MA Eχ 02

isagila

Собрано 12.06.2023 в 13:03

Содержание

1. Интегрирование функции одной переменной

1.1. Определение и свойства неопределенного интеграла.

Def 1.1.1. Кусочная дифференцируемая функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Теорема 1.1.2. Разность двух первообразных для одной и той же функции — константа.

Доказательство. Пусть дана функция $f(x)$ и две её первообразные $F_1(x)$, $F_2(x)$. Обозначим из разность как $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Производная этой функции будет равна $\varphi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Из множества дифференцируемости $F_1(x)$ и $F_2(x)$ выберем наименьшее и выделим в нем отрезок $[a; x]$. По т. Лагранжа:

$$\exists \xi \in (a; x)\colon \varphi'(\xi) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}$$

Т.к. $\forall \xi\colon \varphi'(\xi) = 0$, то $\varphi(x) - \varphi(a) = 0$, т.е. $\varphi(x) = \varphi(a)$. Т.к. отрезок произвольный, то это значения функции $\varphi(x)$ равны во всех точках, т.е. она константа. ■

Следствие 1.1.3. Первообразные для $f(x)$ составляют множество функций вида $\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$, где $F(x)$ это какая-либо первообразная.

Def 1.1.4. Семейство первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ по аргументу x.

Замечание 1.1.5. О существовании первообразной

Не для каждой функции существует первообразная, но для каждой непрерывной на отрезке. Даже если первообразная существует, то она не всегда выражается в элементарных функциях, например, $\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

Далее рассмотрим некоторые свойства неопределенного интеграла.

Lm 1.1.6.

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$$

Доказательство.

$$\mathrm{d}F(x) = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x \implies \int \mathrm{d}F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}F(x) + C$$

■

Lm 1.1.7.

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$$

Доказательство.

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

■

Lm 1.1.8. Линейность

$$\int \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x$$
$$\int (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$$

Доказательство.

$$\int \alpha f(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}(\alpha F(x)) = \alpha F(x) + C$$

При первым переходе используется свойство линейности дифференциала, а при втором — 1.1.6. Доказательство для суммы функций аналогично. ■

1.2. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям.

Замечание 1.2.1. Интеграл сохраняет инвариантность своей формы, т.е.

$$\int f(\clubsuit)\mathrm{d}\clubsuit = F(\clubsuit) + C$$

Теорема 1.2.2. О замене производной в неопределенном интеграле
Если $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ обратимая и дифференцируемая функция, то

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Доказательство. Возьмем производные от обоих частей:

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'_x = f(x)$$

$$\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\right)'_x = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\right)'_t \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \overset{1.1.7}{=\!=} f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x)$$

■

Замечание 1.2.3. Формула работает в обе стороны:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \overset{\sqrt{x}=t}{=\!=\!=} \int \frac{e^t}{t}2t\mathrm{d}t = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$$\int e^{x^2}\underbrace{2x\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}x^2} \overset{x^2=t}{=\!=\!=} \int e^t\mathrm{d}t = e^t + C = e^{x^2} + C$$

Теорема 1.2.4. Интегрирование по частям

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

Доказательство. Рассмотрим равенство $(uv)' = u'v + uv'$ и проинтегрируем обе его части:

$$\begin{aligned}
(uv)' &= u'v + uv' \\
\int (uv)'\mathrm{d}x &= \int u'v + uv'\mathrm{d}x \\
uv &= \int u'v\mathrm{d}x + \int uv'\mathrm{d}x && \text{Линейность интеграла (1.1.8)} \\
uv &= \int v\mathrm{d}u + \int u\mathrm{d}v && \text{Внесение под дифференциал (1.2.2)} \\
\int u\mathrm{d}v &= uv - \int u\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

■

Замечание 1.2.5. Интегрирование по частям используется если $\int v\mathrm{d}u$ вычисляется проще, чем интеграл $\int u\mathrm{d}v$. В качестве функции u выбирают ту, которая упрощается при дифференцировании.

1.3. Интегрирование рациональных функций (общая схема). Разложение дроби на простейшие.

Выделим 4 типа простейших дробей:

$$(I): \quad \frac{A}{x-a} \qquad (II): \quad \frac{A}{(x-a)^2} \qquad (III): \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \qquad (IV): \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$

где (x^2+px+q) неразложимый на множители многочлен, а A, M, N — неопределенные коэффициенты.

<u>Метод неопределенных коэффициентов</u>:

Пусть дана дробь $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(n)}$, в которой $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ это многочлены с вещественными коэффициентами. Требуется разложить её на простейшие.

1. Если $m \geqslant n$, то необходимо выделить целую часть. Далее будем считать, что $m < n$.
2. Раскладываем знаменатель на множители, т.е. приводим его к виду

$$P_n = a_0(x-x_1)^{b_1}\dots(x-x_t)^{b_t}(x^2+p_1x+q_1)^{c_1}\dots(x^2+p_rx+q_r)^{c_r}$$

3. Для каждой скобки в знаменателе записываем некоторую дробь по следующему правилу:

$$\begin{aligned}
(x-x_i) &\to & \frac{A}{x-x_i}\\
(x-x_i)^k &\to & \frac{A}{x-x_i}+\dots+\frac{A}{(x-x_i)^k}\\
(x^2+p_ix+q_i) &\to & \frac{Ax+B}{x^2+p_ix+q_i}\\
(x^2+p_ix+q_i)^k &\to & \frac{Ax+B}{x^2+p_ix+q_i}+\dots+\frac{Ax+B}{(x^2+p_ix+q_i)^k}
\end{aligned}$$

   У каждой скобки будет свой набор констант.
4. Получаем уравнение относительно коэффициентов $A, B\dots$, которые находятся в числителе полученных дробей.
5. Приводит полученную дробь к общему знаменателю и приравниваем её к исходной дроби.
6. Т.к. знаменатели полученных дробей равны, то должны быть равны и числители. Пользуемся тем, что два полинома равны когда равны все коэффициенты перед одинаковыми степенями. Получаем систему уравнений (по количеству коэффициентов).
7. Решаем систему, находим коэффициенты. Подставляем их в разложение исходной дроби на сумму простейших дробей.

Теперь интегрирование рациональных дробей свелось к тому, чтобы разложить их на простейшие, а потом, пользуясь линейностью интеграла (1.1.8), проинтегрировать каждую из дробей по-отдельности. Подробнее об интегрировании простейших дробей написано в вопросе **1.4.**

1.4. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование простейших дробей 1,2,3.

- Интегрирование простейших дробей I-ого типа

$$\int\frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\int\frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a} = \ln|x-a|+C$$

- Интегрирование простейших дробей II-ого типа

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x = A\int(x-a)^{-k}\,\mathrm{d}(x-a) = \frac{A}{1-k}\cdot(x-a)^{1-k} = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}$$

- Интегрирование простейших дробей III-его типа

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x \tag{1}$$

Попытаемся внести числитель под дифференциал:

$$\mathrm{d}\big(x^2+px+q\big) = (2x+p)\mathrm{d}x$$

$$(Mx+N) = \frac{M}{2}\left(2x+\frac{2N}{M}\right) = \frac{M}{2}\left(2x+p+\frac{2N}{M}-p\right) = \frac{M}{2}(2x+p) + \underbrace{\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}_{h}$$

Подставим это в (1):

$$\int \frac{(2x+p)+h}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x + \int \frac{h}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$

Далее вычислим каждый из интегралов по-отдельности:

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\big(x^2+px+q\big)}{x^2+px+q} = \ln\left|x^2+px+q\right| + C$$

$$\int \frac{h}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = h\cdot\int \frac{1}{(x+{}^{p}\!/_{2})^2 + \underbrace{q-({}^{p}\!/_{2})^2}_{g}}\mathrm{d}x = \frac{h}{g}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x+{}^{p}\!/_{2}}{g}\right) + C$$

Подставим полученные выражения в исходный интеграл (1):

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{h}{g}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x+{}^{p}\!/_{2}}{g}\right) + C$$

$$h = \left(N-\frac{Mp}{2}\right), g = q-\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

- Интегрирование простейших дробей IV-его типа

Рассмотрим на примере:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x \tag{1}$$

Первый из полученных интегралов мы уже вычислить, это простейшая дробь III-ого типа. Таким образом этот интеграл будет равен $\operatorname{arctg} x + C$. Далее работаем со вторым интегралом:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{x\,\mathrm{d}\big(x^2+1\big)}{(x^2+1)^2} = \left[\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)\right] = -\frac{1}{2}\cdot\int x\cdot\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \tag{2}$$

Полученный интеграл возьмем по частям:

$$\int \underbrace{x}_{u}\,\mathrm{d}\underbrace{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}_{v} = \frac{x}{x^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x + C \tag{3}$$

Подставим (3) в (2), а полученное выражение в исходный интеграл (1):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x =$$
$$\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x\right) + C =$$
$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$$

Замечание 1.4.1. В случаях с более высокой степенью каждая подобная итерация будет приводить к уменьшению степени знаменателя на единицу.

TODO: И вообще это рекуррентные интегралы, которые считаются последовательно от 1-ой степени до данной.

1.5. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Замечание 1.5.1. Всякая рациональная дробь интегрируемая, поэтому можно попытаться с помощью замены свести функции другого вида к рациональным дробям.

Если требуется вычислить интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, где R это некоторая *рациональная* функция, то можно применить универсальную тригонометрическую подстановку:

$$x = 2\operatorname{arctg} t \iff t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

Тогда составляющие интеграла преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin{}^x\!/_2\cos{}^x\!/_2}{\sin^2{}^x\!/_2+\cos^2{}^x\!/_2} = \frac{2\operatorname{tg}{}^x\!/_2}{\operatorname{tg}^2{}^x\!/_2+1} = \frac{2t}{1+t^2}\\
\cos x = \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2{}^x\!/_2-\sin^2{}^x\!/_2}{\sin^2{}^x\!/_2+\cos^2{}^x\!/_2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2{}^x\!/_2}{\operatorname{tg}^2{}^x\!/_2+1} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\\
\mathrm{d}x = \mathrm{d}(2\operatorname{arctg} t) = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в исходный интеграл, получаем:

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x \overset{\text{УТП}}{=\!=\!=} \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

1.6. Интегрирование тригонометрических функций вида $R(\sin^m x, \cos^n x)$, $R(\sin mx, \cos nx)$.

Рассмотрим интегралы вида $\int \sin^m x\cos^m x\mathrm{d}x$

1. n или m нечетное
   Пусть m нечетное, тогда $m = 2k+1$. Подставим это в исходный интеграл:

   $$\int \sin^m x\cos^m \mathrm{d}x = \int \sin^m x\cos^{2k}\cos x\mathrm{d}x = \int \sin^m x(1-\sin^2 x)^k\,\mathrm{d}(\sin x) \overset{t=\sin x}{=\!=\!=\!=} \int t^m x(1-t^2)^k\mathrm{d}t$$

   Получили интеграл от полинома $\implies$ умеем его решать.
2. n и m четные
   Обозначим $n = 2p$, $m = 2q$, тогда:

   $$\int \sin^m x\cos^m \mathrm{d}x = \int (\sin^2 x)^p(\cos^2 x)^q\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^p\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^q\mathrm{d}x$$

   Далее раскрываем скобки и упрощаем. Получится либо первый случай (с нечетной степенью), либо второй, но с меньшей степенью.

Интегралы видов

- $\int \sin mx\sin nx\mathrm{d}x$
- $\int \sin mx\cos nx\mathrm{d}x$
- $\int \cos mx\cos nx\mathrm{d}x$

решаются при помощи использования тригонометрических формул, которые сводят произведение к сумме/разности:

$$
\begin{aligned}
\sin mx \sin nx &= \frac{1}{2}\Big(\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)\Big)\\
\sin mx \cos nx &= \frac{1}{2}\Big(\sin((m-n)x) + \sin((m+n)x)\Big)\\
\cos mx \cos nx &= \frac{1}{2}\Big(\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)\Big)
\end{aligned}
$$

TODO: На лекции были интегралы вида $\int \sin^m x \cos^m \mathrm{d}x$, а не $R(\sin^m x, \cos^n x)$.

1.7. Интегрирование некоторых иррациональных функций, метод тригонометрической подстановки.

- Интегралы вида $\int R(\sqrt{x^2 \pm 1}, x)\mathrm{d}x$ решаются с помощью замены x на гиперболическую функцию:

$$
\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \qquad \cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}
$$

Замечание 1.7.1. Данные функции называются гиперболическим синусом и гиперболическим косинусом соответственно.

Lm 1.7.2. Основное гиперболическое тождество

$$
\cosh^2 - \sinh^2 = 1
$$

Доказательство.

$$
\cosh^2 - \sinh^2 = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2u} + 2 + e^{-2u} - e^{2u} + 2 - e^{-2u}\right) = 1
$$

■

Замечание 1.7.3. Заметим, что

$$
\ln|\sinh + \cosh| = \ln\left|\frac{e^u - e^{-u}}{2} + \frac{e^u - e^{-u}}{2}\right| = \ln e^u = u
$$

Пример:
Вычислим 'длинный' логарифм:

$$
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \begin{bmatrix} x = \sinh u \implies 1 + x^2 = \cosh^2 u \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sinh u) = \cosh u \mathrm{d}u \\ u = \ln\left|\underbrace{x}_{\sinh u} + \underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{\cosh u}\right| \quad (1.7.3) \end{bmatrix} = \int \frac{\cosh u}{\cosh u}\mathrm{d}u = u + C = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C
$$

- Интегралы вида $\int R(\sqrt{1-x^2}, x)\mathrm{d}x$ решаются с помощью замены x на синус или косинус.
- Интегралы вида $\int R(\sqrt[k_1]{x}, \dots, \sqrt[k_n]{x})\mathrm{d}x$ решаются с помощью замены $t = \sqrt[K]{x}$, где K это НОД для $k_1, \dots, k_n$.
- Интегралы вида $\int R(\sqrt{ax+b}, x)\mathrm{d}x$ решаются с помощью замены $t = \sqrt{ax+b}$. При этом $x = \frac{t^2-b}{a}$, $\mathrm{d}x = \frac{2t}{a}\mathrm{d}t$.

1.8. Определенный интеграл. Определение, свойства линейности и аддитивности.

1.9. Геометрический смысл определенного интеграла. Оценка определенного интеграла. Теорема о среднем.

1.10. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Барроу.

1.11. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.

1.12. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям.

1.13. Приложения определенного интеграла: вычисление площадей в декартовых координатах.

1.14. Приложения определенного интеграла: вычисление площади криволинейного сектора в полярных координатах.

1.15. Приложения определенного интеграла: вычисление длины дуги кривой (вывод формулы).

1.16. Приложения определенного интеграла: вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически.

1.17. Приложения определенного интеграла: вычисление объемов тел с известными площадями сечений и тел вращения.

1.18. Несобственные интегралы 1-го рода (на неограниченном промежутке). Определение и свойства.

1.19. Вычисление несобственного интеграла 1-го рода: формула Ньютона-Лейбница, интегрирование по частям, замена переменной.

1.20. Несобственные интегралы 2-го рода (от неограниченной функции). Определение, вычисление и свойства.

1.21. Признаки сходимости несобственных интегралов: первый признак сравнения (в неравенствах).

1.22. Признаки сходимости несобственных интегралов: второй признак сравнения (предельный).

1.23. Признаки сходимости несобственных интегралов: теорема об абсолютной сходимости. Понятие условной сходимости.

1.24. Сходимость интегралов 1-го и 2-го рода от степенных функций.

2. Интегрирование функции нескольких переменных

2.1. Двойной интеграл. Определение и свойства.

2.2. Вычисление двойного интеграла. Кратный интеграл.

2.3. Определение и вычисление тройного интеграла.

2.4. Криволинейные координаты.

2.5. Замена переменных в двойном и тройном интегралах. Якобиан.

2.6. Криволинейный интеграл 1-го рода: определение, свойства, вычисление, геометрический и физический смысл.

2.7. Криволинейный интеграл 2-го рода как работа силы вдоль пути. Определение, вычисление и свойства.

2.8. Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода: формула связи.

2.9. Теорема (формула) Грина.

2.10. Интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Теорема о независимости интеграла от пути, равносильность I,II,III утверждений.

2.11. Интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Теорема о независимости интеграла от пути, равносильность III, IV утверждений.

2.12. Следствие теоремы о независимости от пути (формула Ньютона-Лейбница).

2.13. Поверхностный интеграл 1-го рода: определение, свойства, вычисление, геометрический и физический смысл.

2.14. Поверхностный интеграл 2-го рода как поток жидкости через поверхность.

2.15. Связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода.

2.16. Поверхностный интеграл 2-го рода: математическое определение, вычисление, свойства.

2.17. Теорема Гаусса-Остроградского.

2.18. Теорема Стокса.

2.19. Скалярное и векторное поля: определения, геометрические характеристики. Дифференциальные и интегральные характеристики полей (определения).

2.20. Виды векторных полей и их свойства (теоремы о поле градиента и поле вихря).

2.21. Механический смысл потока и дивергенции.

2.22. Механический смысл вихря и циркуляции.

2.23. Векторная запись теорем теории поля и их механический смысл.