LA Eχ 02

isagila

Собрано 09.06.2023 в 08:47

Содержание

1. Линейная алгебра

1.1. Евклидово пространство: определение, неравенство Коши-Буняковского. Нормированное евклидово пространство.

1.2. Ортонормированный базис, ортогонализация базиса. Матрица Грама.

1.3. Ортогональность вектора подпространству. Ортогональное дополнение. Теорема Пифагора.

1.4. Задача о перпендикуляре.

1.5. Линейный оператор: определение, основные свойства.

1.6. Обратный оператор. Взаимно-однозначный оператор. Ядро и образ оператора. Теорема о размерностях.

1.7. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы при переходе к новому базису.

1.8. Собственные числа и собственные векторы оператора. Теоремы о диагональной матрице оператора.

1.9. Сопряженный и самосопряженный операторы в вещественном евклидовом пространстве: определения, основные свойства. Свойства собственных чисел и собственных векторов самосопряженного оператора.

1.10. Структура образа самосопряженного оператора. Проектор. Спектральное разложение оператора.

1.11. Ортогональная матрица и ортогональный оператор. Поворот плоскости и пространства как ортогональное преобразование.

1.12. Билинейные формы: определения, свойства. Матрица билинейной формы.

1.13. Квадратичная форма: определения, приведение к каноническому виду.

1.14. Знакоопределенность квадратичной формы: необходимые и достаточные. условия. Критерий Сильвестра.

2. Дифференциальные уравнения

2.1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ДУ): задача о радиоактивном распаде и задача о падении тела. Определение ДУ, решения ДУ и их геометрический смысл. Задача Коши.

2.2. Уравнение с разделяющимися переменными.

Def 2.2.1. Уравнение вида
$$m(x)N(y)\mathrm{d}x + M(x)n(y)\mathrm{d}y = 0$$
называется уравнением с разделяющимися переменными.

Для решения таких уравнений необходимо разделить обе части на $M(x)N(y)$, перенести одно из слагаемых в правую часть, после чего проинтегрировать обе части.

$$\begin{aligned} m(x)N(y)\mathrm{d}x + M(x)n(y)\mathrm{d}y = 0 \\ \frac{m(x)}{M(x)}\mathrm{d}x + \frac{n(y)}{N(y)}\mathrm{d}y = 0 \\ \int \frac{m(x)}{M(x)}\mathrm{d}x = -\int \frac{n(y)}{N(y)}\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Замечание 2.2.2. В случае, если $M(x) = 0$ или $N(y) = 0$, то уравнение решается непосредственным интегрированием.

Замечание 2.2.3. Решения вида $x = const, y = const$ не всегда получаемы из общего решения.

2.3. Однородное уравнение.

Def 2.3.4. Функция $f(x, y)$ называется *однородной* m-ого измерения ($m \geqslant 0$), если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$.

Def 2.3.5. Дифференциальное уравнение $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$ называется *однородным*, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ однородные функции одного измерения m.

Однородные уравнения решаются заменой $t = \dfrac{y}{x}$. Покажем, откуда появляется подобная замена. Преобразуем функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$:

$$\begin{aligned} P(x, y) = P\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^m P\left(1, \frac{y}{x}\right) \\ Q(x, y) = Q\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^m Q\left(1, \frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Вернемся к исходному уравнению:

$$\begin{aligned} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0 \,|: \mathrm{d}x \\ y' = -\frac{P(1, {}^{y}\!/_{x})}{Q(1, {}^{y}\!/_{x})} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \\ \frac{y}{x} = t \implies \begin{cases} f(1, {}^{y}\!/_{x}) = \tilde{f}(t) \\ y = xt, \; y'_x = t + xt' \end{cases} \\ t + xt' = \tilde{f}(t) \\ x \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \tilde{f}(t) - t \\ \frac{\mathrm{d}t}{\tilde{f}(t) - t} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \end{aligned}$$

Таким образом исходное однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющими переменными.

Замечание 2.3.6. Случай $\tilde{f}(t) - t = 0$ нужно рассмотреть отдельно.

2.4. Уравнение в полных дифференциалах.

Def 2.4.7. Дифференциальное уравнение $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если
$$\exists z(x, y) \colon \mathrm{d}z = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$$

Критерием того, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах может служить равенство

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Решение уравнений в полных дифференциалах сводится к поиску функции $z(x, y)$, удовлетворяющей условиям. Про то, как найти такую функцию можно прочитать в конспекте по матанализу в разделе про интегралы, независящие от пути. После того, как такая функция будет найдена, решить ДУ не составит проблем:

$$\begin{aligned} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y &= 0 \\ \mathrm{d}z &= 0 \\ z &= C \end{aligned}$$

TODO: Интегрирующий множитель

2.5. Линейное уравнение первого порядка. Метод Лагранжа.

Def 2.5.8. Линейным однородным уравнением первого порядка (ЛОДУ$_1$) называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = 0$$

ЛОДУ$_1$ является уравнением с разделяющими переменными, поэтому оно решается следующим образом:

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -p(x)y \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -p(x)\mathrm{d}x \\ \overline{y} = C \cdot &\underbrace{e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}_{y_1} \end{aligned}$$

Замечание 2.5.9. При решении данного уравнения мы поделили на $y \neq 0$. Заметим, что $y = 0$ также является решением ЛОДУ$_1$, однако оно получаемо из общего решения при $C = 0$.

Def 2.5.10. Линейным неоднородным уравнением первого порядка (ЛНДУ$_1$) называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \quad q(x) \neq 0$$

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной) для решения ЛНДУ$_1$:

1. Найдем частное решение y_1 соответствующего однородного уравнения.
2. Будем искать решение ЛНДУ$_1$ в виде $y(x) = y_1(x) \cdot C(x)$. Преобразуем ДУ в соответствии с этой заменой

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= q(x) \\ y_1'(x)C(x) + y_1(x)C'(x) + p(x)y_1(x)C(x) &= q(x) \\ y_1(x)C'(x) + C(x)\underbrace{\left(y_1'(x) + p(x)y_1(x)\right)}_{=0} &= q(x) \\ y_1(x)C'(x) &= q(x) \\ C(x) = \int \frac{q(x)}{y_1(x)}\mathrm{d}x &+ C \end{aligned}$$

3. Подставим найденную функцию $C(x)$ в $y(x) = y_1(x) \cdot C(x)$.

TODO: Уравнение Бернулли, Клеро, Риккати и пр.

2.6. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения.

2.7. Уравнения n-ого порядка, допускающие понижение порядка.

2.8. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) : определения, решение ЛОДУ$_2$ с постоянными коэффициентами для случая различных вещественных корней характеристического уравнения.

2.9. Решение ЛОДУ$_2$ с постоянными коэффициентами для случая вещественных кратных корней характеристического уравнения.

2.10. Решение ЛОДУ$_2$ с постоянными коэффициентами для случая комплексных корней характеристического уравнения.

2.11. Свойства решений ЛОДУ$_2$: линейная независимость решений, определитель Вронского. Теоремы 1,2.

2.12. Свойства решений ЛОДУ$_2$: линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Определитель Вронского. Теоремы о вронскиане.

2.13. Свойства решений ЛОДУ$_2$: линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ$_2$. Фундаментальная система решений (определение).

2.14. Свойства решений ЛНДУ$_2$: теоремы о структуре общего решения и решении ДУ с суммой правых частей.

2.15. Структура решения ЛОДУn: линейная независимость решений, нахождение фундаментальной системы решений по корням характеристического уравнения.

2.16. Решение ЛНУ$_2$ с постоянными коэффициентами: специальная правая часть, поиск частного решения методом неопределенных коэффициентов.

2.17. Решение ЛНУ$_2$: метод вариации произвольных постоянных (Лагранжа).

2.18. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение методом исключения.

2.19. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение матричным методом в случае различных вещественных собственных чисел.

2.20. Теория устойчивости: определение устойчивости по Ляпунову, фазовая плоскость, траектории ДУ. Примеры устойчивого и неустойчивого решения