Промежуточный экзамен 2016 - 2017

БЭК182, Яковидис Одиссей

Июнь 2020

Be good, drink milk and think of Russia

Промежуточный экзамен 2016-2017
Ответы: BCAAE DBDBD AACA? ?EECB ?ABAB DAEDA CD

1. Когда граф Сен-Жермен извлекает из колоды первую карту, общее количество карт в колоде уменьшается. Вероятность события B соответственно меняется и становится условной вероятностью $\mathbb{P}(B \mid A)$. Аналогично для события C

   Таким образом, события A, B и C не могут являться независимыми.

   Тот же результат можно получить просто посчитав вероятности соответствующих событий.

   Ответ: B

2. Заметим, что среди всех данных функций только функция C обладает свойствами неотрицательности и непрерывности с области определения притом, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} dx/x^2 = 1$$

   Тогда такая функция может являться функцией плотности с.в.

   Ответ: C

3. По формуле для нахождения ковариации через м.о. :

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{E}(XY) = 2 + 3 \cdot 2 = 8$$

   Ответ: A

4. Корреляцию двух случайных величин можно вычислить как:

$$\operatorname{Corr}(X,Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)} \cdot \sqrt{\operatorname{Var}(Y)}} = \frac{2}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

   Ответ: A

5. По свойствам дисперсии:

$$\operatorname{Var}(aX + bY + c) = a^2 \operatorname{Var}(X) + b^2 \operatorname{Var}(Y) + 2ab \operatorname{Cov}(X,Y)$$

$$\operatorname{Var}(2X - Y + 4) = 4 \cdot 12 + 1 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 48 + 1 - 8 = 41$$

   Ответ: E

6. Заметим, что для такой ковариационной матрицы двух случайных величин: $\operatorname{Var}(X) = 1$, $\operatorname{Var}(Y) = 1$, $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$

   Из нулевой ковариации следует независимость X и Y

   Ответ: D

7. По свойствам корреляции, ковариации и дисперсий:

$$Corr(X,Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)}\sqrt{\operatorname{Var}(Y)}}$$

   Тогда подставляя исходные данные получаем:

$$\operatorname{Var}(X) = \operatorname{Var}(Y) = 2 \operatorname{Cov}(X,Y)$$

$$\operatorname{Corr}(X+Y, 2Y-7) = \frac{\operatorname{Cov}(X+Y, 2Y-7)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X+Y)}\sqrt{\operatorname{Var}(2Y-7)}}$$

$$\operatorname{Cov}(X+Y, 2Y-7) = \operatorname{Cov}(X, 2Y) + 2 \operatorname{Var}(Y) = 6 \operatorname{Cov}(X,Y)$$

$$\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2 \operatorname{Cov}(X;Y) = 6 \operatorname{Cov}(X;Y)$$

$$\operatorname{Var}(2Y-7) = 4 \operatorname{Var}(Y) = 8 \operatorname{Cov}(X;Y)$$

$$\operatorname{Corr}(X+Y, 2Y-7) = \frac{6 \operatorname{Cov}(X;Y)}{\sqrt{48 \cdot \operatorname{Cov}(X;Y)}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Ответ: B

8. По свойствам равномерного распределения на отрезке [0; 1]:

$$\mathbb{P}(0.2 < \xi < 0.7) = \frac{0.7 - 0.2}{1 - 0} = 0.5$$

   Ответ: D

9. По центральной предельной теореме, указанное распределение асимптотически сходится к стандартному нормальному распределению $\mathcal{N}(0,1)$

   Из предложенных интегралов только B имеет верные пределы интегрирования и соответствующую функцию плотности

   Ответ: B

10. Вычислим м.о. и дисперсию искомой суммы посетителей сайта:

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_i) \cdot n = 400 \cdot 100 = 40000$$

$$\operatorname{Var}(S_n) = \operatorname{Var}\left(\sum X_i\right) = n \cdot \operatorname{Var}(X_i) = 40000$$

Стандартизируем случайную величину S_n и получаем ответ:

$$\mathbb{P}(S_n > 40400) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}} > \frac{40400 - 40000}{\sqrt{40000}}\right) = \mathbb{P}(Z > 2) = \\ = 1 - \mathbb{P}(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0227$$

Ответ: D

11. X - неотрицательная случайная величина.

Тогда согласно неравенству Маркова:

$$\mathbb{P}(X \leqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

$$\mathbb{P}(X \leqslant 50000) \leqslant \frac{10000}{50000} = 0.2$$

Ответ: A

12. Заметим, что событие A и событие B для трех бросков монеты могут произойти одновременно. Однако это нельзя сказать про события A и C, так как если из трех бросков монеты все три раза выпал орел, вероятность выпадения решки равна 0.

Тогда события A и B совметсны, а события A и C несовместны.

Ответ: A

13. Согласно неравенству Чебышёва:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > a) \leqslant \frac{\operatorname{Var}(X)}{a^2}$$

Тогда:

$$\mathbb{P}(|X - 50000| \leqslant 20000) = 1 - \mathbb{P}(|X - 50000| > 20000) = \\ = 1 - \frac{10^8}{4 \cdot 10^8} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Ответ: C

14. Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение. Тогда:

$$\mathbb{E}(\xi_i) = 0.6$$

По закону больших чисел:

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{(\xi_1)^{2016} + \ldots + (\xi_n)^{2016}}{n} = \mathbb{E}((\xi_1)^{2016}) = 0.6$$

Ответ: A

15. По свойству биномиального распределения:

$$\mathbb{P}(X = 2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5^4}{2^4 \cdot 3^5}$$

Ответ: $\frac{5^4}{2^4 \cdot 3^5}$

16. Для биномиального распределения:

Математическое ожидание шестерок в 5 бросках

$$\mathbb{E}(5X) = 5\,\mathbb{E}(X) = \frac{5}{6}$$

Дисперсия

$$\mathrm{Var} = np(1-p) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

Ответ: 5/6 и 25/36

17. Для биномиального распределения (m - наиболее вероятное число):

$$np - q \leqslant m \leqslant np + p$$

$$5 \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \leqslant m \leqslant 5 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$
$$0 \leqslant m \leqslant 1$$

Ответ: E

18. Для одного броска:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6}$$

Для 5 бросков:

$$\mathbb{E}(5X) = 5\,\mathbb{E}(X) = 5 \cdot \frac{21}{6} = 17.5$$

Ответ: E

19. Для решения этой задачи необходимо вспомнить свойства нормального двумерного распределения. Из условия задачи:

$$\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\eta) = 0$$

$$\mathrm{Var}(\xi) = \mathrm{Var}(\eta) = 1$$

$$\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = \mathrm{Cov}(\eta, \xi) = 0.5$$

Тогда:

$$\mathrm{Corr}(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{Cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi)}\sqrt{\mathrm{Var}(\eta)}} = 0.5$$

Подставив наши параметры в функцию плотности нормального двумерного распределения получаем:

$$a = \sqrt{(1 - 0.5^2)} = \sqrt{0.75} = \frac{\sqrt{3}}{2}; b = 1$$

Ответ: C

20. Обе компоненты вектора содержат нормальные случайные величины или являются их линейной комбинацией.

Тогда z - двумерный нормальный вектор

Ответ: B

21.

22. По определению условного м.о. :

$$\mathbb{E}(X \mid Y = 0) = 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0 \mid Y = 0) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2 \mid Y = 0) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Ответ: A

23. По определению условной вероятности:

$$\mathbb{P}(X = 0 \mid Y < 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 0 \cap Y < 1)}{\mathbb{P}(Y < 1)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{4}$$

Ответ: B

24. Из таблицы вычисляем:

$$\mathbb{E}^2(Y) = (\frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1)^2 = 0$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^2 + \frac{1}{3} \cdot 0^2 + \frac{1}{3} \cdot 1^2 = \frac{2}{3}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}^2(Y) = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

Ответ: A

25. По формуле ковариации через м.о.:

$$\mathrm{Cov}(XY) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0$$

$$\mathbb{E}(XY) = 0 \cdot (-1) \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{Cov}(XY) = -\frac{1}{3}$$

Ответ: B

26. Для нахождения искомой вероятности вычислим соответствующий интеграл:

$$\mathbb{P}(X < 0.5, Y < 0.5) = \int_0^{0.5} \int_0^{0.5} 9x^2y^2\,dx\,dy = \int_0^{0.5} \frac{3}{8} y^2 dy = \frac{1}{64}$$

Ответ: D

27. По определению условной функции плотности:

$$f_{x|y=1} = \frac{f_{xy}}{f_y}$$

Тогда:

$$f_y = \int_0^1 9x^2y^2\,dx = 3y^2$$

$$f_{x|y=1} = \frac{9x^2y^2}{3y^2} = 3x^2, x \in [0;1]$$

Ответ: A

28. Искомая вероятность будет равна сумме соответствующих частных вероятностей:

$$\mathbb{P}(\text{«Отличник»}) = 0.5 \cdot \frac{1}{3} + 0.3 \cdot \frac{1}{3} + 0.4 \cdot \frac{1}{3} = 0.4$$

Ответ: E

29. По теореме умножения для двух событий:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B) = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15$$

Тогда по теореме сложения:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.2 + 0.5 - 0.15 = 0.55$$

Ответ: D

30. Для биномиального распределения:

$$\mathbb{P}(\text{«Орел»} \geqslant 1) = C_{10}^1 \cdot 0.2^1 \cdot 0.8^9$$

Ответ: A

31. Для ответа на вопрос посчитаем ряд вероятностей.

Пусть событие F – покупателем была женщина, S – сумма чека

Тогда искомая условная вероятность:

$$\mathbb{P}(F \mid S > 1000) = \frac{\mathbb{P}(F \cup S > 1000)}{\mathbb{P}(S > 1000)}$$

$$\mathbb{P}(S > 1000) = 0.5 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.3 = 0.45$$

$$\mathbb{P}(F = 1 \cup S > 1000) = 0.5 \cdot 0.6 = 0.3$$

$$\mathbb{P}(F = 1 \mid S > 1000) = \frac{0.3}{0.45} = \frac{2}{3}$$

Ответ: C

32. Из перечисленных свойств только $\mathbb{P}(X \in (a; b]) = F_X(b) - F_X(a)$ является свойсвтом функции распределения случайной величины.

Ответ: D