Kochrezept für NP-Vollständigkeitsbeweise

Prof. Dr. Berthold Vöcking
Lehrstuhl Informatik 1
Algorithmen und Komplexität
RWTH Aachen

11. Januar 2010

- Um Nachzuweisen, dass SAT NP-hart ist, haben wir in einer „Master-Reduktion“ alle Probleme aus NP auf SAT reduziert.
- Die NP-Vollständigkeit von SAT können wir jetzt verwenden, um nachzuweisen, dass weitere Probleme NP-hart sind.

Lemma

L^* NP-*hart,* $L^* \leq_p L \;\Rightarrow\; L$ NP-*hart.*

Beweis: Gemäß Voraussetzung gilt $\forall L' \in \text{NP} : L' \leq_p L^*$ und $L^* \leq_p L$. Aufgrund der Transitivität der polynomiellen Reduktion folgt somit $\forall L' \in \text{NP} : L' \leq_p L$. $\square$

NP-Vollständigkeit von 3SAT

Eine Formel in *k-KNF* besteht nur aus Klauseln mit jeweils k Literalen, sogenannten *k-Klauseln*.

Problem (3SAT)

Eingabe: Aussagenlogische Formel ϕ in 3-KNF
Frage: Gibt es eine erfüllende Belegung für ϕ?

- 3SAT ist ein Spezialfall von SAT und deshalb wie SAT in NP.
- Um zu zeigen, dass 3SAT ebenfalls NP-vollständig ist, müssen wir also nur noch die NP-Härte von 3SAT nachweisen.
- Dazu zeigen wir SAT $\leq_p$ 3SAT.

Lemma

SAT $\leq_p$ 3SAT.

Beweis:

- Gegeben sei eine Formel ϕ in KNF.
- Wir transformieren ϕ in eine *erfüllbarkeitsäquivalente* Formel ϕ' in 3KNF, d.h.

$$\phi \text{ ist erfüllbar } \Leftrightarrow \phi' \text{ ist erfüllbar } .$$

- Aus einer 1- bzw 2-Klausel können wir leicht eine äquivalente 3-Klausel machen, indem wir ein Literal wiederholen.
- Was machen wir aber mit k-Klauseln für $k > 3$?

SAT $\leq_p$ 3SAT

- Sei $k \geq 4$ und C eine k-Klausel der Form

$$C \;=\; \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 \cdots \vee \ell_k \;\;.$$

- In einer *Klauseltransformation* ersetzen wir C durch die Teilformel

$$C' \;=\; (\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_{k-2} \vee h) \wedge (\bar{h} \vee \ell_{k-1} \vee \ell_k) \;\;,$$

wobei h eine zusätzlich eingeführte Hilfsvariable bezeichnet.

Nachweis der Erfüllbarkeitsäquivalenz:

ϕ' sei aus ϕ entstanden durch Ersetzen von C durch C'.

zz: ϕ erfüllbar $\Rightarrow$ ϕ' erfüllbar

- Sei B eine erfüllende Belegung für ϕ.
- B weist mindestens einem Literal aus C hat den Wert 1 zu.
- Wir unterscheiden zwei Fälle:
  1) Falls $\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_{k-2}$ erfüllt ist, so ist ϕ' erfüllt, wenn wir $h = 0$ setzen.
  2) Falls $\ell_{k-1} \vee \ell_k$ erfüllt ist, so ist ϕ' erfüllt, wenn wir $h = 1$ setzen.
- Also ist ϕ' in beiden Fällen erfüllbar.

Nachweis der Erfüllbarkeitsäquivalenz

zz: ϕ' erfüllbar $\Rightarrow$ ϕ erfüllbar

- Sei B nun eine erfüllende Belegung für ϕ'.
- Wir unterscheiden wiederum zwei Fälle:
  - Falls B der Variable h den Wert 0 zuweist, so muss B einem der Literale $\ell_1, \ldots, \ell_{k-2}$ den Wert 1 zugewiesen haben.
  - Falls B der Variable h den Wert 0 zuweist, so muss B einem der beiden Literale ℓ_3 oder ℓ_4 den Wert 1 zugewiesen haben.
- In beiden Fällen erfüllt B somit auch ϕ.

SAT $\leq_p$ 3SAT

- Durch Anwendung der Klauseltransformation entstehen aus einer k-Klausel eine $(k-1)$-Klausel und eine 3-Klausel.
- Nach $k-3$ Iterationen sind aus einer k Klausel somit $k-2$ viele 3-Klauseln entstanden.
- Diese Transformation wird solange auf die eingegebene Formel ϕ angewandt, bis die Formel nur noch 3-Klauseln enthält.
- Wenn n die Anzahl der Literale in ϕ ist, so werden insgesamt höchstens $n-3$ Klauseltransformationen benötigt.
- Die Laufzeit ist somit polynomiell beschränkt.

$\square$

Korollar

3SAT ist NP-*vollständig.*

Beispiel für die Klauseltransformation:
Aus der 5 Klausel

$$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5$$

wird in einem ersten Transformationsschritt die Teilformel

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee h_1) \ \wedge \ (\bar{h}_1 \vee x_4 \vee \bar{x}_5) \ ,$$

also eine 4- und eine 3-Klausel. Auf die 4-Klausel wird die Transformation erneut angewandt. Wir erhalten die Teilformel

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee h_2) \ \wedge \ (\bar{h}_2 \vee x_3 \vee h_1) \ \wedge \ (\bar{h}_1 \vee x_4 \vee \bar{x}_5) \ ,$$

die nur noch 3-Klauseln enthält.

NP-Vollständigkeit von CLIQUE

Wie erinnern uns an das Cliquenproblem.

Problem (CLIQUE)

Eingabe: *Graph* $G = (V, E)$, $k \in \{1, \ldots, |V|\}$
Frage: *Gibt es eine* k*-Clique?*

Satz

CLIQUE ist NP*-vollständig.*

Beweis der NP-Vollständigkeit von CLIQUE

Da wir schon wissen, dass das Cliquenproblem in NP ist, müssen wir zum Nachweis der NP-Vollständigkeit nur noch die NP-Härte nachweisen.

Dazu zeigen wir 3SAT $\leq_p$ CLIQUE.

Wir beschreiben eine polynomiell berechenbare Funktion f, die eine 3-KNF-Formel ϕ in einen Graphen $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ transformiert, so dass gilt:

$$\phi \text{ ist erfüllbar } \Leftrightarrow G \text{ hat eine } k\text{-Clique} .$$

Beschreibung der Funktion f:

- Seien $C_1, \ldots, C_m$ die Klauseln von ϕ.
- Seien $\ell_{i,1}, \ldots, \ell_{i,3}$ die Literale in Klausel C_i.
- Identifiziere Literale und Knoten, d.h. setze

$$V = \{\ell_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\} \ .$$

- Jedes Knotenpaar wird durch eine Kante verbunden, mit folgenden *Ausnahmen*:
  1) die assoziierten Literale gehören zur selben Klausel oder
  2) eines der beiden Literale ist die Negierung des anderen Literals.
- Setze $k = m$.

Beispiel: $\phi \; = \; (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1)$

Erfüllende Belegung: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$.

Korrektheit der Transformation:

zz: ϕ erfüllbar $\Rightarrow$ G hat m-Clique

Jede erfüllende Belegung erfüllt in jeder Klausel mindestens ein Literal. Pro Klausel wähle eines dieser erfüllten Literale beliebig aus. Sei U die Menge dieser Literale. Wir behaupten, U ist eine m-Clique.

Begründung:

- Per Definition ist $|U| = m$.
- Seien ℓ und ℓ' zwei unterschiedliche Literale aus U.
- Ausnahme 1 trifft auf ℓ und ℓ' nicht zu, da sie aus verschiedenen Klauseln sind.
- Ausnahme 2 trifft auf ℓ und ℓ' nicht zu, da sie gleichzeitig erfüllt sind.
- Also gibt es eine Kante zwischen ℓ und ℓ'.

Beweis der NP-Vollständigkeit von CLIQUE

zz: G hat m-Clique $\Rightarrow \phi$ erfüllbar

- Sei U eine m-Clique in G.
- Aufgrund von Ausnahmeregel 1 gehören die Literale in U zu verschiedenen Klauseln.
- U enthält somit genau ein Literal pro Klausel in ϕ.
- Diese Literale können alle gleichzeitig erfüllt werden, da sie sich wegen Ausnahmeregel 2 nicht widesprechen.
- Also ist ϕ erfüllbar.

Die Laufzeit von f ist offensichtlich polynomiell beschränkt. $\square$