Satz. UK ist NP-vollständig

Bws a) UK $\in$ NP ✓

b) UK NP-schwer, wir zeigen KNF-SAT $\leq_p$ UK

Sei als φ Boolsche Formel KNF

Konstruiere Graph aus φ: Knoten für jedes Literal
Kanten zwischen zwei Literalen, $\Leftrightarrow$ sie in der gleichen Klauseln liegen oder eines der Negation vom anderen.

Bsp $((x_1 \vee x_2 \vee x_3)) \wedge ((x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_4))$

Vorlesung 27.01.2015

L NP-schwer ("NP-hard"): $L' \leq_p L$ für alle $L' \in NP$

- vollständig
- "NP-complete" und $L \in NP$

SAT NP-vollst.

- L NP-schwer und $L \leq_p L' \Rightarrow L'$ NP-schwer
- L NP-schwer und $L \in P \Rightarrow P = NP$

Reduktion.

KNF-SAT $\leq_p$ UK

zu konstruieren: Polyzeit-berechenbare Funktion f, die Eingabe φ von KNF-SAT abbildet auf Eingabe $f(\varphi)$ von UK, so dass

φ erfüllbar $\Leftrightarrow$ $f(\varphi) = (G, k)$ G hat UK der Größe k.

zB. $((x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2)$ G

k = Anzahl der Klauseln

Beh φ erfüllbar $\Leftrightarrow$ G hat UK der Größe k.

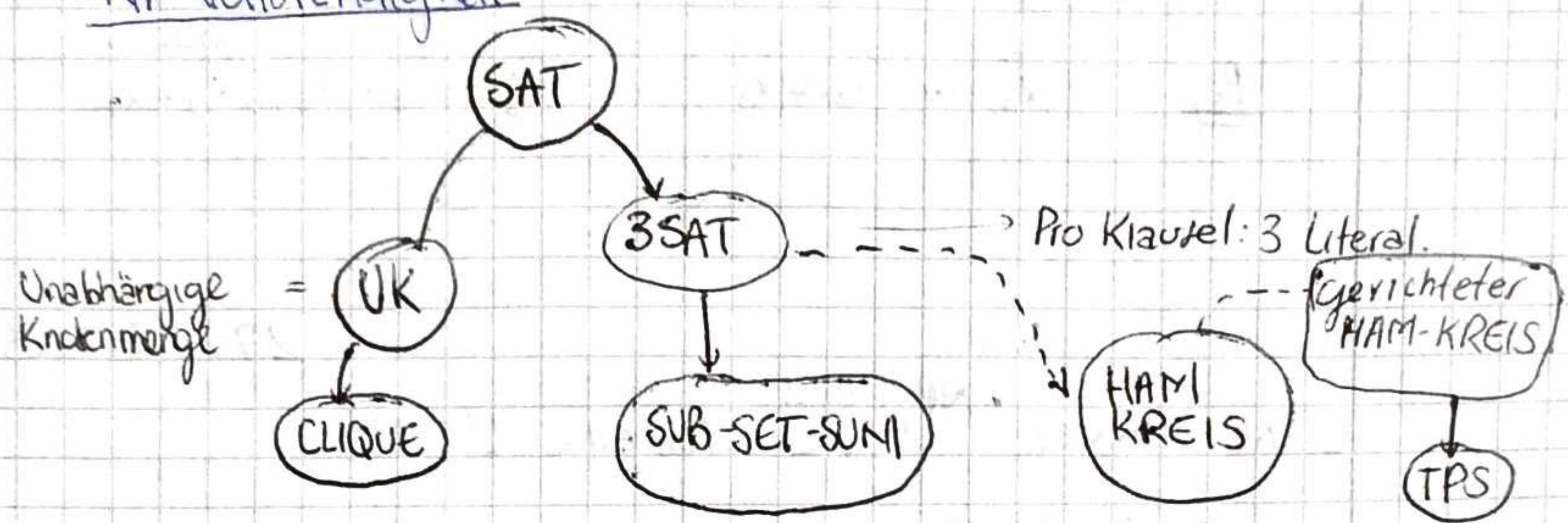
Beweis $\Rightarrow$ Betrachte erfüllende Belegung von φ. Nimm aus jedem Klausel ein Literal, das auf "wahr" gesetzt ist. Zugehörige Knoten bilden eine UK der Größe k.

(⇐) G hat UK V' der Größe k
⇒ genau ein Knoten aus jeder Klausel.
Die entsprechende Literale können durch seine Belegung alle auf wahr gesetzt werden, da sich keine zwei widersprechen ⇒ erfüllbare Belegung.

---

da UK $\in$ NP und
SAT $\leq_p$ UK und
SAT NP-schwer
⇒ UK NP-vollständig.

NP-Vollständigkeit

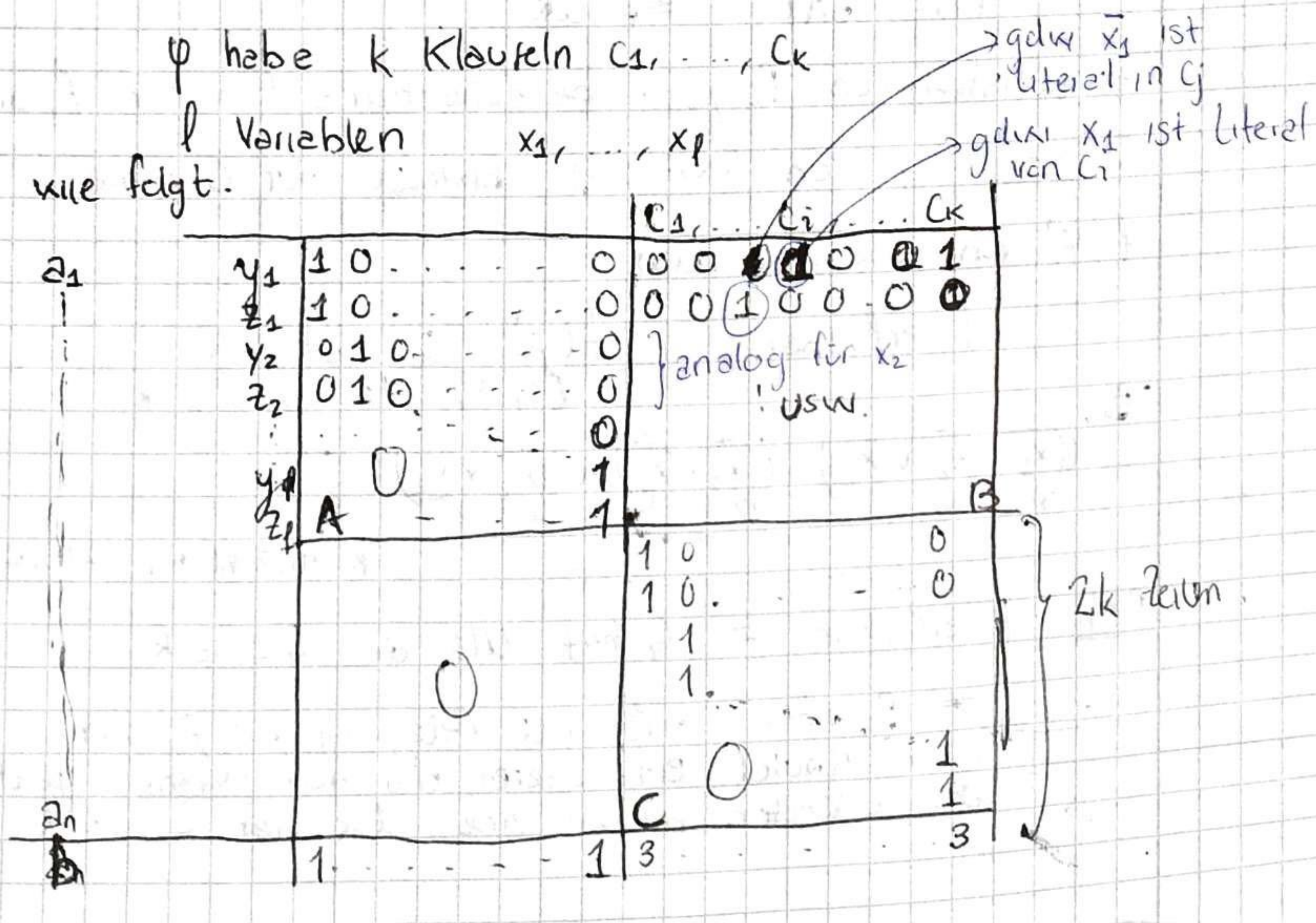


Reduktion von 3SAT auf SUB-SET-SUM.

Beh: 3SAT $\leq_p$ SUB-SET-SUM.

Reduktionsfunktion f übersetzt Formel (KNF, 3 Lit pro Klausel) in eine Zahlenfolge $a_1, \dots, a_m, b$, mit
φ erfüllbar ⇔ $(a_1, \dots, a_m, b)$ lösg für SUBSET-SUM.

φ habe k Klauseln $C_1, \dots, C_k$
l Variablen $x_1, \dots, x_l$
wie folgt.



Damit SUBSET-SUM NP-Schwer SUBSET-SUM $\in NP$: schon gezeigt.

Satz SUBSET-SUM ist NP-vollständig

Entscheidungsprobleme vs Optimierungsprobleme.

Viele in der Praxis auftr. Probleme sind keine Entscheidungs- sondern Optimierungs-probleme:

z.B. Instanz für TSP: finde kürzeste Rundreise
größte CLIQUE

Teilsumme von $a_1, \ldots, a_n$, die am nächsten bei b liegt.

allgemein Optimierungsproblem:

Zu jeder Eingabe w existiert ein Lösungsraum $\Omega(w)$
außerdem Zielfunktion $f: \Omega(w) \rightarrow \mathbb{R}$
gesucht: Lösung $x \in \Omega(w)$ mit $f(x)$ ist minimal (oder maximal)

Tutorium 28.01.2015

SUBSET-SUM.

$X = x_1, \ldots, x_n, b$

Gibt es Teilmenge x: die sich zu b summiert

Zeuge: Teilmenge Y

Verifiziere: Ist Y Teilmenge von Y $O(n^2)$
Ist $\sum_{y \in Y} y = b$ $+ O(n)$ } Polynomiell

P: Mit einer det. TM in polynomieller Zeit entscheidbar

NP: - Mit einer nichtdet. TM in polynomieller Zeit entscheidbar.

- Gegeben ein Zeuge x kann det in polynomieller Zeit entscheiden werden, ob $x \in L$.

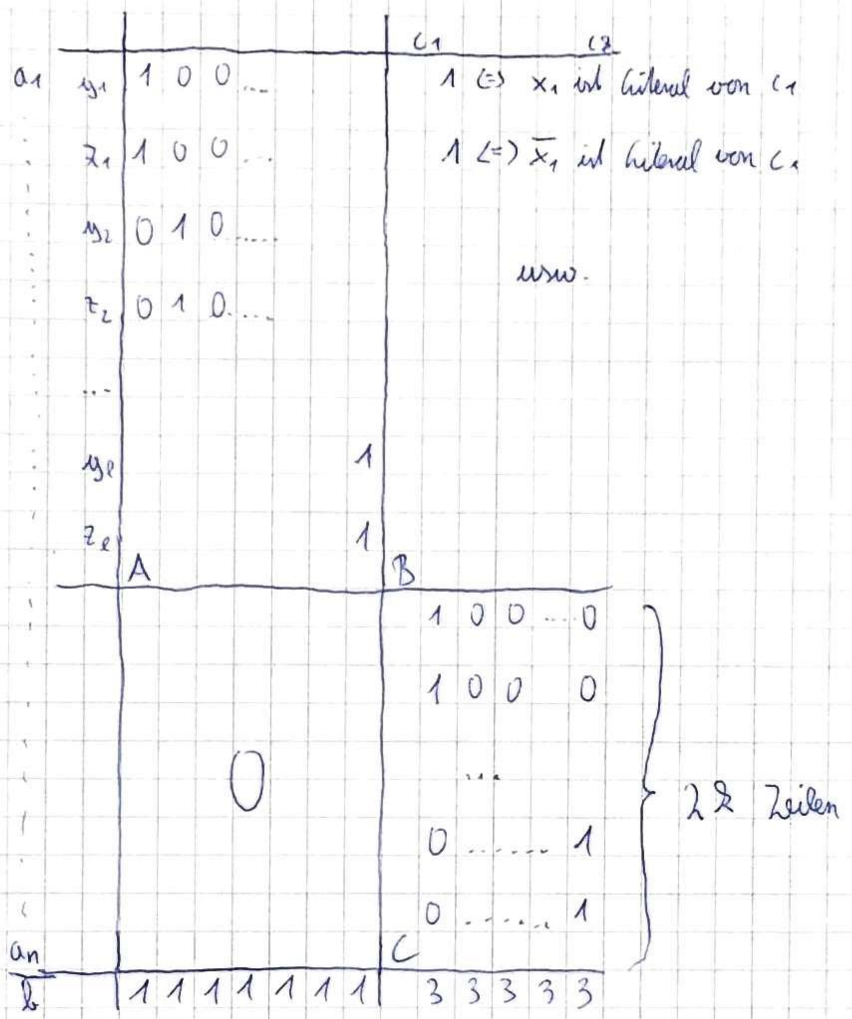
$P \subseteq NP$

Reduktion: 3-SAT $\leq_p$ SUBSET-SUM

Reduktionsfkt f übersetzt Formel φ (KNF, 3 Lit. pro Klausel) in eine Zahlenfolge $a_1, a_2, \dots a_n, b$ mit:

φ erfüllbar $\Leftrightarrow$ $(a_1, a_2 \dots a_n, b)$ Lsg für SUBSET-SUM

φ habe k Klauseln $c_1, \dots c_k$ und l Variablen $x_1, \dots x_l$



$a_1, \dots, a_n$ - Zeilen des Schemas interpretiert als Zahlen in Dezimaldarstellung

b - unterste Zeile

Beh.: φ ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ $a_1, \dots, a_n, b$ hat Lsg in SUBSET-SUM

Bew.: $\Rightarrow$ Betrachte erfüllende Belegung

falls x_i auf „wahr" gesetzt ist, wähle Zeile (Zahl) y_i, bei „falsch" z_i

jede Klausel muss erfüllt sein, d.h. von den ausgewählten Zeilen muss in jeder Spalte von Teil B mindestens eine 1 stehen (höchstens 3) in Teil C wähle Zeilen aus, sodass insgesamt jede Spalte in B und C 3 1en enthält, d.h. falls in B 1, 2 oder 3 1en in der Spalte (und ausgew. Zeilen) wähle in C 2, 1 oder 0 1en in entspr. Spalte.

Ausgewählte Zeilen aufaddieren: Ergebnis b

$\Leftarrow$ Angenommen es existiert Auswahl der a_i's, die sich zu b addiert. Damit im ersten Teil von b $1 \ldots 1$ erreicht wird, muss von jedem Paar $y_i z_i$ genau eines ausgewählt worden sein. Falls y_i ausgewählt wurde, setze x_i auf „wahr", bei z_i setze x_i auf „falsch". Beh.: diese Belegung erfüllt φ. Denn damit $3 \ldots 3$ am Ende von b erreicht wird, muss für jede Spalte mind. eine 1 aus Bereich B kommen, d.h. das der Zeile entspr. Literal muss in der Spalte entspr. Klausel vorkommen $\rightarrow$ 1 erfülltes Literal in der Klausel $\Rightarrow$ Formel erfüllt.

Damit: SUBSET-SUM NP-schwer

SUBSET-SUM $\in$ NP: schon gezeigt

Satz: SUBSET-SUM ist NP-vollständig

Entscheidungs- vs. Optimierungsprobleme

Viele in der Praxis auftretende Probleme sind keine Entscheidungs- sondern Optimierungsprobleme:

z.B. Instanz für TSP: · finde kürzeste Rundreise

· größte Clique

· Teilsumme von a_1 bis a_n, die am nächsten bei b liegt

Optimierungsproblem: zu jeder Eingabe w existiert ein Lösungsraum $\Omega(w)$, außerdem Zielfunktion $f: \Omega(w) \rightarrow \mathbb{R}$

gesucht: Lösung $x \in \Omega(w)$ mit $f(x)$ ist minimal