

Wydział: Fizyki i Informatyki Stosowanej

Kierunek: Informatyka Stosowana

Rok: 2020/21

Semestr: letni

Typ: stacjonarne

Nr albumu: 401984

Data: 26.04.2021



Sprawozdanie - Laboratorium nr 8

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Spis treści

1	Wstęp teoretyczny	2
1.1	Interpolacja	2
1.2	Interpolacja funkcjami sklejanymi	3
1.3	Funkcja sklejana trzeciego stopnia	4
1.4	Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach	4
2	Zadanie do wykonania	6
3	Wyniki	7
4	Podsumowanie	9
5	Literatura	9

opracował:

Tomasz Szkaradek

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Interpolacja

Interpolacja jest to metoda numeryczna, która polega na wyznaczaniu w danym przedziale tzw. funkcji interpolacyjnej F , która przyjmuje w nim z góry zadane wartości w ustalonych punktach nazywanych węzłami.

Niech będzie dany przedział $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ oraz skończony ciąg $n + 1$ różnych punktów

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad (1)$$

Wyrazy x_0, \dots, x_n powyższego ciągu nazywane będą węzłami.

Wartości funkcji $y=f(x)$ w tych punktach to:

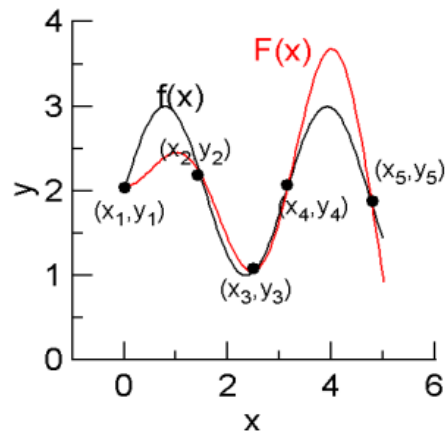
$$f(x_0) = y_0,$$

$$f(x_1) = y_1,$$

$$\dots,$$

$$f(x_n) = y_n$$

Problem interpolacji sprowadza się do znalezienia funkcji interpolującej $F(x)$, która w węzłach przyjmuje wartości takie jak funkcja $y=f(x)$ czyli funkcja interpolowana (której postać funkcyjna może nie być nawet znana).



Rysunek 1: Przykładowa interpolacja $F(x)$

Interpolacje najczęściej przeprowadza się korzystając z wielomianów algebraicznych, wielomianów trygonometrycznych lub funkcji sklepanych. Interpolacja wykorzystywana jest do zagęszczania tablic i efektywniejszego rozwiązywania równań nieliniowych dla stabilizowanych wartości funkcji z określonymi położeniami węzłów, w postaci wielomianowej do lokalnego przybliżania dowolnych funkcji, co ułatwia rozwiązywanie modeli fizycznych, a także do całkowania numerycznego i modelowania powierzchni w dwóch i trzech wymiarach.

1.2 Interpolacja funkcjami sklejanymi

Klasyczne funkcje sklepane wywodzą się z praktyki inżynierskiej. Przez wiele lat do kreślenia elementów konstrukcyjnych w przemyśle okrętowym i samochodowym używano elastycznej listewki drewnianej nazywanej giętką. Liniał taki, prowadzony przez zadane punkty za pomocą stosownych ciężarków ugina się wzdłuż krzywej „najgładszej”.

Pojęcie gładkości krzywej uściślimy dla krzywych o równaniu $y = f(x)$, gdzie $f \in C^2[a, b]$. Krzywizna takiej krzywej w punkcie x wynosi

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \quad (2)$$

Niech również będą dane wartości y_0, y_1, \dots, y_n w punktach tego podziału.

Funkcja $f \in C^2[a, b]$ interpolująca punkty (x_i, y_i) ($i = 0, 1, \dots, n$) jest „najgładsza” w tym sensie, że spośród wszystkich funkcji klasy $C^2[a, b]$ interpolujących te punkty daje najmniejszą wartość tzw. krzywizny całkowitej [1, 5]:

$$\int_a^b f''(x)^2 dx \quad (3)$$

W praktyce trudno jest szukać rozwiązania zagadnienia interpolacji w postaci funkcji „najgładszej” z powodu skomplikowanego wyrażenia opisującego krzywiznę. W interpolacji funkcjami sklejanymi będziemy dążyć do przybliżania nieznanej funkcji wielomianami niskiego stopnia. W przedziale $[a, b]$ mamy $n + 1$ punktów takich, że:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} = b. \quad (4)$$

Punkty te określają podział przedziału $[a, b]$ na n podprzedziałów. Funkcję $s(x)$ określoną na przedziale $[a, b]$ nazywamy funkcją sklejaną stopnia m (gdzie $m \geq 1$) jeżeli:

1) $s(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej m na każdym podprzedziale $(x_i; x_{i+1})$
 $i = 0, 1, \dots, n - 1,$

2) $s(x) \in C^m$.

Punkty x_i nazywamy węzłami funkcji sklepanej. W każdym przedziale (x_i, x_{i+1}) funkcja $s(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej m :

$$s(x) = c_{im}x^m + c_{im-1}x^{m-1} + \dots + c_{i1}x + c_{i0}, \quad x \in (x_i; x_{i+1}). \quad (5)$$

Funkcja interpolująca jest kombinacją liniową elementów bazy $s_i(x)$

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i s_i(x), \quad x \in [a, b] \quad (6)$$

1.3 Funkcja sklejana trzeciego stopnia

Funkcję $s(x)$ nazywamy interpolacyjną funkcją sklejaną stopnia trzeciego dla funkcji $f(x)$, jeżeli:

$$s(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad n \geq 2 \quad (7)$$

Do określenia funkcji $s(x)$ stopnia trzeciego konieczne jest wyznaczenie $(n+3)$ parametrów. Ponieważ ilość węzłów jest równa $n+1$ pozostają 2 stopnie swobody. Musimy nałożyć dwa dodatkowe warunki. Rodzaj tych warunków zależy od funkcji $f(x)$ lub znajomości jej zachowania w pobliżu końców przedziału $[a, b]$. Są trzy rodzaje warunków.

1. 1 rodzaj warunków - 1 pochodna:

$$\begin{aligned} s^{(1)}(a+0) &= \alpha_1 \\ s^{(1)}(b-0) &= \beta_1 \end{aligned} \quad (8)$$

2. 2 rodzaj warunków - 2 pochodna:

$$\begin{aligned} s^{(2)}(a+0) &= \alpha_2 \\ s^{(2)}(b-0) &= \beta_2 \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ są ustalonymi liczbami.

Trzeci rodzaj warunków stosuje się dla funkcji okresowych (warunek na 1 i 2 pochodną):

$$s^{(i)}(a+0) = s^{(i)}(b-0), \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

1.4 Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach

Oznaczmy $M_j = s^{(2)}(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$. Zgodnie z założeniem druga pochodna funkcji $s(x)$ jest ciągła i liniowa w każdym z pod przedziałów $[x_{i-1}, x_i]$. Możemy więc zapisać:

$$\begin{aligned} s_{i-1}^{(2)}(x) &= M_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \\ x &\in [x_{i-1}, x_i] \\ h_i &= x_i - x_{i-1} \end{aligned} \quad (11)$$

Po dwukrotnym scałkowaniu powyższego wyrażenia:

$$s_{i-1}(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{h_j} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \quad (12)$$

Stałe A i B można wyliczyć w korzystając z warunku interpolacji:

$$\begin{aligned} s_{i-1}(x_i - 1) &= M_{i-1} \frac{h_i^2}{6} + B_i = y_{i-1} \\ s_{i-1}(x_i) &= M_i \frac{h_i^2}{6} + A_i h_i + B_i = y_i \end{aligned} \quad (13)$$

i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} B_i &= y_{i-1} - M_{i-1} \frac{h_i^2}{6} \\ A_i &= \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6} (M_i - M_{i-1}). \end{aligned} \quad (14)$$

W punkcie x_i pochodna musi być ciągła:

$$\begin{aligned} s_{i-1}^{(1)}(x_i) &= s_i^{(1)}(x_i) \\ s_{i-1}^{(1)}(x_i - 0) &= \frac{h_i}{6}M - i - 1 + \frac{h_i}{3}M_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \\ s_i^{(1)}(x_i + 0) &= -\frac{h_{i+1}}{3}M - i - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} \end{aligned} \quad (15)$$

Na podstawie powyższych równań dla każdego z węzłów uzyskamy $(n - 1)$ równań, które można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} &= d_i, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \lambda_i &= \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, & \mu_i = 1 - \lambda_i \end{aligned} \quad (16)$$

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) = 6f(x_{i-1}; x_i; x_{i+1})$$

Do całego równania należy dołączyć jeszcze 2 równania wynikające z dodatkowych warunków. Dla warunków z 1 pochodną (1.2):

$$\begin{aligned} 2M_0 + M_1 &= d_0 & d_0 &= \frac{6}{h_1} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \alpha_1 \right) \\ M_{n-1} + 2M_n &= d_n & d_n &= \frac{6}{h_1} \left(\beta_1 - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right) \\ \lambda_i &= \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, & \mu_i &= 1 - \lambda_i \end{aligned} \quad (17)$$

Dla warunków z 2 pochodną:

$$M_0 - = \alpha_2 \quad M_n = \beta_2 \quad (18)$$

Finalnie, otrzymujemy układ równań, który można przedstawić w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (19)$$

Macierz współczynników układu jest macierzą silnie diagonalnie dominującą. Moduły elementów na diagonalu są większe od sumy modułów pozostałych elementów leżących w tym samym wierszu. Układy te mają więc jednoznaczne rozwiązanie - istnieje dokładnie jedna interpolacyjna funkcja sklejana stopnia trzeciego spełniająca przyjęte warunki dodatkowe. Po rozwiązaniu układu równań i znalezieniu współczynników M_i wyznaczamy funkcję sklejaną wg wzoru:

$$s_{i-1}(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i (x - x_{i-1})^3 6h_i + A_i (x - x_{i-1}) + B_i \quad (20)$$

2 Zadanie do wykonania

Naszym zadaniem było napisanie programu do interpolacji funkcji przy pomocy funkcji sklepanych będących wielomianami 3 stopnia poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

W tym celu mieliśmy napisać procedurę do wyznaczania wartości drugich pochodnych w węzłach wyzM, w której obliczaliśmy macierz drugich pochodnych. Następną procedurą było wyzSx, która służyła do wyznaczania wartości funkcji w położeniu międzywęzłowym. Za pomocą tych procedur mieliśmy przeprowadzić interpolację dwóch funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (21)$$

$$f(x) = \cos(2x) \quad (22)$$

dla $n = 5, 8, 21$ węzłów w przedziale $x \in [-5, 5]$. Do obliczeń braliśmy pod uwagę n równoodległych węzłów wygenerowanych za pomocą funkcji linspace które generowane są zgodnie ze wzorem

$$x_w = x_{min} + \Delta x \cdot i \quad (23)$$

gdzie:

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Delta x = \frac{x_{min} + x_{max}}{n}$$

x_{min} to lewy kraniec przedziału interpolacji

x_{max} to prawy kraniec przedziału interpolacji

Wartość funkcji interpolującej dla x który znajduje się między danymi węzłami

tj. $x \in [x_{i-1}, x_i]$ wyznaczamy według poniższego przepisu:

$$s_{i-1}(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{h_j} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \quad (24)$$

gdzie A i B to stałe całkowania podane na wstępie.

Za warunki brzegowe przyjęliśmy $\alpha = \beta = 0$

Wykorzystując metodą wyzM otrzymujemy wektory odległości między węzłowymi h , wektor λ , μ oraz d (obliczone według wzorów podanych we wstępie teoretycznym) a następnie za ich pomocą wektor drugich pochodnych m rozwiązując równanie:

$$AM = d$$

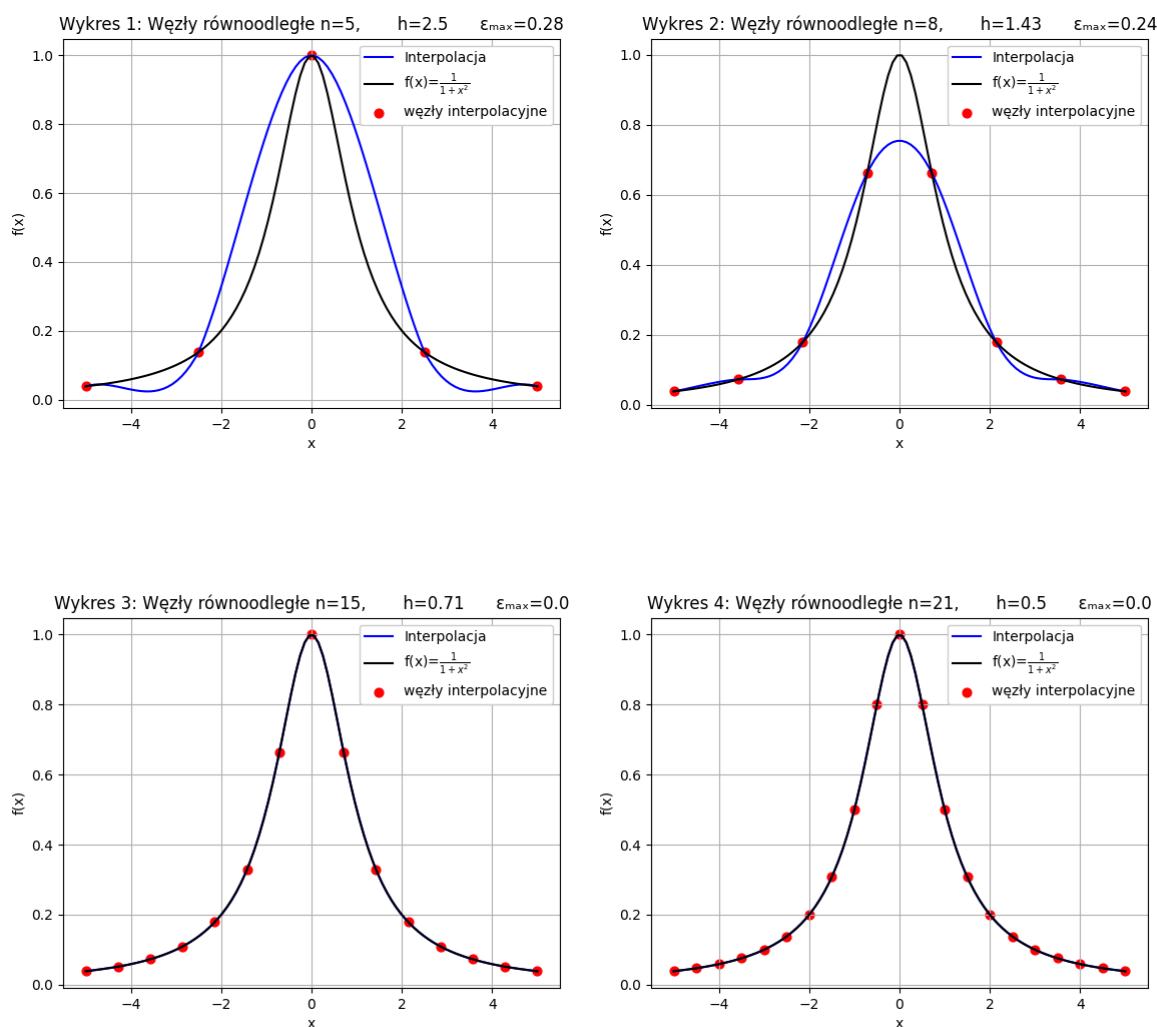
Dodatkowo, dla $f_1(x)$ oraz $n = 10$ należało wyznaczyć wartości drugich pochodnych z zaimplementowanej przez nas procedury i porównać je z wartościami liczonymi zgodnie z poniższym wzorem dla $\Delta x = 0.01$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{f(x - \Delta x) - 2f(x) + f(x + \delta x)}{(\Delta x)^2}, \quad (25)$$

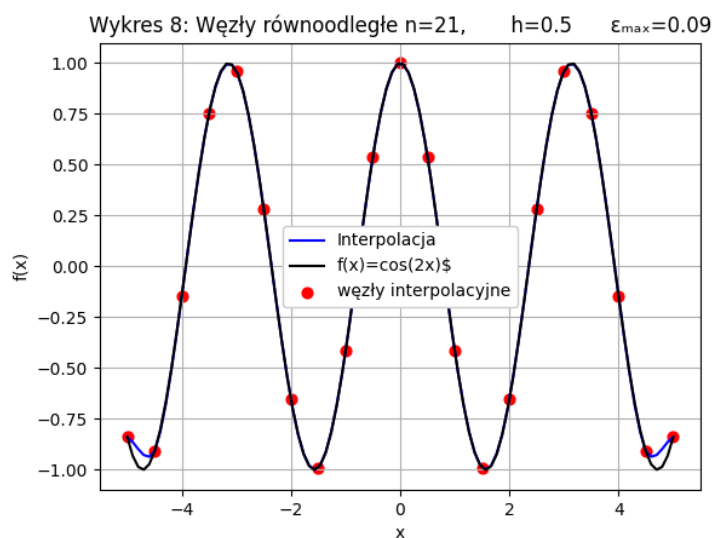
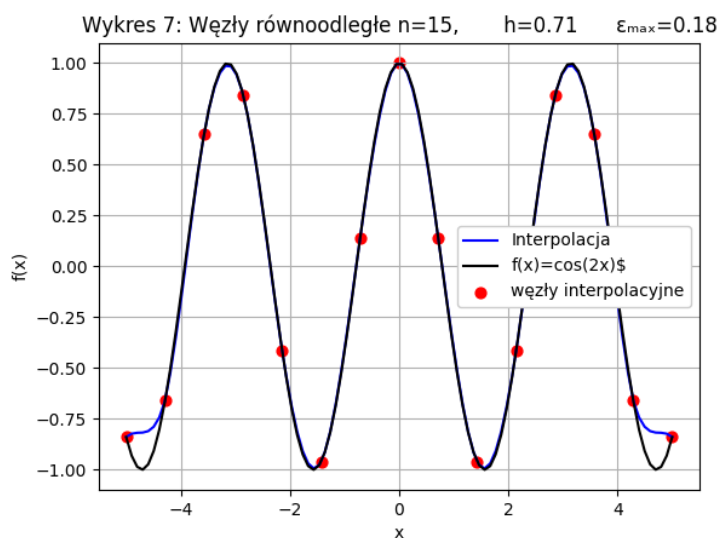
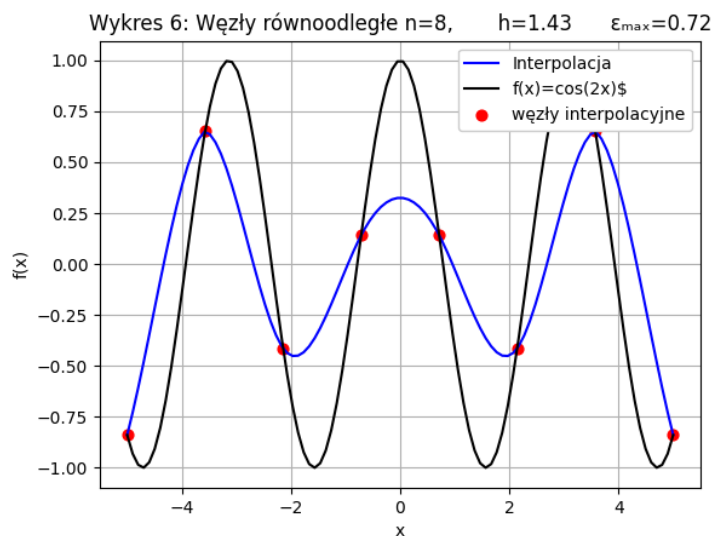
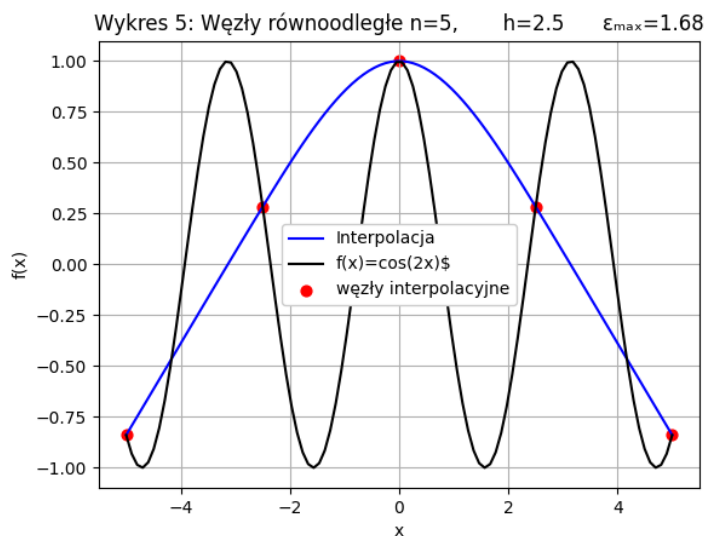
Oba wektory rozwiązań nanieśliśmy na wykres i porównaliśmy

3 Wyniki

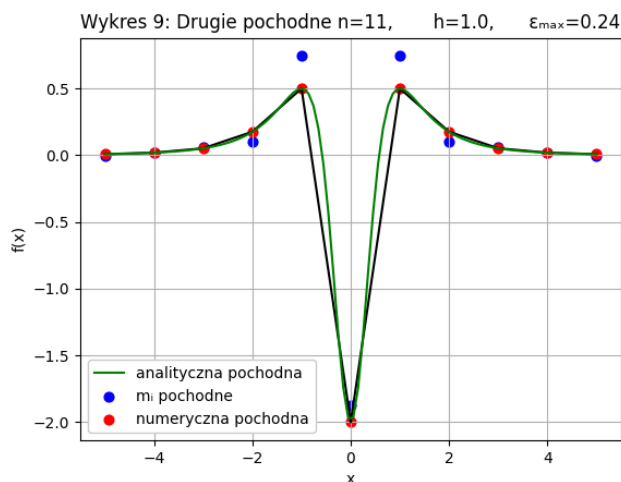
Cały program został napisany w języku Python. Za pomocą funkcji bibliotecznej matplotlib wyrysowaliśmy wykresy. Zostały one umieszczone poniżej na których widać, że wraz ze wzrostem liczby węzłów zwiększa się dokładność oszacowania funkcji, bez Efektu Rungego tzn. charakterystycznych odchyłeń na krańcach przedziału.



Rysunek 3: Wyniki interpolacji funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ funkcjami sklejanymi dla n węzłów



Rysunek 4: Wyniki interpolacji funkcji $f_1(x) = \cos(2x)$ funkcjami sklejonymi dla n węzłów



Rysunek 5: Wartości drugich pochodnych wyznaczone algorytmem służącym do interpolacji funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ funkcjami sklejonymi dla $n = 10$ węzłów zestawione z wartościami wyliczonymi z ilorazu różnicowego (wzór 25)

4 Podsumowanie

Podsumowując można powiedzieć że wyniki dla odpowiednio dużej liczby węzłów pokrywają się niemal idealnie z interpolowaną funkcją. Nie istnieje zauważalny efekt Rungego na granicach przedziałów interpolacji, jednak można zauważyć że właśnie na granicach przedziałów funkcja interpolująca najbardziej odstaje od funkcji interpolowanej. W porównaniu do metody interpolacji Newtona metoda funkcji sklejanych zdaje się lepiej odwzorowywać dane funkcje, nie widać efektu „pofalowania” wykresu funkcji interpolującej dla niewystarczającej liczby węzłów. Zwiększanie liczby węzłów znacząco upodabnia wykres funkcji interpolującej do wykresu funkcji interpolowanej. Zdaje się też nasuwać wniosek, że wybrana metoda jest skuteczniejsza szybsza i bardziej wydajna niż odpowiadająca jej metoda Newtona. Spoglądając na wykresy, zwłaszcza te o większej liczbie węzłów i mając na uwadze niewielki czas trwania obliczeń można wysunąć wniosek o dobrej skuteczności wybranej metody do rozwiązywania postawionego problemu. Na dodatek nie ma potrzeby stosowania odpowiedniego algorytmu dobierającego położenia węzłów (np. jako zera Wielomianów Czebyszewa).

Na Rysunku 4 można zaobserwować jawne polepszenie interpolacji wraz ze wzrostem liczby węzłów n . Dla f_2 i $n = 5$ wykres interpolacji znacznie odbiega od teoretycznego kształtu możemy to zauważyć na podstawie porównania błędu $\epsilon_{max} = 1.68$ tj. największa różnica wartości pomiędzy wartością teoretyczną a obliczoną. Dla $n = 8$ widzimy polepszenie jakości interpolacji poprzez zmniejszenie się $\epsilon_{max} = 0.72$, przy $n = 21$ wynik okazał się prawie dokładnie pasować do funkcji interpolowanej. Na dodatek w naszym przypadku nie zaobserwowano efektu Rungego.

Na wykresie pochodnych widzimy niewielkie rozchodzenia wartości numerycznych oraz analitycznych. Jak można zauważyć z wykresu 9 zastosowana metoda wyznaczania 2 pochodnej odbiega od jej „dokładniejszej wersji” dla argumentów bliskich wartością do 0. Jednak dla argumentów oddalonych od 0, wartości zdają się coraz bardziej pokrywać.

5 Literatura

- [1] Tomasz Chwiej, Interpolacja
http://home.agh.edu.pl/~chwiej/mn/interpolacja_2021.pdf
- [2] Wikipedia, Interpolacja funkcjami sklejanymi
https://pl.wikipedia.org/wiki/Interpolacja_funkcjami_sklejanymi
- [3] Kazimierz Jakubczyk Interpolacja funkcjami sklejanymi
<http://kaj.uniwersytetradom.pl/docs/Splines.pdf>