \geqslant f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.




(a) ekstrema $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

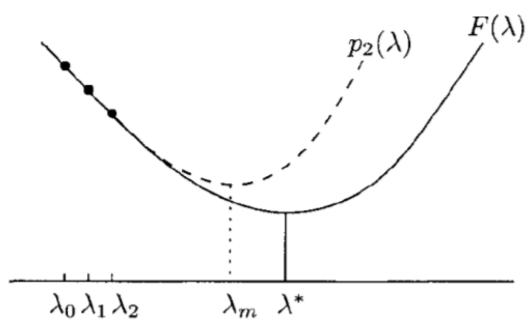
Jeśli rozpatrujemy przypadek "globalny" gdy funkcja w $x_0$ osiąga wartość największą-/najmniejszą to mówimy, że dla $x_0$ funkcja osiąga maksimum/minimum globalne.

### 1.3 Metoda interpolacji kwadratowej Powell'a

W metodzie interpolacji Powella korzystamy z lokalnego przybliżenia funkcji wielomianem drugiego stopnia . Szukamy trzech punktów $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ takie, że wartości funkcji w tych punktach spełniają warunek $f(\lambda_0) > f(\lambda_1) > f(\lambda_2)$. Szukamy równania wielomianu kwadratowego przechodzącego przez punkty $(\lambda_0, f(\lambda_0)), (\lambda_1, f(\lambda_1))$ i $(\lambda_2, f(\lambda_2))$.
W tym celu zapisujemy ogólne równanie wielomianu kwadratowego przechodzącego przez $\lambda_0, \lambda_1$ oraz $\lambda_2$:

$$p_2(\lambda) = a_0 + a_1(\lambda - \lambda_0) + a_2(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) \tag{4}$$

Następnie szukamy współczynników tego wielomianu:




(a) Wyznaczanie przybliżonego rozwiązania w metodzie Powell'a

$$p_2(\lambda_0) = f(\lambda_0) = a_0$$

$$p_2(\lambda_1) = f(\lambda_1) = a_0 + a_1(\lambda_1 - \lambda_0)$$

$$p_2(\lambda_2) = f(\lambda_2) = a_0 + a_1(\lambda_2 - \lambda_0) + a_2(\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_1)$$

Otrzymujemy układ trzech równań, który rozwiązujemy, aby znaleźć współczynniki szukanego wielomianu:

$$F[\lambda_0] = a_0 = f(\lambda_0)$$

$$F[\lambda_0, \lambda_1] = a_1 = \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_0)}{\lambda_1 - \lambda_0}$$

$$F[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2] = a_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\frac{f(\lambda_2) - f(\lambda_0)}{\lambda_2 - \lambda_0} - \frac{f(\lambda_1) - f(\lambda_0)}{\lambda_1 - \lambda_0}\right)$$

gdzie kolejno: $F[\lambda_0]$ to wartość funkcji w punkcie
$F[\lambda_0, \lambda_1]$ iloraz różnicowy 1 rzędu
$F[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2]$ iloraz różnicowy 2 rzędu

Teraz szukamy argumentu, dla którego ten wielomian kwadratowy osiąga minimum. Ponieważ zgodnie z naszymi założeniami, minimum znajduje się tam, gdzie pochodna równa jest zero.
Narzucamy warunek zerowania się pochodnej:

$$p_2'(\lambda) = 0 \Rightarrow a_1 + a_2(\lambda - \lambda_1 + \lambda - \lambda_0) = 0 \tag{5}$$

rozwiązując to równanie ze względu na x otrzymamy

$$\lambda_m = \frac{\lambda_0 + \lambda_1}{2} - \frac{a_1}{2a_2} = \frac{\lambda_0 + \lambda_1}{2} - \frac{F[\lambda_0, \lambda_1]}{2F[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2]} \tag{6}$$

Aby znaleziony punkt był rzeczywistym minimum, iloraz $(F[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2])$ musi spełniać warunek

$$F[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2] > 0 \tag{7}$$

W punkcie $\lambda_m$ wielomian kwadratowy $p_2$(x) osiąga minimum. Ponieważ q(x) jest przybliżeniem funkcji f(x), której minimum szukamy, $\lambda_m$ jest przybliżeniem wartości, w której funkcja f(x) osiąga minimum. Spośród punktów $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_m)$, zatrzymujemy trzy najlepsze (innymi słowy wyrzucamy punkt, w którym wartość funkcji f(x) jest największa) i ponownie dokonujemy interpolacji kwadratowej dla tych trzech punktów i szukamy minimum otrzymanego wielomianu. Procedura ta powtarzana jest do momentu, kiedy osiągnięta zostanie żądana dokładność.
Algorytm Powella, który został zarysowany powyżej znajduje minimum szybciej niż np. metoda złotego podziału, jeśli funkcja f(x) nie jest skrzywiona.
Dla mocno niesymetrycznych funkcji, lepszą metodą okazuje się metoda złotego podziału.

## 2 Zadanie do wykonania

Naszym zadaniem było znaleźć minimum wartości funkcji metodę interpolacji Powella W tym celu napisaliśmy procedurę do znajdywania ekstremum funkcji podanej jako argument oraz 3 kolejnych wartości x
Za pomocą tej procedury mieliśmy zbadać najmniejszą wartość funkcji:

$$f_1(x) = ln(x^5 + 3x^2 + x + 9) \tag{8}$$

Jako punkty startowe przyjęliśmy kolejno:
$x_1 = -0.5$,
$x_2 = x_1 + h$,
$x_3 = x_2 + h$,
gdzie h = 0.01
Następnie musimy wykonać 10 iteracji (będzie to dość trudne ze względu występowanie wyjątku dzielenia przez zero a wiec przyjęliśmy 8 iteracji co też daje poprawny wynik) szukając kolejno punktu $x_m$ według wzorów podanych na wstępie teoretycznym.
Znajdujemy wśród 3 wartości x punkt który jest najbardziej oddalony od wartości $x_m$, zostaje on zastąpiony w kolejnej iteracji przez $x_m$. Nowa trójka zostaje posortowana względem wartości funkcji.
Po posortowaniu powtarzamy podane wyżej operacje.
Podczas każdej z tych iteracji zapisujemy do przygotowanych uprzednio kontenerów wartości $x_1, x_2, x_3, x_m, F[x_1, x_2], F[x_1, x_2, x_3]$ z których potem sporządzimy wykresy.
Możemy tez zmodyfikować nasz program tj. warunek stopu zmienić na taki który zatrzymuje iterowanie do momentu aż odległość $x_m$ od najdalszej wartości z trójki x-ów będzie mniejsza od zadanek dokładności eps.

Powyższe rachunki powtarzamy dla innych warunków początkowych lecz na tej samej funkcji:
$x_1 = -0.9$,
$x_2 = x_1 + h$,
$x_3 = x_2 + h$,
gdzie h = 0.01

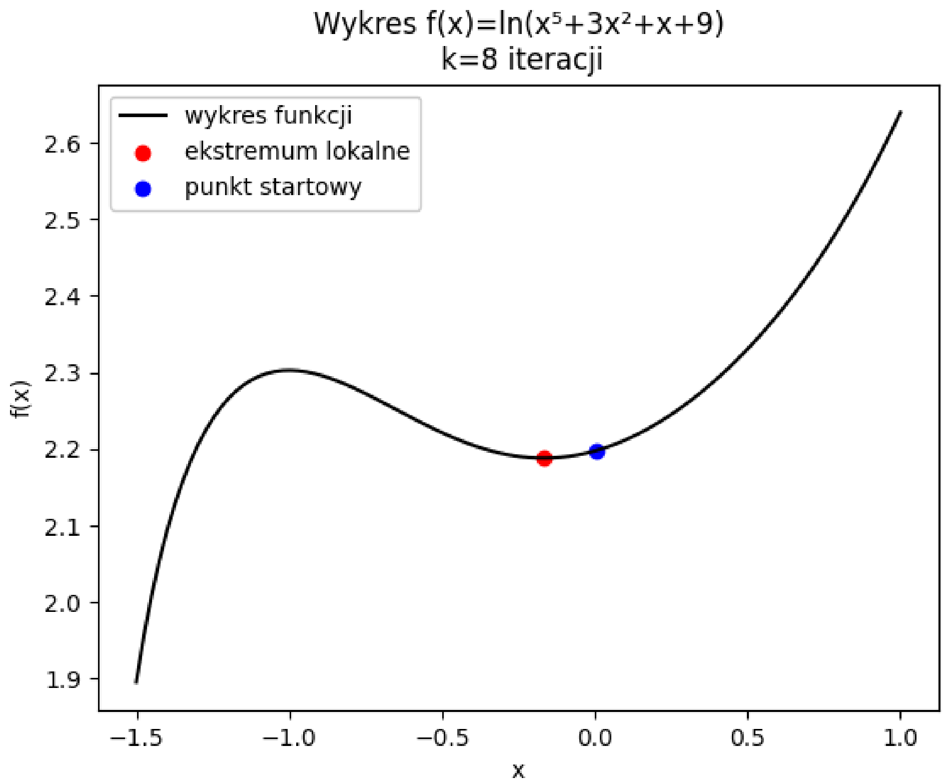
Na koniec zmieniamy naszą funkcje wejściowa na:

$$f_2(x) = x^6 \tag{9}$$

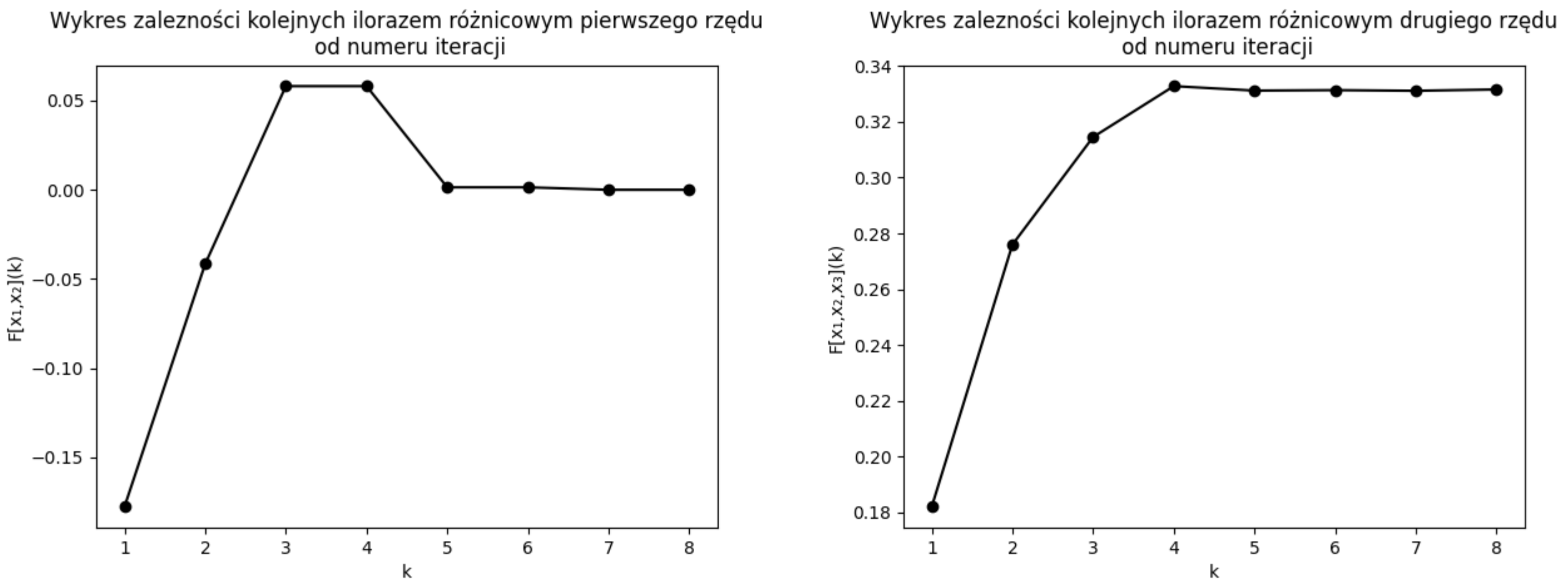
Jako punkty startowe przyjęliśmy:
$x_1 = 1.5$,
$x_2 = x_1 + h$,
$x_3 = x_2 + h$,
gdzie h = 0.01
Tutaj musimy wykonać 100 iteracji (nie występuje problem dzielenia przez zero) oraz zapisać $x_1, x_2, x_3, x_m, F[x_1, x_2], F[x_1, x_2, x_3]$ do podanych kontenerów.

# 3 Wyniki

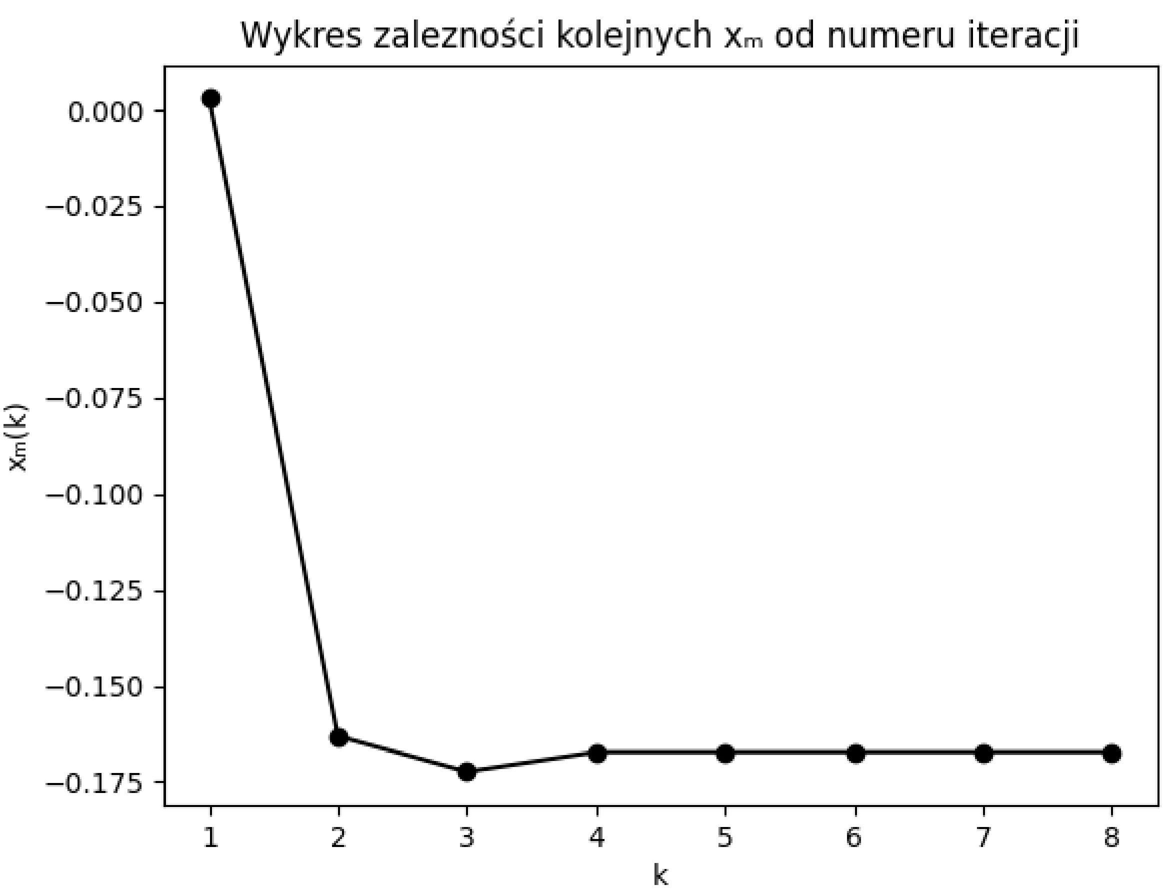
- Wykresy dla funkcji $f_1(x) = ln(x^5 + 3x^2 + x + 9)$
  oraz punktów startowych:
  $x_1 = -0.5$,
  $x_2 = -0.49$,
  $x_3 = -0.48$,



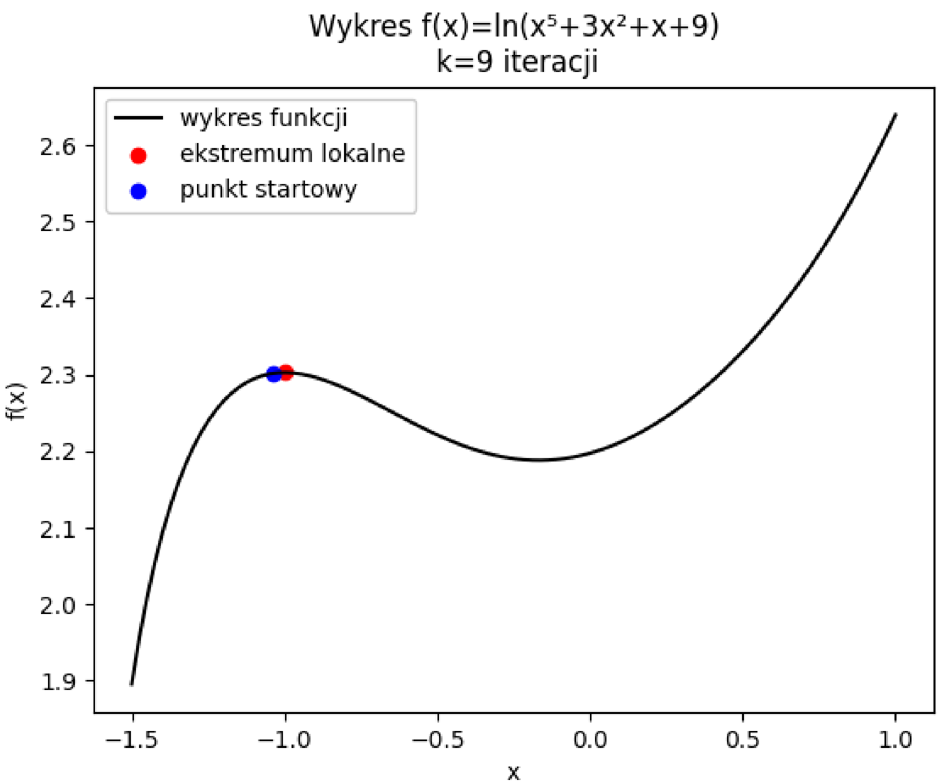

(a) Wykres przy 8 iteracjach



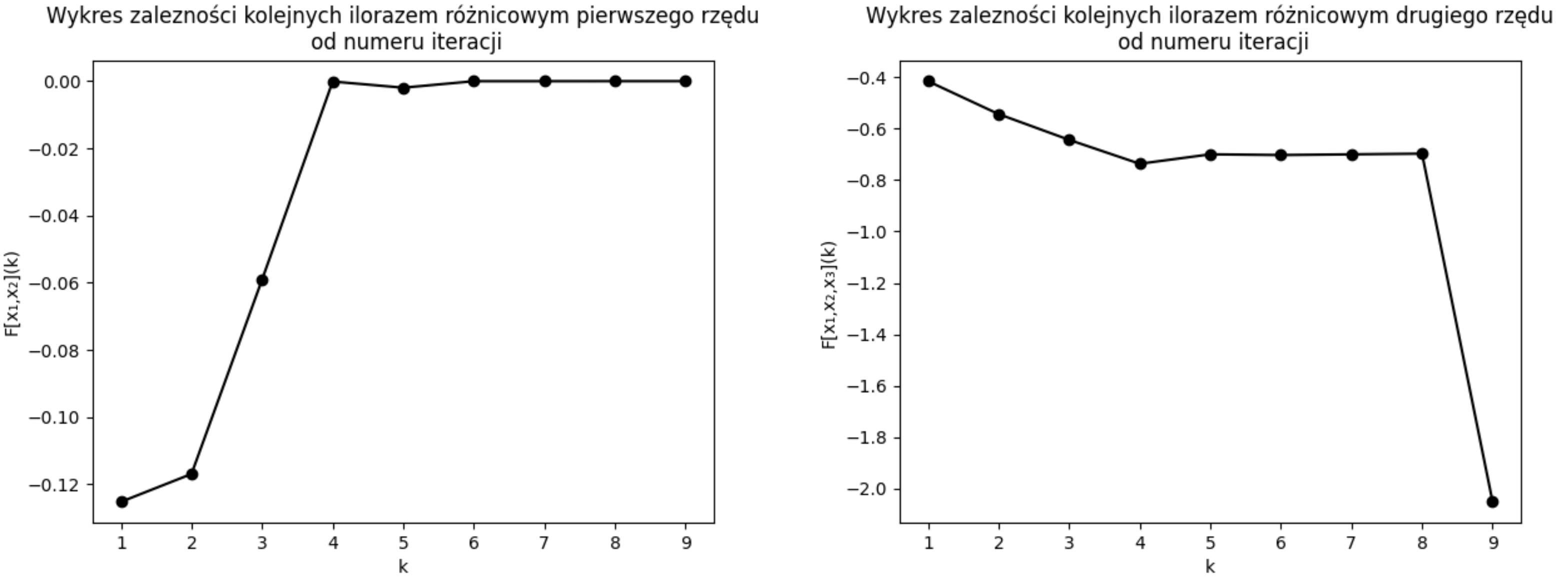

Rysunek 5: Wykresy ilorazów różnicowych przy kolejnych iteracjach



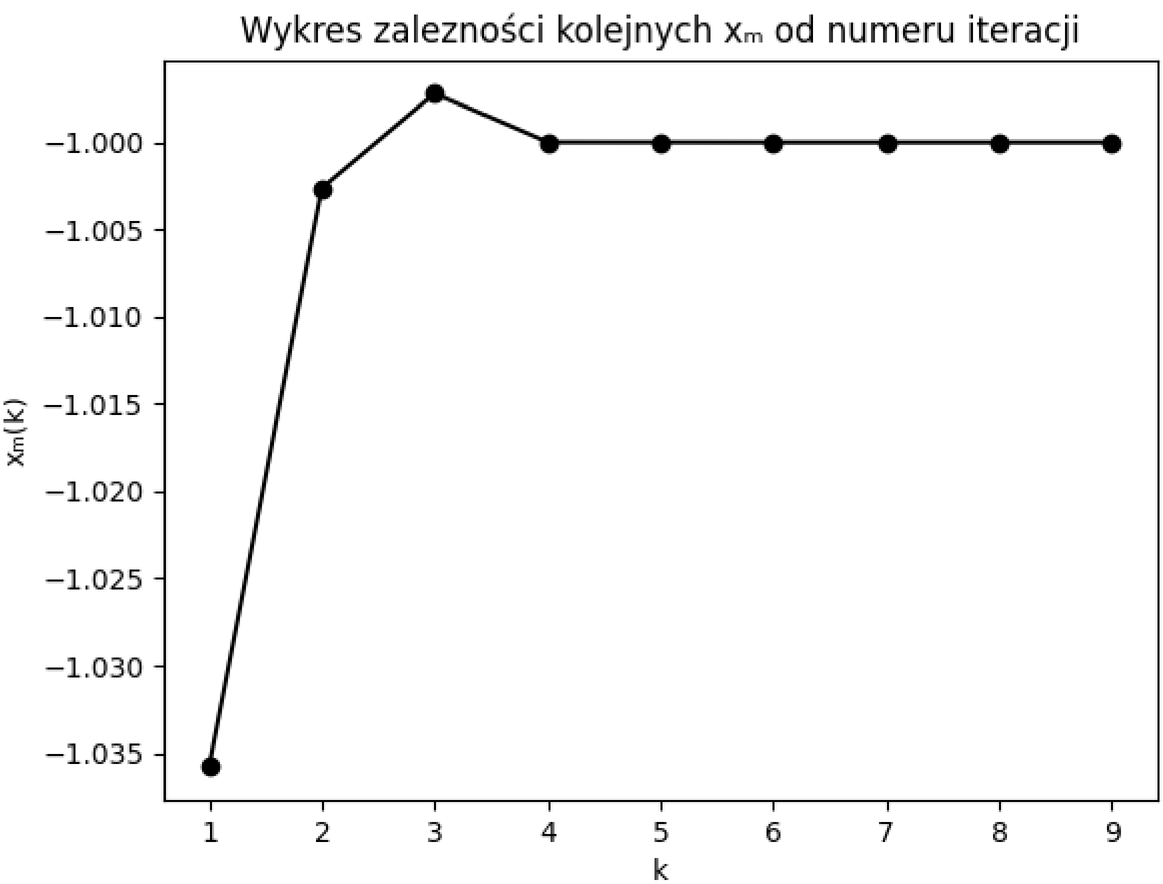
- Wykresy dla funkcji $f_1(x) = ln(x^5 + 3x^2 + x + 9)$
oraz punktów startowych:
$x_1 = -0.9$,
$x_2 = -0.89$,
$x_3 = -0.88$,



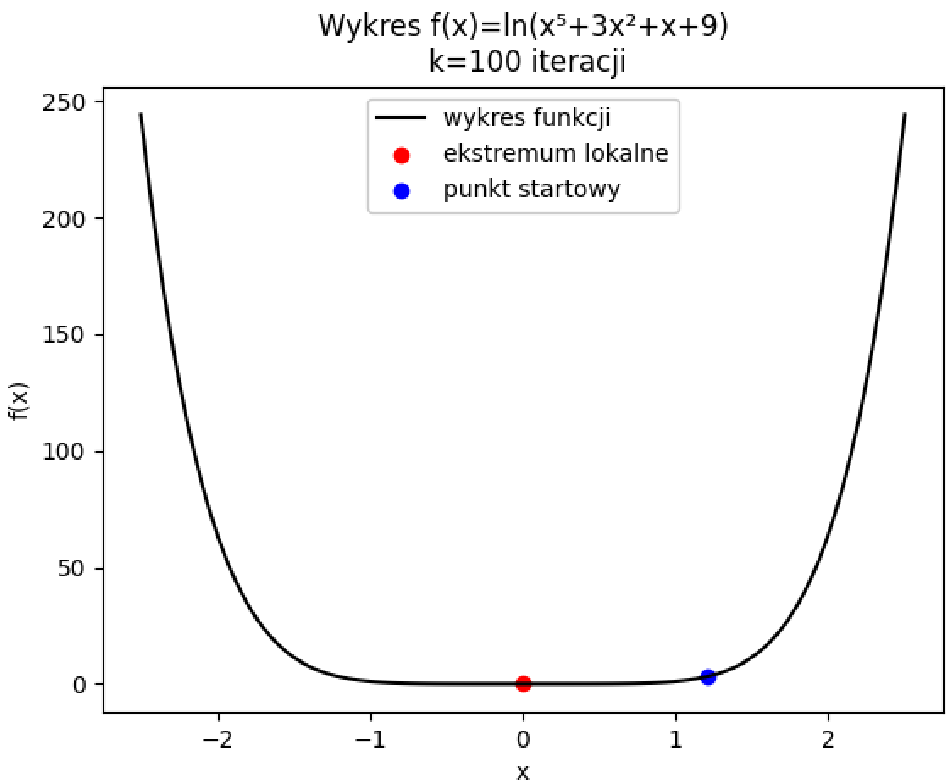

(a) Wykres przy 9 iteracjach



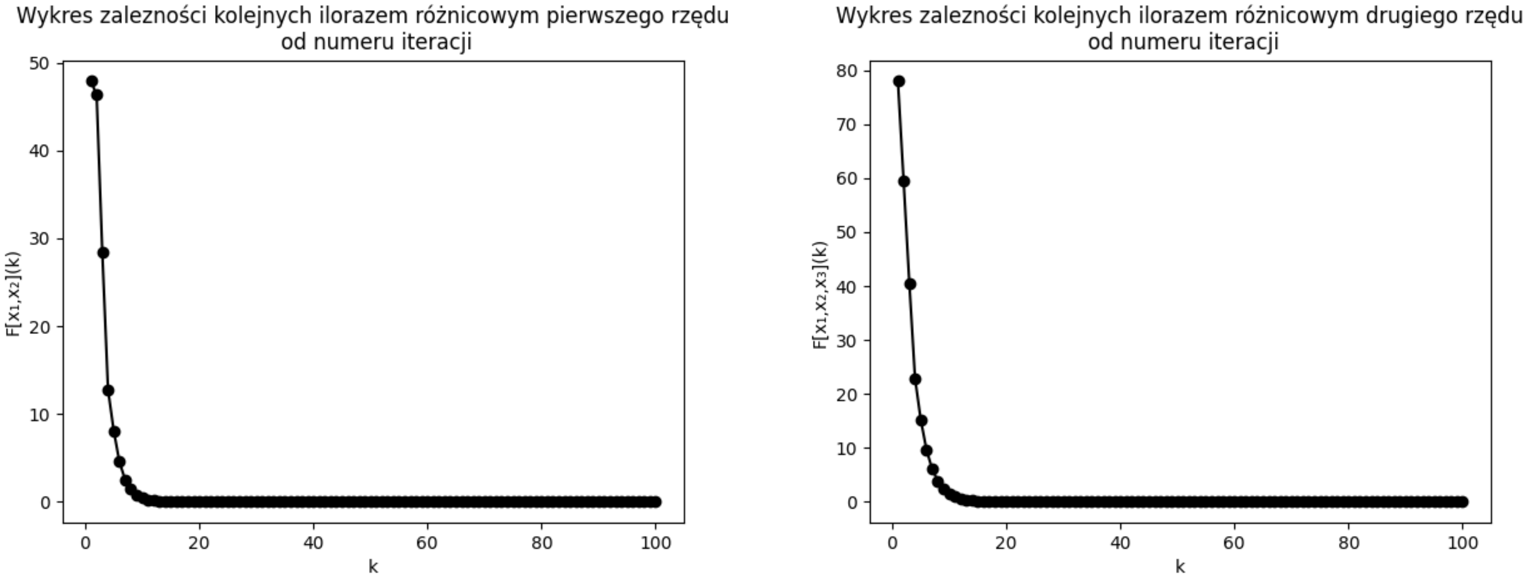

Rysunek 8: Wykresy ilorazów różnicowych przy kolejnych iteracjach



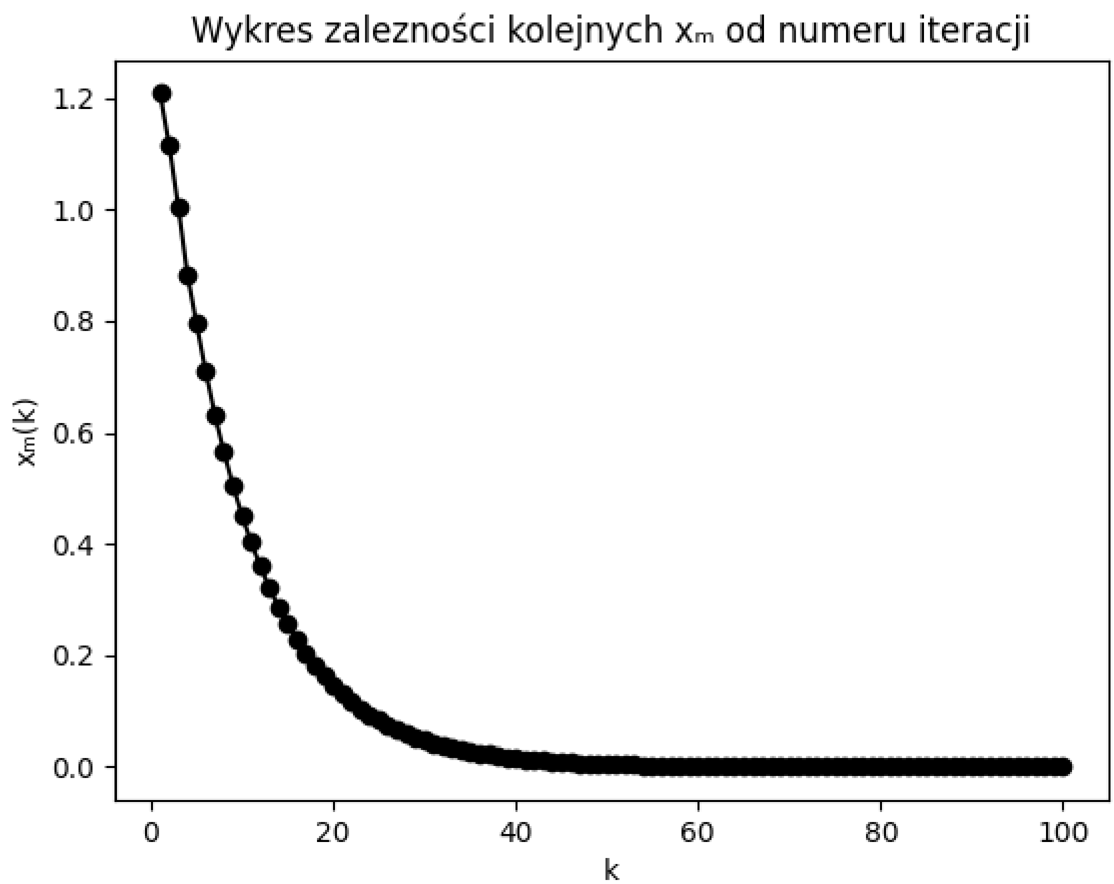
- Wykresy dla funkcji $f_2(x) = x^6$
  oraz punktów startowych:
  $x_1 = 1.5$,
  $x_2 = 1.51$,
  $x_3 = 1.52$,




(a) Wykres przy 100 iteracjach




Rysunek 11: Wykresy ilorazów różnicowych przy kolejnych iteracjac



# 4 Podsumowanie

Korzystając z metody Powella udało nam się znaleźć ekstrema zadanej funkcji w małej liczbie iteracji, z dużą dokładnością. Po pierwszych dwóch przykładach możemy stwierdzić iż wybrane punkty startowe miały wpływu na ilość iteracji.
W pierwszym przypadku znaleźliśmy ekstremum(minimum) po 8 iteracjach czyli stosunkowo szybko z dużą dokładnością. Warto wspomnieć też o tym iż przy $k > 8$ iteracjach występował problem z dzieleniem przez zero przy wyznaczaniu $x_m$
W drugim przypadku wyznaczyliśmy maksimum również dla tej samej funkcji.
W obu przypadkach możemy zauważyć dążenie pierwszej pochodnej do zera kiedy to nastąpi oznacza to że uzyskaliśmy żądaną dokładność właśnie dlatego możemy stwierdzić iż kolejne wartości $x_m$ zamierzają w kierunku malejącego ilorazu różnicowego
Wnioskując po wynikach dla pierwszej funkcji możemy stwierdzić iż algorytm jest wstanie z dużą dokładnością wyznaczyć dowolne ekstrema lokalne.
W drugim przypadku dokładne wyznaczenie ekstremum zajmuje nam 100 iteracji czyli znaczenie więcej niż poprzednio.
Jest to oczywiście spowodowane widocznie mniejszymi zmianami ilorazu różnicowego miedzy kolejnymi iteracjami
Metoda Powella okazała się szybką i dokładną metodą dla pierwszego rozważanego przez nas przypadku, jednak dla innych najczęściej dla wielomianów wysokiego stopnia metoda okazuje się być mniej efektywna, ze względu na to, że iloraz różnicowy takich funkcji znacznie wolniej się zmienia
Alogorytm Powella znajduje minimum szybciej niż metoda złotego podziału, jeśli funkcja f(x) nie jest skrzywiona.
Dla mocno niesymetrycznych funkcji, metoda złotego podziału pozostaje jednak lepsza.

# 5 Literatura

[1] Tomasz Chwiej, Interpolacja
*http://home.agh.edu.pl/ chwiej/mn/minimalizacja_2021.pdff*

[2] Wikipedia, Ekstremum funkcji
*https://pl.wikipedia.org/wiki/Ekstremum_funkcji*