# MA LEC 03

isagila @pochtineploho @DUBSTEPHAVEGUN

Собрано 08.09.2023 в 17:40

https://github.com/isagila/tesc

# Содержание

# 1. Лекции

## 1.1. Лекция 23.09.01.

**Def 1.1.1.** Числовым рядом называется выражение $u_1+u_2+\ldots+u_n$, где $\{u_n\}$ это некоторая числовая последовательность. Обозначается $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

*Замечание* 1.1.2. Нумерация может вестись с любого целого числа.

**Def 1.1.3.** $u_n$ называется общим членом ряда.

**Def 1.1.4.** $S_n = u_1 + \ldots + u_k$ называется частичной суммой ряда.

*Замечание* 1.1.5. $S_n$ также образуют последовательность.

**Def 1.1.6.** Если последовательность частичных сумм сходится, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, то говорят, что ряд сходится к сумме $S$ ($S$ называется суммой ряда). Если предел равен бесконечности или не существует, то ряд расходится.

Иногда сумму ряда можно найти простой арифметикой.

*Пример* 1.1.7 (Непосредственное вычисление суммы ряда).

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \underbrace{\left(1 - \tfrac{1}{2}\right)}_{k=1} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right)}_{k=2} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right)}_{k=3} + \ldots + + \underbrace{\left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n}\right)}_{k=n-1} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\right)}_{k=n} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 = S$$

*Пример* 1.1.8 (Геометрический ряд (эталонный)). Пусть $b \neq 0, b \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} bq^n = b + bq + bq^2 + bq^3 + \ldots + bq^n = b(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n) = b\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = S_n$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b}{1-q} \lim_{n\to\infty} (1 - q^{n+1})$$

Далее значение предела зависит от $q$.

1. $|q| < 1 \implies q^n \to 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{b}{1-q} = S$
2. $|q| > 1 \implies q^n \to \infty \implies$ ряд расходится.
3. $q = 1 \implies S_n = b(n+1) \to \infty \implies$ ряд расходится.
4. $q = -1 \implies S_n = \dfrac{b}{2}(1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1) = \begin{cases} b \\ 0 \end{cases} \implies$ две подпоследовательность сходятся к разным числам, значит предела нет и ряд расходится.

*Замечание* 1.1.9. Чаще требуется только определить сходимость ряда не вычисляя его сумму.

**Свойства числовых рядов**

**Теорема 1.1.10.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \succ \iff \sum_{n=k>1}^{\infty} u_n \succ$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \prec \iff \sum_{n=k>1}^{\infty} u_n \prec$$

□

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \succ \iff \exists \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{u_1 + u_2 + \ldots + u_k}_{v} + u_{k+1} + \ldots + u_n\right) = \underbrace{\lim\nolimits_{n\to\infty} v}_{v\in\mathbb{R}} + \lim_{n\to\infty} (u_{k+1} + \ldots + u_n)$$

Для расходящихся доказательство аналогично. ■

*Замечание* 1.1.11. Теорему 1.1.10 можно сформулировать по-другому (не формально): ряд и его «хвост» одновременно сходятся и расходятся.

**Теорема 1.1.12.**

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R} \\ \alpha \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha S$$

□

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \succ \Longleftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha u_1 + \ldots + \alpha u_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} (u_1 + \ldots + u_n) = \alpha S$$

■

*Замечание* 1.1.13. Если ряд расходится, то умножение на $\alpha \neq 0$ не меняет его расходимости.

**Теорема 1.1.14.**

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R} \\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = S \pm \sigma$$

□

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} S_n}_{S} \pm \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sigma_n}_{\sigma} = \lim_{n\to\infty} (S_n \pm \sigma_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$$

■

*Замечание* 1.1.15. Ряды складываются и вычитаются почленно.

*Замечание* 1.1.16. Из сходимости разности рядов **не следует** сходимость самих рядов. Например,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \neq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}}_{\text{расходятся}}$$

**Гармонический ряд (эталонный)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Рассмотрим вспомогательный ряд и вычислим его частичные суммы

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \underbrace{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16}}_{\frac{1}{2}} + \ldots$$

$$\sigma_1 = 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} \qquad \sigma_2 = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} \qquad \sigma_n = 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2}$$

Последовательность частичных сумм $\sigma_n$ расходится при $n \to \infty$. Последовательность частичных сумм исходного ряда почленно не меньше $\sigma_n$, значит $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

**Теорема 1.1.17.** Члены сходящегося ряда можно группировать произвольным образом **не переставляя**.

□ Группируя члены ряда получаем подпоследовательность последовательности частичных сумм. Если существует предел исходной последовательности, то существует и предел любой ее подпоследовательности. ■

*Замечание* 1.1.18. Перестановка членов ряда может изменить сумму. Например, рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. Он сходится (без доказательства). Далее имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \ldots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{16} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{32} + \ldots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{16} + \frac{1}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{32} + \ldots \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots\right) - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} - \ldots \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}$$

Получили, что сумма ряда равна своей половине.

## 1.2. Лекция 23.09.08.

*Замечание* 1.2.1. Можно доказать, что определенной перестановкой членов ряда в качестве суммы можно получить любое заданное число.

*Замечание* 1.2.2. Также возможно перемножение рядов. Произведение сходящихся рядов — сходящийся ряд. Формулы для произведения можно найти в литературе.

> Далее для краткости ряды будут записываться в виде $\sum u_n$. Нижней границей по умолчанию будем считать единицу. В рядах с другой нижней границей и в местах, где необходимо сделать акцент на границе, будет использоваться запись вида $\sum\limits_{n=0} v_n$.

Далее рассмотрим некоторые условия сходимости рядов.

**Теорема 1.2.3. (Необходимое условие сходимости ряда)**

$$\sum u_n \succ \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

□

$$\sum u_n \succ \Longleftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$$

$$u_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{n+1} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$$

■

*Замечание* 1.2.4. Обратное в общем случае неверно. Например

$$\sum \frac{1}{n} \prec, \text{ но } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

*Замечание* 1.2.5. Необходимым условием сходимости удобно пользоваться в обратную сторону, т.е. с его помощью проще показать, что ряд расходится.

*Пример* 1.2.6.

$$\sum \underbrace{(2n+3)\cdot \sin\tfrac{1}{n}}_{u_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 1 \Longrightarrow \sum (2n+3)\cdot \sin\frac{1}{n} \prec$$

*Пример* 1.2.7.

$$\sum \frac{1}{2n+3} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$$

Рассмотрим вспомогательный ряд $\sum \frac{1}{3n}$. Можно убедиться, что начиная с $n = 4$ члены вспомогательного ряда меньше соответствующих членов исследуемого ряда. Заметим, что

$$\sum \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum \frac{1}{n} \Longrightarrow \prec$$

Значит, исходный ряд также расходится.

**Теорема 1.2.8. (Критерий Коши для сходимости рядов)**

$$\sum u_n \succ \Longleftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R} \boxed{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \,\Big|\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,\Big|\, n \geqslant p \geqslant n_0\colon |S_n - S_p| < \varepsilon$$

Стоит отметить, что $|S_n - S_p| = |u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n|$. Такая форма записи иногда будет полезна в дальнейшем.

*Замечание* 1.2.9. Смысл критерия Коши в том, что у сходящегося ряда при заданном $\varepsilon$ начиная с $n_0$ весь хвост попадает в $\varepsilon$-трубу.

*Замечание* 1.2.10. Критерий не удобен для исследования на сходимость, поэтому обычно используют признаки сходимости.

**Достаточные условия (признаки) сходимости <u>знакоположительных</u> рядов**

*Замечание* 1.2.11. Будем рассматривать только ряды, в которых $u_n > 0$, но описанные далее признаки можно применять для любых рядов, предварительно навесив модуль.

**Теорема 1.2.12. (Признак сравнения в неравенствах)** Пусть $\sum u_n$ — исследуемый ряд, а $\sum v_n$ — вспомогательный ряд и $u_n, v_n \geqslant 0$. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \,\middle|\, u_n < v_n \\ \sum v_n \succ \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum u_n \succ \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \,\middle|\, u_n > v_n \\ \sum v_n \prec \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum u_n \prec \tag{2}$$

□ Сначала докажем (1). Пусть $S_n = u_1 + u_2 + \ldots$ и $\sigma_n = v_1 + v_2 + \ldots$, т.к. $\forall n \in \mathbb{N} \big| u_n < v_n$, то $S_n \leqslant \sigma_n$. Причем эти последовательности возрастают, т.к. ряды знакоположительные. Далее

$$\sum v_n \succ \Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma \in \mathbb{R}$$

Таким образом последовательность $\{\sigma_n\}$ ограничена числом $\sigma$. Последовательность $\{S_n\}$ возрастает и также ограничена числом $\sigma$. Значит по т. Вейерштрасса $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, причем $S \leqslant \sigma$.
Теперь от противного докажем (2). Пусть $\sum u_n$ сходится, тогда согласно (1) $\sum v_n$ тоже должен сходится. Противоречие. ■

*Замечание* 1.2.13. Для установления расходимости ряда в качестве вспомогательного не следует брать ряды с несуществующей как предел суммой.

*Пример* 1.2.14.

$$\sum \frac{1}{n^2} \qquad u_n = \frac{1}{n^2}$$
$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1 \in \mathbb{R} \qquad v_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

Неравенство $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ неверно, однако заметим, что

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} > \frac{1}{n^2+2n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Таким образом по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=0} \frac{1}{(n+1)^2}$ сходится. Если перенумеровать, то получим, что и ряд $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^2}$ сходится.

**Теорема 1.2.15. (Предельный признак)** Пусть $\sum u_n$ — исследуемый ряд, а $\sum v_n$ — вспомогательный ряд и $u_n, v_n \geqslant 0$. Тогда, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

то ряды имеют одинаковую сходимость.

□ Распишем предел по определению, после чего раскроем получившийся модуль (учитывая то, что ряды знакоположительные).

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = q \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \,\big|\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,\big|\, \forall n > n_0 \colon \left| \frac{u_n}{v_n} - q \right| < \varepsilon \\ q - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < q + \varepsilon \\ (q-\varepsilon) v_n < u_n < (q+\varepsilon) v_n \end{gathered} \tag{1}$$

При достаточно малом $\varepsilon$ ряды $\sum (q+\varepsilon)v_n$, $\sum (q-\varepsilon)v_n$ и $\sum v_n$ имеют одинаковую сходимость, т.к. домножение на ненулевую константу не влияет на сходимость. Применим признак сравнения.

$$\sum v_n \prec \Longrightarrow \sum u_n \prec \qquad \sum v_n \succ \Longrightarrow \sum u_n \succ \tag{2}$$

В первом случае $u_n$ расходится, т.к. он больше расходящегося ряда (левая часть неравенства (1)), во втором случае $u_n$ сходится, т.к. он меньше сходящего ряда (правая часть неравенства (1)). ■

*Замечание* 1.2.16. Т.к. $u_n$ и $v_n$ являются бесконечно малыми (иначе вопрос о расходимости ряда $u_n$ решен, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости 1.2.3), то в предельном признаке устанавливается порядок $u_n$ по отношению к $v_n$. Ряды имеют одинаковый характер сходимости при одном порядке малости.

**<u>Lm</u> 1.2.17.** Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \Longleftrightarrow u_n = o(v_k)$. Тогда $\sum v_n \succ \Longrightarrow \sum u_n \succ$.

□ Распишем предел по определению.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\Big|\,\exists n_0\in\mathbb{N}\,\Big|\,\forall n>n_0\colon \left|\frac{u_n}{v_n}\right|<\varepsilon \Longrightarrow u_n<\varepsilon v_n \tag{1}$$

Т.к. ряд $\sum v_n$ сходится, то выполнен критерий Коши (1.2.8), имеем

$$\forall\varepsilon'>0\,\Big|\,\exists m_0\in\mathbb{N}\,\Big|\,\forall n\geqslant p\geqslant m_0\colon |v_p+\ldots+v_n|<\varepsilon' \tag{2}$$

Домножим последнее неравенство на $\varepsilon$ и объединив его с неравенством в (1) получим, что

$$|u_p+\ldots+u_n|<\varepsilon\,|v_p+\ldots+v_n|<\underbrace{\varepsilon\varepsilon'}_{\tilde\varepsilon} \tag{3}$$

Подставим это в (2), получим

$$\forall\tilde\varepsilon>0\,\Big|\,\exists m_0\in\mathbb{N}\,\Big|\,\forall n\geqslant p\geqslant m_0\colon |u_p+\ldots+u_n|<\tilde\varepsilon$$

Значит ряд $\sum u_n$ сходится по критерию Коши. ■

*Замечание* 1.2.18. Если в отношении общих членов ряда получилась бесконечность, то лучше использовать другие признаки.

**Теорема 1.2.19. (Признак Даламбера)**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=D\in\mathbb{R}=\begin{cases}0<D<1 & \Longrightarrow\succ\\ D=1 & \Longrightarrow \text{необходимо дополнительное исследование}\\ D>1 & \Longrightarrow\prec\end{cases}$$

□ Распишем предел по определению.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=D \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\Big|\,\exists n_0\in\mathbb{N}\,\Big|\,\forall n>n_0\colon \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-D\right|<\varepsilon \Longrightarrow (D+\varepsilon)u_n<u_{n+1}<(D+\varepsilon)u_n \tag{1}$$

Рассмотрим правую часть полученного неравенства. Положим $D+\varepsilon=r<1$. Тогда $u_{n+1}<r\cdot u_n$ начиная с $n_0$. Имеем

$$\left.\begin{aligned}&u_{n_0+1}<ru_{n_0}\\&u_{n_0+2}<ru_{n_0+1}<r^2u_{n_0}\\&\ldots\\&u_{n_0+k}<r^ku_{n_0}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\begin{cases}\sum u_n=u_1+u_2+\ldots+u_{n_0}+u_{n_0+1}+\ldots+u_{n_0+k}+\ldots\\ \sum v_n=\underbrace{u_1+u_2+\ldots+u_{n_0}}_{\text{отбросим}}+ru_{n_0}+\ldots+r^ku_{n_0}+\ldots\\ u_n\leqslant v_n\end{cases} \tag{2}$$

Отбросим «голову» полученных рядов до члена $u_{n_0}$ включительно. Тогда из ряда $\sum v_n$ получим ряд

$$\sum v'_n=\sum_{k=1}^{\infty}r^k\underbrace{u_{n_0}}_{const}=u_{n_0}\sum_{k=1}^{\infty}r^k \tag{3}$$

Получаем эталонный геометрический ряд, т.к. $r<1$ то он сходится. Значит по признаку сравнения сходится и ряд $\sum u'_n$, полученный отбрасыванием «головы» ряда $\sum u_n$. Отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость, а значит ряд $\sum u_n$ также сходится.
Аналогично рассмотрим левую часть неравенства (1) и положим $D-\varepsilon=r>1$. Оценим члены ряда снизу вспомогательным рядом $\sum v'_{n_0+k}=r^ku_{n_0}$. При $r>1$ исходный ряд почленно больше расходящегося, значит тоже расходится. ■