

# MA E<sub>χ</sub> 02

isagila

Собрано 13.06.2023 в 09:41



# Содержание

<b>1. Интегрирование функции одной переменной</b>	<b>3</b>
1.1. Признаки сходимости несобственных интегралов: первый признак сравнения (в неравенствах).	3
1.2. Признаки сходимости несобственных интегралов: второй признак сравнения (предельный).	3
1.3. Признаки сходимости несобственных интегралов: теорема об абсолютной сходимости. Понятие условной сходимости.	3
1.4. Сходимость интегралов 1-го и 2-го рода от степенных функций.	3
<b>2. Интегрирование функции нескольких переменных</b>	<b>4</b>
2.1. Двойной интеграл. Определение и свойства.	4
2.2. Вычисление двойного интеграла. Кратный интеграл.	4
2.3. Определение и вычисление тройного интеграла.	4
2.4. Криволинейные координаты.	4
2.5. Замена переменных в двойном и тройном интегралах. Якобиан.	4
2.6. Криволинейный интеграл 1-го рода: определение, свойства, вычисление, геометрический и физический смысл.	4
2.7. Криволинейный интеграл 2-го рода как работа силы вдоль пути. Определение, вычисление и свойства.	4
2.8. Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода: формула связи.	4
2.9. Теорема (формула) Грина.	4
2.10. Интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Теорема о независимости интеграла от пути, равносильность I, II, III утверждений.	4
2.11. Интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Теорема о независимости интеграла от пути, равносильность III, IV утверждений.	4
2.12. Следствие теоремы о независимости от пути (формула Ньютона-Лейбница).	4
2.13. Поверхностный интеграл 1-го рода: определение, свойства, вычисление, геометрический и физический смысл.	4
2.14. Поверхностный интеграл 2-го рода как поток жидкости через поверхность.	4
2.15. Связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода.	4
2.16. Поверхностный интеграл 2-го рода: математическое определение, вычисление, свойства.	4
2.17. Теорема Гаусса-Остроградского.	4
2.18. Теорема Стокса.	4
2.19. Скалярное и векторное поля: определения, геометрические характеристики. Дифференциальные и интегральные характеристики полей (определения).	4
2.20. Виды векторных полей и их свойства (теоремы о поле градиента и поле вихря).	4
2.21. Механический смысл потока и дивергенции.	4
2.22. Механический смысл вихря и циркуляции.	4
2.23. Векторная запись теорем теории поля и их механический смысл.	4

# 1. Интегрирование функции одной переменной

## 1.1. Признаки сходимости несобственных интегралов: первый признак сравнения (в неравенствах).

**Теорема 1.1.1.** Пусть  $f(x), g(x): [a, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  и на этом отрезке выполняется неравенство  $f(x) \geq g(x) \geq 0$ . Тогда:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \succ \implies \int_a^{+\infty} g(x)dx \succ \quad (a)$$

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \prec \implies \int_a^{+\infty} f(x)dx \prec \quad (b)$$

*Доказательство.* (a) Сначала докажем первое утверждение. Т.к.  $f(x) \geq 0$ , то  $I = \int_a^b f(x)dx \geq 0 \in \mathbb{R}$ , при этом т.к. этот интеграл сходится, то  $I \in \mathbb{R}$ . Далее рассмотрим второй интеграл, по определению имеем:

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_a^{\beta} g(x)dx}_{h(\beta)}$$

Заметим, т.к.  $g(x) \geq 0$ , то функция  $h(\beta)$  монотонно возрастает при  $\beta \rightarrow +\infty$ . При этом значение этой функции ограничено сверху числом  $I \in \mathbb{R}$ . Значит по свойствам пределов данный предел конечен, из чего следует, что интеграл  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  сходится.

(b) Доказательство второго утверждения вытекает из первого. От противного: пусть  $\int_a^{+\infty} f(x)$  сходится. Тогда по пункту a интеграл  $\int_a^{+\infty} g(x)$  тоже должен сходиться. Противоречие. ■

## 1.2. Признаки сходимости несобственных интегралов: второй признак сравнения (предельный).

**Теорема 1.2.1.** Пусть  $f(x), g(x): [a; +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f(x) > 0, g(x) > 0$ . Тогда если предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

существует, конечен и не равен нулю, то функции оба интеграла  $\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_a^{+\infty} g(x)dx$  ведут себя одинаково в плане сходимости (т.е. либо оба сходятся, либо оба расходятся).

*Доказательство.* По определению предела получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = r &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \forall x \in [a; +\infty], x > \delta: \left| \frac{f(x)}{g(x)} - r \right| < \varepsilon \\ r - \varepsilon &< \frac{f(x)}{g(x)} < r + \varepsilon \mid \cdot g(x) > 0 \\ (r - \varepsilon)g(x) &< f(x) < (r + \varepsilon)g(x) \end{aligned}$$

Далее используем признак сравнения в неравенствах (1.1.1). Рассмотрим два случая:

$$\sqsupset \int_a^{+\infty} f(x)dx \succ \implies \int_a^{+\infty} (r - \varepsilon)g(x)dx \succ$$

Т.к.  $r \in \mathbb{R}$ , а  $\varepsilon > 0$  произвольное положительное число, то интеграл  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  также будет сходиться. Второй случай рассматривается аналогично:

$$\sqsubset \int_a^{+\infty} f(x)dx \prec \implies \int_a^{+\infty} (r + \varepsilon)g(x)dx \prec \implies \int_a^{+\infty} g(x)dx \prec$$

■

## 1.3. Признаки сходимости несобственных интегралов: теорема об абсолютной сходимости. Понятие условной сходимости.

## 1.4. Сходимость интегралов 1-го и 2-го рода от степенных функций.

## 2. Интегрирование функции нескольких переменных

- 2.1. Двойной интеграл. Определение и свойства.
- 2.2. Вычисление двойного интеграла. Кратный интеграл.
- 2.3. Определение и вычисление тройного интеграла.
- 2.4. Криволинейные координаты.
- 2.5. Замена переменных в двойном и тройном интегралах. Якобиан.
- 2.6. Криволинейный интеграл 1-го рода: определение, свойства, вычисление, геометрический и физический смысл.
- 2.7. Криволинейный интеграл 2-го рода как работа силы вдоль пути. Определение, вычисление и свойства.
- 2.8. Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода: формула связи.
- 2.9. Теорема (формула) Грина.
- 2.10. Интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Теорема о независимости интеграла от пути, равносильность I, II, III утверждений.
- 2.11. Интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Теорема о независимости интеграла от пути, равносильность III, IV утверждений.
- 2.12. Следствие теоремы о независимости от пути (формула Ньютона-Лейбница).
- 2.13. Поверхностный интеграл 1-го рода: определение, свойства, вычисление, геометрический и физический смысл.
- 2.14. Поверхностный интеграл 2-го рода как поток жидкости через поверхность.
- 2.15. Связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода.
- 2.16. Поверхностный интеграл 2-го рода: математическое определение, вычисление, свойства.
- 2.17. Теорема Гаусса-Остроградского.
- 2.18. Теорема Стокса.
- 2.19. Скалярное и векторное поля: определения, геометрические характеристики. Дифференциальные и интегральные характеристики полей (определения).
- 2.20. Виды векторных полей и их свойства (теоремы о поле градиента и поле вихря).
- 2.21. Механический смысл потока и дивергенции.
- 2.22. Механический смысл вихря и циркуляции.
- 2.23. Векторная запись теорем теории поля и их механический смысл.