DM Eχ 02

isagila @pochtineploho @DUBSTEPHAVEGUN

Собрано 21.06.2023 в 18:13

https://github.com/isagila/tesc

Содержание

1. Теория графов

1.1. Основные определения.

Def 1.1.1. Граф это упорядоченная пара вида $G = \langle V, E \rangle$, где $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ это множество вершин, а $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ это множество ребер.

Def 1.1.2. Порядком графа называется число его вершин $|V|$.

Def 1.1.3. Размером графа называется количество его ребер $|E|$.

У неориентированного графа $E \subseteq V^{(2)}$, где $V^{(2)}$ это множество всех непустых подмножеств размера не более двух. Таким образом каждое ребро обозначается как $\{u, v\} \in V^{(2)}$ (если $u \neq v$) или $\{v\} \in V^{(2)}$ (если данное ребро это петля).

У ориентированного графа $E \subseteq V^2$, т.е. каждое ребро это упорядоченная пара вида $\langle u, v \rangle$. Ребра ориентированного графа также называют дугами.

Def 1.1.4. Петля это ребро, которое соединяет вершину саму с собой.

Def 1.1.5. Мультиребра это ребра, у которых общее начало и общий конец.

Def 1.1.6. Граф называется простым, если в нем нет мультиребер и петель.

Def 1.1.7. Мультиграф это граф с мультиребрами.

Def 1.1.8. Псевдограф это мультиграф с петлями.

Def 1.1.9. Гиперграф это граф, в котором ребро может соединять несколько вершин одновременно.

Def 1.1.10. Нулевой граф это граф, который не содержит вершин.

Def 1.1.11. Пустой граф это граф, которые не содержит ребер.

Def 1.1.12. Граф-синглтон (тривиальный граф) это граф состоящий только из одной вершины.

Def 1.1.13. Полный граф K_n это простой граф, в котором каждая пара различных вершин соединена ребром.

Def 1.1.14. Взвешенный граф $G = \langle V, E, w \rangle$ это граф, в котором каждому ребру сопоставляется некоторое числовое значение (вес), которое определяется весовой функцией $w \colon E \to \mathrm{Num}$.

Def 1.1.15. Граф называется планарным, если его можно изобразить на плоскости без пересечения ребер.

Def 1.1.16. Граф называется плоским, если он *уже* изображен на плоскости без пересечения ребер.

Def 1.1.17. Подграфом графа $G = \langle V, E \rangle$ называется граф $G' = \langle V', E' \rangle$ такой, что $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$.

Def 1.1.18. Подграф называется остовным, если он содержит все вершины исходного графа.

Def 1.1.19. Индуцированный подграф это подграф, который получается из некоторого подмножества вершин исходного графа $V' \subseteq V$ и **всех** ребер исходного графа, соединяющих эти вершины.

Def 1.1.20. Две вершины называются смежными (соседними), если между ними есть ребро.

Для иллюстрации отношения смежности обычно используют матрицу смежности. Это квадратная матрица размера $V \times V$, ячейки которой содержат:

- 0 или 1 — для простых графов
- $-1, 0, 1$ — для ориентированных графов
- $\mathbb{N}$ — для взвешенных графов

Однако описанные выше правила не строгие: в разных задачах числа в матрице смежности могу обозначать разные вещи.

Def 1.1.21. Вершина и ребро называются инцидентными, если вершина является одним из концов ребра.

Для иллюстрации отношения инцидентности обычно используют матрицу инцидентности. Это прямоугольная матрица размера $V \times E$, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы — ребра. Ячейки этой матрицы могут содержать:

- 1 если вершина и ребро инциденты и 0 в противном случае — для неориентированных графов.

- -1, если ребро выходит из данной вершин, и 1 если входит, 0 если ребро и вершина неинцидентны — для ориентированных графов.

Петля в матрице инцидентности обычно обозначается двойкой. Но, как и в случае с матрицей смежности, описанные правила не являются строгими.

Def 1.1.22. Степенью вершины $\deg u$ называется количество инцидентных ей ребер (петли учитываются дважды).

Со степенью вершины также связны такие понятия как:

- Минимальная степень вершины в графе $\delta(G) = \min\limits_{v \in V} \deg v$.
- Максимальная степень вершины в графе $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V} \deg v$.

Lm 1.1.23. Лемма о рукопожатиях.

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$$

Доказательство. Т.к. каждое ребро инцидентно ровно двум ребрам, то сложив все степени вершин мы учтем каждое ребро дважды (по одному разу для каждой из его концевых вершин). ■

Def 1.1.24. Граф называется r-регулярным, если степень каждой из его вершин равна r.

1.2. Морфизмы графов.

1.3. Маршруты, пути, цепи и циклы.

1.4. Эйлеровы графы.

1.5. Гамильтоновы графы.

1.6. Деревья.

1.7. Двудольные графы.

1.8. Теорема Холла.

1.9. Теорема Татта.

1.10. Связность.

1.11. Теорема Уитни.

1.12. Теорема Менгера.

1.13. Алгоритм Дейкстры.

1.14. Алгоритм Форда-Белмана.

1.15. Алгоритм Флойда-Уоршелла.

1.16. Иерархическая кластеризация.

2. Комбинаторика

2.1. Упорядоченные и неупорядоченные размещения.

2.2. Разбиения и композиции.

2.3. Принцип включения-исключения.

3. Конечные автоматы

3.1. Формальные и регулярные языки.

3.2. Детерминированный и недетерминированный конечные автоматы.

3.3. Преобразование НКА в ДКА.

3.4. ε -НКА. Преобразование ε -НКА в НКА.

3.5. Построение ε -НКА по регулярному выражению (построение Томпсона).

3.6. Теорема Клини.

4. Рекуррентные соотношения

4.1. Реккурентные соотношения. Характеристические уравнения.

4.2. Асимптотический анализ.

4.3. Мастер теорема.

4.4. Метод Акра -Бацци.

4.5. Производящие функции.

4.6. Операторы и аннигиляторы.