

# LA E<sub>χ</sub> 02

isagila

Собрано 09.06.2023 в 11:26



# Содержание

<b>1. Линейная алгебра</b>	<b>3</b>
1.1. Евклидово пространство: определение, неравенство Коши-Буняковского. Нормированное евклидово пространство. . . . .	3
1.2. Ортонормированный базис, ортогонализация базиса. Матрица Грама. . . . .	3
1.3. Ортогональность вектора подпространству. Ортогональное дополнение. Теорема Пифагора. . . . .	3
1.4. Задача о перпендикуляре. . . . .	3
1.5. Линейный оператор: определение, основные свойства. . . . .	3
1.6. Обратный оператор. Взаимно-однозначный оператор. Ядро и образ оператора. Теорема о размерностях. . . . .	3
1.7. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы при переходе к новому базису. . . . .	3
1.8. Собственные числа и собственные векторы оператора. Теоремы о диагональной матрице оператора. . . . .	3
1.9. Сопряженный и самосопряженный операторы в вещественном евклидовом пространстве: определения, основные свойства. Свойства собственных чисел и собственных векторов самосопряженного оператора. . . . .	3
1.10. Структура образа самосопряженного оператора. Проектор. Спектральное разложение оператора. . . . .	3
1.11. Ортогональная матрица и ортогональный оператор. Поворот плоскости и пространства как ортогональное преобразование. . . . .	3
1.12. Билинейные формы: определения, свойства. Матрица билинейной формы. . . . .	3
1.13. Квадратичная форма: определения, приведение к каноническому виду. . . . .	3
1.14. Знакоопределенность квадратичной формы: необходимые и достаточные. условия. Критерий Сильвестра. . . . .	3
<b>2. Дифференциальные уравнения</b>	<b>4</b>
2.1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ДУ): задача о радиоактивном распаде и задача о падении тела. Определение ДУ, решения ДУ и их геометрический смысл. Задача Коши. . . . .	4
2.2. Уравнение с разделяющимися переменными. . . . .	4
2.3. Однородное уравнение. . . . .	4
2.4. Уравнение в полных дифференциалах. . . . .	4
2.5. Линейное уравнение первого порядка. Метод Лагранжа. . . . .	5
2.6. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения. . . . .	5
2.7. Уравнения $n$ -ого порядка, допускающие понижение порядка. . . . .	5
2.8. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) : определения, решение ЛОДУ <sub>2</sub> с постоянными коэффициентами для случая различных вещественных корней характеристического уравнения. . . . .	6
2.9. Решение ЛОДУ <sub>2</sub> с постоянными коэффициентами для случая вещественных кратных корней характеристического уравнения. . . . .	7
2.10. Решение ЛОДУ <sub>2</sub> с постоянными коэффициентами для случая комплексных корней характеристического уравнения. . . . .	7
2.11. Свойства решений ЛОДУ <sub>2</sub> : линейная независимость решений, определитель Вронского. Теоремы 1,2. . . . .	7
2.12. Свойства решений ЛОДУ <sub>2</sub> : линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Определитель Вронского. Теоремы о вронскиане. . . . .	7
2.13. Свойства решений ЛОДУ <sub>2</sub> : линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ <sub>2</sub> . Фундаментальная система решений (определение). . . . .	7
2.14. Свойства решений ЛНДУ <sub>2</sub> : теоремы о структуре общего решения и решении ДУ с суммой правых частей. . . . .	7
2.15. Структура решения ЛОДУ <sub>n</sub> : линейная независимость решений, нахождение фундаментальной системы решений по корням характеристического уравнения. . . . .	7
2.16. Решение ЛНУ <sub>2</sub> с постоянными коэффициентами: специальная правая часть, поиск частного решения методом неопределенных коэффициентов. . . . .	7
2.17. Решение ЛНУ <sub>2</sub> : метод вариации произвольных постоянных (Лагранжа). . . . .	7
2.18. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение методом исключения. . . . .	7
2.19. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение матричным методом в случае различных вещественных собственных чисел. . . . .	7
2.20. Теория устойчивости: определение устойчивости по Ляпунову, фазовая плоскость, траектории ДУ. Примеры устойчивого и неустойчивого решения . . . . .	7

# 1. Линейная алгебра

- 1.1. Евклидово пространство: определение, неравенство Коши-Буняковского. Нормированное евклидово пространство.
- 1.2. Ортонормированный базис, ортогонализация базиса. Матрица Грама.
- 1.3. Ортогональность вектора подпространству. Ортогональное дополнение. Теорема Пифагора.
- 1.4. Задача о перпендикуляре.
- 1.5. Линейный оператор: определение, основные свойства.
- 1.6. Обратный оператор. Взаимно-однозначный оператор. Ядро и образ оператора. Теорема о размерностях.
- 1.7. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы при переходе к новому базису.
- 1.8. Собственные числа и собственные векторы оператора. Теоремы о диагональной матрице оператора.
- 1.9. Сопряженный и самосопряженный операторы в вещественном евклидовом пространстве: определения, основные свойства. Свойства собственных чисел и собственных векторов самосопряженного оператора.
- 1.10. Структура образа самосопряженного оператора. Проектор. Спектральное разложение оператора.
- 1.11. Ортогональная матрица и ортогональный оператор. Поворот плоскости и пространства как ортогональное преобразование.
- 1.12. Билинейные формы: определения, свойства. Матрица билинейной формы.
- 1.13. Квадратичная форма: определения, приведение к каноническому виду.
- 1.14. Знакоопределенность квадратичной формы: необходимые и достаточные условия. Критерий Сильвестра.

## 2. Дифференциальные уравнения

**2.1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ДУ):** задача о радиоактивном распаде и задача о падении тела. Определение ДУ, решения ДУ и их геометрический смысл. Задача Коши.

**2.2. Уравнение с разделяющимися переменными.**

**Def 2.2.1.** Уравнение вида

$$m(x)N(y)dx + M(x)n(y)dy = 0$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

Для решения таких уравнений необходимо разделить обе части на  $M(x)N(y)$ , перенести одно из слагаемых в правую часть, после чего проинтегрировать обе части.

$$m(x)N(y)dx + M(x)n(y)dy = 0$$

$$\frac{m(x)}{M(x)}dx + \frac{n(y)}{N(y)}dy = 0$$

$$\int \frac{m(x)}{M(x)}dx = - \int \frac{n(y)}{N(y)}dy$$

*Замечание 2.2.2.* В случае, если  $M(x) = 0$  или  $N(y) = 0$ , то уравнение решается непосредственным интегрированием.

*Замечание 2.2.3.* Решения вида  $x = const, y = const$  не всегда получаемы из общего решения.

**2.3. Однородное уравнение.**

**Def 2.3.4.** Функция  $f(x, y)$  называется *однородной  $m$ -ого измерения* ( $m \geq 0$ ), если  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$ .

**Def 2.3.5.** Дифференциальное уравнение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  называется *однородным*, если  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  однородные функции одного измерения  $m$ .

Однородные уравнения решаются заменой  $t = \frac{y}{x}$ . Покажем, откуда появляется подобная замена. Преобразуем функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ :

$$P(x, y) = P\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^m P\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

$$Q(x, y) = Q\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^m Q\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Вернемся к исходному уравнению:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \mid : dx$$

$$y' = -\frac{P(1, y/x)}{Q(1, y/x)} = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} = t &\implies \begin{cases} f(1, y/x) = \tilde{f}(t) \\ y = xt, \quad y'_x = t + xt' \end{cases} \\ t + xt' &= \tilde{f}(t) \\ x \cdot \frac{dt}{dx} &= \tilde{f}(t) - t \\ \frac{dt}{\tilde{f}(t) - t} &= \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Таким образом исходное однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

*Замечание 2.3.6.* Случай  $\tilde{f}(t) - t = 0$  нужно рассмотреть отдельно.

**2.4. Уравнение в полных дифференциалах.**

**Def 2.4.7.** Дифференциальное уравнение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  называется уравнением в полных дифференциалах, если

$$\exists z(x, y): dz = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Критерием того, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах может служить равенство

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Решение уравнений в полных дифференциалах сводится к поиску функции  $z(x, y)$ , удовлетворяющей условиям. Про то, как найти такую функцию можно прочесть в конспекте по математическому анализу в разделе про интегралы, независимые от пути. После того, как такая функция будет найдена, решить ДУ не составит проблем:

$$\begin{aligned} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= 0 \\ dz &= 0 \\ z &= C \end{aligned}$$

**TODO:** Интегрирующий множитель

## 2.5. Линейное уравнение первого порядка. Метод Лагранжа.

**Def 2.5.8.** Линейным однородным уравнением первого порядка (ЛОДУ<sub>1</sub>) называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = 0$$

ЛОДУ<sub>1</sub> является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому оно решается следующим образом:

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -p(x)y \\ \frac{dy}{y} &= -p(x)dx \\ \bar{y} &= C \cdot \underbrace{e^{-\int p(x)dx}}_{y_1} \end{aligned}$$

*Замечание 2.5.9.* При решении данного уравнения мы поделили на  $y \neq 0$ . Заметим, что  $y = 0$  также является решением ЛОДУ<sub>1</sub>, однако оно получено из общего решения при  $C = 0$ .

**Def 2.5.10.** Линейным неоднородным уравнением первого порядка (ЛНДУ<sub>1</sub>) называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \quad q(x) \neq 0$$

**Метод Лагранжа** (метод вариации произвольной постоянной) для решения ЛНДУ<sub>1</sub>:

1. Найдем частное решение  $y_1$  соответствующего однородного уравнения.
2. Будем искать решение ЛНДУ<sub>1</sub> в виде  $y(x) = y_1(x) \cdot C(x)$ . Преобразуем ДУ в соответствии с этой заменой

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= q(x) \\ y_1'(x)C(x) + y_1(x)C'(x) + p(x)y_1(x)C(x) &= q(x) \\ y_1(x)C'(x) + C(x) \underbrace{\left( y_1'(x) + p(x)y_1(x) \right)}_{=0} &= q(x) \\ y_1(x)C'(x) &= q(x) \\ C(x) &= \int \frac{q(x)}{y_1(x)} dx + C \end{aligned}$$

3. Подставим найденную функцию  $C(x)$  в  $y(x) = y_1(x) \cdot C(x)$ .

**TODO:** Уравнение Бернулли, Клеро, Риккати и пр.

## 2.6. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения.

## 2.7. Уравнения $n$ -ого порядка, допускающие понижение порядка.

К уравнениям, допускающим понижение порядка относятся:

1. Непосредственно интегрируемые уравнения вида  $y^{(n)}(x) = f(x)$ .  
Они решаются интегрированием обеих частей  $n$  раз.

2. Уравнения не содержащие  $y(x)$  в явном виде.

Они решаются заменой  $z(x) = y'(x)$ ,  $z'(x) = y''(x)$ .

*Замечание 2.7.11.* В общем случае производится замена самой младшей из присутствующих производных.

3. Уравнения не содержащие  $x$  в явном виде.

Они решаются заменой  $z(y) = y'(x)$ , тогда  $y''(x) = z'_y y'_x = z'(y) \cdot z(y)$

## 2.8. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) : определения, решение ЛОДУ<sub>2</sub> с постоянными коэффициентами для случая различных вещественных корней характеристического уравнения.

**Def 2.8.12.** Линейным дифференциальным уравнением  $n$ -ого порядка (ЛДУ <sub>$n$</sub> ) называется

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = f(x), \quad a_0(x) \neq 0$$

**Def 2.8.13.** Разрешенным ЛДУ <sub>$n$</sub>  называется

$$y^{(n)}(x) + b_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + b_n(x)y(x) = f(x)$$

**Def 2.8.14.** Если в ЛДУ <sub>$n$</sub>   $\forall i: a_i(x) = p_i \in \mathbb{R}$ , то такое ЛДУ <sub>$n$</sub>  называется ЛДУ <sub>$n$</sub>  с постоянными коэффициентами. Оно имеет вид

$$y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + p_n y(x) = f(x)$$

**Def 2.8.15.** Линейным однородным дифференциальным уравнение  $n$ -ого порядка называется ЛДУ <sub>$n$</sub>  вида

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = 0,$$

**Def 2.8.16.** Линейным неоднородным дифференциальным уравнение  $n$ -ого порядка называется ЛДУ <sub>$n$</sub>  вида

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = f(x), \quad f(x) \neq 0$$

Рассмотрим ЛОДУ<sub>2</sub> вида  $y'' + py' + qy = 0$ . Любой паре  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$  можно поставить в соответствие квадратное уравнение  $k^2 + pk + q = 0$ . По т. Виета  $p = -(k_1 + k_2)$ ,  $q = k_1 k_2$ , где  $k_1, k_2$  это корни уравнения. Подставим полученные выражения в исходное ДУ:

$$\begin{aligned} y'' - (k_1 + k_2)y' + k_1 k_2 &= 0 \\ y'' - k_1 y' - k_2 y' + k_1 k_2 &= 0 \\ (y'' - k_2 y') - k_1 (y' - k_2) &= 0 \\ \square u(x) = y' - k_2 y \\ u' - k_1 u = 0 &\implies u(x) = c_1 e^{k_1 x} \implies y' - k_2 y = c_1 e^{k_1 x} \end{aligned}$$

Сначала найдем частное решение соответствующего ЛОДУ<sub>1</sub>:  $\bar{y} = c_2 e^{k_2 x}$ ,  $y_1 = e^{k_2 x}$ . Далее будем варьировать постоянную  $c_2$ , тогда  $y(x) = C_2(x)e^{k_2 x}$ . Подставим это в исходное ДУ:

$$\begin{aligned} C'_2(x)e^{k_2 x} + C_2(x) \cdot k_2 \cdot e^{k_2 x} - k_2 \cdot C_2(x)e^{k_2 x} &= c_1 e^{k_1 x} \\ C'_2(x)e^{k_2 x} &= c_1 e^{k_1 x} \end{aligned}$$

В итоге получаем уравнение

$$\boxed{C'_2(x) = c_1 e^{(k_1 - k_2)x}} \quad (\star)$$

Проанализируем это уравнение. Всего будет рассмотрено 3 случая: один в этом параграфе, остальные — в двух последующих.

(★) **случай I:**  $k_1 \neq k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

В заданных ограничениях имеем

$$\begin{aligned} C_2(x) &= \frac{c_1}{k_1 - k_2} e^{(k_1 - k_2)x} + \tilde{c}_2 \\ y(x) = C_2(x)y_1(x) &= \underbrace{\frac{c_1}{k_1 - k_2}}_{\tilde{c}_1} e^{k_1 x} + \tilde{c}_2 e^{k_2 x} \\ y(x) &= \tilde{c}_1 e^{k_1 x} + \tilde{c}_2 e^{k_2 x} \end{aligned}$$

- 2.9. Решение ЛОДУ<sub>2</sub> с постоянными коэффициентами для случая вещественных кратных корней характеристического уравнения.
- 2.10. Решение ЛОДУ<sub>2</sub> с постоянными коэффициентами для случая комплексных корней характеристического уравнения.
- 2.11. Свойства решений ЛОДУ<sub>2</sub>: линейная независимость решений, определитель Вронского. Теоремы 1,2.
- 2.12. Свойства решений ЛОДУ<sub>2</sub>: линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Определитель Вронского. Теоремы о вронскиане.
- 2.13. Свойства решений ЛОДУ<sub>2</sub> : линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ<sub>2</sub>. Фундаментальная система решений (определение).
- 2.14. Свойства решений ЛНДУ<sub>2</sub> : теоремы о структуре общего решения и решении ДУ с суммой правых частей.
- 2.15. Структура решения ЛОДУ<sub>n</sub>: линейная независимость решений, нахождение фундаментальной системы решений по корням характеристического уравнения.
- 2.16. Решение ЛНУ<sub>2</sub> с постоянными коэффициентами: специальная правая часть, поиск частного решения методом неопределенных коэффициентов.
- 2.17. Решение ЛНУ<sub>2</sub> : метод вариации произвольных постоянных (Лагранжа).
- 2.18. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение методом исключения.
- 2.19. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение матричным методом в случае различных вещественных собственных чисел.
- 2.20. Теория устойчивости: определение устойчивости по Ляпунову, фазовая плоскость, траектории ДУ. Примеры устойчивого и неустойчивого решения