

# Skript zur Vorlesung Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik

Version von 24. Oktober 2011

Ursprüngliche Mitschrift von Birte Heinze im WS 09/10

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Nichtrelativistische Quantenmechanik</b>	<b>2</b>
1.0	Wiederholung der Quantenmechanik . . . . .	2
1.0.1	Zustand eines Systems . . . . .	2
1.0.2	Zeitentwicklung und Schrödingergleichung . . . . .	2
1.0.3	Physikalische Observablen . . . . .	3
1.0.4	Messung und Projektionspostulat . . . . .	3
1.0.5	Beispiel: freies Teilchen . . . . .	4
1.0.6	Harmonischer Oszillator . . . . .	4
1.0.7	Drehimpuls . . . . .	5
1.1	Addition von Drehimpulsen . . . . .	8
1.1.1	Addition von zwei Spin $\frac{1}{2}$ Operatoren . . . . .	8
1.1.2	Addition von zwei allg. Drehimpulsoperatoren . . . . .	10
1.2	Zeitabhängige Störungstheorie . . . . .	12
1.2.1	Zeitunabhängige Störungstheorie . . . . .	12
1.2.2	Zeitabhängigkeiten in der Quantenmechanik . . . . .	13
1.2.3	Übergangswahrscheinlichkeit . . . . .	16
1.3	Streutheorie . . . . .	20
1.3.1	Streuung eines Wellenpakets . . . . .	20
1.3.2	Formale Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung . . . . .	21
1.3.3	Streuquerschnitt / Wirkungsquerschnitt . . . . .	22
1.3.4	Partialwellen-Zerlegung . . . . .	23
1.3.5	Bornsche Näherung . . . . .	25
1.3.6	Beispiel am Yukawa- Potentials . . . . .	25
1.3.7	Anwendung Potentialtopf, Resonanzstreuung . . . . .	26
1.4	Wahrscheinlichkeitsinterpretation und Messprozess . . . . .	28
1.4.1	Messungen und Projektionspostulat . . . . .	28
1.4.2	Dichtematrix . . . . .	29
1.4.3	Messprozess nach von Neumann . . . . .	33
1.4.4	Bellsche Ungleichung . . . . .	34
1.5	Propagatoren und Quantendynamik . . . . .	38
1.5.1	Propagatoren und die Greensche Funktion . . . . .	38
1.5.2	Pfadintegralformilierung der Quantenmechanik . . . . .	41
1.5.3	Eichtransformationen und der sog. Aharonov-Bohm-Effekt . . . . .	43
<b>2</b>	<b>Relativistische Elektrodynamik</b>	<b>48</b>
2.1	Spezielle Relativitätstheorie . . . . .	48
2.1.1	Koordinatentransformation und Newtonsche Mechanik . . . . .	48
2.1.2	Elektrodynamik . . . . .	49
2.1.3	Lorentztransformationen . . . . .	50
2.1.4	Vierervektoren / Tensorrechnung . . . . .	53
2.1.5	Relativistische Mechanik . . . . .	57
2.2	Kovariante Formulierung der Elektrodynamik . . . . .	59

2.2.1	Viererstrom . . . . .	59
2.2.2	Viererpotential . . . . .	59
2.2.3	Feldstärketensor . . . . .	60
2.2.4	Geladenes Teilchen . . . . .	63
2.3	Lagrangeformalismus . . . . .	64
2.3.1	Mechanik eines freien Teilchens . . . . .	64
2.3.2	Mechanik mit elektromagnetischem Feld . . . . .	64
2.3.3	Felder . . . . .	66
2.3.4	Felder und Teilchen . . . . .	67
2.3.5	Energie-Impuls- oder Spannungstensor . . . . .	68
2.3.6	Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes . . . . .	70
2.4	Lösung der Wellengleichung in kovarianter Form . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Relativistische Quantenmechanik</b>	<b>74</b>
3.1	Klein-Gordon-Gleichung . . . . .	74
3.2	Dirac-Gleichung . . . . .	78
3.2.1	Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung . . . . .	78
3.2.2	Konstruktion des Viererstroms . . . . .	79
3.2.3	Konstruktion des Spinorraums, Dirac-Darstellung . . . . .	79
3.2.4	Kovariante Form der Dirac- Gleichung . . . . .	80
3.2.5	Nachweis der Kovarianz . . . . .	81
3.3	Lösungen der Dirac-Gleichung und der nicht relativistische Grenzfall .	87
3.3.1	Ruhende Teilchen $\partial_t \psi = 0$ . . . . .	87
3.3.2	Ebene Wellen . . . . .	87
3.3.3	Ankopplung des elektromagnetischen Feldes . . . . .	90
3.3.4	Nicht-relativistischer Grenzfall, Pauli-Gleichung . . . . .	91
3.3.5	Spin, Helizität, Chiralität . . . . .	93
3.3.6	Zitterbewegung . . . . .	94
3.3.7	Löchertheorie . . . . .	97
<b>4</b>	<b>Vielteilchenmethoden, Quantenfeldtheorie</b>	<b>99</b>
4.1	Teilchensysteme . . . . .	99
4.1.1	Ein Teilchen . . . . .	99
4.1.2	Zwei identische Teilchen . . . . .	99
4.1.3	Viele Teilchen . . . . .	100
4.1.4	Fockraum . . . . .	101
4.2	Erzeuger und Vernichter . . . . .	102
4.2.1	Bosonen: . . . . .	102
4.2.2	Fermionen . . . . .	103
4.3	Operatoren in zweiter Quantisierung . . . . .	106
4.3.1	Einteilchenoperator . . . . .	106
4.3.2	Zweiteilchenoperaor . . . . .	107
4.3.3	Hamiltonoperator . . . . .	107
4.4	Feldoperatoren . . . . .	108

4.4.1	Basiswechsel . . . . .	108
4.4.2	Ortsdarstellung . . . . .	108
4.4.3	Bewegungsgleichung . . . . .	109
4.4.4	Impulsdarstellung / Feynmandiagramme . . . . .	110
4.4.5	Spin . . . . .	111
4.5	Feldquantisierung der Diractheorie . . . . .	113
4.5.1	Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren . . . . .	113
4.5.2	Feldoperatoren . . . . .	113
4.5.3	Hamiltonoperator . . . . .	114
4.6	Quantisierung des Strahlungsfeldes . . . . .	116
4.6.1	Normalmoden, Photonen . . . . .	116
4.6.2	Feldoperatoren . . . . .	117
4.6.3	Strahlungsübergänge, QED . . . . .	117
4.6.4	Der Casimir-Effekt . . . . .	118

# 1 Nichtrelativistische Quantenmechanik

## 1.0 Wiederholung der Quantenmechanik

### 1.0.1 Zustand eines Systems

Statt einer Trajektorie in der Raumzeit werden Zustände im Hilbertraum verwendet.

Schrödingernotation:  
Wellenfunktion

Diracnotation:  
Zustandsvektor

$$\psi(\vec{r}, t) \quad \leftarrow \langle \vec{r} | \psi(t) \rangle \rightarrow \quad | \psi \rangle$$

Wahrscheinlichkeitsinterpretation:  $W = |\psi(\vec{r}, t)|^2 = |\langle \vec{r} | \psi(t) \rangle|^2$  ist Wahrscheinlichkeit ein Teilchen am Ort  $\vec{r}$  zur Zeit  $t$  zu finden.

: Normierung für alle Zeiten  $t$ :

$$\int d^3r |\psi(\vec{r}, t)|^2 = 1 \quad \quad |\langle \psi | \psi \rangle| = 1$$

Allgemein ist die Wahrscheinlichkeit, den Zustand  $|n\rangle$  eines Systems zu finden:  $P_n(t) = |\langle n | \psi(t) \rangle|^2$

### 1.0.2 Zeitentwicklung und Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \hat{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t)$$

Der Hamiltonoperator  $\hat{\mathcal{H}}(\vec{r}, t)$  kann mit dem Korrespondenzprinzip aus der klassischen Hamiltonmechanik hergeleitet werden.

z.B. ein Teilchen im elektromagnetischen Feld:

$$\hat{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2m} (\hat{\vec{p}} - q\hat{\vec{A}}(\vec{r}, t))^2 + q\hat{\phi}(\vec{r}, t)$$

Mit dem skalaren Potential  $\phi$  und dem Vektorpotential  $\vec{A}$ , die gemäß

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \dot{\vec{A}} \quad \text{bzw.} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

das  $\vec{E}$ - bzw. das  $\vec{B}$ -Feld ergeben.  $\vec{p}$  und  $\vec{r}$  sind Operatoren, die wie folgt definiert sind.

$$\begin{array}{lll} \text{Ortsraum} & \hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla}_{\vec{r}} & = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \\ \text{Impulsraum} & \hat{\vec{r}} = +i\hbar \vec{\nabla}_{\vec{p}} & = +i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \end{array}$$

#### Stationäre Zustände

Falls  $\hat{V}$  und  $\vec{A}$  zeitunabhängig sind, lässt sich der Ansatz

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \cdot \psi(\vec{r})$$

verwenden. In der Schrödingergleichung eingesetzt folgt daraus die stationäre Schrödingergleichung:

$$E\psi(\vec{r}) = \hat{\mathcal{H}}(\vec{r})\psi(\vec{r})$$

Dies entspricht einem Eigenwertproblem.

### 1.0.3 Physikalische Observablen

Observablen sind mit hermiteschen Operatoren verknüpft. Sei  $\hat{A}$  eine Observable, so ist ihr Erwartungswert gegeben durch:  $\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$

Hermitizität :  $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$

Falls  $[\hat{\mathcal{H}}, \hat{A}] = 0$ , so können  $\hat{\mathcal{H}}$  und  $\hat{A}$  gleichzeitig diagonalisiert werden, d. h. es gibt Zustände  $|E, a\rangle$  ( $E$  ist Eigenwert zu  $\hat{\mathcal{H}}$  und  $a$  ist Eigenwert zu  $\hat{A}$ ) für die gilt:

$$\hat{\mathcal{H}} |E, a\rangle = E |E, a\rangle \quad \text{und} \quad \hat{A} |E, a\rangle = a |E, a\rangle$$

: $\hat{A}$  entspricht einer **Erhaltungsgröße** :

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle = 0$$

### 1.0.4 Messung und Projektionspostulat

Der **Mittelwert** vieler Messungen von  $\hat{A}$  ergibt  $\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$ . Eine **einzelne Messung** jedoch ergibt immer einen **Eigenwert** (EW) von  $\hat{A}$ :

$$\begin{aligned} \hat{A} |a\rangle &= a |a\rangle \\ |a\rangle &= \text{Eigenzustand zu } \hat{A} \\ a &= \text{Eigenwert von } \hat{A} \text{ zu } |a\rangle \end{aligned}$$

Der Mittelwert ist in der Regel selbst kein Eigenwert. Der Erwartungswert einer Observable hat in diesem Sinne keine physikalische, sondern lediglich eine statistische Realität.

### Projektionspostulat

Nach der Messung des Eigenwertes  $a$  von  $\hat{A}$  ist der Zustand  $|a\rangle$  fest.

$$\begin{array}{ccc} |\psi\rangle & \longrightarrow & |a\rangle \\ \text{allgemeiner Zustand} & \text{Projektion} & \text{Eigenzustand} \end{array}$$

Der Zustand eines Systems wird durch die Messung in den Eigenzustand projiziert. Die Projektion ist eine nicht unitäre Zeitentwicklung, also unumkehrbar. Durch die Messung wird der Zustand des Systems geändert.

=: Wiederholte Messung ergibt wieder den Eigenwert  $a$ .

=: Informationen über den Zustand  $|\psi\rangle$  vor der Messung sind verloren.

### 1.0.5 Beispiel: freies Teilchen

$$\hat{V} = 0 \quad \vec{A} = 0$$

Mit der Schrödingergleichung gilt:

$$i\hbar \partial_t \psi = \underbrace{\frac{\hat{p}^2}{2m}}_{\hat{\mathcal{H}}} \psi$$

$$: [\hat{\mathcal{H}}, \hat{p}] = 0$$

Hiermit gilt die Impulserhaltung. Eigenzustände sind z. B.:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = c \cdot e^{i\vec{k}\vec{r}} \quad (\text{ebene Welle})$$

$$\text{mit } \hat{p} \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \underbrace{\hbar\vec{k}}_{\text{Impuls-EW}} \psi_{\vec{k}}(\vec{r})$$

$$\hat{\mathcal{H}} \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}}_{\text{Energie-EW}} \psi_{\vec{k}}(\vec{r})$$

Zeitentwicklung:  $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = c \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)}$  mit  $E_k = \hbar\omega_k$

Allgemeines Wellenpaket:

$$\psi(\vec{r}, t) = \int d^3k \, c(\vec{k}) \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega(\vec{k})t)}$$

$$\omega(\vec{k}) = \frac{E(k)}{\hbar}$$

### 1.0.6 Harmonischer Oszillator

$$\hat{V} = \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2 \quad (\text{eindimensional})$$

zugehöriger Hamiltonoperator:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2$$

Definiere:

$$\hat{P} := \sqrt{\hbar m \omega} \hat{p} \quad \hat{X} := \sqrt{\frac{\hbar}{m \omega}} \hat{x}$$

$$:\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hbar \omega}{2} (\hat{P}^2 + \hat{X}^2) \quad \text{und} \quad [\hat{X}, \hat{P}] = i$$

Um die Energieeigenzustände zu bestimmen, werden die Auf- und Absteigeoperatoren definiert:

$$\hat{a} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}) \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P})$$

$$\begin{aligned} &: [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \\ &: \hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$\hat{N} := \hat{a}^\dagger \hat{a}$  ist der Anzahloperator. Er gibt an, in der wievielten Anregung  $n$  des Oszillators sich das System befindet:

$$\hat{N} |n\rangle = n |n\rangle$$

$$\begin{aligned} \hat{N}(\hat{a}^\dagger |n\rangle) &= (n+1)(\hat{a}^\dagger |n\rangle) && \text{d.h. } \hat{a}^\dagger \text{ bring das System in einen „höheren“ Zustand} \\ \hat{a}^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle && \text{„höherer Zustand“} \\ \hat{a} |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle && \text{„niedriger Zustand“} \end{aligned}$$

Die Menge der Eigenwerte des Systems mit  $\hat{\mathcal{H}} |n\rangle = E_n |n\rangle$  (Spektrum des Systems) ist:

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \text{ mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

Die möglichen Werte von  $n$  ergeben sich aus der Normierung.

### 1.0.7 Drehimpuls

Der Bahndrehimpuls ist definiert als  $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$ . Er spielt bspw. bei der Berechnung von Wasserstoffzuständen eine wichtige Rolle.

Es gilt im Zentralpotential  $\hat{V}(|\vec{r}|)$ :

$$[\hat{\vec{L}}, \hat{\mathcal{H}}] = 0$$

=: Drehimpuls ist Erhaltungsgröße

Eigenschaften von Drehimpulsoperatoren:

**Vertauschungsrelation (VR)**

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k \quad (1)$$

Die obige Gleichung wird **Drehimpulsalgebra** genannt. Jeder Satz von drei Operatoren, für die die Drehimpulsalgebra gilt, wird als quantenmechanischer Drehimpuls behandelt, z. B. der Spin.

Eine äquivalente Schreibweise der Drehimpulsalgebra (1) ist

$$\hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{L}} = i\hbar \hat{\vec{L}} \quad (2)$$



## Drehimpulsbetrag

Für den Operator des Drehimpulsbetrages gilt:

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$
$$[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0 \quad i \in [1, 2, 3]$$

## Spektrum

Mit dem Spektrum der Drehimpulsoperatoren sind die zugehörigen verschiedenen Eigenwerte gemeint.

Es gibt eine orthonormale Basis (ONB) :  $\{|n, l\rangle\}$  (Basis von Vektoren im Hilbertraum, welche orthogonal zueinander und normiert sind.)

Für die  $\{|n, l\rangle\}$  gilt:

$$\hat{L}^2 |n, l\rangle = \hbar^2 l(l+1) |n, l\rangle$$
$$\hat{L}_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle$$

Aus der Algebra folgt:  $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$  (Erinnerung: der Bahndrehimpuls ist jedoch nur ganzzahlig)

: Drehimpuls ist quantisiert

Es folgt weiter für die magnetische Quantenzahl  $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$  und für jede Bahndrehimpulsquantenzahl ( $l$ ) gibt es  $2l+1$  Eigenzustände von  $\hat{L}_z$

## Leiteroperator von $\hat{L}^\pm$

Man definiert den Leiteroperator  $\hat{L}^\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ . Aus der Drehimpulsalgebra lässt sich folgern, dass

$$[\hat{L}_z, \hat{L}^\pm] = \pm \hbar \hat{L}^\pm$$
$$[\hat{L}^+, \hat{L}^-] = 2\hbar \hat{L}_z.$$

Es ergeben sich aus den obigen Gleichungen und der Normierung folgende Eigenschaften für Leiteroperatoren:

$$\hat{L}^\pm |l, m\rangle = \hbar \underbrace{\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}}_{a_{l,m}^\pm} |l, m \pm 1\rangle$$
$$\longrightarrow \hat{L}^+ |l, l\rangle = 0 \quad (|l, l\rangle \hat{=} \text{maximaler Zustand})$$
$$\longrightarrow \hat{L}^- |l, -l\rangle = 0 \quad (|l, -l\rangle \hat{=} \text{minimaler Zustand})$$

Bemerkungen:

- Der Eigendrehimpuls (Spin) erfüllt die Drehimpulsalgebra, kann aber auch halbzahlig sein.
- Der Gesamtdrehimpuls  $\hat{\vec{J}}$  eines Teilchen ist die Summe aus Bahn- und Eigendrehimpuls:

$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$$

## 1.1 Addition von Drehimpulsen

Z.B. Um Atom mit mehreren Elektronen zu Berechnen.

**Hinweis: Im Folgenden werden die Operatoren Hütchen weggelassen!**

Der Gesamtdrehimpuls ist gegeben durch  $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$  ( $\vec{J}_1$  und  $\vec{J}_2$  erfüllen die Drehimpulsalgebra).

$\vec{J}_1$  und  $\vec{J}_2$  vertauschen untereinander ( $[\vec{J}_1, \vec{J}_2] = 0$ ), jedoch vertauschen sie nicht mit dem Gesamtdrehimpulsquadrat:

$$\begin{aligned} [\vec{J}_1, \vec{J}^2] &\neq 0 \neq [\vec{J}_2, \vec{J}^2] \\ \text{mit } \vec{J}^2 &= \vec{J}_1^2 + \vec{J}_2^2 + 2\vec{J}_1\vec{J}_2 \end{aligned}$$

d.h wir können keine ONB finden für z. B.  $J_{1z}, J_{2z}, \vec{J}^2$

Relevant ist dies zum Beispiel für Mehrteilchensysteme:

- Spin-Bahn-Kopplung (relativistischer Effekt)
- Bandstruktur in Halbleitern und Festkörpern allgemein

### 1.1.1 Addition von zwei Spin $\frac{1}{2}$ Operatoren

Die Operatoren  $\vec{S}_1, \vec{S}_2$  vertauschen miteinander  $[S_{1,i}, S_{2,j}] = 0$ . Die Zustände für jeden Spin  $|s, m\rangle$  sind  $s = \frac{1}{2}$  und  $m = \pm\frac{1}{2}$ .

Die abkürzende Schreibweise hierfür ist:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &=: |\uparrow\rangle \hat{=} \text{„spin up“} \\ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &=: |\downarrow\rangle \hat{=} \text{„spin down“} \end{aligned}$$

Der Produktraum vom Spin up und Spin down hat vier Zustände:

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle_1 \oplus |\uparrow\rangle_2 &= |\uparrow\rangle |\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\uparrow\rangle_1 \oplus |\downarrow\rangle_2 &= |\uparrow\rangle |\downarrow\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle \\ |\downarrow\rangle_1 \oplus |\uparrow\rangle_2 &= |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle \\ |\downarrow\rangle_1 \oplus |\downarrow\rangle_2 &= |\downarrow\rangle |\downarrow\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \end{aligned}$$

Der Gesamtspin  $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$  erfüllt die Drehimpulsalgebra  $\rightarrow$  Eigenzustände besitzen die Form  $|s, m\rangle$ .  $s$  und  $m$  sind zu bestimmen.

**Hinweis: In diesem Kapitel wird  $\hbar$  auf 1 normiert ( $\hbar = 1$ )!**

Produktzustände sind Eigenzustände von  $S_z = S_{1z} + S_{2z}$ :

$$\begin{aligned}
 S_z |\uparrow\uparrow\rangle &= (S_{1z} + S_{2z}) |\uparrow\uparrow\rangle = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) |\uparrow\uparrow\rangle = 1 \cdot |\uparrow\uparrow\rangle \quad \hat{=} \quad \text{ganzzahlig} \\
 S_z |\uparrow\downarrow\rangle &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) |\uparrow\downarrow\rangle = 0 \cdot |\uparrow\downarrow\rangle \quad \hat{=} \quad \text{ganzzahlig} \\
 S_z |\downarrow\uparrow\rangle &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) |\downarrow\uparrow\rangle = 0 \cdot |\downarrow\uparrow\rangle \quad \hat{=} \quad \text{ganzzahlig} \\
 S_z |\downarrow\downarrow\rangle &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) |\downarrow\downarrow\rangle = -1 \cdot |\downarrow\downarrow\rangle \quad \hat{=} \quad \text{ganzzahlig}
 \end{aligned}$$

=: Die Werte von  $m$  sind ganzzahlig (-1, 0, 1).

Um die Eigenzustände und Eigenwerte von  $\vec{S}^2$  zu bestimmen benutzen wir:

$$\begin{aligned}
 \vec{S}^2 &= (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2\vec{S}_1\vec{S}_2 \\
 &= \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2S_{1z}S_{2z} + \underbrace{2S_{1x}S_{2x} + 2S_{1y}S_{2y}}_{S_1^+ S_2^- + S_1^- S_2^+}
 \end{aligned}$$

Für den Spin  $\frac{1}{2}$  gilt  $\vec{S}_1^2 = \frac{3}{4} = \vec{S}_2^2$ . Hiermit lässt sich  $\vec{S}^2$  ausrechnen:

$$\begin{aligned}
 \vec{S}^2 |\uparrow\uparrow\rangle &= \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 + 0\right) |\uparrow\uparrow\rangle \\
 &= 2 \cdot |\uparrow\uparrow\rangle = s(s+1) |\uparrow\uparrow\rangle \\
 &=: s = 1 \text{ für } |\uparrow\uparrow\rangle \text{ Zustand} \\
 &=: |\uparrow\uparrow\rangle = |s=1, m=1\rangle
 \end{aligned}$$

Für den Eigenzustand  $|\downarrow\downarrow\rangle$  lässt sich ebenso berechnen, dass gilt:

$$|\downarrow\downarrow\rangle = |s=1, m=-1\rangle$$

Um  $|s=1, m=0\rangle$  zu erhalten, verwenden wir:

$$\begin{aligned}
 S^- &= S_1^- + S_2^- \\
 S^- |\uparrow\uparrow\rangle &= (S_1^- + S_2^-) |\uparrow\uparrow\rangle \\
 &= |\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle \\
 S^- |1, 1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle \\
 =: |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)
 \end{aligned}$$

Der letzte Zustand (orthogonal zu  $|1, 0\rangle$ ) ist:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) = |s=0, m=0\rangle$$

Somit sind die Eigenzustände von  $\vec{S}^2$  und  $S_z$ :

$ 0,0\rangle$	$= \frac{1}{\sqrt{2}} ( \uparrow\downarrow\rangle -  \downarrow\uparrow\rangle)$	„Singulett“ Zustand
$ 1,1\rangle$	$=  \uparrow\uparrow\rangle$	„Triplet“ Zustand
$ 1,0\rangle$	$= \frac{1}{\sqrt{2}} ( \uparrow\downarrow\rangle +  \downarrow\uparrow\rangle)$	
$ 1,-1\rangle$	$=  \downarrow\downarrow\rangle$	

### 1.1.2 Addition von zwei allg. Drehimpulsoperatoren

Seien  $\vec{J}_1, \vec{J}_2$  zwei Drehimpulsoperatoren, die untereinander vertauschen ( $[J_{1i}, J_{2j}] = 0$ )  
Wähle eine Basis im Produktraum von  $\vec{J}_1, \vec{J}_2$ :

$$|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \quad (3)$$

Der Gesamtdrehimpuls ergibt sich aus der Addition der einzelnen Drehimpulse ( $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ ) und erfüllt die Drehimpulsalgebra (siehe 2):

$$\vec{J} \times \vec{J} = i\hbar \vec{J}$$

Gesucht: Eigenzustände  $|j, m\rangle$  von  $\vec{J}^2$  und  $J_z$ . Es gilt:

$$[\vec{J}^2, \vec{J}_1^2] = 0 = [\vec{J}^2, \vec{J}_2^2]$$

=: Eine ONB ist gegeben durch

$$|j_1, j_2, j, m\rangle \quad (4)$$

Da gilt  $[\vec{J}^2, J_{1z}] \neq 0 \neq [\vec{J}^2, J_{2z}]$  sind die Zustände (3) keine Eigenzustände von  $\vec{J}^2$ .  
Im Folgenden werden die Zustände (4) nach der Basis (3) zerlegt:

$$|j_1, j_2, j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j_1, j_2, j, m\rangle$$

→ Wir summieren nicht über  $j_1$  und  $j_2$ , da sowohl  $|j_1, j_2, j, m\rangle$  sowie  $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$  Eigenzustände von  $\vec{J}_1^2$  und  $\vec{J}_2^2$  sind und Eigenzustände zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind.

→ Die Koeffizienten  $\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j_1, j_2, j, m\rangle$  heißen Clebsch-Gordan-Koeffizienten

→ Es gilt außerdem  $m = m_1 + m_2$ , da

$$\begin{aligned} J_z |j_1, j_2, j, m\rangle &= m |j_1, j_2, j, m\rangle \\ &= \underbrace{m_1 + m_2}_{\text{EW von } J_z} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \end{aligned}$$

Da  $m_1 + m_2$  Eigenzustände von  $J_j$  sind, ist die Summe beschränkt auf  $(m_1 + m_2) = m$   
**Bemerkungen:**

- Mögliche  $j$ -Werte bei gegebenen  $j_1$  und  $j_2$  sind (analog zur klassischen Addition):

$$\underbrace{|j_1 - j_2|}_{\text{min. Drehimpuls}} \leq j \leq \underbrace{|j_1 + j_2|}_{\text{max. Drehimpuls}}$$

- Anzahl der Zustände im  $j_1-j_2$  Unterraum bei  $2j+1$  Zuständen pro  $j$  ist gegeben durch:

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{|j_1+j_2|} 2j+1 \stackrel{k=j-j_1}{=} \sum_{k=-j_2}^{+j_2} 2(j_1+k)+1 = (2j_1+1)(2j_2+1)$$

- Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind aus Tabellen zu entnehmen.

### Vorgehen zur Bestimmung der Clebsch-Gordan Koeffizienten

Der Ausgangszustand:

$$|j=j_1+j_2, m=j_1+j_2\rangle = |j_1, j_2, m_1=j_1, m_2=j_2\rangle =: |j_1\rangle |j_2\rangle$$

ist so gewählt, dass  $J_z$  maximal ist, dieser Zustand ist eindeutig.

1. Erzeuge Zustände mit gleichen  $j = j_1 + j_2$  mit Hilfe von  $J^- = J_1^- + J_2^-$ :

$$\begin{aligned} J^- |j_1+j_2, j_1+j_2\rangle &= a_{j_1+j_2, j_1+j_2}^- |j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle \\ &= (J_1^- + J_2^-) |j_1\rangle |j_2\rangle = a_{j_1, j_1}^- |j_1-1\rangle |j_2\rangle + a_{j_2, j_2}^- |j_1\rangle |j_2-1\rangle \end{aligned} \quad (5)$$

Multipliziere  $\langle j_1-1|$   $\langle j_2|$  bzw.  $\langle j_1|$   $\langle j_2-1|$  an die Gleichung, sodass unter ausnutzen der Normierung und Orthogonalität die Gleichung nach den Clebsch-Gordan-Koeffizient umgestellt werden kann:

$$C_{j_1-1, j_2}^{j_1+j_2, j_1+j_2-1} = \frac{a_{j_1, j_1}^-}{a_{j_1+j_2, j_1+j_2}^-}$$

Bzw.

$$C_{j_1, j_2-1}^{j_1+j_2, j_1+j_2-1} = \frac{a_{j_2, j_2}^-}{a_{j_1+j_2, j_1+j_2}^-}$$

2. Konstruiere  $|j_1+j_2-1, j_1+j_2-1\rangle$   
Dieser Zustand ist orthogonal zu (5), somit ergibt sich:

$$|j_1+j_2-1, j_1+j_2-1\rangle = C_{j_1, j_2-1}^{j_1+j_2, j_1+j_2-1} |j_1-1, j_2\rangle - C_{j_1-1, j_2}^{j_1+j_2, j_1+j_2-1} |j_1, j_2-1\rangle$$

Die  $J_z$ -Quantenzahl ist wiederum maximal, mit Schritt 1 lässt sich nun fortfahren. Durch rekursives Anwenden dieser Schritte können die restlichen Clebsch-Gordan-Koeffizienten berechnet werden.

## 1.2 Zeitabhängige Störungstheorie

Gesucht ist eine Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung (SGL)

$$i\hbar \partial_t \psi(t) = \mathcal{H}(t) \psi(t)$$

$$\text{mit dem Hamiltonoperator } \mathcal{H}(t) = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}, t)$$

Wenn das Potential  $V(\vec{r}, t)$  zeitunabhängig ist, lässt sich der Ansatz

$$\psi(t) = e^{\frac{iEt}{\hbar}} \psi$$

verwenden:

$$\rightarrow E\psi = \mathcal{H}\psi \quad (6)$$

$$\rightarrow \text{EW ist } E_n \text{ zum EZ } \psi_n$$

Die Allgemeine Lösung ergibt sich aus dem Superpositionsprinzip:

$$\psi(t) = \sum_n c_n e^{\frac{iE_n t}{\hbar}} \psi_n$$

Die  $c_n$  sind komplexe Koeffizienten, die von den Anfangsbedingungen abhängen. Häufig ist das Potential  $V$  separierbar in einen zeitunabhängigen und einen zeitabhängigen Anteil.

Die Hamiltonfunktion ergibt sich dann als:

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}'(t)$$

Eine allgemeine Lösung ist  $\psi(t) = \sum_n c_n(t) \psi_n$ , wobei  $\psi_n$  die Eigenzustände von  $\hat{\mathcal{H}}_0$  sind.

### 1.2.1 Zeitunabhängige Störungstheorie

Die Störung sei zeitunabhängig. So lässt sich der Hamiltonoperator in einen ungestörten und einen gestörten Anteil aufspalten:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \lambda \mathcal{H}'$$

Hierbei ist  $\lambda$  ein dimensionsloser Entwicklungsparameter:

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots \\ |\psi_n\rangle &= |\psi_n^{(0)}\rangle + \lambda |\psi_n^{(1)}\rangle + \lambda^2 |\psi_n^{(2)}\rangle + \dots \end{aligned}$$

Für nicht entartete Eigenwerte folgt aus Gleichung (6):

$$\begin{aligned} E_n^{(1)} &= \langle \psi_n^{(0)} | \mathcal{H}' | \psi_n^{(0)} \rangle \\ |\psi_n^{(1)}\rangle &= \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m^{(0)} | \mathcal{H}' | \psi_n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |\psi_m^{(0)}\rangle \end{aligned}$$

Entartung: Zunächst wird  $\mathcal{H}'$  im Unterraum  $E_n^{(0)}$  diagonalisiert

### 1.2.2 Zeitabhängigkeiten in der Quantenmechanik

Bisher haben wir uns nur mit dem **Schrödingerbild** befasst:

- Zustandsvektoren waren zeitabhängig  $|\psi(t)\rangle$  gemäß der Schrödingergleichung

$$i\hbar |\dot{\psi}(t)\rangle = \mathcal{H}(t) |\psi(t)\rangle$$

- Operatoren  $A(t)$  können explizit von der Zeit abhängen. Z.B. kann ein Potential explizit von der Zeit abhängen:  $V = V(\vec{r}, t)$
- Der Erwartungswert, gemittelte Messergebnisse der Observablen:

$$\langle A \rangle = \langle \psi(t) | A(t) | \psi(t) \rangle$$

- Für zeitunabhängigen Hamiltonoperator ist eine formale Lösung:

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{-i\mathcal{H}t}{\hbar}} |\psi(0)\rangle$$

Eine alternative Darstellung bei der die Zeitabhängigkeit in den Operatoren steckt, ist die **Heisenberg -Bild** Darstellung.

Definition:

- Zustand  $|\psi\rangle_H := e^{\frac{-i\mathcal{H}t}{\hbar}} |\psi(t)\rangle$
- Operatoren  $A_H(t) = e^{\frac{i\mathcal{H}t}{\hbar}} A(t) e^{\frac{-i\mathcal{H}t}{\hbar}}$   
(gilt nur bei zeitunabhängigen Hamiltonoperatoren)
- Erwartungswert bleibt unverändert:

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | A(t) | \psi(t) \rangle &= \langle \psi | e^{\frac{i\mathcal{H}t}{\hbar}} A(t) e^{\frac{-i\mathcal{H}t}{\hbar}} | \psi \rangle \\ &=: {}_H \langle \psi | A_H(t) | \psi \rangle_H \end{aligned}$$

Die Zeitentwicklung ist bestimmt durch die Operatorengleichung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_H(t) &= \frac{d}{dt} \left( e^{\frac{i\mathcal{H}t}{\hbar}} A(t) e^{\frac{-i\mathcal{H}t}{\hbar}} \right) \\ &= e^{\frac{i\mathcal{H}t}{\hbar}} \left( \underbrace{\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} A(t) - \frac{i}{\hbar} A(t) \mathcal{H}}_{= \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, A]} + \frac{\partial}{\partial t} A(t) \right) e^{\frac{-i\mathcal{H}t}{\hbar}} \\ &= \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, A_H(t)] + \left( \frac{\partial}{\partial t} A(t) \right)_H \end{aligned}$$

Die oben stehende Gleichung wird auch **Heisenberg Gleichung** genannt.

Für zeitabhängige Probleme wird im Folgenden eine gemischte Darstellung eingeführt.



## Dirac- oder Wechselwirkungsbild

Es sei  $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0 + V(t)$ .

Definition:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_I &= e^{\frac{i\mathcal{H}_0 t}{\hbar}} |\psi(t)\rangle \\ A_I(t) &= e^{\frac{i\mathcal{H}_0 t}{\hbar}} A(t) e^{-\frac{i\mathcal{H}_0 t}{\hbar}} \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung ist:

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t |\psi(t)\rangle_I &= e^{\frac{i\mathcal{H}_0 t}{\hbar}} (-\mathcal{H}_0 + i\hbar \partial_t) |\psi(t)\rangle \\ &= e^{\frac{i\mathcal{H}_0 t}{\hbar}} \underbrace{(-\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}(t))}_{V(t)} |\psi(t)\rangle \\ &=: V_I(t) |\psi(t)\rangle_I \end{aligned} \quad (7)$$

Das  $_I$  steht für das englische Wort „Interaction“ für Wechselwirkung:

## Allgemeine Lösung der Schrödingergleichung im Wechselwirkungs (Ww)- Bild

Anfangsbedingungen:  $|\psi(0)\rangle_I = |\psi(0)\rangle = |\psi_0\rangle$

Integriere Gleichung (7):

$$|\psi(t)\rangle_I = |\psi_0\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V_I(t') |\psi(t')\rangle_I$$

l.S. in r.S. einsetzen

$$|\psi_I(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V_I(t') |\psi_0\rangle + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' V_I(t') V_I(t'') |\psi(t'')\rangle$$

Durch wiederholtes Einsetzen der linken Seite in die rechte, entsteht eine unendliche Summe:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \cdot V_I(t_1) V_I(t_2) \cdots V_I(t_n) |\psi_0\rangle \quad (8) \\ &=: U(t,0) |\psi_0\rangle \end{aligned}$$

$U(t,0)$  ist der Zeitentwicklungsoperator, in ihm stehen zeitabhängige Operatoren, die nach den Zeiten geordnet sind, sodass die Zeiten von rechts nach links zunehmen (folgt aus den Integralgrenzen).

Definition Zeitordnungsoperator:

$$T(A(t)B(t')) = \begin{cases} A(t)B(t') & t > t' \\ B(t')A(t) & t < t' \end{cases}$$

Der Zeitordnungsoperator kann zwei Operatoren einfach vertauschen, ohne dass ihr Kommutator null gleicht.

Mit den Zeitordnungsoperator lässt sich der Zeitentwicklungsoperator schreiben:

$$T \left( \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \cdot V_I(t_1) V_I(t_2) \cdots V_I(t_n) \right)$$

ergänze die Integrale:

$$\begin{aligned} &= T \left( \frac{1}{n!} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \cdots \int_0^t dt_n \cdot V_I(t_1) V_I(t_2) \cdots V_I(t_n) \right) \\ &= T \left( \frac{1}{n!} \left[ \int_0^t dt' V_I(t') \right]^n \right) \end{aligned}$$

Aus Gleichung (8) ergibt sich somit für den Zeitentwicklungsoperator:

$$\begin{aligned} U(t,0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-i}{\hbar} \right)^n T \left( \left[ \int_0^t dt' V_I(t') \right]^n \right) \\ &= T \left( \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V_I(t') \right] \right) \end{aligned}$$

Eigenschaften des Zeitentwicklungsoperator:

- Erfüllt die Differentialgleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t,0) = U(t,0) V_I(t,0)$$

- $U(0,0) = 1$
- Zusammensetzregel  $U(t,t')U(t',0) = U(t,0)$ :  
Falls  $[V_I(t), V_I(t')] = 0$ , so wird der Zeitordnungsoperator überflüssig.

$$U(t,0) = \exp \left[ \frac{-i}{\hbar} \int_0^t dt' V_I(t') \right]$$

- In niedrigster Ordnung ist der Zeitordnungsoperator ebenfalls überflüssig:

$$U(t,0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V_I(t')$$

### 1.2.3 Übergangswahrscheinlichkeit

Generelle Frage: Ein System sei in einem Ausgangszustand  $|i\rangle$  (meist ist dies ein EZ von  $\mathcal{H}_0$ ) zur Zeit  $t = 0$  präpariert. Bei  $t = 0$  wird eine Störung zugeschaltet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das System zur Zeit  $t$  in dem Zustand  $|f\rangle$ ?

**Übergangswahrscheinlichkeit:**

$$P_{i \rightarrow f}(t) = \left| \langle f | \underbrace{|\psi(t)\rangle}_{\text{Zustand zur Zeit } t} \rangle \right|^2$$

Im Dirac-Bild:

$$= \left| \left\langle f \left| e^{-\frac{i\mathcal{H}_0 t}{\hbar}} \right| \psi(t) \right\rangle_I \right|^2$$

da  $\mathcal{H}_0 |f\rangle = E_f |f\rangle$ ,  $|f\rangle$  ist EZ

$$= \left| \underbrace{e^{-\frac{-iE_f t}{\hbar}}}_{|\oplus|=1} \langle f | \psi(t) \rangle_I \right|^2$$

Näherung kleine Störung, bis 1. Ordnung

$$\begin{aligned} &\approx \left| \langle f | i \rangle - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \langle f | V_I(t') | i \rangle \right|^2 \\ &\stackrel{i \neq f}{=} \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t dt' \left\langle f \left| e^{\frac{i\mathcal{H}_0 t'}{\hbar}} V(t') e^{-\frac{i\mathcal{H}_0 t'}{\hbar}} \right| i \right\rangle \right|^2 \\ &\stackrel{*}{=} \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t dt' \exp \left[ \frac{i(E_f - E_i)}{\hbar} t' \right] \langle f | V(t') | i \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (9)$$

\*) Die Gleichheit herrscht, da  $H_0$  hermitesch und  $\langle f|$  und  $|i\rangle$  Eigenzustände sind.

Annahme:

$V$  wird einmal eingeschaltet, sonst hängt  $V$  nicht von der Zeit ab  $\rightarrow$  konstante Stö-

rung.

$$\begin{aligned}
 V(t) &= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V & t > 0 \end{cases} \\
 =: P_{i \rightarrow f}(t) &= \frac{1}{\hbar^2} |\langle f | V | i \rangle|^2 \cdot \underbrace{\left| \int_0^t dt' e^{i\omega_{fi}t'} \right|^2}_* \\
 * &= \left| \frac{1}{i\omega_{fi}} (e^{i\omega_{fi}t} - 1) \right|^2 = \frac{\sin^2(\omega_{fi} \frac{t}{2})}{\underbrace{(\frac{\omega_{fi}}{2})^2}_{2\pi t \delta(\omega_{fi}t) \text{ für } \omega_{fi}t \rightarrow \infty}} \\
 \text{mit } \omega_{fi} &= \frac{E_f - E_i}{\hbar}
 \end{aligned}$$

Grenzfälle:

- Für kleine  $t$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin^2(\omega_{fi}t \frac{1}{2})}{(\omega_{fi} \frac{1}{2})} &\approx t^2 \\
 \text{für } t &\ll \frac{2\pi}{\omega_{fi}} \\
 =: P_{i \rightarrow f}(t) &\approx \frac{1}{\hbar^2} |\langle f | V | i \rangle|^2 t^2
 \end{aligned}$$

- Falls  $P_{f \rightarrow i} \approx 1$  bricht die einfache Störungstheorie zusammen.
- Langzeitverhalten: Für  $t \gg \frac{2\pi}{\omega_{fi}}$  folgt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin^2(\omega_{fi}t \frac{1}{2})}{(\omega_{fi} \frac{1}{2})^2} &\approx 2\pi t \delta(\omega_{fi}) \\
 =: \Gamma_{i \rightarrow f} &= \frac{d}{dt} P_{i \rightarrow f}(t) = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | V | i \rangle|^2 \cdot \delta(E_f - E_i)
 \end{aligned}$$

Die oben stehende Gleichung wird auch als „Fermis Goldene Regel“ bezeichnet.

## Übergang in ein Kontinuum

Führe Zustandsdichten der Endzustände ein:

$$\rho(\varepsilon) := \sum_f \delta(\varepsilon - E_f)$$

für beliebige Fkt  $g$ :

$$\sum_f g(E_f) = \int d\varepsilon \rho(\varepsilon) g(\varepsilon)$$

Für die Übergangsrate von  $|i\rangle$  in irgendeinen Endzustand gilt:

$$\begin{aligned} \Gamma_i = \sum_f \Gamma_{i \rightarrow f}(E_f) &= \int d\varepsilon \rho(\varepsilon) \frac{2\pi}{\hbar^2} |\langle \varepsilon_{f=\varepsilon} | V | i \rangle|^2 \delta(\varepsilon - E_i) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar^2} |\langle f | V | i \rangle|^2 \rho(\varepsilon - E_i) \end{aligned}$$

## Gültigkeit

Energieskalen im Kontinuum:

- mittlerer Niveauabstand:  $\delta_{\varepsilon_f}$
- Intervall der betrachteten Zustände:  $\Delta_{\varepsilon_f}$

Das Inverse der Energie  $\frac{2\pi\hbar}{\delta_f}$  kann als Zeit betrachtet werden. Das kleinste Energieintervall entspricht so dem größten Zeitintervall. Je größer  $t$  wird, desto genauer wird die Messung.

$$\underbrace{\frac{2\pi\hbar}{\delta_{\varepsilon_f}}}_{\text{Kontinuumsnäherung}} \gg t \gg \underbrace{\frac{2\pi\hbar}{\Delta_{\varepsilon_f}}}_{\text{Energie-Zeit-Unschärfe}}$$

## Periodische Störung

$$V(t) = F e^{i\omega t} + F^+ e^{-i\omega t}$$

Setzt man dieses Potential in Gleichung (9) ein, so folgt für die Übergangswahrscheinlichkeit:

$$P_{i \rightarrow f}(t) = \frac{1}{\hbar} \left| \int_0^t dt' \left( e^{i(\omega_{fi}-\omega)t'} \langle f | F | i \rangle + e^{i(\omega_{fi}+\omega)t'} \langle f | F^+ | i \rangle \right) \right|^2$$

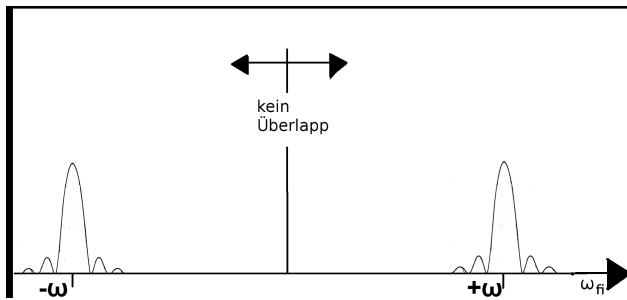


Abbildung 1: Für große Zeiten  $\omega t \gg 1$

$$\begin{aligned} \Gamma_{i \rightarrow f} &= \dot{P}_{i \rightarrow f}(t) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \left[ |\langle f | F | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega) + |\langle f | F^+ | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i + \hbar\omega) \right] \end{aligned}$$

: Anfangs- und Endzustand unterscheiden sich in der Energiemenge  $\hbar\omega$   
 Die Energieerhaltung wird unter Absorption der Endzustandsenergiedifferenz erhalten:

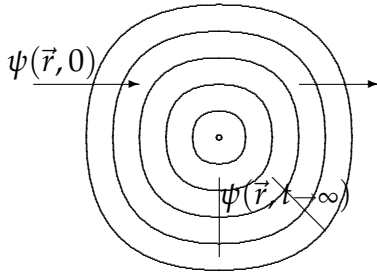
$$E_f = E_i + \hbar\omega \quad \text{bzw. Emission} \quad E_f = E_i - \hbar\omega$$

Die Quantenfeldtheorie ergibt einen Korrekturterm, der später in der Vorlesung behandelt wird.

## 1.3 Streutheorie

### 1.3.1 Streuung eines Wellenpakets

**Problem:** Es gibt ein lokalisiertes Potential (z.B. Atom, Kern, Störstellen), wie wird dann ein Teilchen davon abgelenkt?



Ein ebenes Wellenpaket  $\psi(\vec{r}, 0)$  fliege mit der Geschwindigkeit  $\frac{\hbar \vec{k}_0}{m}$  auf ein lokalisiertes Potential zu. In dessen Wechselwirkungsbereich ist das Potential ungleich Null ( $V(\vec{r}) \neq 0$ ). Ein Teil des Wellenpakets  $\psi(\vec{r}, 0)$  läuft mit geringerer Intensität als ebene Welle weiter, während ein anderer Teil  $\psi(\vec{r}, t \rightarrow \infty)$  als Kugelwelle aus dem Wechselwirkungspotential austritt.

Zu dem Wellenpaket gehört der Hamiltonoperator  $\mathcal{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r})$ . Das einfallende Wellenpaket zur Zeit  $t$  lässt sich wie folgt beschreiben:

$$\psi(\vec{r}, t=0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \underbrace{e^{i\vec{k}\vec{r}}}_{*} a_{\vec{k}} \quad (10)$$

\* ist ein Eigenzustand des ungestörten Hamiltonoperators  $\frac{\hbar^2 \Delta}{2m}$  mit dem Eigenwert  $E_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

Der Eigenzustand des vollständigen Hamiltonoperators mit der Energie  $E_{\vec{k}}$  ist:

$$\left( \frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + E_{\vec{k}} \right) \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = V(\vec{r}) \psi_{\vec{k}}(\vec{r})$$

Entwickle den Eigenzustand  $\psi(\vec{r}, 0)$  in  $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ :

$$\psi(\vec{r}, 0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) a_{\vec{k}}$$

Wegen der asymptotischen Form  $e^{i\vec{k}\vec{r}}$  der  $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$  sind die  $a_{\vec{k}}$  die selben wie in Gleichung (10). D.h. es kommen keine gebundenen Zustände vor (die würden per Definition für  $|\vec{r}| \rightarrow \infty$  verschwinden).

Zustände zu beliebiger späteren Zeiten  $t > 0$

$$\psi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) a_{\vec{k}} e^{\frac{-iE_{\vec{k}}t}{\hbar}}$$

Mit der oben stehenden Gleichung ist die Zeitentwicklung berechenbar. Wir werden hier jedoch nur die qualitative Zeitentwicklung erläutern:

Nach der Streuung wird einerseits das Wellenpaket mit geringerer Intensität weiterlaufen und andererseits wird eine gestreute Kugelwelle auslaufen, die jedoch eine winkelabhängige Amplitude besitzt.

### 1.3.2 Formale Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung

Bestimmung der  $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$  ist mit Hilfe der **Greenschen Funktion** möglich:

$$\underbrace{\left( \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + E_{\vec{k}} \right)}_{\text{Stationäre Wellengl.}} \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \underbrace{V(\vec{r}) \psi_{\vec{k}}(\vec{r})}_{\text{Inhomogenität}} \quad (11)$$

Definition: Greensche Funktion (G) der freien Schrödingergleichung:

$$\left( \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + E_{\vec{k}} \right) G_{\vec{k}}(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

GF der Wellengl:

$$G_{\vec{k}}(r) = \frac{-m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r}$$

Die Greensche Funktion hat wie vermutet die Form einer auslaufenden Kugelwelle. Damit wird aus Gleichung (11) eine Integralgleichung:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \underbrace{e^{i\vec{k}\vec{r}}}_{*} + \int d^3r' G(\vec{r} - \vec{r}') V(\vec{r}') \psi_{\vec{k}}(\vec{r}')$$

\*) Dies ist die Lösung der homogenen Gleichung, damit die Anschlussbedingungen für weit vom Potential entfernte Orte erfüllt ist.

Asymptotisches Verhalten für  $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ :

$$\begin{aligned} k \cdot |\vec{r} - \vec{r}'| &= k \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\vec{r}'} \\ &\approx kr \sqrt{1 - \frac{2\vec{r}\vec{r}'}{r^2}} \approx kr - \underbrace{\vec{k}_{\vec{r}}\vec{r}'}_{\ll 1} \end{aligned}$$

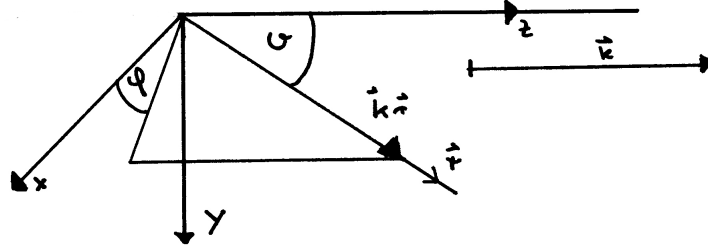
mit  $\vec{k}_{\vec{r}} = k \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

Damit wird aus der Welle:

$$\begin{aligned} \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) &= e^{i\vec{k}\vec{r}} + e^{ikr} \frac{1}{r} f_{\vec{k}}(\vartheta, \varphi) \\ \text{mit } f_{\vec{k}}(\vartheta, \varphi) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{-i\vec{k}_{\vec{r}}\vec{r}'} V(\vec{r}') \psi_{\vec{k}}(\vec{r}') \end{aligned}$$



$f_{\vec{k}}(\vartheta, \varphi)$  wird auch Streuamplitude bezeichnet. Sie hängt nur von der Richtung  $\frac{\vec{r}}{r}$  der Beobachtung ab. Ihre Dimension ist die einer Länge.



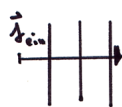
Bemerkung:  $f_{\vec{k}}$  hängt zusätzlich von der exakten Lösung  $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$  der Schrödingergleichung ab.

### 1.3.3 Streuquerschnitt / Wirkungsquerschnitt

Definiere: **differentieller Streuquerschnitt:**

$$d\sigma = \frac{\text{Strom der nach } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Stromdichte der einfallenden Teilchen}} = \frac{dI(\Omega)}{j_{\text{ein}}} = \frac{j_r r^2 d\Omega}{j_{\text{ein}}}$$

mit  $\vec{j}_{\text{ein}} = \frac{\hbar \vec{k}}{m}$



Radial auslaufende Lösung:

$$\begin{aligned} j_r &= \frac{\hbar}{2m} m (\psi^* \partial_r \psi) \\ \text{mit } \psi &\sim \frac{e^{ikr}}{r} \\ &= \frac{\hbar}{2m} \frac{k}{r^2} |f(\vartheta, \varphi)|^2 \\ \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} &= |f(\vartheta, \varphi)|^2 \end{aligned}$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$  wird als differentieller Streuquerschnitt bezeichnet. Die gesamte „Wahrscheinlichkeit“ einer Streuung ist der **totale Streuquerschnitt**:

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int d\Omega |f_{\vec{k}}(\vartheta, \varphi)|^2$$

$\sigma$  hat die Einheit einer Fläche,  $\sigma$  entspricht dem Querschnitt des Potentials.

### 1.3.4 Partialwellen-Zerlegung

Falls  $V(\vec{r})$  nur von  $|\vec{r}|$  abhängig ist, so hängt  $f_{\vec{k}}(\vartheta, \varphi)$  nicht von  $\varphi$  ab (folgt aus der Rotationssymmetrie um die Einfallssachse).

Zerlege die Streuamplitude  $f_{\vec{k}}(\vartheta)$  der Kugelflächenfunktionen ( $Y_{lm}$ , hier nur  $m = 0$ )

$$\rightarrow f_{\vec{k}}(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(k) P_l(\cos \vartheta) \quad (12)$$

Die  $P_l(\cos \vartheta)$  sind Legendre Polynome;  $f_l(k)$  heißt Partialwellenamplitude.

Die Zerlegung einer ebenen Welle:

$$e^{kr \cos \vartheta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \underbrace{j_l(kr)}_{\text{sphärische Besselfkt.}} P_l(\cos \vartheta) \quad (13)$$

Die sphärische Besselfunktionen sind Lösungen der radialen Schrödingergleichung ohne Potential. Es gilt außerhalb von dem Potential:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} f_{\vec{k}}(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) R_l(r) P_l(\cos \vartheta) \quad (14)$$

$R_l$  sind Lösungen der radialen Schrödingergleichung mit dem Potential  $V(\vec{r})$

Asymptotisches vergleichen von Gleichungen (12, 13, 14) ergibt:

$$R_l(r) \approx i^l j_l(kr) + \frac{e^{ikr}}{r} f_l(k)$$

Asymptotisches Verhalten ( $kr \rightarrow \infty$ ):

$$j_l(kr) = \frac{1}{2ikr} \left( (-i)^l e^{ikr} - i^l e^{-ikr} \right)$$

$$\text{Damit } R_l(r) = \frac{1}{2ik} \left[ (1 + 2ikf_l(k)) \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{-i(kr-l\pi)}}{r} \right]$$

= : Effekt des Potentials ist eine Änderung des Vorfaktors der auslaufenden Kugelwelle in  $1 + 2ikf(k) = S_l(k)$  S-Matrix.

Aus der Unitarität folgt, dass Strom- und Drehimpulserhaltung gilt:

- Wahrscheinlichkeitsstromdichte ist erhalten, die einlaufende- ist gleich der auslaufenden Wahrscheinlichkeitsstromdichte.
- Das System ist rotationssymmetrisch, mit dem Noethertheorem folgt die Drehimpulserhaltung

= : Für jede Partialwelle ist der Betrag der einlaufenden Welle gleich der auslaufenden.

$$\begin{aligned} |1 + 2ik f_l(k)| &= |S_l(k)| = 1 \\ \text{Ansatz } S_l &= e^{2i\delta_l} \\ R_l(r) &\sim -\frac{1}{kr} \left[ e^{i(kr+2\delta_l)} - e^{-i(kr-l\pi)} \right] \end{aligned}$$

Der Effekt der Streuung ist eine reine Phasenverschiebung der auslaufenden Kugelwelle. : Streuphase  $\delta_l$

$$\begin{aligned} f_l &= \frac{1}{2ik} (e^{i2\delta_l} - 1) = \frac{1}{k} e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) \approx \frac{\delta_l}{2} \\ \text{gesamte Amplitude:} \\ f_k(\vartheta) &= \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) P_l(\cos(\vartheta)) \end{aligned}$$

Der Streuquerschnitt ist somit:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int d\Omega |f_k(\vartheta)|^2 \\ &= \int d\Omega \sum_{l,l'} (2l+1)(2l'+1) f_l f_{l'} P_l(\cos(\vartheta)) P_{l'}(\cos(\vartheta)) \\ &\stackrel{*}{=} 4\pi \sum_l (2l+1) |f_l|^2 \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2(\delta_l) \end{aligned} \quad (15)$$

\*) Das Integral über die zwei Legendre Polynome ergibt eine Deltafunktion  $\delta_{ll'}$  mit einem Vorfaktor.

Optisches Theorem:

Das optische Theorem gilt für den Imaginärteil der Partialwellenamplitude und damit gilt:

$$\begin{aligned} \text{Im}(f_l(k)) &= \frac{1}{k} \sin^2(\delta_l) \\ \text{Im}(f_k(\vartheta)) &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{1}{k} \sin^2(\delta_l) P_l(\cos(\vartheta)) \end{aligned}$$

Für  $\vartheta = 0$  ist das Legendre Polynom gleich 1 ( $P_l(1) = 1$ ) und durch vergleichen mit Gleichung (15) folgt:

$$\boxed{\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(f_k(0))}$$

Die oben stehende Gleichung wird optisches Theorem genannt.

- Der gesamten gestreute Amplitude, entspricht der Abschwächung der durchgehenden Welle ( $\vartheta = 0$ ).
- Das optische Theorem gilt allgemein, d.h. nicht nur für Zentralpotentiale.

### 1.3.5 Bornsche Näherung

Bestimmungsgleichung für Streuamplitude

$$f_{\vec{k}}(\vartheta, \varphi) = \frac{-m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{-i\vec{k}_{\vec{r}'}\vec{r}'} V(\vec{r}') \psi_{\vec{k}}(\vec{r})$$

Näherung:  $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \approx e^{i\vec{k}\vec{r}}$  für schwache Potentiale

#### 1. Zentralpotential $\hat{= V(\vec{r}') = V(r)$

Setzen Entwicklungen nach  $P_l$  und  $Y_{lm}$  (Kugelflächenfunktion) an:

$$f_k(\vartheta) = \frac{-2m}{\hbar^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos(\vartheta)) \int_0^{\infty} dr r^2 V(r) \underbrace{j_l^2(kr)}_{\text{Besselfkt.}}$$

Vergleiche mit  $f_l$  für  $\delta_l \ll 1$

$$\delta_l = k f_l \approx \frac{-2mk}{\hbar^2} \int_0^{\infty} dr r^2 V(r) j_l^2(kr)$$

Die oben stehende Näherung wird Bornsche Näherung genannt.

#### 2. Allgemeine Potentiale

$$\begin{aligned} f_k(\vartheta, \varphi) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{-i(\vec{k}_{\vec{r}'} - \vec{k})\vec{r}'} V(\vec{r}') \\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}(\vec{k}_{\vec{r}'} - \vec{k}) \end{aligned}$$

= : Die Streuamplitude ist durch die Fourier-transformierte des Potentials gegeben.

### 1.3.6 Beispiel am Yukawa- Potentials

Wir betrachten ein abgeschirmtes Coulombpotential

$$V(r) = a \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

Eine Fouriertransformation ergibt:

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}(\vec{q}) &= a \int d^3r' e^{i\vec{q}\vec{r}} \frac{e^{-\mu r}}{r} \\
 &= \dots = \frac{4\pi a}{\mu^2 + q^2} \\
 (\vec{k}_{\vec{r}} - \vec{k})^2 &= \vec{k}_{\vec{r}}^2 + k^2 - 2\vec{k}_{\vec{r}}\vec{k} = 2k^2(1 - \cos(\vartheta)) \\
 &= 4k^2 \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \\
 \frac{d\sigma}{d\Omega} &= |f_{\vec{k}}(\vartheta)|^2 = \frac{m^2}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{(4\pi a)^2}{[\mu^2 + (2k \sin(\frac{\vartheta}{2}))^2]^2} \\
 &= \frac{a^2}{\left(4E_{\vec{k}} \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \frac{\hbar^2 \mu^2}{2m}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Im Grenzfall  $\mu \rightarrow 0$  erhalten wir ein Coulombpotential und es ergibt sich die Rutherfordformel:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{16E_{\vec{k}}^2 \sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}}$$

### 1.3.7 Anwendung Potentialtopf, Resonanzstreuung

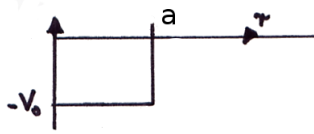
Jenseits der Bornschen Näherung.  $\rightarrow$  Lösung der radialen Schrödingergleichung für Partialwelle  $l$ :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d}{dr} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + V(r) \right] R_l(r) = E \cdot R_l(r)$$

Mit der Energie  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  und der dimensionslosen Koordinate  $\rho = kr$  ergeben sich linear unabhängige Lösungen für  $V(r) = 0$ , die sphärischen Bessel / Neumann Funktionen.

$$\begin{aligned}
 j_l(\rho) &= (-\rho)^l \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \frac{\sin(\rho)}{\rho} \\
 n_l(\rho) &= -(-\rho)^l \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \frac{\cos(\rho)}{\rho} \\
 \text{z.B. } l=0 \\
 j_0(\rho) &= \frac{\sin(\rho)}{\rho} \quad n_0(\rho) = -\frac{\cos(\rho)}{\rho}
 \end{aligned}$$

Beispiel Potentialtopf  $V(r) = -V_0$  für  $r < a$ ,  $V(r) = 0$  sonst.



für  $r \ll a, k \rightarrow k' = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)}$ . Lösung mit  $R(0)$  regulär und  $R_l(a), R'_l(a)$  stetig.  
Asymptotisches Verhalten ( $r > a, \frac{1}{k}$ ):

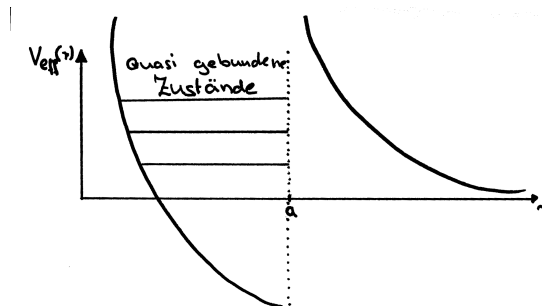
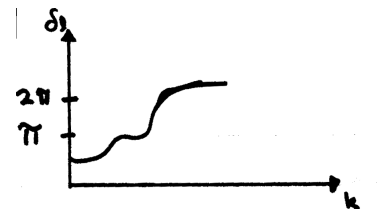
$$\begin{aligned} R_l(\rho) &= B \cdot j_l(\rho) + C \cdot n_l(\rho) \\ &\stackrel{l=0}{\approx} \frac{B}{kr} \left[ \sin(kr) - \frac{C}{B} \cos(kr) \right] \\ &= \frac{B}{kr} \frac{1}{\cos(\delta_0)} \sin(kr + \delta_0) \end{aligned}$$

Diese Gleichung bestimmt die Streuphase  $\delta_0$  und die asymptotische Entwicklung. Die Streuphase kann beliebige Werte annehmen.

Spezielle Werte sind  $\delta_l \approx \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N}$ , hier wird der Streuquerschnitt maximal:

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l + 1) \sin^2(\delta_l)$$

Die Ursache ist die sogenannte **Resonanz-Streuung**, d.h. es treten „quasi“ gebundene Zustände auf.



Der Streuquerschnitt in der Nähe der Resonanz hat eine sog. **Breit-Wigner** Form.

## 1.4 Wahrscheinlichkeitsinterpretation und Messprozess

### 1.4.1 Messungen und Projektionspostulat

Die Quantenmechanik ist inhärent nicht deterministisch wegen des **Messprozesses**.  
Projektionspostulat:

Die Messungen einer Observablen  $\hat{A}$  ergeben immer einen der Eigenwerte  $\{a_n\}$  mit  $\hat{A} |a_n\rangle = a_n |a_n\rangle$ . Der allgemeine Zustand geht beim Messen in den Zustand  $|a_n\rangle$  über. Die Wahrscheinlichkeit  $a_n$  im Zustand  $|\psi\rangle$  zu finden ist  $p_n = |\langle a_n | \psi \rangle|^2$ . Der Mittelwert von einer Observablen  $\hat{A}$  ist:

$$\begin{aligned} \sum_n a_n p_n &= \sum_n \langle \psi | a_n \rangle \langle a_n | \psi \rangle a_n \\ &= \sum_n \langle \psi | \hat{A} | a_n \rangle \langle a_n | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \end{aligned}$$

Das Projektionspostulat (Pp) ist der zentrale Unterschied zur klassischen Wellenphysik, da jede Messung den Zustand massiv ändert und die weitere Zeitentwicklung vom Messergebnis abhängt ( $\rightarrow$  nicht deterministisch).

Im Gegenzug ist die Zeitentwicklung zwischen Messungen durch die Schrödingergleichung deterministisch beschrieben.

Definition: Projektionsoperator

$$\hat{P}^2 = \hat{P} \quad \hat{P}^\dagger = \hat{P}$$

Zum Beispiel sei  $\hat{P}_a = |a\rangle \langle a|$  ( $|a\rangle$  normiert). Dann sind die obigen Bedingungen für den Projektionsoperator erfüllt

$$\hat{P}^2 = |a\rangle \underbrace{\langle a | a \rangle}_{=1} \langle a|.$$

Die möglichen Eigenwerte ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \hat{P}_a |\psi\rangle &= \lambda |\psi\rangle & | \cdot \hat{P}_a &= : \hat{P}_a^2 |\psi\rangle = \hat{P}_a |\psi\rangle = \lambda \hat{P}_a |\psi\rangle \\ &\longrightarrow ||\hat{P}_a |\psi\rangle|| \neq 0 && \rightarrow \lambda = 1 \\ &\longrightarrow \hat{P}_a |\psi\rangle = 0 && \rightarrow \lambda = 0 \end{aligned}$$

Wenn  $\hat{P}_a^2 = \hat{P}_a$ , dann ist  $\hat{Q}_a = 1 - \hat{P}_a$  ebenfalls ein Projektionsoperator.

$$\begin{aligned} \hat{Q}_a^2 &= 1 - 2\hat{P}_a + \hat{P}_a^2 = 1 - \hat{P}_a = \hat{Q}_a \\ &\text{es gilt } \hat{P}_a \hat{Q}_a = 0 \end{aligned}$$

Der Zustand sei  $|\psi\rangle = \sum_a c_a |a\rangle$ . Damit gilt:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{P}_a | \psi \rangle &= \langle \psi | a \rangle \langle a | \psi \rangle \\ &= |c_a|^2 \end{aligned}$$

→  $|c_a|^2$  ist der Erwartungswert des Projektionsoperators.

Zum Beispiel: Spin $\frac{1}{2}$  Projektion auf  $\hat{\sigma}_z$  Eigenzustand.

$$P_+ = \frac{1}{2}(1 + \hat{\sigma}_z) \quad P_- = \frac{1}{2}(1 - \hat{\sigma}_z) = 1 - P_+$$

Für allgemeine Spinrichtung  $\vec{m}$

$$P_+(\vec{m}) = \frac{1}{2} \left( 1 + \vec{m} \hat{\sigma} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \sum_{i=1}^3 m_i \hat{\sigma}_i \right)$$

$$P_-(\vec{m}) = \frac{1}{2} \left( 1 - \vec{m} \hat{\sigma} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \sum_{i=1}^3 m_i \hat{\sigma}_i \right)$$

#### 1.4.2 Dichtematrix

Reine und gemischte Gesamtheiten

Statistische Aussagen benötigen häufige Wiederholung eines Experimentes mit identischen Anfangsbedingungen (reine Gesamtheit).

Zum Beispiel  $|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$

Anzahl der Messungen mit Ergebnis  $a_n$  sei  $N_n$ :

$$|c_n|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_n}{N}$$

Mittelwert:

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \sum_n |c_n|^2 a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_n N_n a_n}{N}$$

Ist der Anfangszustand nur statistisch bestimmt (gemischte Gesamtheit).

→ Konzept der Dichtematrix.

Wahrscheinlichkeit für einen Zustand  $|n\rangle$  sei  $p_n$  mit  $\sum_n p_n = 1$ : Der Mittelwert einer

Observablen ist dann:

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_n \langle n | \hat{A} | n \rangle p_n \stackrel{!}{=} \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{A})$$

$$\text{mit: } \text{Sp}(\hat{\sigma}) = \sum_n \langle n | \hat{\sigma} | n \rangle$$

$$\text{Dichtematrix: } \hat{\rho} = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|$$

$$\text{Es gilt: } \text{Sp}(\hat{\rho}) = 1 \quad \hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$$

Die Dichtematrix für einen reinen Zustand ist:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$$

$$\text{Somit gilt ebenfalls} \quad \hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$$



Die Bewegungsgleichung der Dichtematrix ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 i\hbar \partial_t |\psi\rangle &= \hat{\mathcal{H}} |\psi\rangle & -i\hbar \langle\psi| &= \langle\psi| \hat{\mathcal{H}} \\
 \partial_t \hat{\rho} &= \sum_n p_n \{ (\partial_t |n\rangle) \langle n| + |n\rangle (\partial_t \langle n|) \} \\
 &= -\frac{1}{\hbar} \sum_n p_n \underbrace{(\hat{\mathcal{H}} |n\rangle \langle n| - |n\rangle \langle n| \hat{\mathcal{H}})}_{=[\hat{\mathcal{H}}, |n\rangle \langle n|]} \\
 &=: \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}]}
 \end{aligned}$$

Die umrahmte Gleichung wird die Von Neumann-Gleichung genannt.  
Bemerkungen:

- Die Von Neumann-Gleichung gilt auch für zeitabhängige Hamiltonfunktionen
- Achtung, nicht mit der Heisenberg-Gleichung zu verwechseln.

Formale Lösung:

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}(t) &= \underbrace{\hat{U}(t, t_0)}_{\text{Zeitentwicklungsoperator}} \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^\dagger(t, t_0) \\
 \text{Sp}(\hat{\rho}(t)) &= \text{Sp}(U \rho U^\dagger) = \text{Sp}(U^\dagger U \rho) = \text{Sp}(U^{-1} U \rho) \\
 &= \text{Sp}(\rho)
 \end{aligned}$$

In den obigen Umformungen haben wir benutzt, dass man unter der Spur zyklisch vertauschen kann und dass der Zeitentwicklungsoperator eine unitäre Matrix ist. Somit wurde gezeigt, dass die Spur des Dichteoperators zeitunabhängig und gleich eins ist.

Beispiel Spin  $\frac{1}{2}$

Basis sei in „z - Richtung“

$$\begin{aligned}
 |\uparrow\rangle_z &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & |\downarrow\rangle_z &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
 &\text{EZ von } \sigma_x, \sigma_y & & & & \\
 |\uparrow\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & |\downarrow\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 |\uparrow\rangle_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} & |\downarrow\rangle_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

### Beispiel: Dichtematrix

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle \langle\uparrow| + \frac{1}{2} |\downarrow\rangle \langle\downarrow|$$

beschreibt gemischte, unpol. Zustände

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_1^2 &= \frac{1}{4} |\uparrow\rangle \langle\uparrow| + \frac{1}{4} |\downarrow\rangle \langle\downarrow| = \frac{1}{2} \hat{\rho}_1 \\ &\longrightarrow \hat{\rho}_1^2 \neq \hat{\rho}_1\end{aligned}$$

vergleiche mit reinen Zustand  $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + e^{i\alpha} |\downarrow\rangle)$

$$\hat{\rho}_\alpha = \frac{1}{2} \left( |\uparrow\rangle \langle\uparrow| + |\downarrow\rangle \langle\downarrow| + \underbrace{e^{i\alpha} |\downarrow\rangle \langle\uparrow| + e^{-i\alpha} |\uparrow\rangle \langle\downarrow|}_{\text{Kohärenzen}} \right)$$

Die Kohärenzen sind die Außerdiagonalterme der Dichtematrix  $\hat{\rho}_\alpha$ . Die Matrixdarstellung sieht dementsprechend wie folgt aus:

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{\rho}_\alpha = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\alpha} \\ e^{-i\alpha} & 1 \end{pmatrix}$$

Unterschiede in den Mittelwerten:

$$\begin{aligned}\langle\sigma_z\rangle &= \text{Sp}(\hat{\rho}\sigma_z) = 0 && \text{für } \hat{\rho}_1 \text{ und } \hat{\rho}_\alpha \\ \langle\sigma_x\rangle &= \text{Sp}(\hat{\rho}\sigma_x) = \begin{cases} 0 & \text{für } \hat{\rho}_1 \\ \cos(\alpha) & \text{für } \hat{\rho}_\alpha \end{cases}\end{aligned}$$

### Dichtematrix von zusammengesetzten Systemen:

- Eine reine Dichtematrix hat nur in einer bestimmten Basis die Form

$$\hat{\rho} = |n\rangle \langle n|.$$

Ein Basiswechsel

$$\begin{aligned}|n\rangle &= \hat{U} |n'\rangle = \sum_{n'} c_{nn'} |n'\rangle \\ &\text{mit } U^\dagger = U^{-1}\end{aligned}$$

führt auf die Dichtematrix

$$\hat{\rho} = |n\rangle \langle n| = \sum_{n'n''} c_{nn'} c_{nn''}^* |n'\rangle \langle n''|.$$

$\longrightarrow \hat{\rho}$  besitzt außerhalb der Diagonalen Elemente.

- In einem zusammengesetzten System hat die Dichtematrix die allgemeine Form

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \sum_{nm,n'm'} \rho_{nm,n'm'} |n\rangle |m\rangle \langle m'| \langle n'| \\ |n\rangle &\hat{=} \text{Zustand im System I} \\ |m\rangle &\hat{=} \text{Zustand im System II}\end{aligned}$$

Dies gilt mit den Einschränkungen

$$\begin{aligned}\text{Sp}(\hat{\rho}) = 1 &\rightarrow \sum_{nm} \rho_{nm,nm} = 1 & \hat{\rho}^\dagger &= \hat{\rho} \\ &= \rho_{nm,n'm'} = \rho_{n'm',nm}^*\end{aligned}$$

Für reine Zustände im Produktraum

$$|\psi\rangle = \sum_{nm} c_{nm} |n\rangle |m\rangle$$

gilt ebenfalls  $\rho_{nm,n'm'} = c_{nm} c_{n'm'}^*$ .

- Die partielle Spur über System II ist definiert für einen allgemeinen Operator  $A_{nm,n'm'}$  als

$$\hat{A}_{red} = \text{Sp}_2 \hat{A} = \sum_m \langle m | \hat{A} | m \rangle = \sum_{n,n',m} A_{nm,n'm} \underbrace{|n\rangle \langle n'|}_*.$$

\*) Der Operatoranteil aus System I bleibt erhalten.  
 $\longrightarrow A_{red}$  ist noch ein Operator im Teilraum I.

- Die Messung einer Observablen mit einem bestimmten Wert im System II erfolgt durch den Projektionsoperator  $|m\rangle \langle m|$ . Die Wahrscheinlichkeit  $p_m$  für  $m$  ergibt sich über die Spur.

$$p_m = \text{Sp}(|m\rangle \langle m| \hat{\rho}) = \sum_n \rho_{nm,nm}$$

(Durch die Projektion geht die Summe nur noch über die  $n$ .)

Die Dichtematrix  $\hat{\rho}_f(m)$  ist nach der Messung von  $m$  abhängig.

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_f(m) &= \frac{1}{P_m} \underbrace{|m\rangle \langle m| \hat{\rho} |m\rangle \langle m|}_{= \langle m | \hat{\rho} | m \rangle |m\rangle \langle m|} = \frac{1}{\sum_n \rho_{nm,nm}} \sum_{nn'} \rho_{nm,n'm} |n\rangle |m\rangle \langle m| \langle n'| \\ &= \frac{1}{P_m} \sum_{nn'} \rho_{nm,n'm} |n\rangle |m\rangle \langle m| \langle n'| \end{aligned}$$

Der Vorfaktor  $\frac{1}{P_m}$  ist zur Normierung, sodass nach der Messung  $\text{Sp}(\hat{\rho}_f(m)) = 1$  gilt.

### 1.4.3 Messprozess nach von Neumann

Projektionspostulat für zusammengesetzte Systeme mit den Zuständen:  $|\psi\rangle = \sum_{nm} c_{nm} |n\rangle_1 |m\rangle_2$   
 hat eine gesamte Dichtematrix  $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle\psi|$  (rein). Nur Messungen am System mit Ergebnis  $a_m^{(2)}$ :

$$\hat{\rho} \rightarrow \frac{2 \langle m | \hat{\rho} | m \rangle_2}{\text{Sp}_1(2 \langle m | \hat{\rho} | m \rangle_2)} \cdot |m\rangle_2 \langle m|$$

Sei Zustand 1  $\hat{=}$  Objekt und Zustand 2  $\hat{=}$  Messapparat  
 Zur Zeit  $t = 0$  gilt:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle_1 |A\rangle_2$$

Nach Wechselwirkung von Objekt und Detektor:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle_1 |A(n)\rangle_2$$

$A$  sei ein idealer Detektor, sodass verschiedene  $A(n)$  unterscheidbar sein sollen

$$\langle A(n) | A(n') \rangle = \delta_{nn'}$$

= : Die makroskopische Messapparatur ist in einen Überlagerungszustand übergegangen. Betrachte im folgenden nur noch das Objekt:

- ohne Messung

$$\hat{\rho}_1 = \text{Sp}_2 \hat{\rho}(t) = \sum_n |c_n|^2 |n\rangle \langle n| \rightarrow \text{gemischter Zustand des Systems}$$

(Keine Kohärenzen mehr, nur noch Diagonalelemente)

- mit Messung von  $A$  mit Ergebnis  $A(n)$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_1 &= |n\rangle \langle n| \rightarrow \text{reiner Zustand } |n\rangle \\ &\rightarrow \text{Reduktion des Zustandes} \end{aligned}$$

Scheinbar paradoxe Konsequenz: Wechselwirkung eines makroskopischen Systems mit Quantensystem kann zu makroskopischen Überlagerungszuständen führen:

Gedanken-Experiment **Schrödinger Katze**.

Ein Spin im Zustand  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$  wechselwirkt mit einer Katze im Anfangszustand  $|\text{leb}\rangle$ . Je nach dem Zustand des Spins wird der Zustand der Katze lebendig bleiben  $|\text{leb}\rangle$  für  $|\downarrow\rangle$  oder tot  $|\text{tot}\rangle$  für  $|\uparrow\rangle$ . Der Gesamtzustand ist

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle |\text{tot}\rangle + |\downarrow\rangle |\text{leb}\rangle)$$

und die Katze ist gleichzeitig tot und lebendig!

1. Es findet Wechselwirkung mit der Umgebung statt, sodass die Kohärenzen verschwinden, die Dichtematrix wird zu

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle |\text{tot}\rangle \langle \text{tot}| \langle \uparrow| + \frac{1}{2} |\downarrow\rangle |\text{leb}\rangle \langle \text{leb}| \langle \downarrow|$$

=: gemischter Zustand

(Die Katze ist entweder tot oder lebendig.)

2. Nach der Messung (z.B.  $|\uparrow\rangle$ ) kollabiert der Zustand in z.B.

$$\hat{\rho}_f = |\uparrow\rangle |\text{tot}\rangle \langle \text{tot}| \langle \uparrow|$$

3. Der juristische Unterschied der beiden Fälle:

Im ersten Fall ist die Katze schon tot vor der Messung (in 50% der Fälle) und im zweiten Fall wird die Katze durch die Messung getötet (in 50% der Fälle).

#### 1.4.4 Bellsche Ungleichung

Betrachten eine Quelle, die paarweise 2 Spin $\frac{1}{2}$  Teilchen in einem Spin-Singlett-Zustand aussendet

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle).$$

Die Teilchen fliegen in entgegengesetzten Richtungen. Sie werden von zwei Stern-Gerlach-Detektoren weit voneinander entfernt und weit weg von der Quelle gemessen. Der Detektor I misst bezüglich der Quantisierungsachse  $\vec{a}$ , während der Detektor II bezüglich der Quantisierungsachse  $\vec{b}$  misst.

Die Messwerte der Spins multipliziert mit  $\frac{2}{\hbar}$  sind 1 oder -1. Die Messung bezüglich einer Achse wird als  $A_{\vec{a}}$  bzw.  $B_{\vec{b}}$  beschrieben.

##### 1. Quantenmechanische Beschreibung

Berechnen die kombinierte Wahrscheinlichkeit  $P_{\vec{a}\vec{b}}^{|s\rangle}$  der Messung von  $A_{\vec{a}}$  und  $B_{\vec{b}}$ , mit der Bedingung, dass sich die Teilchen vor der Messung in  $|s\rangle$  befindet.

Zu zeigen:

Die Wahrscheinlichkeit  $P_{\vec{a}\vec{b}}$  ist von der Reihenfolge unabhängig.

##### 2. Klassische Theorie mit sog. „versteckte Parametern“.

Annahme: In der Quelle werden die Teilchen eins und zwei mit diesem versteckten/verborgenen Parametern  $\lambda$  ausgestattet, die jedes mögliche spätere Messresultat bereits vorherbestimmen.

$A_{\vec{a}} \longrightarrow$  Messergebnis an Teilchen A entlang der Achse  $\vec{a}$

$B_{\vec{b}} \longrightarrow$  Messergebnis an Teilchen B entlang der Achse  $\vec{b}$

Beide Messungen können nur Werte 1 oder -1 annehmen.

$A$  ist unabhängig von  $\vec{b}$

$B$  ist unabhängig von  $\vec{a}$

$\lambda$  ist unabhängig von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$

=: Lokalitätsannahme

$\rho(\lambda)$  ist eine unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung der  $\lambda$ s:

$$\int d\lambda \rho(\lambda) = 1$$

Der klassische gemeinsame Erwartungswert für eine Messung von  $A$  an I und  $B$  an II ist gegeben durch

$$\underbrace{C_{\vec{a}\vec{b}}}_{\text{Korrelator}} = \int d\lambda \rho(\lambda) A_{\vec{a}}(\lambda) B_{\vec{b}}(\lambda)$$

Bedingung:

Die Messungen werden weit weg voneinander durchgeführt, da sonst die Lokalitätsbedingung nicht erfüllt wäre.

Zur Messung an I wird jeweils zufällig eine der beiden Achsen  $\vec{a}$  und  $\vec{a}'$  gewählt werden und zur Messung II  $\vec{b}$  und  $\vec{b}'$ . Die Wahl findet in so kurzer Zeit statt, dass keine Kommunikation zwischen Detektor eins und Detektor zwei oder den Detektoren und der Quelle stattfinden kann.

Viele Messungen unter diesen Bedingungen ermöglichen es möglichst viele Werte von  $\lambda$  „auszutesten“.

=: 4 Erwartungswerte:  $C_{\vec{a}\vec{b}}, C_{\vec{a}\vec{b}'}, C_{\vec{a}'\vec{b}}$  und  $C_{\vec{a}'\vec{b}'}$ .

$$: \boxed{-2 \leq C_{\vec{a}\vec{b}} - C_{\vec{a}\vec{b}'} + C_{\vec{a}'\vec{b}} + C_{\vec{a}'\vec{b}'} \leq 2}$$

Die oben umrahmte Ungleichung ist die **Bellsche Ungleichung** in der Form von Clauser, Horne, Shimony und Holt. : CHSH- Ungleichung

3. **Zur Berechnung von  $C_{\vec{a}\vec{b}}^{[s]} = C_{\vec{a}\vec{b}}^{[s]} - C_{\vec{a}\vec{b}'}^{[s]} + C_{\vec{a}'\vec{b}}^{[s]} + C_{\vec{a}'\vec{b}'}^{[s]}$**

Man kann zeigen, dass es Werte für die 4-Richtungen gibt, für die die Bellsche Ungleichung  $|C^{[s]}| \leq 2$  verletzt wird. : Bedeutung ?

4. **Rechnung zu Punkt 1)**

Rotation: allgemeine Rotationsmatrix  $U$ .

$$U = e^{-i\frac{\alpha}{2}\vec{n}\vec{\sigma}} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i\vec{n}\vec{\sigma}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

ist eine Drehung um die Achse in  $\vec{n}$  um den Winkel  $\alpha$ .  $U$  ist unitär. Der Singlett Zustand  $|s\rangle$  ist Rotationsinvariant.

z.B:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir können o.B.d.A. die z-Achse als  $\vec{a}$ -Achse wählen.  $\vec{b} \rightarrow$  x-y Ebene.  $\theta$  ist der polare Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

Eine Messung von  $A_{\vec{a}}$  an  $\vec{a} \rightarrow$  kann 1 oder -1 mit der Wahrscheinlichkeit von jeweils  $\frac{1}{2}$  ergeben oder falls  $B_{\vec{b}}$  an  $\vec{b}$  zuerst gemessen wurde  $\rightarrow$  1 oder -1 mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$ .

Man misst den Wert 1  $\rightarrow$  Zustand nach der Messung  $\frac{|\uparrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$  oder man misst den Wert -1  $\rightarrow$  Zustand nach der Messung  $-\frac{|\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$ .

Wir rotieren den Spin des Teilchens zwei um die y-Achse mit der Rotationsmatrix

$$U = e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_y} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & -\sin(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}.$$

Wir führen die Eigenvektoren  $|\uparrow\rangle_{\vec{b}}$  und  $|\downarrow\rangle_{\vec{b}}$  bezüglich der Achse  $\vec{b}$  ein.

: man bekommt in dem 1. Fall:  $|\uparrow\rangle \cdot (-\sin(\frac{\theta}{2})|\uparrow\rangle_{\vec{b}} + \cos(\frac{\theta}{2})|\downarrow\rangle_{\vec{b}})$

und im 2. Fall  $-\downarrow \cdot (\cos(\frac{\theta}{2})|\uparrow\rangle_{\vec{b}} + \sin(\frac{\theta}{2})|\downarrow\rangle_{\vec{b}})$ .

$A_{\vec{a}}/B_{\vec{b}}$	1	-1
1	$\frac{1}{2} \sin^2(\frac{\theta}{2})$	$\frac{1}{2} \cos^2(\frac{\theta}{2})$
-1	$\frac{1}{2} \cos^2(\frac{\theta}{2})$	$\frac{1}{2} \sin^2(\frac{\theta}{2})$

$$:P = \sin^2(\frac{\theta}{2}) \quad \text{für} \quad A_{\vec{a}}B_{\vec{b}} = 1$$

$$P = \cos^2(\frac{\theta}{2}) \quad \text{für} \quad A_{\vec{a}}B_{\vec{b}} = -1$$

Wir messen zuerst  $B_{\vec{b}}$ : das Ergebnis ist dasselbe ( $\theta = 0$ ).

Zum Beispiel:

$$\theta = 0 \rightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \rightarrow \text{man erhält } A_{\vec{a}}B_{\vec{b}} = -1$$

$$\theta = \pi \rightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \rightarrow \text{man erhält } A_{\vec{a}}B_{\vec{b}} = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \text{Kombinierte W. sind gleich} = \frac{1}{2}$$

: Die Messergebnisse sind unkorreliert

## 5. Rechnung zu Teil 2 siehe Übung

## 6. Rechnung zu Teil 3

Der Erwartungswert für  $A_{\vec{a}}B_{\vec{b}}$  ist:

$$\begin{aligned}
 \langle s | (\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) | s \rangle &= \frac{1}{2} (\langle \uparrow \downarrow | - \langle \downarrow \uparrow |) (\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) (\langle \uparrow \downarrow | - \langle \downarrow \uparrow |)^T \\
 &= \dots = \frac{1}{2} (-a_z b_z - (a_x - i a_y)(b_x + i b_y) - (a_x + i a_y)(b_x - i b_y) - a_z b_z) \\
 &= -\vec{a} \cdot \vec{b} \rightarrow \langle s | (\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) | s \rangle = -\cos(\theta_{\vec{a}} - \theta_{\vec{b}}) \\
 C^{|s\rangle} &= -\cos(\theta_{\vec{a}} - \theta_{\vec{b}}) + \cos(\theta_{\vec{a}} - \theta_{\vec{b}'} ) - \cos(\theta_{\vec{a}'} - \theta_{\vec{b}}) - \cos(\theta_{\vec{a}'} - \theta_{\vec{b}'} ) \\
 \text{Z.B.} \quad \theta_{\vec{a}} &= 0, \quad \theta_{\vec{b}} = -\frac{3}{4}\pi, \quad \theta_{\vec{a}'} = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_{\vec{b}'} = \frac{-\pi}{4} \\
 : \quad &\boxed{C^{|s\rangle} = 2\sqrt{2} > 2}
 \end{aligned}$$

—→ Die Quantenmechanik ist inkonsistent mit der Annahme von Lokalität und versteckte Variablen.

Experimentell wurde dies 1982 von A.Aspect überprüft.



## 1.5 Propagatoren und Quantendynamik

### 1.5.1 Propagatoren und die Greensche Funktion

Propagatoren

Schrödingergleichung:

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t |\psi(t)\rangle &= \hat{\mathcal{H}} |\psi(t)\rangle \\ \text{Ortsdarstellung } \psi(x, t) &= \langle x | \psi(t) \rangle \\ \text{mit } \langle x | x' \rangle &= \delta(x - x') \quad \int dx |x\rangle \langle x| = 1 \end{aligned} \quad (16)$$

Der Hamiltonoperator sei zeitunabhängig, somit ergibt sich die Lösung der Schrödingergleichung zu

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{\mathcal{H}}\frac{t-t'}{\hbar}} |\psi(t')\rangle.$$

Füge eine eins aus Gleichung (16) ein und multipliziere  $\langle x |$  von links dran:

$$\begin{aligned} \underbrace{\langle x | \psi(t) \rangle}_{\psi(x, t)} &= \int dx' \underbrace{\langle x | e^{-i\hat{\mathcal{H}}\frac{t-t'}{\hbar}} | x' \rangle}_{K(x, t; x', t')} \cdot \underbrace{\langle x' | \psi(t') \rangle}_{\psi(x', t')} \\ K &\triangleq \text{Propagator} \\ \psi(x, t) &= \int dx' K(x, t; x', t') \psi(x', t') \end{aligned}$$

Die Kenntnis der Funktion  $K(x, t; x', t')$  ist äquivalent zur Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung.  $K$  beschreibt die Amplitude an Ort  $x$  zur Zeit  $t$ , die von der Ausgangsamplitude bei  $x'$  zur Zeit  $t'$  verursacht wurde.

$K$  erfüllt die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} K(x, t; x', t') = \hat{\mathcal{H}} K(x, t; x', t')$$

mit den Anfangsbedingungen

$$K(x, t; x', t') = \delta(x, x').$$

Greensche Funktion

Führen **retardierte** bzw **avancierte** Greensche Funktion ein.

$$\begin{aligned} G_R(x, t; x', t') &= -\frac{i}{\hbar} \Theta(t - t') \cdot K(x, t; x', t') \\ G_A(x, t; x', t') &= \frac{i}{\hbar} \Theta(t' - t) K(x, t; x', t') \end{aligned}$$

Setzt man diese Gleichungen in die Bewegungsgleichung ein, so folgt

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t G_R(x, t; x', t') &= i\hbar \frac{-i}{\hbar} \left( K(x, t; x', t') \underbrace{\partial_t \Theta(t - t')}_{\delta(t-t')} + \Theta(t - t') \partial_t K(x, t; x', t') \right) \\ \longrightarrow K(x, t; x', t') \cdot \delta(t - t') &= K(x, t'; x', t') = K(x, 0; x, 0) = \delta(x - x') \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Bewegungsgleichung

$$\left(i\hbar\partial_t - \hat{\mathcal{H}}\right)G_R(x, t; x', t') = \delta(x - x')\delta(t - t').$$

Für die avancierte Greensche Funktion  $G_A$  verläuft die Rechnung analog.

Beispiel:

Die Greensche Funktion eines freien Teilchens mit der Hamiltonfunktion  $\hat{\mathcal{H}} = \frac{-\nabla^2}{2m}$

$$G(x, t; 0, 0) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dk}{2\pi} e^{i(kx - \omega t)} G(\omega, k)$$

$$G(\omega, k) = \frac{\frac{1}{\hbar}}{\omega - \omega(k)} \quad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

Problem:

Diese Greensche Funktion ist singulär für  $\omega = \omega(k)$ , sodass die Kausalität in diesem Fall unklar ist.

Lösung:

$$G_R(\omega, k) = G(\omega + i\delta, k)$$

$$G_A(\omega, k)$$

Der Limes  $\lim_{\delta \rightarrow 0}$  soll in der Übung nachvollzogen werden.

Bilden eine Fouriertransformation:

$$G_R(t) = \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\delta - \omega(k)}$$

Das Wegintegral ist über das Residuenkalkül berechenbar.

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \sum_n \text{Res}(f(z), z_n)$$

1. Fall  $t < 0$

$$\int_{\curvearrowright} \rightarrow e^{|\omega_c|t} \xrightarrow{\lim(\omega_c \rightarrow \infty)} \infty$$

2. Fall  $t > 0$

$$\int_{\curvearrowleft} \rightarrow e^{-|\omega_c|t} \xrightarrow{\lim(\omega_c \rightarrow \infty)} 0$$

Für uns ist nur der Pol bei  $\omega = \omega(k) - i\delta$  relevant.

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_b f(z) dz = -2\pi i \text{Res}(f(z), z_0) \quad z_0 = \omega(k) - i\delta \\
 \text{Res}(f(z), z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \\
 :I &= -\frac{2\pi i}{2\pi \hbar} e^{-i(\omega(k) - i\delta)t} \\
 &=: \boxed{G_R(t) = -\frac{i}{\hbar} \Theta(t) e^{i\omega(k)t}} \quad t > 0
 \end{aligned}$$

Hierdurch ist die Kausalität bewahrt.

$$\int \frac{dk}{2\pi} e^{i(kx - \omega(k)t)} = \int \frac{dk}{2\pi} e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t)}$$

Der Exponent der e-Funktion ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t) &= -i\frac{\hbar}{2m}t(k - \frac{mx}{\hbar t})^2 + i\frac{\hbar t}{2m} \frac{m^2 x^2}{\hbar^2 t^2} \\
 : \int dx e^{ix^2} & \quad \text{Fresnelintegral}
 \end{aligned}$$

Die Fouriertransformation der Greenschen Funktion ergibt ein Gaußsches Wellenpaket:

$$\begin{aligned}
 &= \boxed{\sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} e^{imx^2/2\hbar t}} \\
 =: K(x, t; x', t') &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t')}} \exp\left(\frac{im(x - x')^2}{2\hbar(t - t')}\right) \\
 \text{allg. Lösung } \psi(x, t) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t')}} \int dx' \exp\left(\frac{im(x - x')^2}{2\hbar(t - t')}\right) \psi(x')
 \end{aligned}$$

In drei Dimensionen lässt sich die Koordinate  $x$  einfach durch den Ortsvektor  $\vec{r}$  ersetzen ( $\rightarrow \psi(\vec{r}, t)$ ).

Der Propagator kann durch die Eigenfunktion des Hamiltonoperators ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
 K(x, t; x', t') &= \sum_n \varphi_n(x) \varphi_n^*(x') e^{-iE_n \frac{(t-t')}{\hbar}} = \sum_n \langle x | n \rangle \langle n | x' \rangle e^{-iE_n \frac{(t-t')}{\hbar}} \\
 &= \sum_n \langle x | e^{-i\hat{H} \frac{t}{\hbar}} | n \rangle \langle n | e^{i\hat{H} \frac{t'}{\hbar}} | x' \rangle = \langle x, t | x', t' \rangle
 \end{aligned}$$

Physikalische Bedeutung des Propagators

$K$  = Wahrscheinlichkeitsamplitude für

$$\begin{aligned}
 (x', t') &\longrightarrow (x, t) \quad t > t' \\
 K(x, t; x', t') &= \langle x | e^{-i\hat{H} \frac{(t-t')}{\hbar}} | x' \rangle.
 \end{aligned}$$

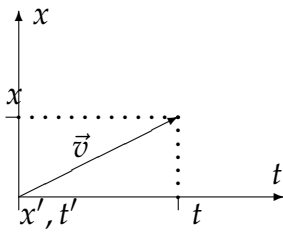
- Propagator  $K$  besitzt dieselbe Information wie die Schrödingergleichung
- $K$  hängt direkt mit der Greenschen Funktion und der Schrödingergleichung zusammen
- Kenntnis von  $K$  entspricht der allgemeinen Lösung der Schrödingergleichung
- $K$  ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude

### 1.5.2 Pfadintegralformulierung der Quantenmechanik

Zum Beispiel ein freies Teilchen

$$K(x, x') \sim \exp \frac{im(x - x')^2}{2\hbar(t - t')}.$$

Vergleiche den Propagator mit der klassischen Wirkung  $S$ .



$$x_{kl}(t'') = x' + (x - x') \frac{t'' - t'}{t - t'}$$

$$S_{kl}(x, t; x', t') = \int_{t'}^t dt' \frac{m}{2} \dot{x}^2(t'')$$

$$K \sim \exp \left( i \frac{S}{\hbar} \right)$$

→ Quantenmechanischer Propagator hängt mit der klassischen Wirkung zusammen!

Betrachte

$$e^{-i\hat{H}\frac{t}{\hbar}} = \left( e^{-i\hat{H}\frac{\Delta t}{\hbar}} \right)^N \quad \text{mit } \Delta t = \frac{t}{N}$$

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} \quad e^{-i(\hat{T}+\hat{V})\frac{\Delta t}{\hbar}} = e^{-i\hat{T}\frac{\Delta t}{\hbar}} \cdot e^{-i\hat{V}\frac{\Delta t}{\hbar}} + O(\Delta t^2)$$

Für die obige Umformung wurde die Hausdorff-Formel ( $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} \cdot e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$ ) verwendet. Die Eigenzustände von  $\hat{T}$  und  $\hat{V}$  seien bekannt. So ergibt sich:

$$\langle x | \underbrace{e^{-i\hat{H}\frac{\Delta t}{\hbar}} \cdot e^{-i\hat{H}\frac{\Delta t}{\hbar}} \dots e^{-i\hat{H}\frac{\Delta t}{\hbar}}}_{N\text{-mal}} | x' \rangle = \langle x | \underbrace{e^{-i\hat{T}\frac{\Delta t}{\hbar}} e^{-i\hat{V}\frac{\Delta t}{\hbar}}}_{N\text{-mal}} | x' \rangle \quad (17)$$

Fügen zwischen den  $N$   $e^{-i\hat{T}\frac{\Delta t}{\hbar}} e^{-i\hat{V}\frac{\Delta t}{\hbar}}$  jeweils die Identität  
 $(\mathbb{1} = \int dx_n \int dp_n |x_n\rangle \langle x_n| p_n\rangle \langle p_n|)$  ein. Die Identität lässt sich wie folgt umformen.

$$\mathbb{1} = \int dx_n \int dp_n |x_n\rangle \underbrace{\langle x_n | p_n \rangle}_{\frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{ix_n p_n}{\hbar}}} \langle p_n| = \int dx_n \int dp_n |x_n\rangle \langle p_n| \frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{ix_n p_n}{\hbar}}$$

Gleichung (17) lässt sich nun umschreiben zu:

$$\begin{aligned} &: \quad \langle x | e^{-i\hat{\mathcal{H}}\frac{t}{\hbar}} | x' \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \int \prod_{n=1}^N dp_n \cdot \exp \left[ -i\frac{\Delta t}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \left( T(p_{n+1}) - V(x_n) - p_{n+1} \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} \right) \right] \\ &\quad (x_0=x', x_N=x) \end{aligned}$$

Der Propagator ist komplett berechnet und auf klassische Integrale zurückgeführt! Es wurde folgende Nebenrechnung benutzt:

$$\begin{aligned} &\langle x_{n+1} | p_{n+1} \rangle \langle p_{n+1} | e^{-i\frac{\Delta t}{\hbar} T(\hat{p})} e^{-i\frac{\Delta t}{\hbar} V(\hat{x})} | x_n \rangle \\ &= e^{-i\frac{\Delta t}{\hbar} (T(p_{n+1}) + V(x_n))} \cdot \underbrace{\langle p_{n+1} | x_n \rangle \langle x_{n+1} | p_{n+1} \rangle}_{\exp(-i\frac{p_{n+1}x_n}{\hbar} + i\frac{p_{n+1}x_{n+1}}{\hbar})} \\ &= \exp \left[ -i\frac{\Delta t}{\hbar} \cdot \left( T(p_{n+1}) + V(x_n) + \frac{p_{n+1}(x_n - x_{n+1})}{\Delta t} \right) \right] \end{aligned}$$

Falls die kinetische Energie quadratisch in  $p$  ist, also  $T(p) = \frac{p^2}{2m}$ , so können alle Integrale über  $p_n$  ausgeführt werden.

$$\begin{aligned} &\int dp \exp \left[ -i\frac{\Delta t}{2m\hbar} p^2 + ip\frac{\Delta x}{\Delta t} \right] = \sqrt{\frac{2\pi\hbar m}{i\Delta t}} \exp \left[ i\frac{\Delta t m \Delta x^2}{2\hbar \Delta t^2} \right] \\ \Rightarrow: \quad K &= \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i \Delta t}} \right)^N \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{m}{2} \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{\Delta t^2} - V(x_n) \right) \right] \\ &\quad (x_0=x', x_N=x) \end{aligned}$$

Grenzübergang  $N \rightarrow \infty$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \frac{m}{2} \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{\Delta t^2} - V(x_n) = \int_0^t dt' \underbrace{\left( \frac{m}{2} \dot{x}^2(t') - V(x(t')) \right)}_{\text{klass. Form der Wirkung}} = S[x]$$

Führe eine abkürzende Schreibweise ein:

$$\int_{x(0)=x', x(t)=x} Dx := \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2\pi\hbar m}{i\Delta t}}^N \int \prod_{n=0}^{N-1} dx'_{(x_0=x', x_N=x)}$$

$$=: \left\langle x \left| e^{-\hat{\mathcal{H}} \frac{t}{\hbar}} \right| x' \right\rangle = \int_{x(0)=x', x(t)=x} Dx e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \mathcal{L}(x, \dot{x})}$$

Bemerkungen:

- Quantenmechanischer Propagator ist durch klassische Integrale ausgedrückt (jedoch unendlich viele)  $\rightarrow$  Quantenmechanik ohne Operatoren (Feynman, 1948).
- Physikalischer Inhalt  
Die Übergangswahrscheinlichkeit ist gegeben durch die Summe über alle möglichen Pfade mit gegebenen Anfangs- und Endpunkten. Gewichtungsfaktor ist der Phasenfaktor mit der klassischen Wirkung in Einheiten von  $\hbar$ . Pfade mit einer größeren Abweichung von der klassischen Wirkung besitzen eine große Phase.
- Für die meisten Pfade ist der Phasenfaktor stark oszillierend und sie tragen nicht zum Integral bei. Die Ausnahme sind die klassischen Pfade, die durch eine stationäre Wirkung

$$S[x_{cl.}] \quad \text{mit} \quad \delta[x_{cl.}] = 0$$

gekennzeichnet sind.

- Die Pfadintegralformulierung ist eine elegante alternative zur Operator basierten Quantenmechanik. Die Gewichtung zeigt wie die klassische Wirkung in der Quantenmechanik auftaucht. In der Quantenfeldtheorie, in der Statistischen Mechanik und in der Finanzphysik wird die Pfadintegralmethode benutzt.

### 1.5.3 Eichtransformationen und der sog. Aharonov-Bohm-Effekt

Hamiltonoperator eines Teilchens in einem elektromagnetischen Feld:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi$$

mit  $\vec{A}(\vec{r}, t) \hat{=}$  Vektorpotential  
 $\phi(\vec{r}, t) \hat{=}$  skalar Potential

### Definition

Geschwindigkeitsoperator (im Heisenbergbild)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{r} &= -\frac{i}{\hbar} [\vec{r}, \hat{\mathcal{H}}] = -\frac{i}{2m\hbar} [\vec{r}, \vec{p}^2 - q\vec{p}\vec{A} - q\vec{A}\vec{p}] \\ &= -\frac{1}{m}(\vec{p} - q\vec{A}) =: \vec{v}\end{aligned}$$

Die Komponenten der Geschwindigkeit vertauschen nicht untereinander.

$$\begin{aligned}[v_i, v_j] &= -\frac{q}{m^2} ([p_i, A_j] + [A_i, p_j]) = \frac{i\hbar q}{m^2} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \\ &= \frac{i\hbar q}{m^2} \varepsilon_{ijk} B_k \quad \vec{B} = \text{rot} \vec{A}\end{aligned}$$

$$=: \vec{v} \times \vec{v} = \frac{iq\hbar}{m^2} \vec{B}$$

Damit folgt für den Hamiltonoperator:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + q\phi$$

Die **Stromdichte** ist mit der Transformation

$$\underbrace{-i\hbar\nabla}_{\vec{p}} \rightarrow \underbrace{-i\hbar\nabla - q\vec{A}}_{m\vec{v}}$$

wie folgt angegeben.

$$\begin{aligned}\vec{j} &= \frac{1}{2m} [\psi^* (-i\hbar\nabla + q\vec{A})\psi - ((i\hbar\nabla - q\vec{A})\psi^*)\psi] \\ &= \frac{-i\hbar}{2m} (\psi^* (\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi) - \frac{q}{m} \cdot |\psi|^2 \vec{A}\end{aligned}$$

Die Stromdichte erfüllt die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t |\psi|^2 + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Führen Eichtransformationen an den Potentialen durch:

$$\begin{aligned}\vec{A} \rightarrow \vec{A}' &= \vec{A} + \nabla \Lambda \\ \phi \rightarrow \phi' &= \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\end{aligned}$$

Diese Eichtransformationen ändern das  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Feld nicht, aber verändern den Hamiltonoperator.

Behauptung:

Durch eine lokale Phasentransformation wird die Eichinvarianz der Theorie erreicht

$$\psi'(\vec{r}, t) = \underbrace{e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)}}_{U(\vec{r}, t)} \psi(\vec{r}, t)$$

Eichinvarianz bedeutet, dass sich Erwartungswerte nicht ändern.

Es gilt

$$\begin{aligned} U^{-1} \hat{r} U &= \hat{r} && \longrightarrow \hat{r} \text{ ist invariant} \\ [\hat{p}, U] &= -i\hbar \nabla U = q(\nabla \Lambda) U && \longrightarrow \hat{p} \text{ ist nicht invariant} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m U^{-1} \vec{v} U &= U^{-1} (\vec{p} - q \vec{A}) U = \vec{p} - q(\nabla \Lambda) - q \vec{A} \\ &= \vec{p} - q \vec{A}' && \longrightarrow \vec{v} \text{ ist eichinvariant} \end{aligned}$$

Die Schrödingergleichung ist invariant, wenn für die Transformation des Hamiltonoperators gilt:

$$\mathcal{H}' = U^{-1} \mathcal{H} U + i\hbar (\partial_t U) U^{-1}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m U^{-1} \vec{v}^2 U &= \frac{1}{2} m \underbrace{U^{-1} \vec{v} U}_{\vec{v}'} \underbrace{U^{-1} \vec{v} U}_{\vec{v}'} = \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 \\ q\phi + i\hbar (\partial_t U) U^{-1} &= q\phi - q \frac{\partial \Lambda}{\partial t} = q\phi' \end{aligned}$$

Fazit

Die Quantenmechanik ist Eichinvariant, wenn wir eine **lokale Eichtransformation**  $\psi' = U\psi$  mit  $U = \exp(i\Lambda \frac{q}{\hbar})$  durchführen.

Eine solche Transformation ist lokal, da das  $\Lambda$  lokal gewählt wird ( $\Lambda = \Lambda(\vec{r}, t)$ ).

Der Aharonov-Bohm-Effekt

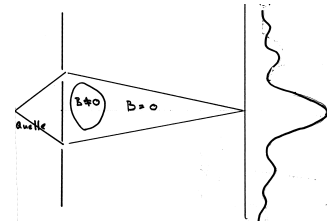
Gedankenexperiment: Im Außenraum ist  $\vec{B} = 0$ , jedoch gilt für das Vektorpotential  $\vec{A} \neq 0$ .



Nach dem Satz von Stokes gilt:

$$\phi_B = \int \vec{B} d\vec{f} = \oint_c \vec{A} d\vec{s} \neq 0$$

Da  $\text{rot} \vec{A} = 0$  ist im Außenraum  $\vec{A} = \nabla \Lambda$ . Zum Beispiel ist für ein zylindrisches Magnetfeld



$$\phi_B = \pi R^2 B \quad \text{ein mögliches } \Lambda$$

$$\Lambda = \frac{\phi_B}{2\pi} \varphi \quad \text{bzw.} \quad \vec{A} = \frac{\phi_B}{2\pi \rho} \vec{e}_\varphi$$

Was passiert mit dem Interferenzbild?

Betrachte einen Propagator von der Quelle  $\vec{r}_1$  zu einem Punkt auf dem Schirm bei  $\vec{r}_2$ :

$$\int_{\vec{r}(t_1)=\vec{r}_1}^{\vec{r}(t_2)=\vec{r}_2} D\vec{r} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right)$$

$$\text{Wirkung } S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) + q \dot{\vec{r}} \vec{A} \right)$$

$$= S_{B=0} + q \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{r}} \vec{A} = S_{B=0} + q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{A} d\vec{s}$$

$\int \vec{A} d\vec{s}$  hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab, wenn der Weg keinen magnetischen Fluss einschließt. Hieraus folgt, dass der Faktor  $S_B$  für alle Wege oberhalb, bzw. unterhalb der Spule gleich ist.

Für die Amplitude gilt:

$$\int_{\text{oben}} D\vec{r} e^{\frac{i}{\hbar} S} + \int_{\text{unten}} D\vec{r} e^{\frac{i}{\hbar} S} = \int_{\text{oben}} D\vec{r} e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \exp\left[i \frac{q}{\hbar} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{A} d\vec{s} \Big|_{\text{oben}}\right] + \int_{\text{unten}} D\vec{r} e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \exp\left[i \frac{q}{\hbar} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{A} d\vec{s} \Big|_{\text{unten}}\right]$$

Der magnetfeldabhängige **Phasenunterschied** ist

$$\frac{q}{\hbar} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{A} d\vec{s} \Big|_{\text{oben}} - \frac{q}{\hbar} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{A} d\vec{s} \Big|_{\text{unten}} = \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A} d\vec{s} = \frac{q \phi_B}{\hbar} = 2\pi \frac{\phi_B}{\phi_0}$$

Mit dem Flussquantum

$$\phi_0 = \frac{2\pi \hbar}{q} = \frac{h}{e}$$

Die Position der Interferenzmaxima hängt vom magnetischen Fluss in der Spule ab.

- Einfluss von  $\vec{B}$  obwohl das Teilchen keine Lorentzkraft erfährt. : Rein quantenmechanischer Effekt.
- Interpretationsmöglichkeit
  - In der Quantenmechanik sind  $\vec{A}$  und  $\phi$  physikalische Größen, anstelle von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  (jedoch muss Eichfreiheit beachtet werden).
  - Behalten  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  als physikalische Größen bei, aber akzeptieren eine nicht-lokale Wechselwirkung.

## 2 Relativistische Elektrodynamik

### 2.1 Spezielle Relativitätstheorie

#### 2.1.1 Koordinatentransformation und Newtonsche Mechanik

Newtonsches Gesetz für N- Teilchen ist

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) = \vec{F}_i = - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}$$

mit  $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{i < j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$

Wir betrachten die Koordinatentransformationen der Form

$$\vec{r}' = \underbrace{\overleftrightarrow{D} \vec{r}}_{\text{Drehung}} + \underbrace{\vec{v}t}_{\text{Galileotrafo}} + \underbrace{\vec{a}}_{\text{Translation}} \quad (1)$$

Für die Drehmatrix muss gelten  $\overleftrightarrow{D}^{-1} = \overleftrightarrow{D}^T$ . Die Galileotransformation wird zu einer konstanten Geschwindigkeit  $\vec{v}$  durchgeführt.

Koordinatensysteme, die durch Transformationen der Form (1) verbunden sind, heißen **Inertialsysteme (IS)**.

Zu zeigen ist: Das Newtonsche Gesetz ist unter den obigen Transformationen forminvariant.

Einziger nicht trivialer Fall ist die Drehtransformation, bei der gilt

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}'_i &= \overleftrightarrow{D} \ddot{\vec{r}}_i & |\vec{r}'_i - \vec{r}'_j|^2 &= \left( \overleftrightarrow{D} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right)^T \left( \overleftrightarrow{D} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) \\ (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^T \overleftrightarrow{D}^T &= (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^T \overleftrightarrow{D}^{-1} \longrightarrow |\vec{r}'_i - \vec{r}'_j|^2 &= |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}'_i &= - \frac{\partial}{\partial \vec{r}'_i} V = - \overleftrightarrow{D} \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} = \overleftrightarrow{D} \vec{F}_i \\ m_i \ddot{\vec{r}}'_i &= m_i \overleftrightarrow{D} \ddot{\vec{r}}_i = \overleftrightarrow{D} \vec{F}_i = \vec{F}'_i \end{aligned}$$

=: Das Newtonsche Gesetz ist forminvariant.

Bemerkung:

- Äquivalente Formulierung:  
Die Abstände zweier Punkte sind in allen Inertialsystemen gleich (d.h.  $\Delta r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ ).

- Implizite Voraussetzung:  
Die Zeitkoordinate ist in allen Inertialsystemen gleich.

### 2.1.2 Elektrodynamik

Wellengleichung

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{E} = 0$$

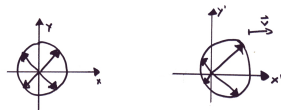
Eine mögliche Lösung ist: Kugelwelle, definiert durch eine Wellenfront

$$\vec{r}^2 - c^2 t^2 = \text{const.} = 0$$

Was passiert unter  $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}t$  ?

$$(\vec{r}' + \vec{v}t)^2 - c^2 t^2 = \text{const.}$$

→ Die Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt von der Richtung ab!



Dies ist im Widerspruch zum Experiment von Michelson und Morley (1887), welches zeigt, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich ist.

Lösung: Einstein (1905) postuliert, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich ist.

Konsequenzen:

- Die Galilei-Transformationen sind nicht mehr die korrekte Koordinatentransformation.
- Die Newtonsche Mechanik ist nicht mehr gültig.
- Die Zeitmessung hängt vom Inertialsystem ab. Die Zeit ist nicht mehr absolut.

Zum Beispiel:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2)$$

Maxwellgleichungen sind forminvariant unter Drehung und Translation.

$$\vec{r}' = \overleftarrow{D} \vec{r} + \vec{a} \quad (3)$$

Die Divergenz ergibt sich nach der Drehung zu

$$\nabla_{\vec{r}'} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}'}}_{\overleftarrow{D}^{-1}}$$

Die Ableitungen transformieren sich nach der inversen Drehmatrix:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}' \vec{R}'(\vec{r}') &= \frac{\rho'(\vec{r}')}{\epsilon_0} = \nabla_{\vec{r}} \underbrace{\overleftarrow{D}^{-1} \vec{E}'(\overleftarrow{D} \vec{r} + \vec{a})}_{\stackrel{!}{=} \vec{E}(\vec{r})} \\ &= \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Wenn die oben genannte Forderung an  $\vec{E}(\vec{r})$  gilt, ist die Gleichung (2) invariant bzgl. Koordinatentransformationen der Art (3).

$$\begin{aligned} =: \quad \text{Skalare Größe} \quad \rho'(\vec{r}', t') &= \rho(\vec{r}, t) \\ \text{Vektor Größe} \quad \vec{E}'(\vec{r}', t') &= \overleftarrow{D} \vec{E}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Die Maxwell-Gleichungen sind nicht invariant unter der Galilei-Transformation.

—→ Einstein ersetzt die Galilei-Transformation durch die Lorentztransformation.

### 2.1.3 Lorentztransformationen

Die Lorentztransformationen wurden schon vor 1905 erfunden, sie waren ursprünglich nur für die Maxwell-Gleichungen gedacht.

Gesucht ist die Transformation, die einen Lichtkegel invariant lässt:

$$\vec{r}'^2 - c^2 t'^2 = \vec{r}^2 - c^2 t^2$$

Wir wählen den Ansatz einer linearen Transformation  $(\vec{r}, t \rightarrow \vec{r}', t')$  zwischen Inertialsystemen, die sich in x-Richtung mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}$  gegeneinander bewegen.

$$\begin{aligned} \text{Annahme:} \quad y' &= y & z' &= z \\ t' &= \gamma t - \gamma \beta \frac{x}{c} & x' &= \gamma x - \gamma \beta t \cdot c \end{aligned}$$

Der Ursprung sei bei  $x' = 0$

$$\begin{aligned} \longrightarrow x &= \beta c t = v t: \boxed{\beta = \frac{v}{c}} \\ \vec{r}'^2 - c^2 t'^2 &= \vec{r}^2 - c^2 t^2: \dots: \\ \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}} \end{aligned}$$

Dies sind die Lorentztransformationen („Boosts“):

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

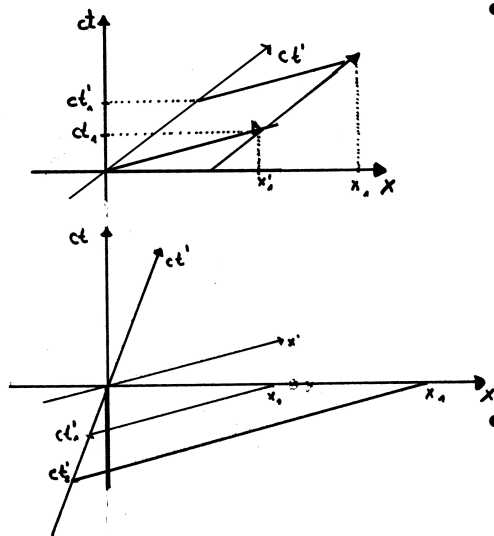
Im Grenzfall  $v \ll c$  wird aus den Lorentztransformationen die Galileitransformation und aus  $t'$  wird  $t$ .

### Transformationen im Minkowskidiagramm

Die Rücktransformation ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} x &= \gamma x' + \gamma \beta c t' \\ t &= \gamma t' + \gamma \frac{\beta}{c} x' \end{aligned}$$

Dies hat folgende physikalische Folgen:



- Relativität der Gleichzeitigkeit:

Zwei Ereignisse an verschiedenen Orten  $x_1$  und  $x_2$  zur Zeit  $t = 0$  im IS sind nicht gleichzeitig im IS'.

$$\begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= -\beta \gamma \cdot \frac{(x_2 - x_1)}{c} \neq 0 \\ x'_2 - x'_1 &= \gamma(x_2 - x_1) \\ \therefore (t'_2 - t'_1) &= \frac{-\beta}{c}(x'_2 - x'_1) \end{aligned}$$

- Zeitdilatation:

Bei  $x = 0$  ist im IS' die Zeitdifferenz größer als im IS.

$$t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) \geq t_2 - t_1$$

- Längenkontraktion:

Der Wegunterschied  $x_2 - x_1$  ist zur Zeit  $t'_2 = t'_1$  im IS' geringer als im IS, d.h.

Abbildung 2: Minkowskidiagramm, unten: Relativität der Gleichzeitigkeit

$$x'_2 - x'_1 < x_2 - x_1.$$

$$\begin{aligned} x'_2 - x'_1 &= \gamma(x_2 - x_1) - \beta\gamma(t_2 - t_1)c \\ t'_2 - t'_1 = 0 &= \gamma(t_2 - t_1) - \beta\gamma(x_2 - x_1)\frac{1}{c} \\ \longrightarrow t_2 - t_1 &= \beta\frac{(x_2 - x_1)}{c} \\ \Rightarrow x'_2 - x'_1 &= \gamma(1 - \beta^2)(x_2 - x_1) = \frac{(x_2 - x_1)}{\gamma} \end{aligned}$$

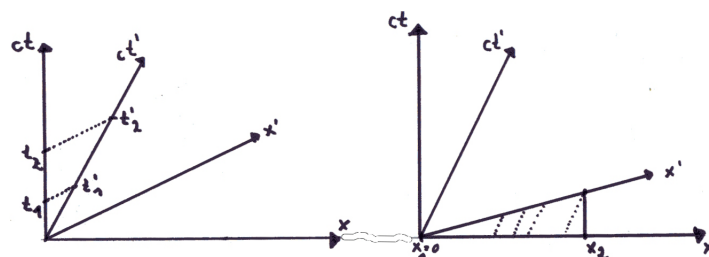


Abbildung 3: links: Zeitdilatation; rechts : Längenkontraktion

- Kausalität bezüglich einem dem Ereignis im Ursprung  
 Maximale Verschiebung liegt bei  $ct = |\vec{r}| \rightarrow 45^\circ$  Verschiebung  
 $\Rightarrow$  Lichtkegeloberfläche ist bei  $|\vec{r}| = ct$   
 Ereignisse mit  $|\vec{r}|^2 < c^2 t^2$  befinden sich im Lichtkegel.
  - Ereignisse mit  $|\vec{r}|^2 < c^2 t^2$  heißen **zeitartig** und können mit  $v < c$  erreicht werden.
  - Ereignisse mit  $|\vec{r}|^2 > c^2 t^2$  heißen **raumartig** und können nicht erreicht werden.
  - Ereignisse mit  $|\vec{r}|^2 = c^2 t^2$  heißen **lichtartig** und können mit  $v = c$  erreicht werden.

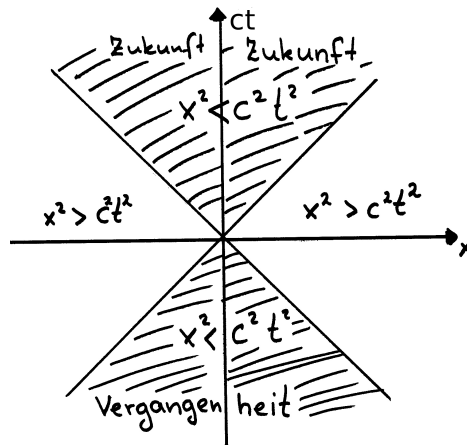


Abbildung 4: links: Zeitdilatation; rechts : Längenkontraktion

Für Lorentztransformationen gilt:

$$|\vec{r}'|^2 - c^2 t'^2 = |\vec{r}|^2 - c^2 t^2$$

=: Die Kausalität bleibt erhalten.

#### 2.1.4 Vierervektoren / Tensorrechnung

Wir fassen Zeit und Raum zu einem sog. Vierervektor zusammen:

$$x = (ct, x, y, z) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}$$

Mit den Konventionen:

$$x^0 = c \cdot t \quad x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z$$

$$\text{Lateinische Indices } (\vec{r})_i = x^i = 1, 2, 3$$

$$\text{Griechische Indices } (\vec{r})_\mu = 0, 1, 2, 3$$

Lorentztransformationen lassen die Größe  $c^2 t^2 - \vec{r}^2$  invariant.

Definiere entsprechendes Skalarprodukt:

$$x^2 = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = c^2 t^2 - \vec{r}^2$$



mit dem metrischen Tensor (Metrik):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g_{00} = 1 \quad g_{ii} = -1 \quad g_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \neq \nu$$

Einsteinsche Summenkonvention Über wiederholt auftretende Indizes wird summiert. Meist ist ein Index oben und einer unten gesetzt.

Lorentztransformation:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

mit z.B.  $\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Das Skalarprodukt ist invariant unter einer Lorentztransformation.

$$\begin{aligned} x'^2 &= x'^{\mu} g_{\mu\nu} x'^{\nu} = x^{\lambda} \Lambda^{\mu}_{\lambda} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\kappa} x^{\kappa} \\ &= x^{\lambda} g_{\lambda\kappa} x^{\kappa} \end{aligned}$$

=: Die Metrik ist in beiden Inertialsystemen die gleiche. (Dies folgt aus der Form der Lorentztransformation.)

- Es gilt ebenfalls:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= x^{\mu} g_{\mu\nu} y^{\nu} \\ &= x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 \end{aligned}$$

- Abstandsquadrat  $ds^2$

$$ds^2 = dx^{\mu} g_{\mu\nu} dx^{\nu} = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2$$

Hieraus folgt, dass das Abstandsquadrat größer null, gleich null und kleiner null sein kann.

→ „pseudoeuklidischer Raum“

Verallgemeinerung der Vektoren auf **Tensoren**.

- **Skalare (Tensoren 0. Stufe)**

Skalare ändern sich nicht unter einer Lorentztransformation ( $s'(x') = s(x)$ ).  
(Zum Beispiel : Skalarprodukt, Lichtgeschwindigkeit  $c$ , Ruhemasse,...)

- **Vektoren (Tensoren 1. Stufe)** Vektoren werden mit der Lorentztransformation transformiert.

Unterscheide zwischen:

- **Kontravariante Vektoren**

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu} \quad \left( x'^{\mu} = \underbrace{\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}}_{\Lambda^{\mu}_{\nu}} x^{\nu} \right)$$

- **Kovariante Vektoren**

$$B'_{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} B_{\nu} \quad \left( x'_{\mu} = \underbrace{\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}}_{\Lambda^{\nu}_{\mu}} x_{\nu} \right)$$

Diese Vektoren können mit dem metrischen Tensor ineinander umgerechnet werden:

$$B^{\mu} = g^{\mu\nu} B_{\nu}$$

Für das Skalarprodukt ergibt sich:

$$AB = A^{\mu} B_{\mu} = A^{\mu} g_{\mu\nu} B^{\nu}$$

Als Beispiel kann der Vierervektor  $x$  betrachtet werden:

$$\begin{aligned} x^{\mu} &= (ct, x, y, z) \\ x_{\mu} &= g_{\mu\nu} B^{\nu} = (ct, -x, -y, -z) \end{aligned}$$

Jedoch gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} &= \left( \frac{\partial}{\partial ct}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \partial_{\mu} \quad \rightarrow \quad \text{Kovariant} \\ \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} &= \left( \frac{\partial}{\partial ct}, \frac{-\partial}{\partial x}, \frac{-\partial}{\partial y}, \frac{-\partial}{\partial z} \right) = \partial^{\mu} \quad \rightarrow \quad \text{Kontravariant} \end{aligned}$$

Die obigen Gleichungen folgen aus der Umformung

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \underbrace{\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}}_{\Lambda^{\nu}_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$$

Die Divergenz ist wiederum ein Skalar  $\partial_{\mu} A^{\mu} = \frac{\partial A^0}{\partial ct} + \nabla \vec{A}$

- **Tensoren höherer Stufe**

Tensoren der Stufe  $k$  sind über ihr Transformationsverhalten unter  $k$  Lorentztransformationen definiert.

$$T'^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} = \Lambda^{\mu_1}_{\nu_1} \Lambda^{\mu_2}_{\nu_2} \dots \Lambda^{\mu_k}_{\nu_k} T^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k}$$

→ Kontravariante Tensoren der  $k$ -ten Stufe (kovariant analog).  
Für gemischte Terme gilt:

$$T'^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\mu_1 \dots \mu_k} = \Lambda^{\nu_1}_{\mu_1} \dots \Lambda^{\nu_k}_{\mu_k} \Lambda^{\lambda_1}_{\kappa_1} \dots \Lambda^{\lambda_p}_{\kappa_p} T^{\kappa_1 \dots \kappa_p}_{\nu_1 \dots \nu_k}$$

Beispiele:

–

$$T_{\mu\nu}{}^{\lambda\delta} = x_\mu A_\nu x^\lambda B^\delta$$

– Verjüngung eines Tensors

$$T^{\nu_1 \dots \nu_{p-1} \mu_k}_{\mu_1 \dots \mu_k}$$

Dies ist ein Tensor (mit  $k - 1$  kontra- und  $p - 1$  kovariante).

$$\begin{aligned} \rightarrow T^\mu_\mu &= g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \quad \text{skalar} \\ \rightarrow x_\mu y^\mu &= g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \end{aligned}$$

- **D'Alembertoperator**

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2} \hat{=} \text{skalare Größe}$$

- **Invarianz vom Skalarprodukt**

$$A'_\mu B'^\mu = \underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\gamma}}_{= \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\gamma}} A_\nu B^\gamma = A_\nu B^\nu \quad \text{mit } \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\gamma} = \delta^\nu_\gamma = \delta_{\nu,\gamma}$$

•

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\kappa} = g^\kappa_\mu = \delta^\kappa_\mu = \underbrace{\delta(\kappa\mu)}_{\text{Kronecker-}\delta}$$

### 2.1.5 Relativistische Mechanik

Die Newtonsche Mechanik ist nicht Lorentzkovariant, da Ableitungen nach der Zeit in der Newtonschen Mechanik auftreten.

$$\frac{dx^\mu}{dt} = (c, \dot{\vec{r}})$$

Die Konstruktion einer relativistischen Mechanik wird mit Hilfe der sog. **Eigenzeit**  $\tau$  entwickelt. Diese Eigenzeit ist gleich der Zeit, die in einem mitbewegten Koordinatensystem vergeht:

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 &= c^2 dt'^2 - \underbrace{d\vec{r}'^2}_{=0} = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2 \\ &= c^2 dt^2 \left(1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}\right) \quad \text{mit } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{d\tau = \frac{1}{\gamma(t)} dt}$$

Definitionen:

- **Vierergeschwindigkeit**

$$\begin{aligned} \frac{dx^\mu}{d\tau} &= u^\mu = \frac{d}{d\tau}(ct, \vec{r}) = \gamma \frac{d}{dt}(ct, \vec{r}) \\ &= \gamma(c, \vec{v}) \end{aligned}$$

Der Betrag dieser Vierergeschwindigkeit  $u_\mu$  ist gegeben durch

$$u_\mu u^\mu = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = c^2.$$

- **Viererimpuls**

$$p^\mu = m u^\mu$$

Modifiziertes Newtonsches Gesetz

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = m \frac{du^\mu}{d\tau} =: K^\mu$$

Bestimmung der sog. **Minkowskikraft**  $K^\mu$

Betrachte die drei Raumkomponenten:

$$m \frac{du^i}{d\tau} = \frac{dp^i}{d\tau} = \gamma \frac{dp^i}{dt} = \gamma F^i = K^i$$

und die Zeitkomponente:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{mu_\mu \frac{du_\mu}{d\tau}}_{= u_\mu K^\mu = u_0 K^0 - \gamma \vec{v} \vec{K}} &= \frac{m}{2} \frac{d}{d\tau} u_\mu u^\mu = \frac{m}{2} \frac{d}{d\tau} c^2 = 0 \\
 =: K^0 &= \underbrace{\frac{1}{\gamma c}}_{=\frac{1}{u_0}} \gamma \vec{v} \vec{K} = \gamma \frac{\vec{v} \vec{F}}{c}.
 \end{aligned}$$

Mit der Forderung der Invarianz der Lorentztransformation lässt sich die Minkowskikraft mit  $K^0$  bestimmen.

$$=: K^\mu = \gamma \left( \frac{\vec{v} \vec{F}}{c}, \vec{F} \right)$$

Betrag des Viererimpulses  $p_\mu p^\mu = m^2 c^2$

$$\begin{aligned}
 cp^0 &= m\gamma c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{Entwickle nach } v \text{ für } v \ll c \\
 &= \underbrace{mc^2}_{E_{\text{ruhe}}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{nicht relat. } E_{\text{kin}}} + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \dots
 \end{aligned}$$

→ Identifiziere  $cp^0$  mit der Energie  $E$ .

→ Relativistischer Energie-Impuls Zusammenhang:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2}$$

Für ein Teilchen in Ruhe reduziert sich die Gleichung auf

$$E = mc^2$$

und zeigt die Äquivalenz von Masse und Energie.

## 2.2 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Bisher wurde die Invarianz des Lichtkegels zur Herleitung der relativistischen Mechanik benutzt.

→ Lorentztransformation, Minkowskikraft.

→ Lichtwellenausbreitung bleibt invariant.

Frage: Wie sind die Transformationseigenschaften der Maxwellgleichungen ?

### 2.2.1 Viererstrom

- Wir gehen davon aus, dass die Ladung eines Punktteilchens ein Lorentzskalar ist.
- Dies gilt jedoch nicht für die Ladungsdichte  $\rho$ , da das 3-dimensionale Volumen nicht Lorentzinvariant ist (Längenkontraktion).

Die Ladungsdichte und die Stromdichte hängen über die **Kontinuitätsgleichung** zusammen.

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \vec{j} = 0$$

Definition: **Viererstrom**  $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$

Daraus folgt

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

Die Kontinuitätsgleichung ist Lorentzinvariant. Anschaulich lässt es sich so betrachten, dass die ruhende Ladung im Inertialsystem IS der Stromdichte im Inertialsystem IS' entspricht.

### 2.2.2 Viererpotential

$$\begin{aligned} A^\mu &= \left( \frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) \\ \phi &= \text{skalares Potential} \\ \vec{A} &= \text{Vektorpotential} \end{aligned}$$

Das Viererpotential kann aus den Maxwellgleichungen hergeleitet werden.

$$\vec{E} = -\text{grad}(\phi) - \dot{\vec{A}} \qquad \vec{B} = \text{rot}(\vec{A}) \qquad (4)$$

Schreibe die inhomogenen Maxwell-Gleichungen mit den Potentialen (4) anstelle der  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Felder.

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= -\Delta \phi - \operatorname{div} \dot{\vec{A}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} + \frac{1}{c^2} \operatorname{grad} \dot{\phi} + \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} = \mu_0 \vec{j}\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung wird die folgende Eichtransformation durchgeführt.

$$\begin{aligned}\text{wähle } \frac{1}{c^2} \dot{\phi} + \operatorname{div} \vec{A} &= 0 \text{ (Lorentzbedingung)} \\ : -\Delta \phi + \frac{1}{c^2} \ddot{\phi} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \mu_0 c^2 \rho \\ : -\Delta \vec{A} + \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} &= \mu_0 \vec{j}\end{aligned}$$

Die obigen Gleichungen haben die Form von Wellengleichungen, daher benutzen wir den D'Alembertoperator, um diese auszudrücken.

$$\begin{aligned}\square &= \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta \quad \text{ist Lorentzskalar} \\ &=: \text{Viererpotential: } A^\mu = \left( \frac{\phi}{c}, \vec{A} \right)\end{aligned}$$

Die inhomogenen Maxwellgleichungen sind explizit kovariant:

$$\begin{aligned}\square A^\mu &= \mu_0 j^\mu \\ \partial_\mu A^\mu &= 0 \quad \hat{=} \text{Lorenzbedingung}\end{aligned}$$

### 2.2.3 Feldstärketensor

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} & \vec{E} &= -\nabla \phi - \dot{\vec{A}} \\ B_x &= \partial_y A_z - \partial_z A_y & E_x &= -\partial_x \phi - \partial_t A_x \\ &= -\partial^2 A^3 + \partial^3 A^2 & &= \partial^1 A^0 c - \partial^0 A^1 c\end{aligned}$$

Die rechte Seite hat die Form eines zweistufigen Tensors:

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu} \quad \hat{=} \text{Feldstärketensor}$$

Ein antisymmetrischer Tensor 2. Stufe besitzt 6 freie Komponenten:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-E_x}{c} & \frac{-E_y}{c} & \frac{-E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Der kovariante Feldstärketensor ergibt sich zu:

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}F^{\lambda\kappa} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Die Vorzeichen ergeben sich durch die Regeln

$$\begin{array}{llll} \lambda\kappa & \text{sind beide raumartig} & \rightarrow & (-1) \cdot (-1) \rightarrow +1 \\ \lambda\kappa & \text{sind beide zeitartig} & \rightarrow & (+1) \cdot (+1) \rightarrow +1 \\ \lambda\kappa & \text{eines ist zeit-, das andre raumartig} & \rightarrow & (-1) \cdot (+1) \rightarrow -1 \end{array}$$

### Definitionen

- **Total asymmetrischer Tensor 4. Stufe**

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{für } \alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 2, \delta = 3 \\ & \text{und gerade Permutationen} \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- **Dualer Feldstärketensor**

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}$$

Explizit ist der duale Feldstärketensor:

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{E_z}{c} & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -\frac{E_z}{c} & 0 & \frac{E_x}{c} \\ B_z & \frac{E_y}{c} & -\frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

### Maxwellgleichungen:

- Inhomogen

$$\underbrace{\nabla \vec{E}}_{\partial_\mu F^{\mu 0} c} = \underbrace{\frac{\rho}{\varepsilon_0}}_{\mu_0 j^0 c} \quad \underbrace{\nabla \times \vec{B}}_{\partial_i F^{ij}} - \underbrace{\frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}}}_{-\partial_0 F^{0j}} = \underbrace{\mu_0 \vec{j}}_{\mu_0 j^j}$$

$$: \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$



- homogen

$$\nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Mit Hilfe des dualen Feldstärketensors lassen sich die homogenen Maxwellgleichungen in einer Gleichung zusammenfassen.

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

Eine äquivalente Formulierung ist:

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0$$

=: Explizite kovariante Form der Maxwellgleichungen.

#### Transformationsverhalten der Felder

Feldstärketensor:  $F'^{\mu\nu} = \Lambda_\kappa^\mu \Lambda_\delta^\nu F^{\kappa\delta}$

Für einen Boost in  $x$ -Richtung ergibt sich

$$\Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma E_y - \beta\gamma B_z c \\ B'_y &= \gamma B_y + \beta\gamma \frac{E_z}{c} \\ E'_z &= \gamma E_z + \beta\gamma B_y c \\ B'_z &= \gamma B_z - \beta\gamma \frac{E_y}{c} \end{aligned}$$

→ Felder in  $x$ -Richtung bleiben unverändert.

Felder senkrecht zur  $x$ -Richtung:  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Feld Komponenten werden gemischt.

Beispiel: Statisches Feld  $E_y$  (sonst in Komponenten = 0)

$$\begin{aligned} \rightarrow E'_y &= \gamma E_y & B'_z &= -\beta\gamma \frac{E_y}{c} = -\beta \frac{E'_y}{c} \\ & & \rightarrow \vec{B} &\perp \vec{E} \text{ und } \perp \vec{v} \end{aligned}$$

Das  $\vec{B}$ -,  $\vec{E}$ -Feld und der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  stehen allgemein immer senkrecht zueinander in der Elektrostatik.

Es gilt:

$$\vec{B}' = \vec{v} \times \frac{\vec{E}'}{c^2}$$

### 2.2.4 Geladenes Teilchen

Lorentzkraft ist  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ .

Die Minkowskikraft ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} K^\mu &= \gamma q \left( \vec{v} \frac{\vec{E}}{c}, \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \\ &= q \left( \vec{u} \frac{\vec{E}}{c}, u_0 \frac{\vec{E}}{c} + \vec{u} \times \vec{B} \right) \\ &\quad \text{mit } u^\mu = \gamma(c, \vec{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d.h. } \frac{dp_0}{d\tau} &= \frac{q}{c} \vec{u} \cdot \vec{E} && \text{Energieänderung} \\ \frac{d\vec{p}}{d\tau} &= q \left( u_0 \frac{\vec{E}}{c} + \vec{u} \times \vec{B} \right) \end{aligned}$$

Die rechte Seite kann geschrieben werden als:

$$\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = q F^{\mu\nu} u_\nu}$$

→ Das Gleichungssystem ist kovariant geschlossen.

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \mu_0 j^\nu \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0 \\ m \frac{du^\mu}{d\tau} &= q F^{\mu\nu} u_\nu \\ &\longrightarrow u^\mu \text{ bestimmt } j^\mu \end{aligned}$$

## 2.3 Lagrangeformalismus

### 2.3.1 Mechanik eines freien Teilchens

Die Wirkung ist  $S = \int \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$ .

Problem:  $dt$  ist nicht kovariant.

Lösung: Wir führen die Eigenzeit  $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$  ein.

$$\longrightarrow S = \int \gamma \mathcal{L}_{\text{frei}} d\tau$$

Damit das Prinzip der kleinsten Wirkung gilt, muss  $S$  (und damit  $\delta S = 0$ ) ein Skalar sein! Da ein freies Teilchen orts- und richtungsunabhängig ist, ist der einzige geschwindigkeitsabhängige Skalar der Geschwindigkeitsbetrag:

$$\begin{aligned} \text{mit } u_\mu u^\mu &= c^2 \\ \Rightarrow S &= - \int mc^2 d\tau \\ \text{bzw. } S &= \underbrace{\int -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} dt}_{\mathcal{L}_{\text{frei}}} \end{aligned}$$

Dies ergibt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} = \frac{d}{dt} m \gamma \vec{v} = 0 \quad \hat{=} \text{ konst. Geschwindigkeit}$$

### 2.3.2 Mechanik mit elektromagnetischem Feld

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{frei}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad \text{mit } \gamma \mathcal{L} \hat{=} \text{ Skalar}$$

Forderungen an  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  (neben der Kovarianz)

- Linear in der Ladung  $q$
- Linear in dem Potential  $A^\mu$
- Translationsinvariant (explizit unabhängig von  $x^\mu$ )
- Möglichst Funktionen 1. Ableitung

$$\begin{aligned} \longrightarrow \mathcal{L}_{\text{int}} &= -qu_\mu \frac{A^\mu}{\gamma} \\ &= -q\phi + q\vec{v}\vec{A} \end{aligned}$$

$$=: \mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} + q\vec{v}\vec{A} - q\phi$$

Kanonische Impulse:

$$\begin{aligned}\vec{p}_{\text{kan}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = m\gamma \vec{v} + q\vec{A} \\ =: \vec{p} &= c^2 \frac{\vec{p} - q\vec{A}}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\vec{p} - q\vec{A})^2}}\end{aligned}$$

Hamiltonfunktion:

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\vec{p} - q\vec{A})^2} + e\phi$$

Bemerkung:

Der Hamiltonformalismus kann nicht mehr mit der Energie identifiziert werden, da die Hamiltonfunktion nun ein Lorentzskalar ist und die Energie die Zeit-Komponente eines Vierervektors sein sollte.

Kovariante Form der Lagrangefunktion

Mit Hilfe der Vierer-Geschwindigkeit

$$\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \frac{u_\mu u^\mu}{c^2}$$

und der Eigenzeit  $d\tau = \gamma dt$  lässt sich die Wirkung umschreiben:

$$\begin{aligned}S_{\text{frei}} &= -mc \int \sqrt{u_\mu u^\mu} d\tau \\ \text{mit Zwangsbedingung} \quad u_\mu u^\mu &= c^2 \\ &=: S_{\text{frei}} = \text{const.}\end{aligned}$$

Ausweg:

Wir führen ein Bahnparameter ( $s$ ) ein, der nach der Variation nach  $ds = cd\tau$  mit der Eigenzeit identifiziert wird.

(D.h.  $\frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx_\mu}{ds} \neq 1$ .)

$$=: S_{\text{frei}} = -mc \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}} ds$$

Für die Ww. Mit dem e.m-Feld gilt:

$$S_{\text{int}} = -q \int \frac{dx^\mu}{ds} A_\mu(x) ds$$

die Variation von  $S_{\text{frei}} + S_{\text{int}}$  mit  $ds = cd\tau$  und  $u_\mu u^\mu = c^2$  ergibt:

$$\begin{aligned}
 &=: m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + q \underbrace{\frac{dA^\mu}{d\tau}}_{=\frac{dx_\nu}{d\tau} \partial^\nu A^\mu} - q \frac{dx_\nu}{d\tau} \partial^\mu A^\nu = 0 \\
 \text{mit} \quad &(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = F^{\nu\mu} \\
 &= m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + q \frac{dx_\nu}{d\tau} F^{\nu\mu} = 0
 \end{aligned}$$

### 2.3.3 Felder

Behandlung von Feldern im Lagrangeformalismus: Fasse die Felder  $\phi_k(x)$  als „k-te Koordinate eines Freiheitsgrades bei  $x^\mu$  auf.

In 4-Dimensionen ergibt dies:

		Hier	Klassisch
Zeitparameter	$\longrightarrow$	$x^\mu$	$t$
Koordinate	$\longrightarrow$	$\phi_k(x)$	$x(t)$
Geschwindigkeit	$\longrightarrow$	$\partial^\mu \phi_k(x)$	$\partial_t x(t)$

Die Wirkung ist

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_k, \partial^\mu \phi_k)$$

Die Euler-Lagrangegleichung ergibt sich zu:

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_k)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} = 0$$

- $k$  partielle Differentialgleichungen in 4-dimensionaler Raumzeit.
- $\mathcal{L} \hat{=}$  Lagrangedichte.
- $dx^4$  ist ein Lorentzskalar  $\longrightarrow \mathcal{L}$  muss ebenfalls ein Lorentzskalar sein.

Anwendung auf die Elektrodynamik:

- Freie Felder (Felder ohne Quellen) betrachten vier Potentiale ( $A^\mu$ )  
 $\longrightarrow \mathcal{L}$  hängt nur von den Ableitungen ab.
- Die Kopplung an der Materie ist linear in  $A^\mu$ .

Ansatz:

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$$

Es gilt die Euler-Lagrangegleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} &= -j_\mu \\
\rightarrow -4\mu_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} F^{\alpha\gamma} F^{\beta\delta} \\
&= g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} \left[ (\partial^\alpha A^\gamma - \partial^\gamma A^\alpha) (\partial^\beta A^\delta - \partial^\delta A^\beta) \right] \\
\text{mit } \frac{\partial(\partial^\alpha A^\gamma)}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} &= \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\gamma \\
&= g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} \left[ (\delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\gamma - \delta_\nu^\gamma \delta_\mu^\alpha) F^{\beta\delta} + (\delta_\nu^\delta \delta_\mu^\delta - \delta_\nu^\delta \delta_\mu^\beta) F^{\alpha\gamma} \right] \\
&= F_{\nu\mu} - F_{\mu\nu} + F_{\nu\mu} - F_{\mu\nu} = 4F_{\nu\mu} \\
&=: \boxed{\partial^\mu F_{\mu\nu} = \mu_0 j_\nu}
\end{aligned}$$

Die obige Gleichung ist die inhomogene Maxwellgleichung.

Die homogenen Maxwellgleichungen sind mit dem Ansatz  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  automatisch erfüllt.

Es gilt ebenfalls:

$$\underbrace{\partial^\nu \partial^\mu F_{\mu\nu}}_{\partial^\nu \partial^\mu = \partial^\mu \partial^\nu \text{ aber } F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}} = -\mu_0 \partial^\nu j_\nu$$

$=: \partial^\nu j_\nu = 0$  Die Kontinuitätsgleichung ist erfüllt.

### 2.3.4 Felder und Teilchen

Für ein Teilchen  $i$  mit  $\{x_{(i)}^\mu(\tau)\}$  und Felder  $F^{\mu\nu}(x^\mu)$  gibt es eine Lagrangefunktion mit dem Wechselwirkungsterm

$$\int ds \, q \frac{dx^\mu}{ds} A_\mu(x(s)) \leftrightarrow \int d^4x \, j_\mu(x) A^\mu(x).$$

Die Stromdichte für ein Teilchen ist

$$j^\mu(x) = \int ds \, q \frac{dx^\mu}{ds} \delta^{(4)}(x - x(s)).$$

Ebenso ist die Lagrangefunktion für ein freies Teilchen

$$L_{\text{frei}} \left( \frac{dx}{ds} \right) = \int d^4x' \, \mathcal{L} \left( \frac{dx'}{ds} \right) \delta^{(4)}(x' - x(s)).$$

Die gesamte relativistische Mechanik und Elektrodynamik ist bestimmt durch:

$$\begin{aligned}
 S &= \int d^4x \mathcal{L} \left( \left\{ x_i, \frac{dx_i}{ds_i} \right\}, A(x), \partial^\mu A^\nu(x) \right) \\
 \mathcal{L} &= \sum_i -m_i c \int ds \delta^{(4)}(x - x_i(s)) \sqrt{\frac{dx_i^\mu}{ds} \frac{dx_{i\mu}}{ds}} \\
 &\quad - \sum_i q_i \int ds \frac{dx_i^\mu(s)}{ds} \delta^{(4)}(x - x_i(s)) A_\mu(x) \\
 &\quad - \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

- Variation von  $S$  nach  $x_i(s_i)$  und  $A_\mu(x)$  ergibt die Bewegungsgleichung der Teilchen und die Maxwellgleichungen.
- Die Beschreibung der effektiven Wechselwirkung zwischen den Teilchen wird nicht einfach sein, da die Potentiale von dem Ort der Teilchen zu retardierten Zeiten abhängen.  $\rightarrow$  nicht instantane Wechselwirkung.
- In niedrigster relativistischer Ordnung  $\rightarrow$  Darwin Terme (siehe Übung).

### 2.3.5 Energie-Impuls- oder Spannungstensor

Für eine allgemeine Feldtheorie gilt:

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial^\mu \varphi).$$

$\mathcal{L}$  ist die **Lagrangedichte** und ist explizit unabhängig von  $x^\mu$ .  
Die Euler-Lagrange Gleichung ist somit:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

Wir betrachten die Erhaltungsgrößen:

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \mathcal{L} &= (\partial_\mu \varphi) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} + (\partial_\mu \partial_\nu \varphi) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi)} \\
 \text{mit} \quad \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \quad \text{Euler-Lagrange} \\
 \longrightarrow 0 &= \partial_\nu \underbrace{\left( (\partial_\mu \varphi) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi)} \right)}_{T^\nu{}_\mu - \delta_\mu{}^\nu} \\
 &=: \boxed{\partial_\nu T^\nu{}_\mu = 0} \tag{5}
 \end{aligned}$$

$T^\nu_\mu$  ist somit eine kovariante Erhaltungsgröße analog zur Energie-Impulserhaltung in der klassischen Mechanik.

### Physikalische Bedeutung von $T^{\mu\nu}$

Die Erhaltung ist eine Folge der Translationsinvarianz (unabhängig von  $x^\mu$ ) und gilt zu allen Zeiten und im ganzen Raum.

$$T^{00} = \dot{\phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \mathcal{L}$$

Diese Gleichung entspricht genau der **Energiedichte**  $W$  des Feldes (analog einer Hamiltondichte).

Aus der Ableitung Gleichung (5) folgt:

$$\partial_\nu T^{\nu 0} = \frac{1}{c} \partial_t T^{00} + \partial_i T^{i0} = 0$$

Dies ist die Kontinuitätsgleichung für die Energiedichte.

$$=: T^{i0} = \frac{1}{c} S^i \quad \hat{=} \text{ **Energiestromdichte** }$$

Integriere Gleichung (5) über das 3 dimensionale Volumen:

$$\begin{aligned} \partial_0 \int T^{0\mu} d^3x + \underbrace{\int \partial_k T^{k\mu} d^3x}_{=0, *} &= 0 \\ =: P^\mu &= \int T^{0\mu} d^3x \end{aligned}$$

ist zeitlich erhalten und entspricht dem Viererimpuls des Feldes.

Zu \*) Diese Beziehung gilt nur für lokalisierte Felder, hier ist nur ein endlicher Raum betroffen und der Satz von Gauss ist über das Volumen des Raumes anwendbar.

### Achtung:

$T^{\mu\nu}$  ist i.Allg. nicht symmetrisch definiert.

Kann aber symmetrisiert werden, ohne dass sich die Erhaltungssätze ändern.

→ Die symmetrische Wahl wird wegen der Drehinvarianz bevorzugt.

Die weiteren Komponenten werden in der **Impulsstromdichte**  $T^{ik}$  zusammengefasst: z.B.

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} T^{i0} + \frac{\partial}{\partial x^j} T^{ij} = 0 \quad (6)$$



Die Gleichung (5) hat die Form der Kontinuitätsgleichung einer Impulsdichte  $T^{i0}$   
 „Anschaulich“ : BILD  
 Konkret : Energie-Impuls-Tensor (symmetrisiert).

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} W & \frac{S_x}{c} & \frac{S_y}{c} & \frac{S_z}{c} \\ \frac{S_x}{c} & T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ \frac{S_y}{c} & T_{xy} & T_{yy} & T_{yz} \\ \frac{S_z}{c} & T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

### 2.3.6 Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{-1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{mit } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ T^{\mu\nu} &= \frac{\partial A_\kappa}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial A_\kappa}{\partial x_\nu})} - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} (\partial^\mu A^\kappa) F^\nu{}_\kappa + \frac{1}{4\mu_0} g^{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \end{aligned}$$

Wir symmetrisieren durch die Addition von  $\frac{1}{\mu_0} (\partial^\mu A^\kappa) F^\mu{}_\kappa$ . (Dies ist möglich, da  $\partial_\mu F^\mu{}_\kappa = 0$ , wenn keine Ladungen existieren.)

$$=: T^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} g_{\kappa\lambda} F^{\mu\kappa} F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4\mu_0} g^{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda}$$

Eigenschaften von  $T^{\mu\nu}$ :

- symmetrisch  $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$
- spurfrei  $T^\mu{}_\mu = 0$

Die Komponenten ergeben sich zu

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{1}{c^2} \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \\ &\quad \longrightarrow \text{Energiedichte} \\ T^{i0} = T^{0i} &= +\frac{1}{\mu_0 c} (\vec{E} \times \vec{B})_i \\ &\quad \cong \text{Poyntingvektor} \\ T^{ij} &= -\epsilon_0 E_i E_j - \frac{1}{\mu_0} B_i B_j + \frac{\delta_{ij}}{2} T^{00} \\ &\quad \longrightarrow \text{negativer Maxwellscher Spannungstensor} \end{aligned}$$

Die Berücksichtigung von Ladungen ( = Quellen des elektromagnetischen Feldes)  
 führt auf gemeinsame Erhaltungssätze:  
 z.B.:

$$\frac{d}{dt} \left( P_{\text{Feld}}^{\mu} + P_{\text{Teilchen}}^{\mu} \right) = 0$$

mit  $P_{\text{Teilchen}}^{\mu} = \sum_i p_{(i)}^{\mu} \hat{=}$  gesamter 4er-Impuls aller Teilchen

## 2.4 Lösung der Wellengleichung in kovarianter Form

Wir gehen von den inhomogenen Maxwellgleichungen aus:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$

Mit dem Potential

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ &=: \underbrace{\partial_\mu \partial^\mu}_{\square} A^\nu - \partial^\nu \underbrace{\partial_\mu A^\mu}_{=0} = \mu_0 j^\nu \end{aligned}$$

$\partial_\mu A^\mu = 0$  heißt Lorenzbedingung. Die inhomogene Wellengleichung nimmt die Form einer inhomogenen, partiellen Differentialgleichung an.

$$\boxed{\square A^\nu = \mu_0 j^\nu}$$

Lösung mit Hilfe der Greenschen Funktion:

$$\square_x G(x, x') = \delta^{(4)}(x - x')$$

$$\text{Im freien Raum gilt } G(x, x') = G(x - x')$$

Eine 4 dim. Fouriertransformation löst die Gleichung:

$$\begin{aligned} G(x - x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{G}(k) e^{-ik(x-x')} \\ k^\mu &= \left( \frac{\omega}{c}, \vec{k} \right)^T & kx &= \omega t - \vec{k}\vec{x} \\ \delta^{(4)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ikx} \\ &=: \boxed{\tilde{G} = -\frac{1}{k^2}} \end{aligned}$$

Rücktransformation:

Für die Rücktransformation müssen die Pole bei  $k_0 = \pm |\vec{k}|$  beachtet werden.

→ Definiere wie zuvor eine retardierte und avancierte Greensche Funktion, indem die Integration infinitesimal nach  $k_0 \pm i\varepsilon$  verschoben wird.

Durchführung: siehe Übung

Ergebnis:

$$\begin{aligned} G_{R/A}(x - x') &= \frac{1}{4\pi R} \Theta(\pm(x_0 - x'_0)) \delta(x_0 - x'_0 \mp R) \\ \text{mit } R &= |\vec{x} - \vec{x}'| \end{aligned}$$

Beachte die sog. **retardierte Zeit**, d.h. dass die Greensche Funktion bei  $\vec{x}$  von Null verschieden ist für

$$t' = \frac{x'_0}{c} = \frac{x_0}{c} - \frac{R}{c} = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}$$

Die Wirkung bei  $x'$  findet zu einer früheren Zeit  $t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}$  statt.

### Kovariante Form

$$\begin{aligned} \delta((x - x')^2) &= \delta((x_0 - x'_0)^2 - |\vec{x} - \vec{x}'|^2) \\ &= \delta((x_0 - x'_0 - R)(x_0 - x'_0 + R)) \\ &\quad \text{mit } \delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n) \quad x_n = \text{Nst.} \\ &= \frac{1}{2R} (\delta(x_0 - x'_0 - R) + \delta(x_0 - x'_0 + R)) \end{aligned}$$

Wegen  $\Theta(\pm(x_0 - x'_0))$  tritt immer nur eine  $\delta$ -Funktion in der Greenschen Funktion auf und es gilt:

$$G_{R/A}(x - x') = \frac{1}{2\pi} \Theta(\pm(x_0 - x'_0)) \delta((x - x')^2)$$

Die Thetafunktionen sind unter Lorentztransformationen invariant, da die Kausalität erhalten bleibt!

Felder bewegter Ladungen folgen aus

$$\begin{aligned} j^\mu(x) &= c \sum_i q_i \int d\tau u_{(i)}^\mu(\tau) \delta^{(4)}(x - x_i(\tau)) \\ \text{und } A^\mu(x) &= \int d^4x' G(x - x') j^\mu(x') \end{aligned}$$

Für die bewegte Punktladung führt das auf die sog. **Lienard-Wichert-Potentiale**.

### 3 Relativistische Quantenmechanik

#### Wiederholung

- Bisherige Quantenmechanik für ein Teilchen basiert auf der Schrödingergleichung.

$$i\hbar\partial_t |\psi\rangle = \mathcal{H} |\psi\rangle$$

Für den Zustand  $|\psi\rangle$

- Wahrscheinlichkeitsinterpretation

$$|\langle n | \psi \rangle|^2$$

Die obige Gleichung gibt die Wahrscheinlichkeit einen Zustand  $|n\rangle$  zu finden an.

- Der Hamiltonoperator eines freien Teilchens

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m}$$

mit  $\vec{p} = -i\hbar \nabla$

- Kopplung an elektromagnetischen Felder ist analog zur Hamiltonmechanik

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A} \qquad \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} + q\phi$$

Relativitätstheorie fordert kovariante Formulierung der Naturgesetze.

Problem: Die Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t |\psi\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_{\vec{r}}^2 \psi$$

ist nicht kovariant, da die Ableitungen der Raum- und Zeitkomponenten in unterschiedlichen Ordnungen auftreten.

#### 3.1 Klein-Gordon-Gleichung

Verwende das Korrespondenzprinzip

$$E \rightarrow i\hbar\partial_t \qquad \vec{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$$

und den relativistischen Energie- und Impuls-Zusammenhang

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}.$$

Für die Wellengleichung ergibt sich dann

$$i\hbar\partial_t\psi = \sqrt{m^2c^4 - \hbar^2c^2\nabla^2}\psi$$

Die r.S. ist über die Reihenentwicklung definiert

$$mc^2 - \frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + \dots \nabla^4 + \dots$$

Das heißt es treten unendlich hohe Ableitungen auf.

→ Die Ausdrücke werden sehr kompliziert. Zeit und Ort treten unsymmetrisch auf, Kovarianz ist nicht offensichtlich.

→ Ansatz wird nicht weiter verfolgt. Stattdessen gehen wir von

$$E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$$

aus.

$$=: \boxed{-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (m^2c^4 - \hbar^2c^2\Delta) \psi}$$

$\hat{=}$  Klein-Gordon-Gleichung

Die Klein-Gordon-Gleichung kann kovariant geschrieben werden:

$$\left( \partial_\mu \partial^\mu + \underbrace{\left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2}_{\text{Lorentzskalar}} \right) \psi = 0$$

Analog der Wellengleichung mit einem Massenterm. Dieser definiert eine Länge gemäß

$$\frac{mc}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda_c}.$$

$\lambda_c$  ist die Compton-Wellenlänge.

Konsequenzen der Klein-Gordon-Gleichung:

- Ebene Welle  $\exp(i\vec{k}\vec{x} - iE\frac{t}{\hbar})$   
mit

$$E = \pm \sqrt{m^2c^4 + \hbar^2c^2k^2}$$

d.h. es gibt im Vakuum Lösungen negativer Energien. Diese Lösungen werden im Rahmen der **Quantenfeldtheorie** durch **Antiteilchen** erklärt.

- Wahrscheinlichkeitsinterpretation  
(Dichte und Stromdichte)

$$\begin{aligned}\psi^* \left( \partial_\mu \partial^\mu + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \psi - c.c. &= 0 & c.c. &= \text{complex conjugated} \\ \rightarrow \psi^* \partial_\mu \partial^\mu \psi - \psi \partial_\mu \partial^\mu \psi^* &= 0 \\ \rightarrow \partial_\mu (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*) &= 0\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat die Form einer Kontinuitätsgleichung für eine 4-Stromdichte.

$$j^\mu = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)$$

Aber:

Die Zeitkomponente

$$\frac{j^0}{c} = \rho = \frac{\hbar}{2m i c} (\psi^* \partial^0 \psi - \psi \partial^0 \psi^*)$$

ist nicht positiv definit, da  $\psi$  und  $\psi^*$  unabhängig gewählt werden können zum Zeitpunkt  $t = 0$  (Dgl. 2. Ordnung).

=: Wahrscheinlichkeitsinterpretation ist nicht möglich und Klein-Gordon-Gleichung kann keine Einteilchen Quantenmechanik beschreiben.

- Klein-Gordon-Gleichung in der Quantenfeldtheorie beschreibt geladene Teilchen mit Spin 0 ( $\pi$ -Mesonen) und ihre anti-Teilchen (mit umgedrehter Ladung), d.h. negativer Ladungsdichte.
- Kopplung an ein skalares Potential

$$\left[ \left( i\hbar \partial_t - \underbrace{V(r)}_* \right)^2 + \hbar^2 c^2 \nabla^2 \right] \psi = m^2 c^4 \psi$$

\*) typisches Skalar  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$

Dass heißt die Kopplung an das Potential ist bestimmt durch eine dimensionslose Konstante

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137.037} \quad \text{Feinstrukturkonstante}$$

Die Feinstrukturkonstante ist eine grundlegende Größe in der sog. Quantenelektrodynamik (QED), die die Wechselwirkung von Ladungen und Photonen beschreibt.

Alternativ:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{\text{Coulombenergie zweier Ladungen im Abstand } s}{\text{Photonenenergie mit der Wellenlänge } r} \\
 &= \frac{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}}{\hbar c \frac{1}{r}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \\
 \alpha &= \frac{\text{Compton Wellenlänge}}{\text{Bohrradius}} = \frac{\frac{\hbar}{mc}}{4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{e^2 m}}
 \end{aligned}$$



## 3.2 Dirac-Gleichung

Neuer Ansatz mit der Ableitung erster Ordnung (zur Vermeidung negativer Dichte).

$$\boxed{i\hbar\partial_t\psi = (-i\hbar c\alpha^k\partial_k + \beta mc^2)\psi} \quad \hat{=}\text{Dirac-Gleichung}$$

mit  $(-i\hbar c\alpha^k\partial_k + \beta mc^2) = \mathcal{H}$

$\psi$  kann keine einkomponentige Wellenfunktion sein, da  $\alpha^k$  und  $\beta$  hermitesche Matrizen sein müssen. Für einfache Zahlen ( für  $\alpha^k = 1$  z.B.) wäre nicht einmal die Drehinvarianz der Gleichung gewährleistet.

$$=: \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \quad \hat{=}\text{„Spinor“}$$

### Forderungen

1. Aus dem Korrespondenzprinzip folgt, dass die Lösung ebenfalls Klein-Gordon-Gleichungen erfüllen. Speziell für ebene Wellen soll gelten:

$$E^2 = m^2c^4 + c^2p^2$$

2. Erhaltener 4-Strom mit positiv definiter Dichte.

$$(\text{Kandidat: } \rho = \psi^\dagger \psi = \sum_{i=1}^N |\psi_i|^2)$$

3. Die Lorentzkovarianz muss erfüllt sein.

### 3.2.1 Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung

Erneute Anwendung von  $i\hbar\partial_t = \mathcal{H}$  ergibt

$$\begin{aligned} -\hbar^2\partial_t^2\psi &= \left[ -\hbar^2c^2\alpha^k\alpha^l\partial_k\partial_l + \beta^2m^2c^4 - i\hbar c^3m(\alpha^k\beta + \beta\alpha^k)\partial_k \right] \psi \\ &\stackrel{!}{=} \left[ -\hbar^2c^2\sum_k\partial_k^2 + m^2c^4 \right] \psi \end{aligned}$$

Hieraus folgt für  $\alpha$  und  $\beta$

$$\beta^2 = \mathbb{1} \quad \beta\alpha^k + \alpha^k\beta = 0 \quad (1)$$

$$(\alpha^k)^2 = \mathbb{1} \quad \alpha^k\alpha^l + \alpha^l\alpha^k = 2\delta^{kl}\mathbb{1} \quad (2)$$

Diese Bedingungen stellen wir an die Dirac-Matrizen um die erste Forderung zu erfüllen.

### 3.2.2 Konstruktion des Viererstroms

Multipliziere die Dirac-Gleichung mit  $\psi^\dagger = (\psi_1^*, \dots, \psi_N^*)$

$$\rightarrow i\hbar \psi^\dagger \partial_t \psi = -i\hbar c \psi^\dagger \alpha^k \partial_k \psi + mc^2 \psi^\dagger \beta \psi$$

Komplex konjugiert:

$$-i\hbar (\partial_t \psi^\dagger) \psi = i\hbar c (\partial_k \psi^\dagger) \alpha^k \psi + mc^2 \psi^\dagger \beta \psi$$

Bei der obigen Gleichung haben wir ausgenutzt, dass gilt

$$\alpha^{k\dagger} = \alpha^k \quad \beta^\dagger = \beta$$

Bilde die Differenz:

$$i\hbar [\psi^\dagger \partial_t \psi + (\partial_t \psi^\dagger) \psi] = -i\hbar c [\psi^\dagger \alpha^k \partial_k \psi + (\partial_k \psi^\dagger) \alpha^k \psi]$$

Umschreiben der obigen Gleichung in der Form einer Kontinuitätsgleichung.

$$\partial_t (\psi^\dagger \psi) = -\partial_k (c \psi^\dagger \alpha^k \psi)$$

Identifiziere die Viererstromdichte:

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= 0 \\ \text{mit } j^0 &= c \psi^\dagger \psi = c\rho \\ \vec{j} &= c \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi \end{aligned}$$

→ Die Zeitkomponente ist positiv definit und kann als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden. (Forderung 2)

Dreierstromdichte:  $c\vec{\alpha}$  spielt die Rolle der Geschwindigkeit (folgt auch aus  $\vec{v}_{op} = -\frac{i}{\hbar} [\vec{r}, \mathcal{H}]$ ).

### 3.2.3 Konstruktion des Spinorraums, Dirac-Darstellung

Frage:

Wie viele Komponenten hat ein Spinor  $\psi$  und welche Form haben die Dirac-Matrizen?

→  $\alpha^k$  und  $\beta$  haben die Eigenwerte  $\pm 1$  (da  $(\alpha^k)^2 = \mathbb{1} = \beta^2$ ).

Aus dem Antikommutator  $\{\beta, \alpha^k\} = 0$  folgt:

$$\begin{aligned} \alpha^k \beta &= -\beta \alpha^k & =: \alpha^k &= -\beta \alpha^k \beta \\ \text{Sp} \alpha^k &= -\text{Sp}(\beta \alpha^k \beta) = -\text{Sp}(\alpha^k \beta^2) \\ &= -\text{Sp}(\alpha^k) \\ : \text{Sp}(\alpha^k) &= 0 & \text{analog } \text{Sp}(\beta) &= 0 \end{aligned}$$

Die Zahl der Eigenwerte  $+1$  und  $-1$  muss gleich sein.  $\rightarrow N$  ist gerade.

$N = 2$ ? Geht nicht, da es nur drei untereinander antikommutierende  $2 \times 2$  Matrizen gibt (Paulimatrizen).

$N = 4$ ? Geht!

$=$ : Spinoren haben (mindestens) 4 Komponenten und die Dirac-Matrizen sind  $4 \times 4$  Matrizen!

Standarddarstellung: Dirac-Darstellung

( $\sigma^k = 2 \times 2$  Paulimatrizen, es gilt .

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\text{also } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & +i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Ausblick:

$N = 4$  wird erklärt durch den Spin  $-\frac{1}{2}$  - Freiheitsgrad und der Existenz von Antiteilchen, beides sind Konsequenzen der relativistischen Formulierung.

### 3.2.4 Kovariante Form der Dirac- Gleichung

Multipliziere die Dirac-Gleichung mit  $\frac{\beta}{c}$ .

$$-i\hbar\beta\partial_0\psi - i\hbar\beta\alpha^k\partial_k\psi + mc\psi = 0$$

Definition der  $\gamma$ -Matrizen

$$\boxed{\gamma^0 = \beta \quad \gamma^k = \beta\alpha^k}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^\dagger &= \gamma^0 & (\gamma^k)^\dagger &= -\gamma^k \\ (\gamma^0)^2 &= 1 & (\gamma^k)^2 &= \beta\alpha^k\beta\alpha^k \\ & & &= -(\alpha^k)^2 = -1 \end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt für Antikommutatoren:

$$\boxed{\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}}$$

Feynman-Slash:  $\not{\psi} = \gamma^\mu\nu_\mu$

$$\rightarrow (-i\hbar\not{\partial} + mc)\psi = 0$$

Mit der Konvention:  $\hbar = 1 = c$  gilt:

$$(-i\not{D} + m)\psi = 0$$

Explizit:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}$$

Beachte:

Unter der Lorentztransformation  $x' = \Lambda x$  müssen neben den Koordinaten auch die **Spinoren** transformiert werden.

$$\begin{aligned} (-i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc)\psi(x) &= 0 \\ \rightarrow (-i\hbar\gamma^\mu\partial'_\mu + mc)\psi'(x') &= 0 \\ \text{mit } \psi'(x') &= S(\Lambda) \cdot \psi(x) \end{aligned}$$

$S$  ist die Transformationsmatrix für die Spinoren.

Die  $\gamma$ -Matrizen sind in allen Inertialsystemen gleich, sie entsprechen 4-Vektoren in dem Sinne, dass sich die **Bilinearform**

$$\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

wie ein 4-Vektor transformiert.

### 3.2.5 Nachweis der Kovarianz

Gesucht ist eine Transformation  $S(\Lambda)$  der Spinoren ( $\psi' = S(\Lambda)\psi$ ), die gleichzeitig die Dirac-Gleichung forminvariant lässt.

Erinnerung:  $\Lambda$  ist eigentliche Lorentztransformation (Boosts und Drehungen).

$$x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad x' = \Lambda x$$

Die Transformation  $S(\Lambda)$  ist eine  $4 \times 4$ -Matrix, die von  $\Lambda$  abhängt. Es gilt:

$$\begin{aligned} \psi'(x') &= \psi'(\Lambda x) = S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x') \\ \psi(x) &= S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = S^{-1}(\Lambda)\psi'(\Lambda x) \\ &= S(\Lambda^{-1})\psi'(\Lambda x) \\ &=: S(\Lambda^{-1}) = S^{-1}(\Lambda) \end{aligned}$$

Forminvarianz der Dirac-Gleichung

$$\begin{aligned} (i\hbar\gamma^\mu \underbrace{\partial_\mu}_{\Lambda_\mu{}^\nu \partial'_\nu} - mc) \underbrace{\psi(x)}_{S^{-1}(\Lambda)\psi'(x')} &= 0 \\ \left( i\hbar \underbrace{S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda_\mu{}^\nu}_{\gamma^\nu} \partial'_\nu - mc \right) \psi'(x') &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda_\mu{}^\nu = \gamma^\nu} \quad (5a)$$

$$\rightarrow \boxed{S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = \Lambda_\nu{}^\mu \gamma^\nu} \quad (5b)$$

Die umrahmte Gleichung ist die fundamentale Bestimmungsgleichung für die  $S(\Lambda)$ . Falls  $S(\Lambda)$  existiert, ist die Kovarianz der Dirac-Gleichung bewiesen. Um Gleichung 5b aus 5a zu erhalten, multiplizieren wir Gleichung(5a) von links mit  $\Lambda^\sigma{}_\rho g_{\sigma\nu}$  und benutzen

$$\Lambda^\nu{}_\mu g_{\nu\sigma} \Lambda^\sigma{}_\rho \stackrel{*}{=} g_{\mu\rho} = g_{\rho\mu}$$

\*) Dies ist die Orthogonalitätsbedingung der Lorentztransformation.

???

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)g_{\rho\mu} = \Lambda^\sigma{}_\rho \underbrace{g_{\sigma\nu}\gamma^\nu}_{=\gamma_\sigma}$$

Explizite Konstruktion für  $S$  durch eine infinitesimale Lorentztransformation.

$$\Lambda^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + \underbrace{\Delta\omega^\mu{}_\nu}_{\text{infinitesimal}}$$

Aus der Invarianz von

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

folgt

$$\boxed{\Delta\omega^{\mu\nu} = -\Delta\omega^{\nu\mu}} \\ \rightarrow \Delta\omega^T = -g\Delta\omega g$$

Multiplizieren mit  $g$  von rechts an die Gleichung ergibt:

$$\rightarrow (\Delta\omega g)^T = -\Delta\omega g$$

$\rightarrow \Delta\omega$  ist antisymmetrisch.

$\Delta\omega$  hat sechs unabhängige Komponenten. Diese sind drei Boosts und drei Drehungen.

Zum Beispiel einen Boost in  $x$ -Richtung ist

$$\Delta\omega^{01} = \frac{\Delta v}{c}$$

oder eine Rotation um die  $x$ -Achse:

$$\begin{aligned}\Delta\omega^2_3 &= -\Delta\omega^{32} = \Delta\varphi \\ \Lambda^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} + \Delta\omega^{\mu\nu}\end{aligned}$$

Entwickle  $S(\Lambda^{\mu\nu})$  in  $\Delta\omega^{\mu\nu}$

$$S_\Delta = \hat{1} - \frac{i}{4} \underbrace{\sigma_{\mu\nu}}_* \Delta\omega^{\mu\nu}$$

\*)Die  $\sigma$  sind  $4 \times 4$  Matrizen, die im 4-dimensionalen Raum der Wellenfunktion  $\psi$  operieren. Sie bestimmt man aus der Orthogonalitätsbedingung der Lorentztransformation.

begin ?

$$\begin{aligned}S_\Delta(\Delta\omega^{\mu\nu}) &= S_\Delta(-\Delta\omega^{\nu\mu}) = \hat{1} + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\nu\mu} \\ \sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu} &= -\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\nu\mu} = -\sigma_{\nu\mu}\Delta\omega^{\mu\nu}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}}$$

Wir können auch  $S S^{-1} = \hat{1}$  bis zur 1.Ordnung in  $\Delta\omega$  entwickeln.

$$S^{-1} = \hat{1} + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu}$$

Einsetzen von  $S$  und  $S^{-1}$  in die Gleichung für  $\gamma$  ergibt:

$$\begin{aligned}S \gamma^\mu S^{-1} &= \Lambda^{\nu\mu} \gamma_\nu \\ &= \left(\hat{1} - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu}\right) \gamma^\alpha \left(\hat{1} + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu}\right) \\ &= (g^\alpha_\beta + \Delta\omega^\alpha_\beta) \gamma^\beta\end{aligned}$$

=: Bedingung für  $\sigma$  und  $S$ :

$$\Delta\omega^\alpha_\beta \gamma^\beta = -\frac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu} [\sigma_{\mu\nu}, \gamma^\alpha]$$

Diese Gleichung wird durch

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

erfüllt. Beweis siehe Übung. Eine infinitesimale Transformation ist dann

$$S_\Delta = 1 + \frac{1}{8} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \Delta\omega^{\mu\nu}.$$

=: Bilde eine endliche Lorentztransformation.

Ende ?

$$\begin{aligned}
\Delta\omega^{\mu\nu} &\xrightarrow{N\rightarrow\infty} 0 & \omega^{\mu\nu} &= N\Delta\omega^{\mu\nu} \\
=:S(\omega^{\mu\nu}) &= \lim_{N\rightarrow\infty} S(\Delta\omega^{\mu\nu})^N = \lim_{N\rightarrow\infty} \left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu}\right)^N \\
&= \lim_{N\rightarrow\infty} \left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\frac{\omega^{\mu\nu}}{N}\right)^N \\
&\longrightarrow \boxed{S(\omega^{\mu\nu}) = \exp(-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu})}
\end{aligned}$$

Diese Transformation existiert, somit ist die Kovarianz der Dirac-Gleichung gezeigt.

### 1. Raumspiegelungen $x' = -x \quad t' = t$

$$\begin{aligned}
\Lambda^\mu{}_\nu &= g^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
P\gamma^\mu P^{-1} &= g^\mu{}_\nu \gamma^\nu \\
P &= \text{Paritätstransformation} \\
P\gamma^0 P^{-1} &= \gamma^0 \\
P\gamma^i P^{-1} &= -\gamma^i
\end{aligned}$$

Eine Lösung ist zum Beispiel

$$P = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$P$  ist bis auf einen Phasenfaktor  $e^{i\varphi}$  bestimmt.

### 2. Endliche Drehung um die z-Achse

Hier gilt dann für  $\varphi \ll 1$

$$\begin{aligned}
\omega^1{}_2 &= \varphi = -\omega^{12} = -\omega_{12} \\
\omega^2{}_1 &= -\varphi = +\omega^{21} = +\omega_{21}
\end{aligned}$$

Per Definition ist es in diesem Fall nur notwendig eine  $\sigma$ -Matrix zu kennen.

?

$$\begin{aligned}
\sigma_{12} &= \frac{i}{2}[\gamma_1, \gamma_2] = \frac{i}{2} \left[ \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ +\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ +\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

→ Analogie zur Drehung mit zwei Spinoren um die z-Achse.

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

D.h.

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= \exp\left(-\frac{i}{4}(\sigma_{12}\omega^{12} + \sigma_{21}\omega^{21})\right) = e^{\frac{i}{2}\sigma_{12}\varphi} \quad \text{mit } \sigma_{12}^2 = \mathbb{1} \\ S(\Lambda^{-1}) &= S^{-1}(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\sigma_{12}\varphi} = S(\Lambda)^\dagger \end{aligned}$$

Im folgenden soll nun  $S(\Lambda)$  berechnet werden:

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= e^{\frac{i}{2}\sigma_{12}\varphi} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \left(\frac{i\varphi}{2}\right)^{2m} \underbrace{\sigma_{12}^{2m}}_{\mathbb{1}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \left(\frac{i\varphi}{2}\right)^{2m+1} \underbrace{\sigma_{12}^{2m+1}}_{\sigma_{12}} \\ &= \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\frac{\varphi}{2}\right)^{2m}}_{\cos(\frac{\varphi}{2})} + i\sigma_{12} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \left(\frac{\varphi}{2}\right)^{2m+1}}_{\sin(\frac{\varphi}{2})} \\ &= \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i\sigma_{12} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

: Keine Mischung der Spinorkomponenten.

Verhalten der oberen bzw. unteren Komponenten entspricht üblicher Rotation eines  $\text{Spin}\frac{1}{2}$ .

→ Wir identifizieren diese Freiheitsgrade mit dem Spin des Elektrons und  $\frac{\hbar}{2}\sigma_{12}$  mit der z-Komponente des Spinoperators.

### 3. Boost in x-Richtung mit $v$

$$\omega \ll 1 \quad (v \ll c)$$

Hier gilt:

$$\begin{aligned} \omega_{01} &= -\omega_{10} =: -\omega \\ \omega^0{}_1 &= -\omega = \omega_{01} = -\omega^{01} \\ \omega^1{}_0 &= -\omega = -\omega_{10} = \omega^{10} \end{aligned}$$



Hierbei ist  $\omega$  wie folgt definiert ( $\tanh(\omega) = \frac{v}{c}$ ).

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh(\omega) & -\sinh(\omega) & 0 & 0 \\ -\sinh(\omega) & \cosh(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{01} &= \frac{i}{2} [\gamma_0, \gamma_1] \\ &= \frac{i}{2} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2\sigma_1 \\ -2\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} = -i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\alpha_1 = \alpha_1^\dagger \\ \text{mit } \alpha_1^2 = \mathbb{1}}} \end{aligned}$$

Einsetzen in die Transformationsmatrix ergibt:

$$S = e^{-\frac{i}{2}\sigma_{01}\omega} = e^{-\frac{1}{2}\alpha^1\omega} = S^\dagger$$

Betrachten die Inverse der Transformationsmatrix:

$$S^{-1} = e^{\frac{1}{2}\alpha^1\omega} \neq S^\dagger$$

$$\begin{aligned} S &= e^{-\frac{1}{2}\alpha_1\omega} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \left(\frac{-\omega}{2}\right)^{2m} \alpha_1^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \left(\frac{-\omega}{2}\right)^{2m+1} \alpha_1^{2m+1} \\ &= \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \left(\frac{+\omega}{2}\right)^{2m}}_{\cosh(\frac{\omega}{2})} - \alpha_1 \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \left(\frac{+\omega}{2}\right)^{2m+1}}_{\sinh(\frac{\omega}{2})} \\ &= \cosh(\frac{\omega}{2}) - \alpha_1 \sinh(\frac{\omega}{2}) \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\frac{\omega}{2}) & 0 & 0 & -\sinh(\frac{\omega}{2}) \\ 0 & \cosh(\frac{\omega}{2}) & -\sinh(\frac{\omega}{2}) & 0 \\ 0 & -\sinh(\frac{\omega}{2}) & \cosh(\frac{\omega}{2}) & 0 \\ -\sinh(\frac{\omega}{2}) & 0 & 0 & \cosh(\frac{\omega}{2}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

=: Mischung aller Spinorkomponenten des Lorentzboost.

### 3.3 Lösungen der Dirac-Gleichung und der nicht relativistische Grenzfall

Einheiten Konvention  $\boxed{c = 1 = \hbar}$

#### 3.3.1 Ruhende Teilchen $\partial_t \psi = 0$

$$i\partial_t \psi = m\beta\psi$$

Die Dirac-Gleichung für ein räumlich unabhängiges Teilchen. Wir können 4 linear unabhängige Lösungen angeben, müssen jedoch die Zeitabhängigkeit beachten.

$$\psi(t) = \psi e^{-iEt}$$

$$\begin{aligned} \psi_1^+ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} & \psi_2^+ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \Bigg\} E = mc^2 \\ \psi_1^- &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+imt} & \psi_2^- &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+imt} \Bigg\} E = -mc^2 \end{aligned}$$

Jeweils zwei Lösungen mit positiver und negativer Energie!  
Bedeutung?

- 2 Lösungen mit positiver Energie entsprechen den **inneren Freiheitsgraden**.  
=: Eigendrehimpuls = Spin.
- Lösungen negativer Energie entsprechen Antiteilchen, die erst im Rahmen der Quantenfeldtheorie konsistent behandelt werden können.

#### 3.3.2 Ebene Wellen

Wir suchen Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung

$$\begin{aligned} (\square + m^2)\psi &= 0 \\ \rightarrow -p^2 + m^2 &= 0 \quad : E^2 = m^2 + \vec{p}^2 \\ \longrightarrow E &= \pm \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \end{aligned}$$

Seien  $u_s$  und  $v_s$  Spinoren, so lässt sich abhängig von der Energie schreiben:

$$\begin{aligned} E > 0 \quad \psi^+(x) &= u_s(\vec{p}) e^{-ipx} = u_s(\vec{p}) e^{-ip_0 t + i\vec{p}\vec{x}} \\ E < 0 \quad \psi^-(x) &= v_s(\vec{p}) e^{ipx} = v_s(\vec{p}) e^{ip_0 t - i\vec{p}\vec{x}} \end{aligned}$$

Hierbei ist  $p_0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} > 0$ . Die Spinoren erfüllen mit  $i\vec{\sigma}\psi = \pm \not{p}\psi$  die Dirac-Gleichung:

$$\begin{aligned}(\not{p} - m)u_s(\vec{p}) &= 0 \\(\not{p} + m)v_s(\vec{p}) &= 0\end{aligned}$$

Benutze zur Berechnung:

$$\begin{aligned}\not{p}\not{p} &= p_\mu \gamma^\mu p_\nu \gamma^\nu = p_\mu p_\nu \underbrace{\frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}}_{2g^{\mu\nu}} \\&= p_\mu p_\nu g^{\mu\nu} = p_\mu p^\mu \stackrel{*}{=} m^2\end{aligned}$$

\*) Das einzige Lorentzskalar, welches unter Transformationen konstant bleibt ist  $m^2$ . Es gilt also:

$$(\not{p} - m)(\not{p} + m)\psi = (\not{p}\not{p} - m^2)\psi = 0$$

D.h. ein Spinor  $\psi' = (\not{p} + m)\psi$  erfüllt die Dirac-Gleichung, da

$$(\not{p} - m)\psi' = (\not{p} - m)(\not{p} + m)\psi = 0$$

für ein beliebiges  $\psi$ .

=: Wir erhalten Lösungen z.B. indem wir  $(\not{p} \pm m)$  auf die Basisvektoren

$$u_0 = \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \chi_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

anwenden.

$$\begin{aligned}(\not{p} + m)u_0 &= (p^\mu \gamma_\mu + m)u_0 = \begin{pmatrix} (E + m)\mathbb{1}_2 & -\vec{p}\vec{\sigma} \\ \vec{p}\vec{\sigma} & (-E + m)\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} (E + m)\chi_s \\ \vec{p}\vec{\sigma} \cdot \chi_s \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\vec{p}\vec{\sigma} = p_x \sigma_x + p_y \sigma_y + p_z \sigma_z = \begin{pmatrix} p_z & p_x + ip_y \\ p_x - ip_y & -p_z \end{pmatrix}$$

$$\text{analog} \quad (\not{p} - m) \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ vier linear unabhängige Lösungen (Normierung später).

$$u_s(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E + m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E + m} \chi_s \end{pmatrix}$$

$$v_s(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E + m} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix}$$

Die vollständigen Wellenfunktionen sind:

$$\begin{aligned}\psi_{\vec{p},s}^+(\vec{r},t) &= u_s(\vec{p})e^{i(\vec{p}\vec{r}-Et)} \quad \text{mit } E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \\ \psi_{\vec{p},s}^-(\vec{r},t) &= v_s(\vec{p})e^{i(-\vec{p}\vec{r}+Et)}\end{aligned}$$

Zum Beweis der Orthogonalität benötigen wir zunächst die Definition des Skalarprodukts im Spinorraum. Hierzu führen wir den adjungierten Spinor  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$  ein. (vgl. hermitesch adjungiert:  $\psi^\dagger = \psi^{T*}$ .)

Damit gilt für die Dichte und den Strom:

$$\begin{aligned}j^\mu &= c(\psi^\dagger \psi, \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi) \\ &= c(\bar{\psi} \gamma^0 \psi, \bar{\psi} \vec{\gamma} \psi) \\ &= c\bar{\psi} \gamma^\mu \psi\end{aligned}$$

Für die adjungierten Spinoren gilt:

$$\begin{aligned}\bar{u}_s = u_s^\dagger \gamma_0 &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left( \chi_s^\dagger, \chi_s^\dagger \frac{\vec{p} \hat{\sigma}}{E+m} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left( \chi_s^\dagger, -\chi_s^\dagger \frac{\vec{p} \hat{\sigma}}{E+m} \right) \\ \bar{v}_s &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left( \chi_s^\dagger \frac{\vec{p} \hat{\sigma}}{E+m}, -\chi_s^\dagger \right) \\ \bar{u}_s \cdot u_{s'} &= \frac{E+m}{2m} \left( \chi_s^\dagger \chi_{s'} - \chi_s^\dagger \left( \frac{\vec{p} \hat{\sigma}}{E+m} \right)^2 \chi_{s'} \right)\end{aligned}$$

Mit der Identität  $(\vec{p} \hat{\sigma})^2 = \vec{p}^2$  vereinfachen, wir das

$$\begin{aligned}\rightarrow \bar{u}_s u_{s'} &= \frac{E+m}{2m} \delta_{ss'} \left( 1 - \frac{\vec{p}^2}{(E+m)^2} \right) = \delta_{ss'} \\ \bar{u}_s v_{s'} &= \frac{E+m}{2m} \left( \chi_s^\dagger \frac{\vec{p} \hat{\sigma}}{E+m} \chi_{s'} - \chi_s^\dagger \frac{\vec{p} \hat{\sigma}}{E+m} \chi_s \right) = 0 \\ =: &\quad \boxed{\begin{array}{ll} \bar{u}_s u_{s'} = \delta_{ss'} & \bar{v}_s v_{s'} = -\delta_{ss'} \\ \bar{u}_s v_{s'} = 0 & \bar{v}_s u_{s'} = 0 \end{array}}\end{aligned}$$

Die umrahmte Gleichung gilt unabhängig vom Bezugssystem, da die rechten Seiten nicht vom Impuls abhängen.

Wir berechnen die Dichte  $\rho = \frac{j^0}{c} = \bar{\psi} \gamma^0 \psi$  mit Hilfe von

$$\frac{\not{p}}{m} u_s = u_s \quad ((\not{p} - m)u_s = 0)$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_s^+ \gamma_0 \psi_s^+ &= \bar{\psi}_s^+ \underbrace{\frac{\not{p} \gamma_0 + \gamma_0 \not{p}}{2m}}_{\frac{1}{2m} \{ \not{p}, \gamma_0 \} = \frac{1}{2m} 2p_0 = \frac{E}{m}} \psi_s^+ \\
&= \frac{E}{m} \\
\bar{\psi}_s^- \gamma_0 \psi_s^- &\stackrel{-\frac{p}{m} v_s = v_s}{=} \bar{\psi}_s^- \frac{\not{p} \gamma_0 - \gamma_0 \not{p}}{2m} \psi_s^- = -\frac{E}{m} \bar{v}_s v_s \\
&= -\frac{E}{m}
\end{aligned}$$

—> Die Dichten sind positiv für alle Lösungen, aber sie sind kein Lorentzskalar (aufgrund der Längenkontraktion unter Lorentztransformationen ist das verständlich). Der faktor  $\frac{E}{m}$  kann auch geschrieben werden als:

$$\frac{E}{m} = \frac{\frac{E}{m_0}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \frac{E}{m_0}$$

und kompensiert die Längenkontraktion des Volumenelements  $\frac{d^3x}{\gamma}$ .

Berechnung der Stromdichte.

$$\begin{aligned}
\vec{j} &= c \bar{\psi} \vec{\gamma} \psi & \psi &= \begin{cases} u_{\vec{p},s} & e^{i(\vec{p}\vec{r}-Et)} \\ v_{\vec{p},s} & e^{-i(\vec{p}\vec{r}-Et)} \end{cases} \\
\bar{u}_{\vec{p},s} \vec{\gamma} u_{\vec{p},s} &= \left( \chi_s^\dagger, -\chi_s^\dagger \frac{\vec{p} \hat{\sigma}}{E+m} \right) \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{p} \hat{\sigma}}{E+m} \chi_s \end{pmatrix} \frac{E+m}{2m} \\
&= \chi_s^\dagger \left( \hat{\sigma}(\vec{p} \hat{\sigma}) + (\vec{p} \hat{\sigma}) \hat{\sigma} \right) \chi_s \frac{1}{2m} \quad \text{mit } \{ \sigma_i, p_j \sigma_j \} = 2p_i \\
&= \frac{\vec{p}}{m}
\end{aligned}$$

Ebenso gilt  $\bar{v}_{\vec{p},s} \vec{\gamma} v_{\vec{p},s} = \frac{\vec{p}}{m}$

—> Die Stromdichte zeigt in  $\vec{p}$ -Richtung für  $\psi^+$  und  $\psi^-$ .

—> Beachte  $\psi^+ \sim e^{i\vec{p}\vec{r}}$  aber  $\psi^- \sim e^{-i\vec{p}\vec{r}}$  bewegt sich in umgekehrter Richtung

### 3.3.3 Ankopplung des elektromagnetischen Feldes

Wir wenden das Prinzip der minimalen Kopplung an und ersetzen den Impulsoperator gemäß:

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A} = \vec{\Pi}$$

Weiter addieren wir die potentielle Energie zum Hamiltonoperator

$$\hat{\mathcal{H}} \rightarrow \hat{\mathcal{H}} + q\Phi$$

Zusammenfassen für die restliche Rechnung:

$$\begin{aligned} p^\mu &\rightarrow p^\mu - qA^\mu & A^\mu &= (\Phi, \vec{A}) \\ i\hbar\partial^\mu &\rightarrow i\hbar\partial^\mu - qA^\mu \end{aligned}$$

Einsetzen in die Dirac-Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} (i\hbar\partial_\mu\gamma^\mu - qA_\mu\gamma^\mu - mc)\psi &= 0 \\ \boxed{(i\cancel{\partial} - q\cancel{A} - mc)\psi} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Die Gleichung (5) ist die Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld (in eichinvarianter Form).

### 3.3.4 Nicht-relativistischer Grenzfall, Pauli-Gleichung

Ebene Welle für  $|\vec{p}|/m \ll c$  ( $mc^2 \gg c|\vec{p}|$ )

$$u_s(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \cdot \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E + mc^2}\chi_s \end{pmatrix} \xrightarrow{E \rightarrow mc^2} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{2mc^2}\chi_s \end{pmatrix}$$

Die unteren Komponenten sind um einen Faktor

$$\frac{|\vec{p}|}{mc} \approx \frac{v}{c}$$

kleiner. Die Dirac Gleichung in der hamiltonschen Schreibweise:

$$i\hbar\partial_t\psi = \left(\vec{\mathcal{L}}\vec{P}i\vec{\alpha} + q\Phi + m\beta\right)\psi$$

Ansatz:

$$\underline{\psi} = \begin{pmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \tilde{\phi} & : \text{„große Komponente“} \\ \tilde{\chi} & : \text{„kleine Komponente“} \end{array}$$

→ Separieren die schnellen zeitlichen Oszillationen ab (verursacht durch die dominante Energie  $mc^2$ ).

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} &= e^{-imt} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \\ =: i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} &= \vec{\Pi}\vec{\sigma} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} + q\Phi \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} - 2m \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

$\chi$  ist um  $\frac{v}{c} \approx \frac{|\vec{\Pi}|}{mc}$  kleiner als  $\phi$ , d.h. wir können  $\chi$  und  $e\Phi\chi$  vernachlässigen. Die Gleichung für  $\chi$  ist dann

$$\chi = \frac{\vec{\Pi} \hat{\sigma}}{2mc} \phi.$$

Einsetzen in die Gleichung (6) für die obere Komponente ergibt:

$$i\hbar \partial_t \phi = \left[ \frac{1}{2m} (\vec{\Pi} \hat{\sigma})^2 + e\Phi \right] \phi$$

Auswerten mit der Identität:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \hat{\sigma})(\vec{b} \hat{\sigma}) &= \vec{a} \vec{b} + \hat{\sigma}(\vec{a} \times \vec{b}) \quad \text{mit } [a, \sigma] = 0 = [b, \sigma] \\ \text{d.h. } (\vec{\Pi} \hat{\sigma})^2 &= \vec{\Pi}^2 + i\hat{\sigma}(\vec{\Pi} \times \vec{\Pi}) \end{aligned}$$

Aus Kapitel I.5.3 folgt für  $\vec{\Pi}$

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= m\vec{v}_{\text{op}} = -i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A} \\ \rightarrow \quad \vec{\Pi} \times \vec{\Pi} &= iq\hbar \vec{B} \end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich die **Pauli-Gleichung** zu:

$$i\hbar \partial_t \phi = \left[ \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 - \frac{\hbar}{2m} \hat{\sigma} \vec{B} + q\Phi \right] \phi$$

Im konstanten Magnetfeld  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} \quad \text{div} \vec{A} = 0$$

Für die Drehimpulsoperatoren gilt:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}$$

Somit erhalten wir

$$i\hbar \partial_t \phi = \left[ \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{q}{2m} (\underbrace{\vec{L} + 2\vec{S}}_{\vec{\mu}}) \vec{B} + \frac{e^2 \vec{A}^2}{2m} + e\Phi \right] \phi$$

Das **magnetische Moment**

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= \vec{\mu}_{\text{Bahn}} + \vec{\mu}_{\text{Spin}} \\ \vec{\mu}_{\text{Bahn}} &= -\mu_B \frac{\vec{L}}{\hbar} \quad \text{mit } \mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \\ \vec{\mu}_{\text{spin}} &= -g\mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar} \quad \text{mit } g = 2 \end{aligned}$$

Die Dirac-Gleichung reproduziert die nicht relativistische Schrödingergleichung für ein Spin 1/2-Teilchen (z.B. Elektron) mit dem entsprechenden g-Faktor. Aufgrund von sogenannten Strahlungskorrekturen gibt es noch kleine Abweichungen:

$$g - 2 \approx \frac{\alpha}{\pi} + O(\alpha^2)$$

### 3.3.5 Spin, Helizität, Chiralität

Verhalten unter Drehungen suggeriert den Spinoperator

$$S_i = \frac{\hbar}{4} \varepsilon_{ijk} \sigma^{jk} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \Sigma_i$$

Im Ruhesystem können wir beliebige Spinoren definieren.

$$\vec{n} \vec{S} \psi = \pm \frac{\hbar}{2} \psi \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

mit  $\psi = \begin{pmatrix} \chi(\vec{n}) \\ 0 \end{pmatrix}$  bzw.  $\begin{pmatrix} 0 \\ \chi(\vec{n}) \end{pmatrix}$

Wobei  $\chi$  ein Eigenvektor von  $\vec{n} \hat{\sigma}$  ist. Explizit ergibt sich:

$$\chi_+(\vec{n}) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2(1+n_z)}} \begin{pmatrix} 1+n_z \\ n_x + i n_y \end{pmatrix}$$

Spin bewegter Teilchen  
Für ebene Wellen galt

$$\psi \sim u = \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{p} \hat{\sigma}}{E+m} \chi \end{pmatrix}$$

offensichtlich ist dies kein Eigenvektor von einer Spinrichtung für beliebige  $\vec{p}$ . Es gilt zum Beispiel für

$$\vec{p} = |\vec{p}| \vec{e}_z \quad \text{und} \quad \chi = \chi_{\pm}(\vec{e}_z)$$

$$\sigma_z \psi_{\pm} = \pm \psi \longrightarrow \text{EV mit EW } \pm 1$$

Aber für  $\chi = \chi_{\pm}(\vec{e}_x) \sim \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_x \sigma_z \chi_{\pm}(\vec{e}_x) &= -\sigma_z \sigma_x \chi_{\pm}(\vec{e}_x) = \mp \sigma_z \cdot \chi_{\pm}(\vec{e}_x) \\ &\neq \sigma_x \chi_{\pm}(\vec{e}_x) = \pm \chi_{\pm}(\vec{e}_x) \end{aligned}$$



D.h. ebene Welle in z-Richtung ist nur ein Eigenvektor vom Spin in z-Richtung.  
 =: **Spin-Bahn-Kopplung**.

ebene Welle in  $\hat{p} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ -Richtung ist ein Eigenvektor zum Spinoperator.

$$h(\vec{p}) = \hat{p} \vec{S} \quad \text{Helizitätsoperator}$$

Definition:

$$u_{\pm}(\vec{p}) := \begin{pmatrix} \chi_{\pm}(\hat{p}) \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E+m} \chi_{\pm}(\hat{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{\pm}(\hat{p}) \\ \pm \frac{|\vec{p}|}{E+m} \chi_{\pm}(\hat{p}) \end{pmatrix}$$

Dies ist offensichtlich ein Eigenzustand vom Helizitätsoperator  $\hat{p} \Sigma_i$  mit Eigenwert  $\pm 1$ .

### 3.3.6 Zitterbewegung

Bis jetzt wurden nur stationäre Zustände der Dirac-Gleichung berechnet. Wie sehen die Lösungen der zeitabhängigen Dirac-Gleichung aus?

Betrachte Wellenpakete

Wellenpaket aus Zuständen positiver Energie:

$$\vec{\psi}^+(x) = \int d^3p \underbrace{\frac{m}{(2\pi)^2 E}}_{\text{Normierung}} \sum_{s=\pm 1} b_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) e^{-ipx}$$

$$b_s(\vec{p}) \hat{=} \text{komplexe Koeffizienten}$$

$$u_s(\vec{p}) \hat{=} \text{freie Spinoren positiver Energie}$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit ist:

$$\int d^3x j^0(x, t) = \int d^3x \left| \psi^{(+)\dagger}(\vec{x}, t) \right|^2$$

Mit der Orthogonalität von  $u_s$  und

?

$$\int d^3x e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

folgt:

$$\int d^3x j^0(x, t) = \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} |b_s(\vec{p})|^2 = 1$$

- übliche Normierungsbedingung wie bei den Pauli Spinoren.
- zeitunabhängiges  $j^0$

- Gesamtstrom für  $\psi^{(+)}(x)$

$$\begin{aligned}\vec{j} &= \int d^3x \psi^{(+)\dagger}(x) \vec{\alpha} \psi^{(+)}(x) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{E^2} b_s^*(\vec{p}) b_{s'}(\vec{p}) u_s^+(\vec{p}) \vec{\alpha} u_{s'}(\vec{p})\end{aligned}$$

Benutzte Gordon-Identität (Zerlegung)

$$\begin{aligned}2m \bar{u}_s(\vec{p}) \gamma^\mu u_{s'}(\vec{p}') &= \bar{u}_s(\vec{p}) \dots \\ &\left[ \underbrace{(p^\mu + p'^\mu)}_{\text{Konvektionsstrom}} + i \underbrace{\sigma^{\mu\nu} (p_\nu - p'_\nu)}_{\text{Spinstrom}} \right] u_{s'}(p') \\ \vec{j} &= \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} |b_s(\vec{p})|^2 \frac{\vec{p}}{E} = \left\langle \frac{\vec{p}}{E} \right\rangle\end{aligned}$$

- Gesamtstrom entspricht dem quantenmechanischen Erwartungswert der Gruppengeschwindigkeit.

$$\vec{v} = \frac{\partial E}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{E}$$

- Der Gesamtstrom ist zeitunabhängig

=: Wellenpakete aus Zuständen positiver Energie verhalten sich wie in der nicht relativistischen Quantenmechanik!

Aber:  $u_s(\vec{p})$  sind kein vollständiges Basissystem.

→ Wir können nicht alle Wellenfunktionen ausdrücken.

→ Wir benötigen Spinoren negativer Energie.

Allgemeines Wellenpaket

Zur Zeit  $t = 0$  sei  $\psi(\vec{x}, 0)$  ein beliebiger Spinor (z.B.  $\psi \sim f(x) \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$  keine Anteile negativer Energie.)

$$\psi(x, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \sum_{s=\pm 1} \left( b_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) e^{-ipx} + d_s(\vec{p}) v_s(\vec{p}) e^{ipx} \right)$$

Die Koeffizienten  $b_s$  und  $d_s$  sind durch  $\psi(\vec{x}, 0)$  bestimmt.

Wegen der Orthogonalität gilt:

$$\begin{aligned}b_s(\vec{p}) &= \frac{E}{m} \int d^3x e^{-ipx} \bar{u}_s(\vec{p}) \vec{\psi}(\vec{x}) \\ d_s(\vec{p}) &= -\frac{E}{m} \int d^3x e^{-ipx} \bar{v}_s(\vec{p}) \vec{\psi}(\vec{x})\end{aligned}$$

Im Allgemeinen sind  $b_s \neq 0$ ,  $d_s \neq 0$  und  $\psi(x, t)$  setzt sich aus Lösungen positiver und negativer Energie zusammen.  
Welche Konsequenz entstehen hieraus?

### Dichte

$$\int d^3x \psi^\dagger(x, t) \psi(x, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \sum_{s=\pm 1} (|b_s|^2 + |d_s|^2)$$

→ Die Dichte ist normierbar und zeitunabhängig.

### Strom

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \int d^3x \bar{\psi}(x, t) \vec{\gamma} \psi(x, t) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\vec{p}}{E} \sum_{s=\pm 1} (|b_0(\vec{p})|^2 + |d_0(\vec{p})|^2) \right. \\ &\quad \left. + 2\text{Re} \left( i \sum_{ss'} b_s^*(-\vec{p}) d_s(\vec{p}) \bar{u}_s(-\vec{p}) \vec{\gamma} v_{s'}(\vec{p}) e^{2iEt} \right) \right\} \end{aligned}$$

Der 1. Term ist eine Mittelung über die Gruppengeschwindigkeit  $\frac{\vec{p}}{E}$ .

Der 2. Term oszilliert zeitlich mit der Frequenz:

$$\frac{2E}{\hbar} > \frac{2mc^2}{\hbar} = 2 \cdot 10^{21} \text{ Hz}$$

Diese Frequenz hängt von der Amplitude des Betrags mit negativer Energie ab.  
Die Amplitude der Zitterbewegung ist ein Mittelwert von  $x$ .

### Wann ist die Zitterbewegung relevant?

Fourier-Komponenten mit  $|\vec{p}| \lesssim \frac{\hbar}{L}$ .

Damit die Zitterbewegung auftritt, muss  $|\vec{p}| \gtrsim mc$  sein.

$$\frac{\hbar}{L} \geq mc \quad : \quad L \leq \frac{\hbar}{mc} = \lambda_c$$

Ein Wellenpaket das Größe  $\lesssim \lambda_c$  hat, vollführt Zitterbewegungen.

Betrachtung des Schwerpunktes  $\langle \vec{x} \rangle$  liefert eine Abschätzung für eine räumliche Oszillation.

$$\lambda_c \sim 4 \cdot 10^{-13} \text{ m}$$

=: Schwer beobachtbar im Vakuum. Bei einer Realisierung dieser Zitterbewegung im

Rahmen der Festkörperphysik wird die Fermi-Geschwindigkeit  $v_f$

$$v_f \sim 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

anstelle der Lichtgeschwindigkeit benutzt.  
=: Charakteristische Energie („Bandlücke“)

$$E_g \sim mc^2 \lesssim eV \quad : \quad \lambda_c \sim \frac{\hbar v_f}{E_g} = 10^{-9} \text{m}$$

$$\frac{E_g}{\hbar} \lesssim 10^{15} \text{Hz}$$

### 3.3.7 Löchertheorie

Bisher wurden Lösungen negativer Energie ignoriert. Lösungen positiver Energie können durch eine Wechselwirkung mit einem Strahlungsfeld in Zustände negativer Energie übergehen.

Problem:

Die Materie wird instabil.

Ausweg: Dirac 1930

Alle Zustände negativer Energie sind besetzt. Wegen des Pauliverbots sind somit die Zustände negativer Energie für die Elektronen unerreichbar:

Der Vakuumzustand besteht aus einem See von unendlich vielen Teilchen negativer Energie, die alle Zustände besetzen.

Anregung des Vakuums:

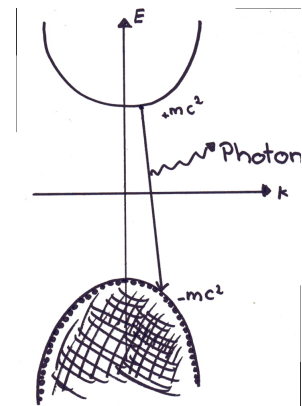
Ein Elektron aus dem Diracsee wird in einem Zustand positiver Energie angeregt. Zurück bleibt ein Loch im Diracsee mit folgenden Eigenschaften:

- Ladung:  $-q_e = e > 0$
- Wellenfunktion des ursprünglichen Elektrons

$$v_s(p)e^{ipx} = v_s(p)e^{i(E_p t - \vec{p}\vec{x})}$$

mit der Energie  $-E_p$  und dem Impuls  $-\vec{p}$ .

- Spin:  $-s\frac{\hbar}{2}$



### Interpretation

Das Loch verhält sich wie ein Teilchen mit der Energie  $E$ , Impuls  $\vec{p}$ , Ladung  $+e$  und Spin  $s\frac{\hbar}{2}$ .

=: Antiteilchen (Positron)

Das Antiteilchen wurde experimentell nachgewiesen.

In der Diractheorie ist die Energie des Vakuums unendlich, und die Wechselwirkung zwischen den Teilchen vernachlässigt wird.

## 4 Vielteilchenmethoden, Quantenfeldtheorie

### Motivation

- relativistische Einteilchenteorie führt zu Widersprüchen.
- Kerne, Atome, Moleküle, Festkörper bestehen aus großer Anzahl Teilchen
- Elementarteilchen- und -anregungen können erzeugt oder vernichtet werden

### 4.1 Teilchensysteme

#### 4.1.1 Ein Teilchen

Wellenfunktion  $\psi(\vec{r}, t)$

Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t\psi = \mathcal{H}\psi \quad \mathcal{H} = T + U \quad U = U(\vec{r}) \quad T = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

#### 4.1.2 Zwei identische Teilchen

Wellenfunktion  $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, )$  hängt nun von beiden Koordinaten ab.

Beide Teilchen sind identisch, d.h. wenn wir die beiden Koordinaten vertauschen, darf sich die Physik sich nicht ändern.

z.B. Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\begin{aligned} W(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= |\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2 = W(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = |\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)|^2 \\ &=: \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = e^{i\varphi} \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) \end{aligned}$$

In der Praxis kommen zwei Fälle vor

$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$	Bosonen (Photon, Phonon) Teilchen mit ganzem Spin
$-\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$	Fermionen (Elektron) Teilchen mit halbzahligem Spin

Wenn die Teilchen sich jeweils in der Wellenfunktion  $\phi_1(\vec{r})$  oder  $\phi_2(\vec{r})$  befinden, so erhalten wir die Zweiteilchenwellenfunktion

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(\vec{r}_1)\phi_2(\vec{r}_2) \pm \phi_2(\vec{r}_1)\phi_1(\vec{r}_2)] \\ &\text{mit } + \text{ für Bosonen} \\ &\text{und } - \text{ für Fermionen} \end{aligned}$$

Folge: Pauli-Verbot für zwei Fermionen im gleichen Orbital  $\phi_1 = \phi_2$ , da sonst gilt:

$$\psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(\vec{r}_1)\phi_1(\vec{r}_2) - \phi_1(\vec{r}_2)\phi_1(\vec{r}_1)] = 0$$

Hamiltonoperator enthält die Einteilchenhamiltonoperatoren und die Zweiteilchenwechselwirkung

$$\mathcal{H}_2 = \sum_{\alpha=1}^2 \mathcal{H}(\vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha) + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

wobei  $\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}) = T(\vec{p}) + U(\vec{r})$

z.B. Coulomb-Wechselwirkung

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

#### 4.1.3 Viele Teilchen

Vereinfachte Schreibweise mit (Anti-) Symmetrisierungsoperator  $S_+$  ( $S_-$ ).

Dieser macht aus dem Produkt von  $n$  Wellenfunktionen die symmetrisierte Form, bei der alle Koordinaten permutiert werden (Bei Fermionen ergibt jede Permutation ein Minuszeichen).

Wellenfunktion für  $N$  Teilchen ist:

$$\psi_{\{i\}}^{\pm} \{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N\} = \frac{1}{\sqrt{N}} S_{\pm} (\phi_{i_1}(\vec{r}_1), \dots, \phi_{i_N}(\vec{r}_N))$$

Für Fermionen kann dies als Slater-Determinante geschrieben werden:

$$\psi_N^- = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{vmatrix} \phi_{i_1}(\vec{r}_1) & \phi_{i_2}(\vec{r}_1) & \dots & \phi_{i_N}(\vec{r}_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{i_1}(\vec{r}_N) & \phi_{i_2}(\vec{r}_N) & \dots & \phi_{i_N}(\vec{r}_N) \end{vmatrix}$$

Hamiltonoperator:

$$\mathcal{H}_N = \sum_{\alpha=1}^N \mathcal{H}(\vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} V(\vec{r}_\alpha, \vec{r}_\beta)$$

Für allgemeine Zustände bilden die  $\psi_{\{i\}}^{\pm}$  für alle  $\{i\}$  eine Basis im  $N$ -Teilchen Hilbertraum.

Es gilt in Ket- Schreibweise

$$|\psi_N\rangle = \sum_{\{i\}} c_{i_1} \dots c_{i_N} S^{\pm} (|i_1\rangle |i_2\rangle \dots |i_N\rangle)$$

Die Zustände können vereinfacht in der linear unabhängigen sogenannten Besetzungszahlbasis dargestellt werden. Wir wählen für jedem äquivalenten Zustand einen Vertreter aus.

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \begin{cases} S^- (|i_1\rangle |i_2\rangle \dots |i_N\rangle) & \text{Fermionen} \\ \frac{1}{\sqrt{n_1 \cdot n_2 \dots}} S^+ (|i_1\rangle |i_2\rangle \dots |i_N\rangle) & \text{Bosonen} \end{cases}$$

$n_i$  gibt an wie vielfach der Zustand  $i$  besetzt wird. Für Fermionen gilt  $n_i = 0, 1$  für Bosonen  $n_i = 0, 1, 2, \dots$

Zusammen:

$$N = \sum_i^{\infty} n_i$$

Besetzungszustände bilden eine vollständige Orthonormalbasis im  $N$ -Teilchen Hilbertraum.

$$\begin{aligned} \langle n_1, n_2, \dots \mid n'_1, n'_2, \dots \rangle &= \delta_{n_1 n'_1} \delta_{n_2 n'_2} \dots \\ \sum_{n_1=0}^{1(\infty)} \sum_{n_2=0}^{1(\infty)} \dots \delta_{N_i \sum_i n_i} \mid n_1, n_2, \dots \rangle \langle n_1, n_2, \dots \mid &= 1 \end{aligned}$$

#### 4.1.4 Fockraum

Wir bilden die direkte Summe aller Hilberträume  $\mathcal{H}_N$  mit  $N = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathcal{F} = \oplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N \quad \text{Fockraum}$$

Die Besetzungsbasis ohne Einschränkung ( $\sum_i n_i = N$ ) ist eine VONB im Fockraum, d.h. es gilt

$$\sum_{n_1=0}^{1(\infty)} \sum_{n_2=0}^{1(\infty)} \dots \mid n_1, n_2, \dots \rangle \langle n_1, n_2, \dots \mid = 1 \quad \text{für Fermionen (Bosonen).}$$

$\mathcal{H}_0$  enthält einen Zustand ohne Teilchen.

→ Vakuumzustand  $\mid 0 \rangle = \mid 0, 0, \dots \rangle$  ( $\langle 0 \mid 0 \rangle = 1$ )



## 4.2 Erzeuger und Vernichter

Um Operatoren im Fockraum in einer teilchenzahlunabhängigen Weise auszudrücken, führen wir sog. Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ein, die Hilberträume mit verschiedenen Teilchenzahlen verbinden.

### 4.2.1 Bosonen:

Erzeugungsoperator erhöht die Besetzungszahl um 1

$$a_i^\dagger |\dots n_i \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} |\dots n_i + 1 \dots\rangle$$

Der adjungierte Operator erniedrigt Besetzung um 1

$$a_i |\dots n_i \dots\rangle = \sqrt{n_i} |\dots n_i - 1 \dots\rangle$$

Insbesondere gilt für den Vakuumzustand:

$$a_i |0\rangle = 0 \quad \text{f.a. } i$$

Aus der Definition folgen die Vertauschungsrelationen

$$[a_i, a_j] = 0 \quad [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \quad [a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$$

### Beweis

$$\begin{aligned} & [a_i^\dagger, a_j^\dagger] |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle \quad i \neq j \\ &= (a_i^\dagger a_j^\dagger - a_j^\dagger a_i^\dagger) |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle \\ &= (\sqrt{n_i + 1} \sqrt{n_j + 1} - \sqrt{n_j + 1} \sqrt{n_i + 1}) |\dots, n_{i+1}, \dots, n_{j+1}, \dots\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [a_i, a_j^\dagger] |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle \\ &= (a_i a_j^\dagger - a_j^\dagger a_i) |\dots, n_i, \dots, n_j, \dots\rangle \\ &\stackrel{(i \neq j)}{=} \underbrace{(\sqrt{n_i} \sqrt{n_j + 1} - \sqrt{n_j + 1} \sqrt{n_i})}_{=0} |\dots, n_{i-1}, \dots, n_{j+1}, \dots\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [a_i, a_i^\dagger] |\dots, n_i, \dots\rangle \\
&= (a_i a_i^\dagger - a_i^\dagger a_i) |\dots, n_i, \dots\rangle \\
&= a_i \sqrt{n_i + 1} |\dots, n_{i+1}, \dots\rangle - a_i^\dagger \sqrt{n_i} |\dots, n_{i-1}, \dots\rangle \\
&= (n_i + 1) |\dots, n_i, \dots\rangle - n_i |\dots, n_i, \dots\rangle \\
&= |\dots, n_i, \dots\rangle \quad \text{vgl. } [a, a^\dagger] = 1 \quad (\text{harm.Oszi.})
\end{aligned}$$

Alle Zustände können aus dem Vakuumzustand erzeugt werden:

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots}} (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} \dots |0\rangle$$

Um die Teilchenzahl festzustellen, konstruiert man den Besetzungszahloperator:  $\hat{n}_i = a_i^\dagger a_i$  mit

$$\hat{n}_i |\dots n_i \dots\rangle = a_i^\dagger a_i |\dots n_i \dots\rangle = n_i |\dots n_i \dots\rangle$$

Gesamtteilchenzahloperator  $\hat{N} = \sum_i \hat{n}_i$

$$\langle N \rangle = \langle n_1 \dots | \hat{N} | n_1 \dots \rangle = \sum n_i$$

Für nicht wechselwirkende Teilchen können wir die Eigenzustände des Hamiltonoperators als Einteilchenzustände benutzen ( $\mathcal{H}_1 \phi_1 = \varepsilon_1 \phi_1$ ).

Der Vielteilchen-Hamiltonoperator

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}} &= \sum_i \varepsilon_i \hat{n}_i \\
\langle \mathcal{H} \rangle &= \langle n_1 \dots | \sum_i \varepsilon_i \hat{n}_i | n_1 \dots \rangle = \sum \varepsilon_i n_i
\end{aligned}$$

#### 4.2.2 Fermionen

Wegen der Antisymmetrie unter Vertauschung zweier Teilchen muss auf die Reihenfolge der Anwendung fermionscher Operatoren geacht-

tet werden.

$$\begin{aligned}
S_- |i_1, i_2, \dots, i_N\rangle &= a_{i_1}^\dagger a_{i_2}^\dagger \dots a_{i_N}^\dagger |0\rangle \\
S_- |i_2, i_1, \dots, i_N\rangle &= a_{i_2}^\dagger a_{i_1}^\dagger \dots a_{i_N}^\dagger |0\rangle \\
&= -S_- |i_1, i_2, \dots, i_N\rangle \\
&=: a_{i_1}^\dagger a_{i_2}^\dagger + a_{i_2}^\dagger a_{i_1}^\dagger = 0 \\
&\quad \{a_{i_1}^\dagger, a_{i_2}^\dagger\} = 0 \quad \text{Antikommutator} \\
&\text{allg. } \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0
\end{aligned}$$

es folgt für  $i = j$ :

$$a_i^\dagger a_i^\dagger = (a_i^\dagger)^2 = 0$$

Alle Zustände können aus dem Vakuum erzeugt werden die Reihenfolge muss einmal festgelegt werden.

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} \dots |0\rangle$$

Für Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren folgt:

$$\begin{aligned}
a_i^\dagger |\dots n_i \dots\rangle &= (1 - n_i) \underbrace{(-1)^{\sum_{j<i} n_j}}_{=p_i} |\dots n_i + 1 \dots\rangle \\
a_i |\dots n_i \dots\rangle &= n_i p_i |\dots n_i - 1 \dots\rangle
\end{aligned}$$

Beachte:  $n_i = 0, 1$ . Besetzungszahloperator  $\hat{n}_i = a_i^\dagger a_i$

$$\hat{n}_i |\dots n_i \dots\rangle = n_i |\dots n_i \dots\rangle$$

Algebra folgt zum Beispiel aus:

$$\begin{aligned}
&\{a_i, a_i^\dagger\} |\dots n_i \dots\rangle \\
&= (a_i a_i^\dagger + a_i^\dagger a_i) |\dots n_i \dots\rangle \\
&= a_i (1 - n_i) p_i |\dots n_i + 1 \dots\rangle + a_i^\dagger n_i p_i |\dots n_i - 1 \dots\rangle \\
&= [(n_i + 1)(1 - n_i) + n_i(2 - n_i)] |\dots n_i \dots\rangle \\
&\stackrel{n^2=n}{=} |\dots n_i \dots\rangle \\
&=: \{a_i, a_i^\dagger\} = 1
\end{aligned}$$

Es gilt für Fermionen

$$\{a_i, a_j\} = 0 \quad \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0 \quad \{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}$$

## 4.3 Operatoren in zweiter Quantisierung

### 4.3.1 Einteilchenoperator

$$T = \sum_{\alpha=1}^N t_{\alpha} \quad \left( \text{z.B. } t_{\alpha} = \frac{p_{\alpha}^2}{2m} \right)$$

In Basis  $|i\rangle$  gilt:

$$t_{ij} = \langle i | t | j \rangle$$

und  $t = \sum_{ij} t_{ij} |i\rangle \langle j|$

Zusammen

$$T = \sum_{ij} t_{ij} \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N |i\rangle_{\alpha} \langle j|_{\alpha}}_O$$

Die Wirkung von  $O$  auf einen Zustand ist es ein Teilchen im Zustand  $|j\rangle$  durch eines im Zustand  $|i\rangle$  zu ersetzen. Die Wirkung ist identisch zum Operator  $a_i^{\dagger} a_i$ , d.h. es gilt

$$a_i^{\dagger} a_i = \sum_{\alpha=1}^N |i\rangle_{\alpha} \langle i|_{\alpha}.$$

Wir erhalten

$$T = \sum_{ij} t_{ij} a_i^{\dagger} a_j$$

Allgemeine Form eines Einteilchenoperators unabhängig von der Teilchenzahl!

#### 4.3.2 Zweiteilchenoperator

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} V(\vec{r}_\alpha, \vec{r}_\beta) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{ijkm} \sum_{\alpha \neq \beta} \underbrace{\langle i | \langle j | V | k \rangle | m \rangle}_{V_{ijkm}} |i\rangle_\alpha |j\rangle_\beta \langle k|_\alpha \langle m|_\beta \\
 &= a_i^\dagger a_j^\dagger a_m a_k
 \end{aligned}$$

wobei gilt

$$\sum_{\alpha \neq \beta} |i\rangle_\alpha |j\rangle_\beta \langle k|_\alpha \langle m|_\beta = \sum_{\alpha \neq \beta} \underbrace{|i\rangle_\alpha \langle k|_\alpha}_{a_i^\dagger a_k} \underbrace{|j\rangle_\beta \langle m|_\beta}_{a_j^\dagger a_m} - \underbrace{\langle k | j \rangle}_{\delta_{kj}} \sum_{\alpha} \underbrace{|i\rangle_\alpha \langle m|_\alpha}_{a_i^\dagger a_m}$$

Allgemeiner Zweiteilchenoperator:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{ijkm} V_{ijkm} a_i^\dagger a_j^\dagger a_m a_k$$

Matrizelement:

$$V_{ijkm} = \int d^3x_1 d^3x_2 \phi_i^*(\vec{x}_1) \phi_j^*(\vec{x}_2) V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \phi_k(\vec{x}_1) \phi_m(\vec{x}_2)$$

#### 4.3.3 Hamiltonoperator

$$\hat{\mathcal{H}} = \underbrace{\sum_{ij} t_{ij} a_i^\dagger a_j}_{\sum_n \epsilon_n a_n^\dagger a_n \text{ in Eigenbasis von } \mathcal{H}_1} + \sum_{ijkm} V_{ijkm} a_i^\dagger a_j^\dagger a_m a_k$$

- Operator im Fockraum unabhängig von Teilchenzahl
- für Bosonen und Fermionen identisch
- aufgrund des nicht quadratischen Terms  $\sim a^\dagger a^\dagger a a$  im Allgemeinen nicht lösbar

## 4.4 Feldoperatoren

### 4.4.1 Basiswechsel

Wechsel einer Basis  $\{|i\rangle\} \rightarrow \{|\lambda\rangle\}$  erfolgt:

$$|\lambda\rangle = \sum_i |i\rangle \langle i | \lambda \rangle$$

Operatoren transformieren sich als

$$\begin{aligned} a_\lambda^\dagger &= \sum_i \langle i | \lambda \rangle a_i^\dagger \\ a_\lambda &= \sum_i \langle \lambda | i \rangle a_i \end{aligned}$$

Die Vertauschungsrelationen bleiben unter Basistransformationen erhalten.

$$\begin{aligned} [a_\lambda, a_{\lambda'}^\dagger]_\pm &= \sum_{ij} \underbrace{[a_i, a_j^\dagger]_\pm}_{\delta_{ij}} \langle \lambda | i \rangle \langle j | \lambda' \rangle \\ &= \langle \lambda | \underbrace{\sum_i i}_{\mathbb{I}} \langle i | \lambda' \rangle = \langle \lambda | \lambda' \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \end{aligned}$$

### 4.4.2 Ortsdarstellung

Für die Ortsbasis gilt  $\phi_i(\vec{r}) = \langle \vec{r} | i \rangle$

Die entsprechenden Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren heißen **Feldoperatoren**.

$$\hat{\psi}(\vec{r}) = \sum_i \phi_i(\vec{r}) a_i$$

$$\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) = \sum_i \phi_i^*(\vec{r}) a_i^\dagger$$

$\hat{\psi}(\vec{r})$  ( $\hat{\psi}^\dagger(\vec{r})$ ) vernichtet (erzeugt) ein Teilchen am Ort  $\vec{r}$ .  
Die Vertauschungsrelationen

$$\begin{cases} \left[ \hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}(\vec{r}') \right]_{\pm} = 0 \\ \left[ \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}') \right]_{\pm} = 0 \\ \left[ \hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}') \right]_{\pm} = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \end{cases}$$

Beispiele für Operatoren: Kinetische Energie:

$$\hat{T} = \int d^3r \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \left( \frac{-\hbar^2 \Delta}{2m} \right) \hat{\psi}(\vec{r})$$

Potentielle Energie:

$$\hat{U} = \int d^3r U(\vec{r}) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r})$$

Teilchendichte:

$$\hat{n}(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) = \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r})$$

Zweiteilchenoperator:

$$\hat{V} = \int d^3r d^3r' \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}') V(\vec{r}, \vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r})$$

Vielteilchenhamiltonoperator;

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{T} + \hat{V} + \hat{U}$$

#### 4.4.3 Bewegungsgleichung

Die Heisenberg-Gleichung für Felder

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \hat{\psi}(\vec{r}, t) &= [\hat{\psi}(\vec{r}, t), \hat{\mathcal{H}}] \\ &= \dots \\ &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\vec{r}) \right) \hat{\psi}(\vec{r}, t) + \frac{1}{2} \int d^3r' \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}', t) V(\vec{r}, \vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r}', t) \hat{\psi}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$



- Für  $V = 0$  erinnert die Bewegungsgleichung an die Einteilchen-Schrödingergleichung.  
→ Bekannte Methoden können zur Lösung genutzt werden.
- $V \neq 0$  („many-body-problem“)  
Die Gleichung ist nicht linear in den Feldoperatoren (außerdem integro-differential).
- Stromdichte: Aus den Bewegungsgleichungen für  $\underline{\hat{\psi}}$  und  $\underline{\hat{\psi}}^\dagger$  folgt:

$$\hat{n}(\vec{r}, t) = \text{div} \hat{\vec{j}}$$

$$\text{mit } \hat{\vec{j}} = \frac{i\hbar}{2m} \left( \underline{\hat{\psi}}^\dagger \nabla \underline{\hat{\psi}} - (\nabla \underline{\hat{\psi}}^\dagger) \underline{\hat{\psi}} \right)$$

#### 4.4.4 Impulsdarstellung / Feynmandiagramme

Impulsdarstellung, insbesondere für translationsinvariante Systeme.

$$\phi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{v}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

Algebra für  $a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^\dagger$

$$\begin{aligned} [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] &= 0 \\ [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] &= \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \end{aligned}$$

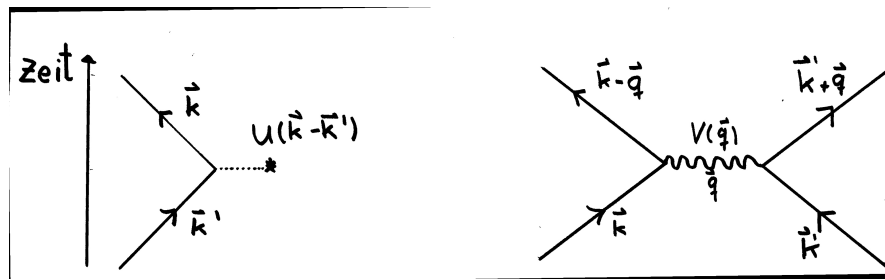
Hamiltonoperator

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} U_{\vec{k}-\vec{k}'} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}'} \\ &\quad + \frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}, \vec{k}', \vec{q}} a_{\vec{k}+\vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}'-\vec{q}}^\dagger V_{\vec{q}} a_{\vec{k}'} a_{\vec{k}} \end{aligned}$$

Die Matrixelemente sind

$$\begin{aligned} U_{\vec{q}} &= \int d^3r U(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\vec{r}} \\ V_{\vec{q}} &= \int d^3r e^{-i\vec{q}\vec{r}} V(\vec{r}) \end{aligned}$$

Die Potential- und Wechselwirkungs-Terme können grafisch in sogenannten Feynman-Diagramme repräsentiert werden.



#### 4.4.5 Spin

Feldoperatoren erhalten zusätzlichen Index  $\sigma$  für den Spin. Es gilt

$$\left[ \psi_{\sigma}(\vec{r}), \psi_{\sigma'}^{\dagger}(\vec{r}') \right]_{\pm} = \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Einteilchenoperatoren enthalten Summen über Spin. Zum Beispiel

$$\hat{n}(\vec{r}) = \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\vec{r}) \psi_{\sigma}(\vec{r}) = \sum_{\sigma} \hat{n}_{\sigma}(\vec{r})$$

Hamiltonoperator

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = & \sum_{\sigma} \int d^3r \psi_{\sigma}^{\dagger}(\vec{r}) \left( -\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + U(\vec{r}) \right) \psi_{\sigma}(\vec{r}) \\ & + \sum_{\sigma, \sigma'} \int d^3r d^3r' \psi_{\sigma}^{\dagger}(\vec{r}) \psi_{\sigma'}^{\dagger}(\vec{r}') V(\vec{r}, \vec{r}') \psi_{\sigma'}(\vec{r}') \psi_{\sigma}(\vec{r}) \end{aligned}$$

Bemerkung:

Die Wechselwirkung ist unterschiedlich zwischen Teilchen mit gleichem und ungleichem Spin.

#### Spindichteoperator

$$\vec{S}(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}'_{\alpha}) \vec{S}_{\alpha}$$

Für Spin- $\frac{1}{2}$  Teilchen  $S = \frac{\hbar}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$   
In 2. Quantisierung

$$\vec{S}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2} \sum_{\sigma\sigma'} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\vec{r}) \vec{\sigma}_{\sigma\sigma'} \psi_{\sigma'}(\vec{r})$$

Gesamtspin:

$$\vec{S} = \int d^3r \vec{s}(\vec{r})$$

Erfüllt Drehimpulsalgebra

$$[S_i, S_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} S_k$$

## 4.5 Feldquantisierung der Diractheorie

### 4.5.1 Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

Einteilchenlösungen:

$$\psi_{\sigma k}^{\pm}(x) = \sqrt{\frac{m}{VE_k}} u_{\sigma}^{\pm}(k) e^{\mp i k x}$$

$$\text{mit } u_{\sigma}^{+}(k) = u_{\sigma}(k) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_{\sigma} \\ \frac{\vec{\sigma} \vec{k}}{E+m} \chi_{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$u_{\sigma}^{-}(k) = v_{\sigma}(k) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \vec{k}}{E+m} \chi_{\sigma} \\ \chi_{\sigma} \end{pmatrix}$$

Es gilt mit adjungierten Spinoren

$$\bar{u}_{\sigma}^{\alpha} = u_{\sigma}^{\alpha\dagger} \gamma^0 \quad \alpha = \pm$$

$$\bar{u}_{\sigma}^{\alpha} u_{\sigma'}^{\beta} = \alpha \delta_{\alpha\beta} \delta_{\sigma\sigma'}$$

#### Definition

$b_{\sigma k}^{+}$	erzeugt	Elektronen
$b_{\sigma k}$	vernichtet	
$d_{\sigma k}^{+}$	erzeugt	Positronen
$d_{\sigma k}$	vernichtet	

Spinor  $u_{\sigma}^{\pm}(\vec{k})$  mit Energie  $E = k^0 = \sqrt{k^2 + m^2} > 0$  und Spin  $\sigma$ . Da Elektronen/Positronen Fermionen sind, führen wir Antivertauschungsrelationen ein:

$$\{b_{\sigma k}, b_{\sigma' k'}^{+}\} = \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{kk'} \quad \{d_{\sigma k}, d_{\sigma' k'}^{+}\} = \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{kk'}$$

alle anderen verschwinden.

### 4.5.2 Feldoperatoren

Wir entwickeln die Feldoperatoren nach einem vollständigen Satz von Lösungen.

$$\underline{\psi}(x) = \sum_{\sigma k} \underbrace{\psi_{\sigma k}^{+}(x) b_{\sigma k}}_{\text{nur für Elektronen}} + \underbrace{\psi_{\sigma k}^{-}(x) d_{\sigma k}^{+}(x)}_{\text{wegen Vollständigkeit}}$$

Der adjungierte Feldoperator

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0 = \sum_{\sigma k} \bar{\psi}_{\sigma k}^+(x)b_{\sigma k}^\dagger + \bar{\psi}_{\sigma k}^-(x)d_{\sigma k}$$

Die Feldoperatoren erfüllen komplizierte Vertauschungsrelationen, da die Kausalität gewahrt bleiben muss. Man findet jedoch für gleiche Zeiten

$$\left\{ \psi_\alpha(t, \vec{x}), \psi_\beta^\dagger(t, \vec{x}') \right\} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

d.h.  $\psi$  und  $\psi^\dagger$  erfüllen die für fermionen-Feldoperatoren geforderten Vertauschungsrelationen.

### Spin-Statistik-Theorem

Teilchen mit ganzzahligem/halbzahligem Spin sind Bosonen/Fermionen. Ursache ist, dass die entsprechenden Feldoperatoren für raumartige Abstände vertauschen/antivertauschen müssen.

#### 4.5.3 Hamiltonoperator

Der Vierer-Impulsoperator ist

$$\begin{aligned} p^\mu &= \int d^3x \bar{\psi}(x) (i\partial^\mu \gamma_0) \psi(x) \\ &\vdots \\ &= \sum_{\vec{k}\sigma} k^\mu (b_{\sigma k}^\dagger b_{\sigma k} - d_{\sigma k} d_{\sigma k}^\dagger). \end{aligned}$$

Der Hamiltonoperator ist die 0-Komponente

$$\mathcal{H} = p^0 = \sum_{\vec{k}\sigma} E_{\vec{k}} (b_{\sigma k}^\dagger b_{\sigma k} - d_{\sigma k} d_{\sigma k}^\dagger)$$

Wegen der Antivertauschung gilt:  $dd^\dagger = 1 - d^\dagger d$

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}\sigma} E_{\vec{k}} \left( \underbrace{b_{\sigma k}^\dagger b_{\sigma k}}_{n_{\sigma k}^+} + \underbrace{d_{\sigma k}^\dagger d_{\sigma k}}_{n_{\sigma k}^-} - 1 \right)$$

Es gilt

$$(n_{\sigma k}^\alpha)^2 = n_{\sigma k}^\alpha$$

und  $n_{\sigma k}^\alpha$  hat deshalb die Eigenwerte 0 und 1.

=: Die Energie ist nach unten beschränkt, da sowohl die Elektronen als auch die Positronen einen positiven Energiebeitrag liefern.

Achtung:

Für Bosonen gilt  $dd^\dagger = 1 + dd^\dagger$  und damit wäre die Energie von Positronen wieder negativ.

Der letzte Term liefert eine (unendliche) Nullpunktsenergie selbst im Vakuumzustand.

=: Wir subtrahieren diesen Term vom Hamiltonoperator, um zur physikalischen Observablen Energie zu kommen.

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{neu}} &= \sum_{\sigma k} E_{\vec{k}} (b_{\sigma k}^\dagger b_{\sigma k} + d_{\sigma k}^\dagger d_{\sigma k}) \\ \vec{P}_{\text{neu}} &= \sum_{\sigma k} \hbar \vec{k} (b_{\sigma k}^\dagger b_{\sigma k} + d_{\sigma k}^\dagger d_{\sigma k})\end{aligned}$$

Ladung: (0-Komponente) des Viererstromdichte

$$\begin{aligned}Q &= -e \int d^3x \bar{\psi} \gamma_0 \psi = j^0 \\ &\vdots \\ &= -e \sum_{\sigma k} (b_{\sigma k}^\dagger b_{\sigma k} - d_{\sigma k}^\dagger d_{\sigma k})\end{aligned}$$

=: Elektronen haben die Ladung  $-e$   
und Positronen haben die Ladung  $+e$

## 4.6 Quantisierung des Strahlungsfeldes

### 4.6.1 Normalmoden, Photonen

Lagrangefunktion des freien Feldes

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} & F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{1}{c^2} \vec{E}^2 - \vec{B}^2 \right) = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{1}{c^2} \dot{\vec{A}}^2 - (\text{rot} \vec{A})^2 \right)\end{aligned}$$

Coulombbeingung:  $\text{div} \vec{A} = 0$  ( $A^0 = 0$ ) gewählt.

Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned}\Pi^i &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} = \frac{1}{\mu_0} E^i \\ \mathcal{H} &= \Pi^i \dot{A}^i - \mathcal{L} = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{1}{c^2} \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right)\end{aligned}$$

Freie Lösungen bestimmt durch Wellengleichung

$$\square \vec{A} = 0 \quad (\text{mit } \text{div} \vec{A} = 0)$$

Allgemeine Lösung: Zerlegung nach Normalmoden

$$\begin{aligned}A^\mu &= \sum_{\vec{k}, \lambda=1,2} \frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}|V}} \left( e^{-ikx} \varepsilon_{\vec{k},\lambda}^\mu a_{\vec{k}} + e^{ikx} (\varepsilon_{\vec{k},\lambda}^\mu)^* a_{\vec{k},\lambda}^\dagger \right) \\ \text{mit} \quad k_0 &= |\vec{k}| \quad \vec{k} \vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda} = 0 \quad \varepsilon_{\vec{k},\lambda}^0 = 0 \\ \vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda} \cdot \vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda'} &= \delta_{\lambda,\lambda'}\end{aligned}$$

Wir quantisieren:

$a_{\vec{k}\lambda}$  vernichtet Photon mit  $\vec{k}, \lambda$

$a_{\vec{k}\lambda}^\dagger$  erzeugt Photon mit  $\vec{k}, \lambda$

Hamiltonoperator:

$$H = \int d^3r \mathcal{H} = \dots = \sum_{\vec{k}, \lambda} \frac{|\vec{k}|}{2} \left( a_{\vec{k}\lambda}^\dagger a_{\vec{k}\lambda} + a_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda}^\dagger \right)$$

Mit bosonischen Vertauschungsrelationen gilt:  $aa^\dagger = 1 + a^\dagger a$  und damit

$$H = \sum_{\vec{k}\lambda} \hbar\omega_{\vec{k}} \left( a_{\vec{k}\lambda}^\dagger a_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right)$$

Das elektromagnetische Feld ist in quantisierter Form äquivalent zu Normalmoden harmonischer Oszillatoren (die Amplitude entspricht gerade den Feldern).

#### 4.6.2 Feldoperatoren

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\dot{\vec{A}} = \sum_{\vec{k}\lambda} \sqrt{\frac{|\vec{k}|}{2V}} \left( -ie^{ikx} \epsilon_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda} + ie^{ikx} \epsilon_{\vec{k}\lambda}^* a_{\vec{k}\lambda}^\dagger \right) \\ \vec{B} &= \text{rot} \vec{A} \end{aligned}$$

Feldoperatoren sind hermitesch ( $\vec{E}^\dagger = \vec{E}$ ,  $\vec{B}^\dagger = \vec{B}$ ) und sind daher physikalische Observablen (erhalten Erzeuger und Vernichter).

Kommutatoren:

$$\begin{aligned} [E^i(\vec{r}, t), E^j(\vec{r}', t)] &= 0 \\ [E^i(\vec{r}, t), B^j(\vec{r}, t)] &= i\epsilon_{ijk} \partial_k \delta(\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned}$$

d.h.  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  vertauschen nicht und sind konjugierte Operatoren.

#### 4.6.3 Strahlungsübergänge, QED

Minimale Kopplung

$$\begin{aligned} \vec{p} &\longrightarrow \vec{p} - e\vec{A} \\ \hat{H} &= \hat{H}_e + \hat{H}_{e-ph} + \hat{H}_{ph} \\ &= \sum_{\sigma} \int d^3r \, \hat{\psi}_{\sigma}^\dagger(\vec{r}) \left[ \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - e\hat{\vec{A}}(\vec{r}) \right)^2 + e\psi(\vec{r}) \right] \hat{\phi}_{\sigma}(\vec{r}) + H_{ph} \\ H_{ph} &= \sum_{\vec{k}\lambda} \hbar\omega_{\vec{k}} d_{\vec{k}\lambda}^\dagger d_{\vec{k}\lambda} \\ H_{e-ph} &= -\frac{1}{m} \sum_{\sigma} d^3r \hat{\psi}_{\sigma}^\dagger(\vec{r}) \hat{\vec{A}} \vec{p} \hat{\psi}_{\sigma} + \text{Terme } \vec{A}^2 \end{aligned}$$



Strahlungsübergänge folgen in zeitabhängiger Störungstheorie in  $H_{e-ph}$ .

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_f - E_i) |\langle f | H_{e-ph} | i \rangle|^2$$

Hierbei ist  $|i/f\rangle = |a\rangle_e |n\rangle_{ph}$ , d.h. es müssen Übergänge der Elektronen und Photonen beachtet werden. Im klassischen Fall (Kapitel I)

$$\Gamma^{\text{abs/em}} \sim A \delta(\varepsilon_f - \varepsilon_i \pm \hbar\omega)$$

wobei  $A \sim |\vec{E}|^2 \sim n$  (Feldenergie  $\hat{=}$  Besetzung)

### QED

$$\begin{aligned} & \langle n \pm 1 | (a + a^\dagger) | n \rangle \\ & \langle n \pm 1 | \left( \sqrt{n} |n-1\rangle + \sqrt{n+1} |n+1\rangle \right) \\ = & \begin{cases} \sqrt{n} & \text{für Absorption } (-) \\ \sqrt{n+1} & \text{für Emission } (+) \end{cases} \\ : \Gamma \sim & \begin{cases} n & \text{für Absorption} \\ n+1 & \text{für Emission} \end{cases} \quad (\text{stimuliert} + \text{spontan}) \end{aligned}$$

- Absorption und stimulierte Emission ergeben klassische Raten  $\sim n$
- Spontane Emission ( $n = 0$ ) erfolgt ohne äußeres Feld, verursacht durch Vakuumsfluktuation

#### 4.6.4 Der Casimir-Effekt

Oder: Ist das Vakuum wirklich leer?

Nein, da Vakuumsfluktuationen der Feldamplituden vorhanden sind.

Bisher: Vakuumsenergie abgezogen, aber: Dieser Term hängt von Randbedingungen ab. BILD Vernachlässige Randeffekte, Modenstruktur:

$$\omega(\vec{k}_{\parallel}, n) = c \sqrt{|k_{\parallel}|^2 + \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

gegeben durch Randbedingungen  $E_{\perp} = 0$  auf Platten.

Die Energie im Vakuumzustand

$$E = \sum_{\vec{k}\lambda} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k}} = \frac{\hbar}{2} \int \frac{L^2 d^2 k}{(2\pi)^2} \left( c|k_{\perp}| + \sum_{n=1}^{\infty} 2\omega(\vec{k}_{\perp}, n) \right)$$

Subtrahieren Vakuumsenergie ohne Rand

$$E_0 = \frac{\hbar c}{2} \int \frac{L^2 d^2 k}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dn \omega(\vec{k}, n)$$

Energie pro Fläche

$$\varepsilon = \frac{E - E_0}{L^2} = \dots = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 a^3}$$

Die Kraft pro Fläche ist

$$\frac{F}{L^2} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial a} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4} \quad \text{Casimir-Kraft}$$

- anziehende Kraft [z.B.  $L = 1\text{m}$ ,  $a = 1\mu\text{m}$ ,  $F \sim 10^{-2}\text{N}$ ]
- hängt nur von Naturkonstanten ab und vom Abstand, aber nicht vom Material.
- kann auf andere Geometrien (z.B. Kugel) erweitert werden (Vorzeichen-Änderung), hängt von Temperatur ab.
- ähnlich van-der-Waals-Kraft zwischen nicht permanenten „fluktuierenden“ dipolen in Molekülen / Atomen