

# LA E<sub>χ</sub> 02

isagila

Собрано 09.06.2023 в 20:36



# Содержание

<b>1. Линейная алгебра</b>	<b>3</b>
1.1. Евклидово пространство: определение, неравенство Коши-Буняковского. Нормированное евклидово пространство. . . . .	3
1.2. Ортонормированный базис, ортогонализация базиса. Матрица Грама. . . . .	3
1.3. Ортогональность вектора подпространству. Ортогональное дополнение. Теорема Пифагора. . . . .	4
1.4. Задача о перпендикуляре. . . . .	5
1.5. Линейный оператор: определение, основные свойства. . . . .	5
1.6. Обратный оператор. Взаимно-однозначный оператор. Ядро и образ оператора. Теорема о размерностях. . . . .	5
1.7. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы при переходе к новому базису. . . . .	7
1.8. Собственные числа и собственные векторы оператора. Теоремы о диагональной матрице оператора. . . . .	7
1.9. Сопряженный и самосопряженный операторы в вещественном евклидовом пространстве: определения, основные свойства. Свойства собственных чисел и собственных векторов самосопряженного оператора. . . . .	7
1.10. Структура образа самосопряженного оператора. Проектор. Спектральное разложение оператора. . . . .	7
1.11. Ортогональная матрица и ортогональный оператор. Поворот плоскости и пространства как ортогональное преобразование. . . . .	7
1.12. Билинейные формы: определения, свойства. Матрица билинейной формы. . . . .	7
1.13. Квадратичная форма: определения, приведение к каноническому виду. . . . .	7
1.14. Знакоопределенность квадратичной формы: необходимые и достаточные. условия. Критерий Сильвестра. . . . .	7
<b>2. Дифференциальные уравнения</b>	<b>8</b>
2.1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ДУ): задача о радиоактивном распаде и задача о падении тела. Определение ДУ, решения ДУ и их геометрический смысл. Задача Коши. . . . .	8
2.2. Уравнение с разделяющимися переменными. . . . .	8
2.3. Однородное уравнение. . . . .	8
2.4. Уравнение в полных дифференциалах. . . . .	8
2.5. Линейное уравнение первого порядка. Метод Лагранжа. . . . .	9
2.6. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения. . . . .	9
2.7. Уравнения $n$ -ого порядка, допускающие понижение порядка. . . . .	9
2.8. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) : определения, решение ЛОДУ <sub>2</sub> с постоянными коэффициентами для случая различных вещественных корней характеристического уравнения. . . . .	10
2.9. Решение ЛОДУ <sub>2</sub> с постоянными коэффициентами для случая вещественных кратных корней характеристического уравнения. . . . .	11
2.10. Решение ЛОДУ <sub>2</sub> с постоянными коэффициентами для случая комплексных корней характеристического уравнения. . . . .	11
2.11. Свойства решений ЛОДУ <sub>2</sub> : линейная независимость решений, определитель Вронского. Теоремы 1,2. . . . .	11
2.12. Свойства решений ЛОДУ <sub>2</sub> : линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Определитель Вронского. Теоремы о вронскиане. . . . .	11
2.13. Свойства решений ЛОДУ <sub>2</sub> : линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ <sub>2</sub> . Фундаментальная система решений (определение). . . . .	12
2.14. Свойства решений ЛНДУ <sub>2</sub> : теоремы о структуре общего решения и решении ДУ с суммой правых частей. . . . .	12
2.15. Структура решения ЛОДУ <sub>n</sub> : линейная независимость решений, нахождение фундаментальной системы решений по корням характеристического уравнения. . . . .	12
2.16. Решение ЛНУ <sub>2</sub> с постоянными коэффициентами: специальная правая часть, поиск частного решения методом неопределенных коэффициентов. . . . .	12
2.17. Решение ЛНУ <sub>2</sub> : метод вариации произвольных постоянных (Лагранжа). . . . .	12
2.18. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение методом исключения. . . . .	12
2.19. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение матричным методом в случае различных вещественных собственных чисел. . . . .	12
2.20. Теория устойчивости: определение устойчивости по Ляпунову, фазовая плоскость, траектории ДУ. Примеры устойчивого и неустойчивого решения . . . . .	12

# 1. Линейная алгебра

## 1.1. Евклидово пространство: определение, неравенство Коши-Буняковского. Нормированное евклидово пространство.

**Def 1.1.1.** Скалярным произведением называется функция двух элементов линейного пространства  $x, y \in L^n$  обозначаемая  $(x, y) \rightarrow \mathbb{R}$ , для которой выполнены аксиомы:  $\forall x, y \in L^n, \lambda \in \mathbb{C}$

1.  $(x, y) = (y, x)$
2.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
3.  $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
4.  $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \implies x = 0$

**Def 1.1.2.** Линейное пространство с введенным скалярным произведением называется евклидовым пространством  $E^n$ .

*Замечание 1.1.3.* Если  $L = C_{[a;b]}$ , то скалярное произведение обычно определяется как  $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$

**Теорема 1.1.4.** Неравенство Коши-Буняковского

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$$

*Доказательство.* Рассмотрим скалярное произведение:

$$\begin{aligned}(\lambda x - y, \lambda x - y) &\geq 0 \\(\lambda x - y, \lambda x - y) &= \lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) \geq 0\end{aligned}$$

Полученное выражение можно рассмотреть как квадратное уравнение относительно  $\lambda$ . Т.к. оно неотрицательно  $\forall \lambda$ , то его дискриминант будет  $\leq 0$ . Таким образом

$$\begin{aligned}4\lambda^2(x, y)^2 - 4\lambda^2(x, x)(y, y) &\leq 0 \\(x, y)^2 - (x, x)(y, y) &\leq 0 \\(x, y)^2 &\leq (x, x)(y, y)\end{aligned}$$

■

**Def 1.1.5.** Нормой называется функция одного элемента линейного пространства  $x \in L^n$ , обозначаемая  $\|x\|$  и определяемая аксиомами:  $\forall x, y \in L^n, \lambda \in \mathbb{C}$ :

1.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
2.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3.  $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \implies x = 0$

**Def 1.1.6.** Евклидово пространство называется *нормированным*, если в нем определена норма.

*Замечание 1.1.7.* Чаще всего норма определяется как  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ .

## 1.2. Ортонормированный базис, ортогонализация базиса. Матрица Грама.

**Def 1.2.8.** Углом между двумя элементами Евклидова пространства называется

$$\cos \angle(x, y) = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

**Def 1.2.9.** Для элемента Евклидова пространства ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю.

$$x \perp y \iff (x, y) = 0$$

**Теорема 1.2.10.** Во всяком  $E^n$  можно выделить ортонормированный базис размера  $n$ .

*Доказательство.* Пусть у нас есть базис  $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ . Ортогонализируем его, полученный базис обозначим  $\mathcal{E}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ . Этот базис можно нормировать и получить искомый ортонормированный базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ .

**Процесс ортогонализации Грама-Шмидта:**

Будем добавлять векторы в базис  $\mathcal{E}$  из базиса  $B$  по-одному:

**База:** начнем с одного произвольного вектора  $\beta_1$ . Тогда  $e'_1 = \beta_1$ .

**Переход:** пусть у нас уже выделен набор из  $k - 1$  ортогональных векторов  $\{e'_1, \dots, e'_{k-1}\}$  и в него требуется добавить вектор  $\beta_k$ .

Будем искать  $e'_k$  в виде

$$e'_k = \beta_k + \lambda_1 e'_{k-1} + \lambda_2 e'_{k-2} + \dots + \lambda_{k-1} e'_1$$

Чтобы  $e'_k$  был ортогонален остальным векторам уже построенной системы, необходимо, чтобы скалярные произведения  $e'_k$  с остальными векторами системы равнялись нулю. Рассмотрим на примере  $e'_1$ :

$$(e'_k, e'_1) = (\beta_k, e'_1) + \lambda_1 (e'_{k-1}, e'_1) + \dots + \lambda_{k-1} (e'_1, e'_1) = 0$$

Учитывая то, что построенная система ортогональна, то  $(e'_i, e'_j) = 0$  ( $i, j < k$ ). Значит выражение выше упрощается и остается:

$$\begin{aligned} (\beta_k, e'_1) + \lambda_{k-1} (e'_1, e'_1) &= 0 \\ \lambda_{k-1} &= -\frac{(\beta_k, e'_1)}{(e'_1, e'_1)} \end{aligned}$$

Аналогично можно получить оставшиеся коэффициенты  $\lambda_i$ . Тогда добавляемый в систему вектор  $e'_k$  будет иметь вид:

$$e'_k = \beta_k - \frac{(\beta_k, e'_{k-1})}{(e'_{k-1}, e'_{k-1})} \cdot e'_{k-1} - \dots - \frac{(\beta_k, e'_1)}{(e'_1, e'_1)} \cdot e'_1$$

■

**Def 1.2.11.** Матрицей Грама называется матрица составленная из скалярных произведений

$$\begin{pmatrix} (e_1, e_1) & \dots & (e_k, e_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_1, e_k) & \dots & (e_k, e_k) \end{pmatrix}$$

*Замечание 1.2.12.* В ортогональном базисе матрица Грама диагональная, а в ортонормированном — единичная.

### 1.3. Ортогональность вектора подпространству. Ортогональное дополнение. Теорема Пифагора.

**Def 1.3.13.** Пусть дано Евклидово пространство  $E^n$ . Элемент  $h \in E^n$  называется ортогональным (перпендикулярным) подпространству  $G \subset E^n$ , если  $\forall x \in G: h \perp x$ .

*Следствие 1.3.14.* Выделим в подпространстве  $G$  базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\}$ . Если  $h \perp e_i \forall e_i \in \mathcal{E}$ , то  $h \perp G$ .

*Доказательство.* Любой элемент  $x \in G$  можно представить в виде  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i$ . Рассмотрим скалярное произведение  $(h, x)$ . По свойствам линейности разложим его на  $\sum_{i=1}^k \lambda_i (h, e_i)$ . Т.к.  $h$  ортогонален каждому из базисных векторов, то полученная сумма будет равна нулю, значит  $h$  ортогонален любому  $x \in G$ . ■

**Def 1.3.15.** Пусть дано Евклидово пространство  $E^n$ . Ортогональным дополнением  $F$  к подпространству  $G \subset E^n$  называется совокупность векторов  $h \perp G$ .

*Замечание 1.3.16.* Из определения 1.3.13 следует, что  $F$  также является подпространством  $E^n$ .

**Теорема 1.3.17.** Евклидово пространство  $E^n$  является прямой суммой подпространства  $F \subset E^n$  и его ортогонального  $G = F^\perp$ .

$$E^n = F \oplus F^\perp$$

*Доказательство.* В Евклидовом пространстве  $E^n$  выделим базис, после чего разложим произвольный элемент пространства  $x \in E^n$  по этому базису:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \underbrace{\{e_1, \dots, e_k\}}_{\text{Базис } G} \cup \{e_{k+1}, \dots, e_n\} \\ x &= \underbrace{x_1 e_1 + \dots + x_k e_k}_{\bar{x}} + \underbrace{x_{k+1} e_{k+1} + \dots + x_n e_n}_{\hat{x}} = \bar{x} + \hat{x} \end{aligned}$$

**TODO:** Дальше в конспекте что-то непонятное

■

**TODO:** Теорема Пифагора?

#### 1.4. Задача о перпендикуляре.

#### 1.5. Линейный оператор: определение, основные свойства.

**Def 1.5.18.** Пусть  $V^n, W^m$  линейные пространства. Отображение  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow W^m$ , которое  $\forall x \in V^n$  сопоставляет  $y \in W^m$  называется линейным оператором при выполнении следующих условий:  $\forall x_1, x_2 \in V^n, \lambda \in \mathbb{C}$ :

1.  $\mathcal{A}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}x_1 + \mathcal{A}x_2$
2.  $\mathcal{A}(\lambda x_1) = \lambda(\mathcal{A}x_1)$

*Замечание 1.5.19.*  $y = \mathcal{A}x$  означает, что  $y$  порождается применением оператора  $\mathcal{A}$

Обозначим некоторые базовые свойства линейных операторов. Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}: V^n \rightarrow W^m$  это линейные операторы, тогда определены:

1. Сумма  $(\mathcal{A} + \mathcal{B})x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$
2. Умножение на число  $(\lambda \mathcal{A})x = \lambda(\mathcal{A}x)$
3. Нулевой оператор  $\Theta x = 0, \forall x \in V^n$
4. Противоположный оператор  $-\mathcal{A} = (-1) \cdot \mathcal{A}$

Далее рассмотрим операторы  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}: V^n \rightarrow V^n$  действующие в одном линейном пространстве. Для таких операторов определена композиция (произведение)  $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x)$ . В общем случае она не коммутативна  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$ .

Свойства композиции операторов:

1.  $\lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = (\lambda \mathcal{A}) \cdot \mathcal{B}$
2.  $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{C} + \mathcal{B} \cdot \mathcal{C}$
3.  $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C}$
4.  $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}$

**Def 1.5.20.** Композиция оператора самим с собой  $n$  раз называется  $n$ -ой степенью оператора:  $\mathcal{A}^n = \underbrace{\mathcal{A} \cdot \dots \cdot \mathcal{A}}_n$

Для степени оператора справедливо равенство  $\mathcal{A}^{n+m} = \mathcal{A}^n \cdot \mathcal{A}^m$

#### 1.6. Обратный оператор. Взаимно-однозначный оператор. Ядро и образ оператора. Теорема о размерностях.

**Def 1.6.21.** Оператор  $I: V^n \rightarrow V^n$  называется тождественным оператором, если  $Ix = x, \forall x \in V^n$ .

**Def 1.6.22.** Пусть даны операторы  $\mathcal{A}, \mathcal{B}: V^n \rightarrow V^n$ . Оператор  $\mathcal{B}$  называется обратным для оператора  $\mathcal{A}$ , если их композиция равна тождественному оператору.

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1} \iff \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = I$$

**Def 1.6.23.** Оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$  называется взаимно-однозначным, если разным  $x \in V^n$  сопоставляются разные  $y \in V^n$ .

$$x \neq y \implies \mathcal{A}x \neq \mathcal{A}y \quad \forall x, y \in V^n$$

**Lm 1.6.24.** Если оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$  взаимно-однозначный, то  $\mathcal{A}x = 0 \implies x = 0$ .

*Доказательство.* От противного

$$\begin{aligned} \square x = x_1 - x_2 \neq 0 &\implies x_1 \neq x_2 \\ \mathcal{A}x = \mathcal{A}(x_1 - x_2) &= \mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2 = 0 \implies \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \end{aligned}$$

Это невозможно, т.к.  $\mathcal{A}$  взаимно-однозначный. ■

**Теорема 1.6.25.** Взаимно-однозначный оператор переводит линейно-независимый набор в линейно-независимый набор.

*Доказательство.* Пусть дан взаимно-однозначный оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$  и линейно-независимый набор  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Построим набор образов  $\{\mathcal{A}x_1, \dots, \mathcal{A}x_n\}$ . Составим его нулевую линейную комбинацию, после чего воспользуемся линейностью оператора:

$$\begin{aligned}\lambda_1 \mathcal{A}x_1 + \dots + \lambda_n \mathcal{A}x_n &= 0 \\ \mathcal{A}(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) &= 0\end{aligned}$$

По 1.6.24 получаем, что  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ . Т.к. набор  $\{x_1, \dots, x_n\}$  линейно независим, то  $\forall \lambda_i = 0$  ■

*Следствие 1.6.26.* Взаимно-однозначный оператор переводит базис в базис.

**Теорема 1.6.27.** Оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$  взаимно-однозначный  $\iff \exists \mathcal{A}^{-1}$ .

*Доказательство.*  $\implies$  Пусть  $x \xrightarrow{\mathcal{A}} y$ . Рассмотрим оператор  $\mathcal{B}$  такой, что  $y \xrightarrow{\mathcal{B}} x$ . Т.к.  $\mathcal{A}$  взаимно-однозначный, то  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = I$ .

$\Leftarrow$  От противного

$$\begin{aligned}\square x_1 \neq x_2, \mathcal{A}x_1 &= \mathcal{A}x_2 = x \\ x_1 &= \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}^{-1}x \\ x_2 &= \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x_2 = \mathcal{A}^{-1}x \\ x_1 \neq x_2 &\implies \mathcal{A}^{-1}x \neq \mathcal{A}^{-1}x\end{aligned}$$

Получили противоречие. ■

**Def 1.6.28.** Пусть дан линейный оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow W^m$ . Множество  $\text{Ker}\mathcal{A} = \{x \in V^n \mid \mathcal{A}x = 0\}$  называется ядром оператора  $\mathcal{A}$ .

**Lm 1.6.29.** Оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$  взаимно-однозначный  $\implies \text{Ker}\mathcal{A} = \{0\}$ .

*Доказательство.* От противного, пусть  $x \neq 0 \in \text{Ker}\mathcal{A}$ . Тогда по 1.6.24  $\mathcal{A}0 = 0$ , но в то же время  $\mathcal{A}x = 0, x \neq 0$ . Нарушается взаимно-однозначность. ■

**Def 1.6.30.** Пусть дан линейный оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow W^m$ . Множество  $\text{Im}\mathcal{A} = \{y \in W^m \mid \exists x \in V^n: y = \mathcal{A}x\}$  называется образом оператора  $\mathcal{A}$ .

**Теорема 1.6.31.** Пусть дан оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$ . Тогда

$$\dim \text{Ker}\mathcal{A} + \dim \text{Im}\mathcal{A} = n$$

*Доказательство.* Т.к.  $\text{Ker}\mathcal{A}$  и  $\text{Im}\mathcal{A}$  это подпространства  $V^n$ , то  $\exists W \subset V^n \mid W \oplus \text{Ker}\mathcal{A} = V^n$ . Тогда  $\dim W + \dim \text{Ker}\mathcal{A} = n$ . Требуется доказать, что  $\dim W = \dim \text{Im}\mathcal{A}$ .

Сначала покажем, что  $\mathcal{A}: W \rightarrow \text{Im}\mathcal{A}$  взаимно-однозначный. От противного:

$$\begin{aligned}\square x_1 \neq x_2 \in W: \mathcal{A}x_1 &= \mathcal{A}x_2 \\ \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 &\implies \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \implies (x_1 - x_2) \in \text{Ker}\mathcal{A} \\ x_1, x_2 \in W &\implies (x_1 - x_2) \in W\end{aligned}$$

Но это невозможно, т.к.  $W \oplus \text{Ker}\mathcal{A} = V^n \implies W \cap \text{Ker}\mathcal{A} = \emptyset$ .

В  $\text{Im}\mathcal{A}$  выделим базис  $\{y_1, \dots, y_k\}$ . Т.к.  $\mathcal{A}$  взаимно-однозначный, то выделенный базис порождается линейно-независимым набором (см. 1.6.25)  $\{x_1, \dots, x_k\}, x_i \in W$ . Значит  $\dim W \geq \dim \text{Im}\mathcal{A}$ .

Предположим, что  $\dim W > \dim \text{Im}\mathcal{A}$ . Обозначим  $\dim W = p$ , дополним систему  $\{x_1, \dots, x_k\}$  до  $p$  линейно-независимых векторов. Т.к. оператор  $\mathcal{A}: W \rightarrow \text{Im}\mathcal{A}$  взаимно-однозначный, то он должен перевести полученную линейно-независимую систему в линейно-независимую. Однако это невозможно, т.к.  $\text{Im}\mathcal{A}$  имеет базис меньшей размерности. ■

*Замечание 1.6.32.* Можно доказать, что

$$\begin{cases} V_1 \subset V^n \\ V_2 \subset V^n \\ \dim V_1 + \dim V_2 = n \end{cases} \implies \exists \mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n, \text{Ker}\mathcal{A} = V_1, \text{Im}\mathcal{A} = V_2$$

**Def 1.6.33.** Рангом оператора  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$  называется размерность его образа:

$$\text{rang}\mathcal{A} = \dim \text{Im}\mathcal{A}$$

Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}: V^n \rightarrow V^n$ . Рассмотрим некоторые свойства ранга линейного оператора:

1. Если оператор  $\mathcal{A}$  взаимно-однозначный, то  $\text{rang} \mathcal{A} = n$  (это следствие из 1.6.31).
2.  $\text{rang}(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \leq \text{rang} \mathcal{A}$ ,  $\text{rang}(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \leq \text{rang} \mathcal{B}$
3.  $\text{rang}(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = \text{rang} \mathcal{A} + \text{rang} \mathcal{B} - \dim V$

### 1.7. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы при переходе к новому базису.

Пусть дан оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$  и  $x, y \in V^n$ ,  $\mathcal{A}x = y$ .

Выделим в  $V^n$  базис, разложим  $x$  по этому базису. После чего применим к нему оператор  $\mathcal{A}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \{e_1, \dots, e_n\} \\ x &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\ y &= x_1 \mathcal{A}e_1 + \dots + x_n \mathcal{A}e_n\end{aligned}$$

Далее применим оператор к каждому из базисных векторов:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}e_i &= a_{1,i}e_1 + \dots + a_{n,i}e_n \\ y &= x_1(a_{1,1}e_1 + \dots + a_{n,1}e_n) + \dots + x_n(a_{1,n}e_1 + \dots + a_{n,n}e_n) \\ y &= e_1(x_1 a_{1,1} + \dots + x_n a_{1,n}) + \dots + e_n(x_1 a_{n,1} + \dots + x_n a_{n,n})\end{aligned}$$

Заметим, что  $y$  также можно разложить по базису. Составим СЛАУ и запишем её в матричном виде:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 a_{1,1} & + \dots + & x_n a_{1,n} & = & y_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_n a_{n,1} & + \dots + & x_n a_{n,n} & = & y_n \end{array} \right\} \iff AX = Y$$

**Def 1.7.34.** Матрицей оператора  $\mathcal{A}$  в данном базисе называется матрица составленная из столбцов-коэффициентов разложения образов базисных векторов по этому же базису.

*Замечание 1.7.35.* Если  $A^{-1} = A^T$ , то матрица оператора называется ортогональной.

### 1.8. Собственные числа и собственные векторы оператора. Теоремы о диагональной матрице оператора.

### 1.9. Сопряженный и самосопряженный операторы в вещественном евклидовом пространстве: определения, основные свойства. Свойства собственных чисел и собственных векторов самосопряженного оператора.

### 1.10. Структура образа самосопряженного оператора. Проектор. Спектральное разложение оператора.

### 1.11. Ортогональная матрица и ортогональный оператор. Поворот плоскости и пространства как ортогональное преобразование.

### 1.12. Билинейные формы: определения, свойства. Матрица билинейной формы.

### 1.13. Квадратичная форма: определения, приведение к каноническому виду.

### 1.14. Знакоопределенность квадратичной формы: необходимые и достаточные. условия. Критерий Сильвестра.



## 2. Дифференциальные уравнения

**2.1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ДУ):** задача о радиоактивном распаде и задача о падении тела. Определение ДУ, решения ДУ и их геометрический смысл. Задача Коши.

**2.2. Уравнение с разделяющимися переменными.**

**Def 2.2.1.** Уравнение вида

$$m(x)N(y)dx + M(x)n(y)dy = 0$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

Для решения таких уравнений необходимо разделить обе части на  $M(x)N(y)$ , перенести одно из слагаемых в правую часть, после чего проинтегрировать обе части.

$$m(x)N(y)dx + M(x)n(y)dy = 0$$

$$\frac{m(x)}{M(x)}dx + \frac{n(y)}{N(y)}dy = 0$$

$$\int \frac{m(x)}{M(x)}dx = - \int \frac{n(y)}{N(y)}dy$$

*Замечание 2.2.2.* В случае, если  $M(x) = 0$  или  $N(y) = 0$ , то уравнение решается непосредственным интегрированием.

*Замечание 2.2.3.* Решения вида  $x = const, y = const$  не всегда получаемы из общего решения.

**2.3. Однородное уравнение.**

**Def 2.3.4.** Функция  $f(x, y)$  называется *однородной  $m$ -ого измерения* ( $m \geq 0$ ), если  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$ .

**Def 2.3.5.** Дифференциальное уравнение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  называется *однородным*, если  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  однородные функции одного измерения  $m$ .

Однородные уравнения решаются заменой  $t = \frac{y}{x}$ . Покажем, откуда появляется подобная замена. Преобразуем функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ :

$$P(x, y) = P\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^m P\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

$$Q(x, y) = Q\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^m Q\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Вернемся к исходному уравнению:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \mid : dx$$

$$y' = -\frac{P(1, y/x)}{Q(1, y/x)} = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} = t &\implies \begin{cases} f(1, y/x) = \tilde{f}(t) \\ y = xt, \quad y'_x = t + xt' \end{cases} \\ t + xt' &= \tilde{f}(t) \\ x \cdot \frac{dt}{dx} &= \tilde{f}(t) - t \\ \frac{dt}{\tilde{f}(t) - t} &= \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Таким образом исходное однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

*Замечание 2.3.6.* Случай  $\tilde{f}(t) - t = 0$  нужно рассмотреть отдельно.

**2.4. Уравнение в полных дифференциалах.**

**Def 2.4.7.** Дифференциальное уравнение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  называется уравнением в полных дифференциалах, если

$$\exists z(x, y): dz = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$



Критерием того, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах может служить равенство

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Решение уравнений в полных дифференциалах сводится к поиску функции  $z(x, y)$ , удовлетворяющей условиям. Про то, как найти такую функцию можно прочитать в конспекте по матанализу в разделе про интегралы, независимые от пути. После того, как такая функция будет найдена, решить ДУ не составит проблем:

$$\begin{aligned} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= 0 \\ dz &= 0 \\ z &= C \end{aligned}$$

**TODO:** Интегрирующий множитель

## 2.5. Линейное уравнение первого порядка. Метод Лагранжа.

**Def 2.5.8.** Линейным однородным уравнением первого порядка (ЛОДУ<sub>1</sub>) называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = 0$$

ЛОДУ<sub>1</sub> является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому оно решается следующим образом:

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -p(x)y \\ \frac{dy}{y} &= -p(x)dx \\ \bar{y} &= C \cdot \underbrace{e^{-\int p(x)dx}}_{y_1} \end{aligned}$$

*Замечание 2.5.9.* При решении данного уравнения мы поделили на  $y \neq 0$ . Заметим, что  $y = 0$  также является решением ЛОДУ<sub>1</sub>, однако оно получаемо из общего решения при  $C = 0$ .

**Def 2.5.10.** Линейным неоднородным уравнением первого порядка (ЛНДУ<sub>1</sub>) называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \quad q(x) \neq 0$$

**Метод Лагранжа** (метод вариации произвольной постоянной) для решения ЛНДУ<sub>1</sub>:

1. Найдем частное решение  $y_1$  соответствующего однородного уравнения.
2. Будем искать решение ЛНДУ<sub>1</sub> в виде  $y(x) = y_1(x) \cdot C(x)$ . Преобразуем ДУ в соответствии с этой заменой

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= q(x) \\ y_1'(x)C(x) + y_1(x)C'(x) + p(x)y_1(x)C(x) &= q(x) \\ y_1(x)C'(x) + C(x) \underbrace{\left( y_1'(x) + p(x)y_1(x) \right)}_{=0} &= q(x) \\ y_1(x)C'(x) &= q(x) \\ C(x) &= \int \frac{q(x)}{y_1(x)} dx + C \end{aligned}$$

3. Подставим найденную функцию  $C(x)$  в  $y(x) = y_1(x) \cdot C(x)$ .

**TODO:** Уравнение Бернулли, Клеро, Риккати и пр.

## 2.6. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения.

## 2.7. Уравнения $n$ -ого порядка, допускающие понижение порядка.

К уравнениям, допускающим понижение порядка относятся:

1. Непосредственно интегрируемые уравнения вида  $y^{(n)}(x) = f(x)$ .  
Они решаются интегрированием обеих частей  $n$  раз.

2. Уравнения не содержащие  $y(x)$  в явном виде.

Они решаются заменой  $z(x) = y'(x)$ ,  $z'(x) = y''(x)$ .

*Замечание 2.7.11.* В общем случае производится замена самой младшей из присутствующих производных.

3. Уравнения не содержащие  $x$  в явном виде.

Они решаются заменой  $z(y) = y'(x)$ , тогда  $y''(x) = z'_y y'_x = z'(y) \cdot z(y)$

## 2.8. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) : определения, решение ЛОДУ<sub>2</sub> с постоянными коэффициентами для случая различных вещественных корней характеристического уравнения.

**Def 2.8.12.** Линейным дифференциальным уравнением  $n$ -ого порядка (ЛДУ <sub>$n$</sub> ) называется

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = f(x), \quad a_0(x) \neq 0$$

**Def 2.8.13.** Разрешенным ЛДУ <sub>$n$</sub>  называется

$$y^{(n)}(x) + b_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + b_n(x)y(x) = f(x)$$

**Def 2.8.14.** Если в ЛДУ <sub>$n$</sub>   $\forall i: a_i(x) = p_i \in \mathbb{R}$ , то такое ЛДУ <sub>$n$</sub>  называется ЛДУ <sub>$n$</sub>  с постоянными коэффициентами. Оно имеет вид

$$y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + p_n y(x) = f(x)$$

**Def 2.8.15.** Линейным однородным дифференциальным уравнением  $n$ -ого порядка называется ЛДУ <sub>$n$</sub>  вида

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = 0,$$

**Def 2.8.16.** Линейным неоднородным дифференциальным уравнением  $n$ -ого порядка называется ЛДУ <sub>$n$</sub>  вида

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = f(x), \quad f(x) \neq 0$$

Рассмотрим ЛОДУ<sub>2</sub> вида  $y'' + py' + qy = 0$ . Любой паре  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$  можно поставить в соответствие квадратное уравнение  $k^2 + pk + q = 0$ . По т. Виета  $p = -(k_1 + k_2)$ ,  $q = k_1 k_2$ , где  $k_1, k_2$  это корни уравнения. Подставим полученные выражения в исходное ДУ:

$$\begin{aligned} y'' - (k_1 + k_2)y' + k_1 k_2 &= 0 \\ y'' - k_1 y' - k_2 y' + k_1 k_2 &= 0 \\ (y'' - k_2 y') - k_1(y' - k_2 y) &= 0 \\ \square u(x) = y' - k_2 y \\ u' - k_1 u = 0 &\implies u(x) = c_1 e^{k_1 x} \implies y' - k_2 y = c_1 e^{k_1 x} \end{aligned}$$

Сначала найдем частное решение соответствующего ЛОДУ<sub>1</sub>:  $\bar{y} = c_2 e^{k_2 x}$ ,  $y_1 = e^{k_2 x}$ . Далее будем варьировать постоянную  $c_2$ , тогда  $y(x) = C_2(x)e^{k_2 x}$ . Подставим это в исходное ДУ:

$$\begin{aligned} C_2'(x)e^{k_2 x} + C_2(x) \cdot k_2 \cdot e^{k_2 x} - k_2 \cdot C_2(x)e^{k_2 x} &= c_1 e^{k_1 x} \\ C_2'(x)e^{k_2 x} &= c_1 e^{k_1 x} \end{aligned}$$

В итоге получаем уравнение

$$\boxed{C_2'(x) = c_1 e^{(k_1 - k_2)x}} \quad (\star)$$

Проанализируем это уравнение. Всего будет рассмотрено 3 случая: один в этом параграфе, остальные — в двух последующих.

(★) **случай I:**  $k_1 \neq k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

В заданных ограничениях имеем

$$\begin{aligned} C_2'(x) &= c_1 e^{(k_1 - k_2)x} \\ C_2(x) &= \frac{c_1}{k_1 - k_2} e^{(k_1 - k_2)x} + \tilde{c}_2 \\ y(x) = C_2(x)y_1(x) &= \underbrace{\frac{c_1}{k_1 - k_2}}_{\tilde{c}_1} e^{k_1 x} + \tilde{c}_2 e^{k_2 x} \\ y(x) &= \tilde{c}_1 e^{k_1 x} + \tilde{c}_2 e^{k_2 x} \end{aligned}$$

## 2.9. Решение ЛОДУ<sub>2</sub> с постоянными коэффициентами для случая вещественных кратных корней характеристического уравнения.

(★) случай II:  $k_1 = k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Пусть  $k_1 = k_2 = k$ , тогда получаем:

$$\begin{aligned}C_2'(x) &= c_1 e^{(k_1 - k_2)x} \\C_2(x) &= c_1 x + c_2 \\y(x) &= C_2(x)y_1(x) = (c_1 x + c_2)e^{kx} \\y(x) &= c_1 x \cdot e^{kx} + c_2 e^{kx}\end{aligned}$$

## 2.10. Решение ЛОДУ<sub>2</sub> с постоянными коэффициентами для случая комплексных корней характеристического уравнения.

(★) случай III:  $k_{1,2} = \alpha + \beta i, k_{1,2} \in \mathbb{C}$

В заданных ограничениях получаем

$$\begin{aligned}C_2'(x) &= c_1 e^{(k_1 - k_2)x} \\C_2(x) &= \frac{c_1}{k_1 - k_2} e^{(k_1 - k_2)x} + \tilde{c}_2 \\y(x) &= C_2(x)y_1(x) = \underbrace{\frac{c_1}{k_1 - k_2}}_{\tilde{c}_1} e^{k_1 x} + \tilde{c}_2 e^{k_2 x} \\y(x) &= \tilde{c}_1 e^{k_1 x} + \tilde{c}_2 e^{k_2 x} \\y(x) &= \tilde{c}_1 e^{\alpha x} e^{\beta i x} + \tilde{c}_2 e^{\alpha x} e^{-\beta i x}\end{aligned}$$

Далее используем формулу  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ :

$$\begin{aligned}y(x) &= e^{\alpha x} \left( \tilde{c}_1 \left( \cos(\beta x) + i \sin(\beta x) \right) + \tilde{c}_2 \left( \cos(\beta x) - i \sin(\beta x) \right) \right) \\y(x) &= e^{\alpha x} \left( \cos(\beta x) \underbrace{(\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2)}_{\hat{c}_1} + i \sin(\beta x) \underbrace{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2)}_{\hat{c}_2} \right) \\y(x) &= e^{\alpha x} \left( \hat{c}_1 \cos(\beta x) + \hat{c}_2 i \sin(\beta x) \right)\end{aligned}$$

**TODO:** Конспект не очень хороший в этом моменте, возможно что-то неправильно

**Lm 2.10.17.** Если  $y(x) = u(x) + iv(x)$  это решение ЛОДУ<sub>2</sub>, то  $y(x) = u(x) + v(x)$  также являются решением ЛОДУ<sub>2</sub>.

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $y(x) = u(x) + v(x)$ :

$$\begin{aligned}\begin{cases} y(x) = u(x) + v(x) \\ y'(x) = u'(x) + v'(x) \\ y''(x) = u''(x) + v''(x) \end{cases} \\y''(x) + py'(x) + qy(x) = u''(x) + v''(x) + pu'(x) + pv'(x) + u(x) + qu(x) + qv(x) = 0 \\(u''(x) + pu'(x) + qu(x)) + (v''(x) + pv'(x) + qv(x)) = 0\end{aligned}$$

Это равенство верно, т.к.  $u(x)$  и  $v(x)$  решения ЛОДУ<sub>2</sub>. ■

Значит, по 2.10.17 общее решение (★) в третьем случае будет иметь вид

$$y(x) = e^{\alpha x} \left( \hat{c}_1 \cos(\beta x) + \hat{c}_2 \sin(\beta x) \right)$$

## 2.11. Свойства решений ЛОДУ<sub>2</sub>: линейная независимость решений, определитель Вронского. Теоремы 1,2.

## 2.12. Свойства решений ЛОДУ<sub>2</sub>: линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Определитель Вронского. Теоремы о вронскиане.

- 2.13. Свойства решений ЛОДУ<sub>2</sub> : линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ<sub>2</sub>. Фундаментальная система решений (определение).
- 2.14. Свойства решений ЛНДУ<sub>2</sub> : теоремы о структуре общего решения и решении ДУ с суммой правых частей.
- 2.15. Структура решения ЛОДУ<sub>n</sub>: линейная независимость решений, нахождение фундаментальной системы решений по корням характеристического уравнения.
- 2.16. Решение ЛНУ<sub>2</sub> с постоянными коэффициентами: специальная правая часть, поиск частного решения методом неопределенных коэффициентов.
- 2.17. Решение ЛНУ<sub>2</sub> : метод вариации произвольных постоянных (Лагранжа).
- 2.18. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение методом исключения.
- 2.19. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение матричным методом в случае различных вещественных собственных чисел.
- 2.20. Теория устойчивости: определение устойчивости по Ляпунову, фазовая плоскость, траектории ДУ. Примеры устойчивого и неустойчивого решения