LA Eχ 02

isagila

Собрано 09.06.2023 в 12:53

Содержание

1. Линейная алгебра **3**

1.1. Евклидово пространство: определение, неравенство Коши-Буняковского. Нормированное евклидово пространство. . . . 3

1.2. Ортонормированный базис, ортогонализация базиса. Матрица Грама. . . . 3

1.3. Ортогональность вектора подпространству. Ортогональное дополнение. Теорема Пифагора. . . . 3

1.4. Задача о перпендикуляре. . . . 3

1.5. Линейный оператор: определение, основные свойства. . . . 3

1.6. Обратный оператор. Взаимно-однозначный оператор. Ядро и образ оператора. Теорема о размерностях. 3

1.7. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы при переходе к новому базису. . . . 3

1.8. Собственные числа и собственные векторы оператора. Теоремы о диагональной матрице оператора. . . 3

1.9. Сопряженный и самосопряженный операторы в вещественном евклидовом пространстве: определения, основные свойства. Свойства собственных чисел и собственных векторов самосопряженного оператора. 3

1.10. Структура образа самосопряженного оператора. Проектор. Спектральное разложение оператора. . . . 4

1.11. Ортогональная матрица и ортогональный оператор. Поворот плоскости и пространства как ортогональное преобразование. . . . 4

1.12. Билинейные формы: определения, свойства. Матрица билинейной формы. . . . 4

1.13. Квадратичная форма: определения, приведение к каноническому виду. . . . 4

1.14. Знакоопределенность квадратичной формы: необходимые и достаточные. условия. Критерий Сильвестра. 4

2. Дифференциальные уравнения **5**

2.1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ДУ): задача о радиоактивном распаде и задача о падении тела. Определение ДУ, решения ДУ и их геометрический смысл. Задача Коши. . . . 5

2.2. Уравнение с разделяющимися переменными. . . . 5

2.3. Однородное уравнение. . . . 5

2.4. Уравнение в полных дифференциалах. . . . 5

2.5. Линейное уравнение первого порядка. Метод Лагранжа. . . . 6

2.6. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения. . . . 6

2.7. Уравнения n-ого порядка, допускающие понижение порядка. . . . 6

2.8. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) : определения, решение ЛОДУ$_2$ с постоянными коэффициентами для случая различных вещественных корней характеристического уравнения. 7

2.9. Решение ЛОДУ$_2$ с постоянными коэффициентами для случая вещественных кратных корней характеристического уравнения. . . . 8

2.10. Решение ЛОДУ$_2$ с постоянными коэффициентами для случая комплексных корней характеристического уравнения. . . . 8

2.11. Свойства решений ЛОДУ$_2$: линейная независимость решений, определитель Вронского. Теоремы 1,2. . 8

2.12. Свойства решений ЛОДУ$_2$: линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Определитель Вронского. Теоремы о вронскиане. . . . 8

2.13. Свойства решений ЛОДУ$_2$: линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ$_2$. Фундаментальная система решений (определение). . . . 9

2.14. Свойства решений ЛНДУ$_2$: теоремы о структуре общего решения и решении ДУ с суммой правых частей. 9

2.15. Структура решения ЛОДУn: линейная независимость решений, нахождение фундаментальной системы решений по корням характеристического уравнения. . . . 9

2.16. Решение ЛНУ$_2$ с постоянными коэффициентами: специальная правая часть, поиск частного решения методом неопределенных коэффициентов. . . . 9

2.17. Решение ЛНУ$_2$: метод вариации произвольных постоянных (Лагранжа). . . . 9

2.18. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение методом исключения. . . . 9

2.19. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение матричным методом в случае различных вещественных собственных чисел. . . . 9

2.20. Теория устойчивости: определение устойчивости по Ляпунову, фазовая плоскость, траектории ДУ. Примеры устойчивого и неустойчивого решения . . . 9

1. Линейная алгебра

1.1. Евклидово пространство: определение, неравенство Коши-Буняковского. Нормированное евклидово пространство.

Def 1.1.1. Скалярным произведением называется функция двух элементов линейного пространства $x, y \in L^n$ обозначаемая $(x, y) \to \mathbb{R}$, для которой выполнены аксиомы: $\forall x, y \in L^n, \lambda \in \mathbb{C}$

1. $(x, y) = (y, x)$
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
3. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
4. $(x, x) \geqslant 0$, $(x, x) = 0 \implies x = 0$

Def 1.1.2. Линейное пространство с введенным скалярным произведением называется евклидовым пространством E^n.

Замечание 1.1.3. Если $L = C_{[a;b]}$, то скалярное произведение обычно определяется как $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$

Теорема 1.1.4. Неравенство Коши-Буняковского

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y)$$

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение:

$$\begin{aligned} (\lambda x - y, \lambda x - y) &\geqslant 0 \\ (\lambda x - y, \lambda x - y) = \lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Полученное выражение можно рассмотреть как квадратное уравнение относительно λ. Т.к. оно неотрицательно $\forall\lambda$, то его дискриминант будет $\leqslant 0$. Таким образом

$$\begin{aligned} 4\lambda^2(x, y)^2 - 4\lambda^2(x, x)(y, y) &\leqslant 0 \\ (x, y)^2 - (x, x)(y, y) &\leqslant 0 \\ (x, y)^2 &\leqslant (x, x)(y, y) \end{aligned}$$

■

Def 1.1.5. Нормой называется функция одного элемента линейного пространства $x \in L^n$, обозначаемая $\|x\|$ и определяемая аксиомами: $\forall x, y \in L^n, \lambda \in \mathbb{C}$:

1. $\|\lambda x\| = \lambda\|x\|$
2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
3. $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0 \implies x = 0$

Def 1.1.6. Евклидово пространство называется *нормированным*, если в нем определена норма.

Замечание 1.1.7. Чаще всего норма определяется как $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

1.2. Ортонормированный базис, ортогонализация базиса. Матрица Грама.

1.3. Ортогональность вектора подпространству. Ортогональное дополнение. Теорема Пифагора.

1.4. Задача о перпендикуляре.

1.5. Линейный оператор: определение, основные свойства.

1.6. Обратный оператор. Взаимно-однозначный оператор. Ядро и образ оператора. Теорема о размерностях.

1.7. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы при переходе к новому базису.

1.8. Собственные числа и собственные векторы оператора. Теоремы о диагональной матрице оператора.

1.9. Сопряженный и самосопряженный операторы в вещественном евклидовом пространстве: определения, основные свойства. Свойства собственных чисел и собственных векторов самосопряженного оператора.

1.10. Структура образа самосопряженного оператора. Проектор. Спектральное разложение оператора.

1.11. Ортогональная матрица и ортогональный оператор. Поворот плоскости и пространства как ортогональное преобразование.

1.12. Билинейные формы: определения, свойства. Матрица билинейной формы.

1.13. Квадратичная форма: определения, приведение к каноническому виду.

1.14. Знакоопределенность квадратичной формы: необходимые и достаточные. условия. Критерий Сильвестра.

2. Дифференциальные уравнения

2.1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ДУ): задача о радиоактивном распаде и задача о падении тела. Определение ДУ, решения ДУ и их геометрический смысл. Задача Коши.

2.2. Уравнение с разделяющимися переменными.

Def 2.2.1. Уравнение вида
$$m(x)N(y)\mathrm{d}x + M(x)n(y)\mathrm{d}y = 0$$
называется уравнением с разделяющимися переменными.

Для решения таких уравнений необходимо разделить обе части на $M(x)N(y)$, перенести одно из слагаемых в правую часть, после чего проинтегрировать обе части.

$$\begin{aligned} m(x)N(y)\mathrm{d}x + M(x)n(y)\mathrm{d}y = 0 \\ \frac{m(x)}{M(x)}\mathrm{d}x + \frac{n(y)}{N(y)}\mathrm{d}y = 0 \\ \int \frac{m(x)}{M(x)}\mathrm{d}x = -\int \frac{n(y)}{N(y)}\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Замечание 2.2.2. В случае, если $M(x) = 0$ или $N(y) = 0$, то уравнение решается непосредственным интегрированием.

Замечание 2.2.3. Решения вида $x = const, y = const$ не всегда получаемы из общего решения.

2.3. Однородное уравнение.

Def 2.3.4. Функция $f(x, y)$ называется *однородной* m-ого измерения ($m \geqslant 0$), если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$.

Def 2.3.5. Дифференциальное уравнение $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$ называется *однородным*, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ однородные функции одного измерения m.

Однородные уравнения решаются заменой $t = \dfrac{y}{x}$. Покажем, откуда появляется подобная замена. Преобразуем функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$:

$$\begin{aligned} P(x, y) = P\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^m P\left(1, \frac{y}{x}\right) \\ Q(x, y) = Q\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^m Q\left(1, \frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Вернемся к исходному уравнению:

$$\begin{aligned} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0 \;|: \mathrm{d}x \\ y' = -\frac{P(1, {}^{y}\!/\!{}_{x})}{Q(1, {}^{y}\!/\!{}_{x})} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \\ \frac{y}{x} = t \implies \begin{cases} f(1, {}^{y}\!/\!{}_{x}) = \tilde{f}(t) \\ y = xt,\ y'_x = t + xt' \end{cases} \\ t + xt' = \tilde{f}(t) \\ x \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \tilde{f}(t) - t \\ \frac{\mathrm{d}t}{\tilde{f}(t) - t} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \end{aligned}$$

Таким образом исходное однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющими переменными.

Замечание 2.3.6. Случай $\tilde{f}(t) - t = 0$ нужно рассмотреть отдельно.

2.4. Уравнение в полных дифференциалах.

Def 2.4.7. Дифференциальное уравнение $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если
$$\exists z(x, y)\colon \mathrm{d}z = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$$

Критерием того, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах может служить равенство

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Решение уравнений в полных дифференциалах сводится к поиску функции $z(x, y)$, удовлетворяющей условиям. Про то, как найти такую функцию можно прочитать в конспекте по матанализу в разделе про интегралы, независящие от пути. После того, как такая функция будет найдена, решить ДУ не составит проблем:

$$\begin{aligned} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y &= 0 \\ \mathrm{d}z &= 0 \\ z &= C \end{aligned}$$

TODO: Интегрирующий множитель

2.5. Линейное уравнение первого порядка. Метод Лагранжа.

Def 2.5.8. Линейным однородным уравнением первого порядка (ЛОДУ$_1$) называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = 0$$

ЛОДУ$_1$ является уравнением с разделяющими переменными, поэтому оно решается следующим образом:

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -p(x)y \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -p(x)\mathrm{d}x \\ \overline{y} &= C \cdot \underbrace{e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}_{y_1} \end{aligned}$$

Замечание 2.5.9. При решении данного уравнения мы поделили на $y \neq 0$. Заметим, что $y = 0$ также является решением ЛОДУ$_1$, однако оно получаемо из общего решения при $C = 0$.

Def 2.5.10. Линейным неоднородным уравнением первого порядка (ЛНДУ$_1$) называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \quad q(x) \neq 0$$

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной) для решения ЛНДУ$_1$:

1. Найдем частное решение y_1 соответствующего однородного уравнения.
2. Будем искать решение ЛНДУ$_1$ в виде $y(x) = y_1(x) \cdot C(x)$. Преобразуем ДУ в соответствии с этой заменой

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= q(x) \\ y_1'(x)C(x) + y_1(x)C'(x) + p(x)y_1(x)C(x) &= q(x) \\ y_1(x)C'(x) + C(x)\underbrace{\Big(y_1'(x) + p(x)y_1(x)\Big)}_{=0} &= q(x) \\ y_1(x)C'(x) &= q(x) \\ C(x) &= \int \frac{q(x)}{y_1(x)}\mathrm{d}x + C \end{aligned}$$

3. Подставим найденную функцию $C(x)$ в $y(x) = y_1(x) \cdot C(x)$.

TODO: Уравнение Бернулли, Клеро, Риккати и пр.

2.6. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения.

2.7. Уравнения n-ого порядка, допускающие понижение порядка.

К уравнениям, допускающим понижение порядка относятся:

1. Непосредственно интегрируемые уравнения вида $y^{(n)}(x) = f(x)$.
   Они решаются интегрированием обоих частей n раз.

2. Уравнения не содержащие $y(x)$ в явном виде.
   Они решаются заменой $z(x) = y'(x)$, $z'(x) = y''(x)$.
   Замечание 2.7.11. В общем случае производится замена самой младшей из присутствующих производных.
3. Уравнения не содержащие x в явном виде.
   Они решаются заменой $z(y) = y'(x)$, тогда $y''(x) = z'_y y'_x = z'(y) \cdot z(y)$

2.8. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) : определения, решение ЛОДУ$_2$ с постоянными коэффициентами для случая различных вещественных корней характеристического уравнения.

Def 2.8.12. Линейным дифференциальным уравнением n-ого порядка (ЛДУ$_n$) называется

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = f(x), \quad a_0(x) \neq 0$$

Def 2.8.13. Разрешенным ЛДУ$_n$ называется

$$y^{(n)}(x) + b_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + b_n(x)y(x) = f(x)$$

Def 2.8.14. Если в ЛДУ$_n$ $\forall i$: $a_i(x) = p_i \in \mathbb{R}$, то такое ЛДУ$_n$ называется ЛДУ$_n$ с постоянными коэффициентами. Оно имеет вид

$$y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n y(x) = f(x)$$

Def 2.8.15. Линейным однородным дифференциальным уравнение n-ого порядка называется ЛДУ$_n$ вида

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = 0,$$

Def 2.8.16. Линейным неоднородным дифференциальным уравнение n-ого порядка называется ЛДУ$_n$ вида

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = f(x), \quad f(x) \neq 0$$

Рассмотрим ЛОДУ$_2$ вида $y'' + py' + qy = 0$. Любой паре $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ можно поставить в соответствие квадратное уравнение $k^2 + pk + q = 0$. По т. Виета $p = -(k_1 + k_2), q = k_1 k_2$, где k_1, k_2 это корни уравнения. Подставим полученные выражения в исходное ДУ:

$$\begin{aligned}
y'' - (k_1 + k_2)y' + k_1 k_2 &= 0 \\
y'' - k_1 y' - k_2 y' + k_1 k_2 &= 0 \\
(y'' - k_2 y') - k_1(y' - k_2) &= 0 \\
\sqsupset u(x) &= y' - k_2 y \\
u' - k_1 u = 0 \implies u(x) = c_1 e^{k_1 x} \implies y' - k_2 y &= c_1 e^{k_1 x}
\end{aligned}$$

Сначала найдем частное решение соответствующего ЛОДУ$_1$: $\overline{y} = c_2 e^{k_2 x}, y_1 = e^{k_2 x}$. Далее будем варьировать постоянную c_2, тогда $y(x) = C_2(x)e^{k_2 x}$. Подставим это в исходное ДУ:

$$\begin{aligned}
C_2'(x)e^{k_2 x} + C_2(x) \cdot k_2 \cdot e^{k_2 x} - k_2 \cdot C_2(x)e^{k_2 x} &= c_1 e^{k_1 x} \\
C_2'(x)e^{k_2 x} &= c_1 e^{k_1 x}
\end{aligned}$$

В итоге получаем уравнение

$$\boxed{C_2'(x) = c_1 e^{(k_1 - k_2)x}} \qquad (\bigstar)$$

Проанализируем это уравнение. Всего будет рассмотрено 3 случая: один в этом параграфе, остальные — в двух последующих.

($\bigstar$) **случай I**: $k_1 \neq k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

В заданных ограничениях имеем

$$\begin{aligned}
C_2'(x) &= c_1 e^{(k_1 - k_2)x} \\
C_2(x) &= \frac{c_1}{k_1 - k_2} e^{(k_1 - k_2)x} + \tilde{c_2} \\
y(x) = C_2(x)y_1(x) &= \underbrace{\frac{c_1}{k_1 - k_2}}_{\tilde{c_1}} e^{k_1 x} + \tilde{c_2} e^{k_2 x} \\
y(x) &= \tilde{c_1} e^{k_1 x} + \tilde{c_2} e^{k_2 x}
\end{aligned}$$

2.9. Решение ЛОДУ$_2$ с постоянными коэффициентами для случая вещественных кратных корней характеристического уравнения.

($\bigstar$) **случай II**: $k_1 = k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Пусть $k_1 = k_2 = k$, тогда получаем:

$$\begin{aligned} C_2'(x) &= c_1 e^{(k_1-k_2)x} \\ C_2(x) &= c_1 x + c_2 \\ y(x) = C_2(x)y_1(x) &= (c_1 x + c_2)e^{kx} \\ y(x) &= c_1 x \cdot e^{kx} + c_2 e^{kx} \end{aligned}$$

2.10. Решение ЛОДУ$_2$ с постоянными коэффициентами для случая комплексных корней характеристического уравнения.

($\bigstar$) **случай III**: $k_{1,2} = \alpha + \beta i, k_{1,2} \in \mathbb{C}$

В заданных ограничениях получаем

$$\begin{aligned} C_2'(x) &= c_1 e^{(k_1-k_2)x} \\ C_2(x) &= \frac{c_1}{k_1 - k_2} e^{(k_1-k_2)x} + \tilde{c_2} \\ y(x) = C_2(x)y_1(x) &= \underbrace{\frac{c_1}{k_1 - k_2}}_{\tilde{c_1}} e^{k_1 x} + \tilde{c_2} e^{k_2 x} \\ y(x) &= \tilde{c_1} e^{k_1 x} + \tilde{c_2} e^{k_2 x} \\ y(x) &= \tilde{c_1} e^{\alpha x} e^{\beta i x} + \tilde{c_2} e^{\alpha x} e^{-\beta i x} \end{aligned}$$

Далее используем формулу $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\alpha x}\Big(\tilde{c_1}\Big(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\Big) + \tilde{c_2}\Big(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\Big)\Big) \\ y(x) &= e^{\alpha x}\Big(\cos(\beta x)\underbrace{\Big(\tilde{c_1} + \tilde{c_2}\Big)}_{\widehat{c_1}} + i\sin(\beta x)\underbrace{\Big(\tilde{c_1} - \tilde{c_2}\Big)}_{\widehat{c_2}}\Big) \\ y(x) &= e^{\alpha x}\Big(\widehat{c_1}\cos(\beta x) + \widehat{c_2} i\sin(\beta x)\Big) \end{aligned}$$

TODO: Конспект не очень хороший в этом моменте, возможно что-то неправильно

Lm 2.10.17. Если $y(x) = u(x) + iv(x)$ это решение ЛОДУ$_2$, то $y(x) = u(x) + v(x)$ также являются решением ЛОДУ$_2$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $y(x) = u(x) + v(x)$:

$$\begin{cases} y(x) = u(x) + v(x) \\ y'(x) = u'(x) + v'(x) \\ y''(x) = u''(x) + v''(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y''(x) + py'(x) + qy(x) = u''(x) + v''(x) + pu'(x) + pv'(x) + u(x) + qu(x) + qv(x) &= 0 \\ \Big(u''(x) + pu'(x) + qu(x)\Big) + \Big(v''(x) + pv'(x) + qv(x)\Big) &= 0 \end{aligned}$$

Это равенство верно, т.к. $u(x)$ и $v(x)$ решения ЛОДУ$_2$. ∎

Значит, по 2.10.17 общее решение ($\bigstar$) в третьем случае будет иметь вид

$$y(x) = e^{\alpha x}\Big(\widehat{c_1}\cos(\beta x) + \widehat{c_2}\sin(\beta x)\Big)$$

2.11. Свойства решений ЛОДУ$_2$: линейная независимость решений, определитель Вронского. Теоремы 1,2.

2.12. Свойства решений ЛОДУ$_2$: линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Определитель Вронского. Теоремы о вронскиане.

2.13. **Свойства решений ЛОДУ$_2$: линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ$_2$. Фундаментальная система решений (определение).**

2.14. **Свойства решений ЛНДУ$_2$: теоремы о структуре общего решения и решении ДУ с суммой правых частей.**

2.15. **Структура решения ЛОДУn: линейная независимость решений, нахождение фундаментальной системы решений по корням характеристического уравнения.**

2.16. **Решение ЛНУ$_2$ с постоянными коэффициентами: специальная правая часть, поиск частного решения методом неопределенных коэффициентов.**

2.17. **Решение ЛНУ$_2$: метод вариации произвольных постоянных (Лагранжа).**

2.18. **Системы дифференциальных уравнений: определения, решение методом исключения.**

2.19. **Системы дифференциальных уравнений: определения, решение матричным методом в случае различных вещественных собственных чисел.**

2.20. **Теория устойчивости: определение устойчивости по Ляпунову, фазовая плоскость, траектории ДУ. Примеры устойчивого и неустойчивого решения**