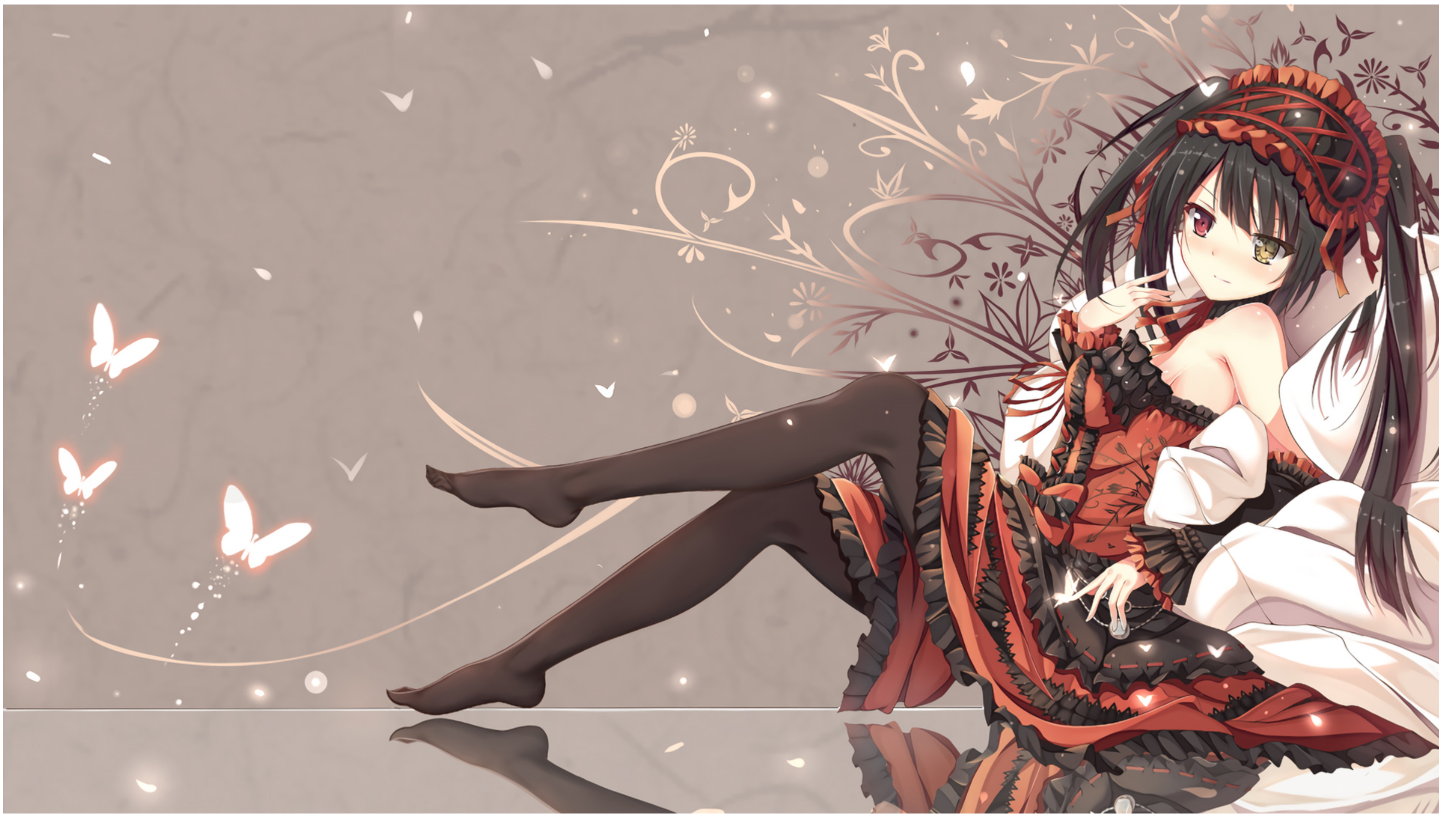
LA Eχ 01

isagila @pochtineploho @DUBSTEPHAVEGUN @aljbet и другие…

Собрано 03.09.2023 в 10:10



Содержание

Предисловие

Данные материалы перенесены из notion'а через значительное время после экзамена. Вследствие этого тщательная вычитка не проводилась, а значит количество ошибок/опечаток может быть довольно большим. Прошу прощения за это... но мне правда не очень интересно ворошить материалы 9 месячной давности. Надеюсь, те, кто будет ими пользоваться, сделают их лучше — pr и issues всегда открыты для исправлений и дополнений. (`isagila`, 23.09.02)

1. Вопросы к экзамену

1.1. Поле комплексных чисел.

Def 1.1.1. Множество это совокупность элементов с общим свойством.

Def 1.1.2. Множество с введённой на нём операцией называется алгебраической структурой.

Def 1.1.3. Группой называется алгебраическая структура, имеющая следующие свойства

1. Замкнутость $\forall a, b \in G \Big| a + b \in G$.
2. Ассоциативность $\forall a, b, c \in G \Big| (a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Наличие нейтрального элемента $\exists \theta \in G \Big| \forall a \in G \Big| a + \theta = a$.
4. Наличие обратного элемента $\forall a \in G \Big| \exists a' \in G \Big| a + a' = \theta$.

Замечание 1.1.4. В определении выше под знаком «+» подразумевается любая операция. Группы для операции «сложение» называются аддитивными. Группы для операции «умножение» называются мультипликативными.

Def 1.1.5. Если группа обладает свойством коммутативности $\forall a, b \in G \Big| a + b = b + a$, то она называется абелевой (коммутативной) группой.

Def 1.1.6. Кольцо это коммутативная аддитивная группа, в которой

1. Определено умножение.
2. Относительно этого умножения выполняется дистрибутивность $a + b \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ и $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$ (т.к. коммутативность для умножения не гарантирована).

Def 1.1.7. Если кольцо обладает свойством коммутативности относительно умножения $\forall a, b \in G \Big| a \cdot b = b \cdot a$, то оно называется коммутативным кольцом.

Def 1.1.8. Поле это коммутативное ассоциативное кольцо, в котором

1. Есть нейтральный элемент по умножению $\exists \theta \Big| \forall a \in F \Big| a \cdot \theta = a$.
2. Для любого ненулевого элемента существует обратный элемент по умножению $\forall a \in F \Big| \exists a^{-1} \Big| a \cdot a^{-1} = \theta$.

Def 1.1.9. Множество комплексных чисел определено как множество упорядоченных пар вещественных чисел $\mathbb{C} = \Big\{ \langle x, y \rangle \Big| x, y \in \mathbb{R} \Big\}$.

Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{R}$ тогда

1. Сумма определена как $z_1 + z_2 = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle$.
2. Произведение определено как $z_1 \cdot z_2 = \langle x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2 \rangle$.
3. Умножение на число определено как $\lambda z_1 = z_1 \lambda = \langle \lambda x_1, \lambda y_1 \rangle$.

Замечание 1.1.10. Проверим необходимые условия поля для комплексных чисел.

1. Замкнутость $z_1 + z_2 = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle \in \mathbb{C}$.
2. Ассоциативность $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 = \langle x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3 \rangle$ в силу ассоциативности сложения.
3. Наличие нейтрального элемента по сложению $z + \langle 0, 0 \rangle = z$ нейтральный элемент по сложению $\langle 0, 0 \rangle$.
4. Наличие обратного элемента по сложению $\langle x, y \rangle + \langle -x, -y \rangle = \langle 0, 0 \rangle$.
5. Дистрибутивность для умножения
   (a) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = \langle (x_1 + x_2) x_3 - (y_1 + y_2) y_3, (x_1 + x_2) y_3 + (y_1 + y_2) x_3 \rangle$
   (b) $z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 = \langle x_1 x_3 - y_1 y_3 + x_2 x_3 - y_2 y_3, x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_2 y_3 + y_2 x_3 \rangle$

Значит $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$. Т.к. умножение комплексных чисел коммутативно, то достаточно проверить одну дистрибутивность.

6. Наличие нейтрального элемента по умножению $z \cdot \langle 1, 0\rangle = \langle x, y\rangle$, нейтральный элемент по умножению $\langle 1, 0\rangle$.

7. Наличие обратного элемента по умножению для любого ненулевого элемента. Для комплексного числа $z = \langle x, y\rangle$ обратным будет являться комплексное число $z' = \left\langle \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right\rangle$ Причем т.к. $z \neq 0$ этот элемент будет существовать. Проверим, что это действительно обратный элемент.

$$z \cdot z' = \langle x, y\rangle \cdot \left\langle \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right\rangle = \left\langle \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}, \frac{-yx}{x^2+y^2} + \frac{yx}{x^2+y^2} \right\rangle = \langle 1, 0\rangle$$

Все верно, т.к. получился нейтральный элемент по умножению.

Def 1.1.11. Алгебраической формой комплексного числа называется форма $z = x + yi$, в которой

1. $i^2 = -1$ — мнимая единица.
2. x — действительная часть комплексного числа.
3. y — мнимая часть комплексного числа.
4. Под операцией «+» подразумевается не сложение (нельзя сложить действительную и мнимую части), а просто указание на то, что это единое целое.

Замечание 1.1.12. Комплексные числа, у которых действительная часть равна нулю называют чисто мнимыми. Комплексные числа, у которых мнимая часть равна нулю являются обычными вещественными числами.

Замечание 1.1.13. Покажем, что $i^2 = -1$.

$$i^2 = \langle 0, 1\rangle^2 = \langle 0, 1\rangle \cdot \langle 0, 1\rangle = \left\langle 0^2 - 1^2, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \right\rangle = \langle -1, 0\rangle$$

Замечание 1.1.14. Комплексные числа можно изображать в декартовой системе координат (рис. 1.1.15).

1. Ось *Re* будет отвечать за действительную часть комплексного числа.
2. Ось *Im* будет отвечать за мнимую часть комплексного числа.

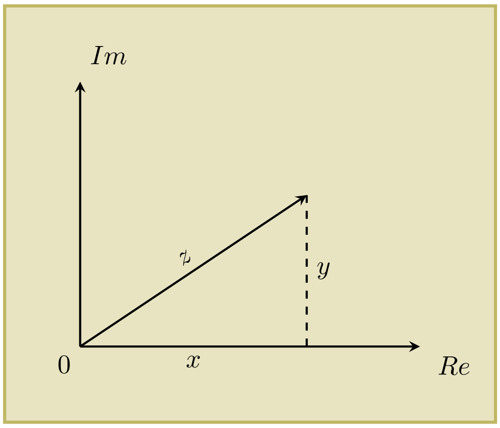


Рис. 1.1.15: Изображение чисел на комплексной плоскости

1.2. Линейное пространство арифметических векторов. Определение, проверка аксиом.

Def 1.2.1. Линейное (векторное) пространство это коммутативная аддитивная группа, в которой $(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C})$

1. Определено умножение на число $\lambda \in \mathbb{C}$.
2. Умножение коммутативно $\lambda a = a\lambda$.
3. Относительно умножения выполняется дистрибутивность $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b, (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$.
4. Относительно умножения выполняется ассоциативность $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$.
5. Относительно умножение есть нейтральный элемент $\exists \theta \in \mathbb{R} \,\middle|\, \forall a \in L \,\middle|\, \theta \cdot a = a$.

Def 1.2.2. Арифметическим вектором называется упорядоченный набор из n чисел вида $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

1. Сложение определим как $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.

2. Умножение на число определим как $\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

Замечание 1.2.3. Множество векторов одной размерности образует линейное пространство.

Замечание 1.2.4. Проверим аксиомы линейного пространства.

1. Замкнутость $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in L$.

2. Ассоциативность $((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)) + (z_1, \ldots, z_n) = (x_1, \ldots, x_n) + ((y_1, \ldots, y_n) + (z_1, \ldots, z_n))$ выполнена, т.к. сложение чисел ассоциативно.

3. Наличие нейтрального элемента по сложению $(x_1, \ldots, x_n) + (0, \ldots, 0) = (x_1, \ldots, x_n)$. Нейтральный элемент по сложению это нулевой вектор длины n.

4. Наличие обратного элемента по сложению $(x_1, \ldots, x_n) + (-x_1, \ldots, -x_n) = (0, \ldots, 0)$.

5. Коммутативность выполнена, т.к. сложение и умножение чисел коммутативно. $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n)$ и $\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)\lambda$.

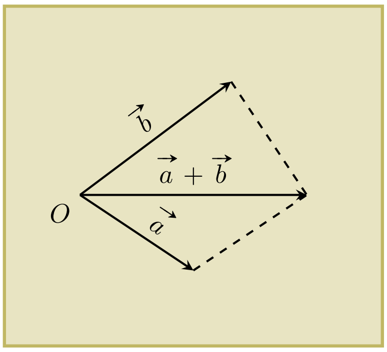
6. Дистрибутивность и ассоциативность для умножения на число выполнены, т.к. умножение чисел дистрибутивно относительно сложения.
   (a) $\lambda \cdot ((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)) = \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) + \lambda \cdot (y_1, \ldots, y_n)$
   (b) $(\lambda + \mu) \cdot (x_1, \ldots, x_n) = \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) + \mu \cdot (x_1, \ldots, x_n)$
   (c) $(\lambda \cdot \mu) \cdot (x_1, \ldots, x_n) = \lambda \cdot (\mu \cdot (x_1, \ldots, x_n))$

7. Наличие нейтрального элемента относительно умножения на число $(x_1, \ldots, x_n) \cdot 1 = (x_1, \ldots, x_n)$. Нейтральный элемент относительно умножения на число это 1.

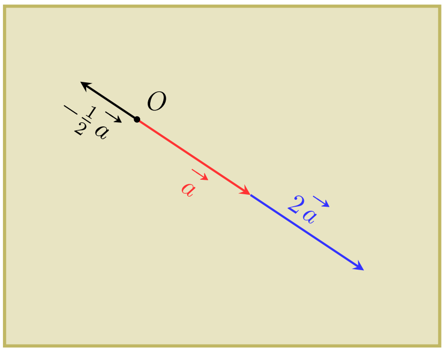
1.3. Линейное пространство направленных отрезков с общим началом. Определение, проверка аксиом.

Замечание 1.3.1. Множество направленных отрезков образует линейное пространство.

Сложение определим геометрически, по правилу параллелограмма (рис. 1.3.2a). Умножение на число определим как растяжение/сжатие направленного отрезка, причем при отрицательном множителе происходит смена направления на противоположное (рис. 1.3.2b).



(a) Сложение



(b) Умножение

Рис. 1.3.2: Введение операций для направленных отрезков

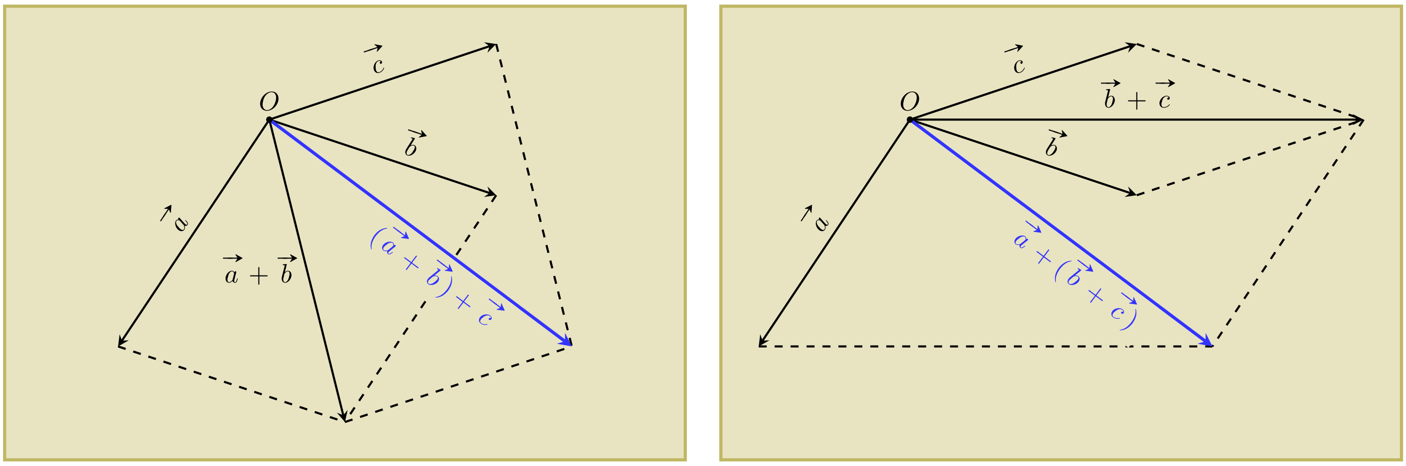
Замечание 1.3.3. Проверим аксиомы линейного пространства.

1. Замкнутость. По определению сложения получаем, что сумма двух направленных отрезков это направленный отрезок.

2. Ассоциативность. Проверим геометрически (рис. 1.3.4).

3. Наличие нейтрального элемента по сложению. Нейтральный элемент по сложению это нулевой вектор (длина равна нулю, направление не определено). Нулевой вектор можно получить, умножив любой вектор на ноль.

4. Наличие обратного элемента по сложению. Обратным для вектора $\vec{a}$ будет вектор $-1 \cdot \vec{a}$ (вектор той же длины, но с противоположным направлением).



(a) Левая ассоциативность

(b) Правая ассоциативность

Рис. 1.3.4: Проверка ассоциативности сложения направленных отрезков

5. Коммутативность. Коммутативность по сложению выполнена исходя из определения суммы двух направленных отрезков. Коммутативность по умножению на число выполнена из определения умножения направленного отрезка на число.

6. Дистрибутивность и ассоциативность для умножения на число. *Очевидно* доказываются геометрически.

7. Наличие нейтрального элемента относительно умножения на число. Нейтральным элементом относительно умножения на число будет единица (вектор не сжимается, не растягивается, не меняет направление).

1.4. Матрицы. Определение. Арифметика матриц.

Def 1.4.1. Матрица это упорядоченный набор арифметических векторов одинаковой размерности

$$A_{k,n} = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

где k это количество строк, n это количество столбцов, $A_{i,j}$ это элемент матрицы в i-ой строке и j-ом столбце.

Замечание 1.4.2. Матрицы одной размерности образуют линейное пространство.

Замечание 1.4.3. Равенство матриц определено как $A_{n,k} = B_{n,k} \iff \forall i,j \,\Big|\, A_{i,j} = B_{i,j}$.

Замечание 1.4.4. Сложение матриц определено как $A_{n,k} + B_{n,k} = C_{n,k} \iff \forall i,j \,\Big|\, c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.
Сложение матриц коммутативно $A + B = B + A$.

Замечание 1.4.5. Умножение на число определено как $\lambda A = B \iff \forall i,j \,\Big|\, b_{i,j} = \lambda a_{i,j}$.
Умножение матрицы на число дистрибутивно и ассоциативно

1. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

2. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

3. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

Замечание 1.4.6. Умножение матриц определено как $A_{n,k} \cdot B_{k,m} = C_{n,m} \iff \forall c_{i,j} = \sum_{p=1}^{k} a_{i,p} \cdot b_{p,j}$.
Умножение определено не для всех матриц: для того, чтобы можно было перемножить две матрицы, необходимо чтобы число столбцов первой матрицы было равно числу строк второй матрицы.

Замечание 1.4.7. Умножение матриц в общем случае некоммутативно $A \cdot B \neq B \cdot A$, причем умножение в обратную сторону может быть даже не определено. Матрицы, для которых выполняем равенство $A \cdot B = B \cdot A$ называют коммутирующими.

Замечание 1.4.8. Умножение ассоциативно $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, если не менять порядок множителей.

Def 1.4.9. Если поменять местами строки и столбцы матрицы $A_{n,k}$, то получится транспонированная матрица $A^T_{k,n}$.

Замечание 1.4.10. Некоторые виды матриц.

1. Квадратная $(n = m)$ $\begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$
2. Треугольная
   (a) Верхняя $\begin{pmatrix} . & . & . \\ 0 & . & . \\ 0 & 0 & . \end{pmatrix}$
   (b) Нижняя $\begin{pmatrix} . & 0 & 0 \\ . & . & 0 \\ . & . & . \end{pmatrix}$
3. Диагональная $\operatorname{diag}(a_{1,1} \dots a_{n,n}) = \begin{pmatrix} . & 0 & 0 \\ 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & . \end{pmatrix}$
4. Ступенчатая $\begin{pmatrix} . & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . \end{pmatrix}$
5. Нулевая $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
6. Единичная $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
7. Симметричная $(A^T = A)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
8. Антисимметричная $(A^T = -A)$ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

1.5. Определители. Свойства.

Def 1.5.1. Минор элемента $a_{i,j}$ это определитель матрицы, полученной вычеркиванием i-ой строки и j-ого столбца (при сохранении порядка элементов).

Def 1.5.2. Алгебраическим дополнением элемента $a_{i,j}$ называется $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot M_{i,j}$, где $M_{i,j}$ это минор элемента $a_{i,j}$.

Def 1.5.3. Определитель матрицы это сумма произведений элементов в строке/столбце и их алгебраических дополнений.

$$|A| = \det A = \sum_{j/i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot M_{i,j} \cdot a_{i,j}$$

Причем в данном выражении либо $i = const$, тогда говорят о разложении матрицы по строке, либо $j = const$, тогда говорят о разложении по столбцу. Запись j/i означает, что мы идем либо по строке, либо по столбцу, в то время как другая переменная остается постоянной.

Замечание 1.5.4. Можно вычислить определитель только квадратной матрицы.

Определитель можно ввести по-другому.

Def 1.5.5. Для вычисления определителя необходимо

1. Взять из каждой строки и каждого столбца один элемент без повтора номера строки/столбца.
2. Составить произведение n множителей $a_{1,\alpha} \cdot a_{2,\beta} \cdot a_{3,\gamma} \cdot \ldots \cdot a_{n,\omega}$ (множители сортируются по номеру строки, из которой они были взяты).
3. Если полученная перестановка **номеров столбцов** четная, то это произведение берется с плюсом. Иначе — с минусом.
4. Определитель будет равен сумме всех полученных произведений.

Замечание 1.5.6. Перестановка чисел $a_1, \ldots, a_p$ называется четной, если её можно отсортировать за четное число обменов соседних элементов. В противном случае она называется нечетной.

Пример 1.5.7. Перестановка $(2, 3, 1)$ — четная, потому что $(2, 3, 1) \to (2, 1, 3) \to (1, 2, 3)$. Потребовалось 2 обмена соседних элементов, чтобы отсортировать перестановку, значит она четная.
Перестановка $(2, 1, 3)$ — нечетная, потому что $(2, 1, 3) \to (1, 2, 3)$. Потребовался один обмен, значит перестановка нечетная.

Теорема 1.5.8. Значение определителя не зависит от выбора строки/столбца, по которому он будет разложен.

Теорема 1.5.9. Определитель матрицы с нулевой строкой/столбцом равен нулю.

□ Разложим по этой строке/столбцу. ■

Теорема 1.5.10. Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

□ Разложим определитель исходной матрицы по произвольной строке. Далее разложим определитель транспонированной матрицы по соответствующему столбцу. Будем раскладывать определители, пока не дойдем до произведений чисел. В итоге получим два одинаковых выражения. ■

Теорема 1.5.11. Перестановка строк/столбцов местами меняет знак определителя на противоположный.

□ Мат. индукция. В качестве *базы* рассмотрим матрицу 2×2.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$$

Заметим, что

$$a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} = -(a_{2,1}a_{1,2} - a_{1,1}a_{2,2}) = \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{1,1} & a_{1,2} \end{vmatrix}$$

Получается, если поменять местами первую и вторую строку, то определитель поменяет свой знак.
Далее *переход*. Пусть для матрицы $k \times k$ выполняется это свойство. Рассмотрим матрицу $(k+1) \times (k+1)$.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{1,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \dots & a_{k+1,k+1} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{1+i} a_{1,i} M_{1,i}$$

В данной сумме все миноры имеют размер $k \times k$. Поменяем местами i-тую и j-тую строку. Обозначим $M'_{1,i} = -M_{1,i}$. Тогда получим

$$\det A'_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{1+i} a_{1,i} M'_{1,i} = -\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{1+i} a_{1,i} M_{1,i} = -\det A_{k+1}$$

Доказательство для столбцов аналогично. ■

Теорема 1.5.12. Если в матрице есть равные строки/столбцы, то определитель равен нулю.

□ Поменяем местами равные строки/столбцы. По 1.5.11, определитель должен изменить свой знак, однако матрица осталась прежней. Такое возможно только в случае, если определитель равен нулю. ■

Теорема 1.5.13. Если умножить строку/столбец на число, то определитель также умножится на это число.

□ Разложим определитель по строке i, которую мы умножили на некоторое число λ.

$$\begin{aligned} |A'| &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot \lambda a_{i,j} \cdot M_{i,j} \\ &= \lambda \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{i,j} \cdot M_{i,j} \\ &= \lambda \, |A| \end{aligned}$$

■

Lm 1.5.14. Если все элементы k-той строки/столбца определителя представлены в виде сумм $a_{k,j} + b_{k,j}$, то определитель можно представить в виде суммы соответствующих определителей.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} + b_{k,1} & a_{k,2} + b_{k,2} & \dots & a_{k,n} + b_{k,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k,1} & b_{k,2} & \dots & b_{k,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Преобразуем исходный определитель.

$$\sum_{i_1,i_2,\dots,i_n} a_{1,i_1}\dots(a_{k,i_k}+b_{k,i_k})\dots a_{n,i_n}(-1)^{p\setminus\{i_1,i_2,\dots,i_n\}} =$$

$$\sum_{i_1,i_2,\dots,i_n} \dots a_{k,i_k}\dots(-1)^{p\setminus\{i_1,i_2,\dots,i_n\}} + \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n} \dots b_{k,i_k}\dots(-1)^{p\setminus\{i_1,i_2,\dots,i_n\}} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k,1} & b_{k,2} & \dots & b_{k,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Теорема 1.5.15. Если к любой строке/столбцу можно добавить другую строку/столбец умноженную на число, то определитель матрицы в этом случае не изменится.

☐ Требуется доказать, что

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1}+\lambda a_{i,1} & a_{k,2}+\lambda a_{i,2} & \dots & a_{k,n}+\lambda a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

■

Определитель, стоящий в правой части этого равенства, можно представить в виде суммы двух определителей, один из которых является исходным, а второй имеет две пропорциональные друг другу строки и, следовательно, равен нулю.

Теорема 1.5.16. Если одна из строк/столбцов является линейной комбинацией других строк/столбцов, то определитель матрицы равен нулю.

☐ По 1.5.14, определитель такой матрицы можно разложить на несколько других, которые будут иметь две пропорционально друг другу строки $\Longrightarrow$ будут равны нулю $\Longrightarrow$ начальный определитель равен нулю. ■

Теорема 1.5.17. Определитель обратной матрицы равен $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

☐ Подставим в 1.5.20 вместо B — A^{-1}, а вместо $A \cdot B$ — единицу. ■

Def 1.5.18. Главной диагональю матрицы называются элементы, для которых номер их строки равен номеру их столбца.

Теорема 1.5.19. Определитель диагональной или треугольной матрицы равен произведению элементов на главной диагонали.

☐ **Диагональная матрица:** разложим по первому столбцу

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & 0 \\ 0 & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Остальные слагаемые уйдут, т.к. имеют коэффициент ноль. Продолжая раскладывать по первому столбцу, мы получим искомое равенство.

$$|A| = a_{1,1} \cdot \ldots \cdot a_{n,n}$$

Треугольная матрица: все аналогично, но

1. Если он верхняя, то нужно раскладывать по первому столбцу.

2. Если она нижняя, то по первой строке.

■

Теорема 1.5.20. Определитель произведения матриц равен произведению определителей матриц.

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

1.6. Обратная матрица. Существование и единственность.

Def 1.6.1. Матрица A^{-1} называется обратной матрицей для матрицы A, если

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Def 1.6.2. Матрица называется невырожденной, если её определитель не равен нулю. В противном случае она называется вырожденной.

Теорема 1.6.3. У каждой невырожденной матрицы существует ровно одна обратная матрица.

$\square$ От противного: пусть A' и A'' обратные матрицы к матрице A, тогда по определению получаем

$$\begin{aligned} A \cdot A' = E = A \cdot A'' \quad & \Big| \cdot A' \text{ (слева)} \\ A' \cdot A \cdot A' = A' \cdot A \cdot A'' & \\ E \cdot A' = E \cdot A'' & \\ A' = A'' & \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Теорема 1.6.4. У любой квадратной невырожденной матрицы есть обратная.

$\square$ Рассмотрим матрицу $D = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, где $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, M_{ij} — минор элемента a_{ij} матрицы A. Далее рассмотрим произведение

$$\frac{1}{\Delta} D^T \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}M_{21}}{\Delta} & \frac{a_{12}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{22}(-1)^{2+1}M_{21}}{\Delta} \\ \frac{a_{11}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{21}(-1)^{2+2}M_{22}}{\Delta} & \frac{a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{22}(-1)^{2+2}M_{22}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Заметим, что

$$a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}M_{21} = \Delta$$

как разложение по первому столбцу. Проверив все элементы, получим

$$\frac{1}{\Delta} D^T \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{\Delta} & \frac{0}{\Delta} \\ \frac{0}{\Delta} & \frac{\Delta}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$\blacksquare$

Замечание 1.6.5. Обратная матрица существует только для невырожденных матриц.

Вычисление обратной матрицы с помощью определителя

1. Вычислим определитель исходной матрицы.
2. Составим матрицу алгебраических дополнений (каждый элемент исходной матрицы нужно заменить на его алгебраическое дополнение).
3. Транспонируем получившуюся матрицу. Обозначим полученную матрицу D.
4. Обратная матрица будет равна $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot D$.

Вычисление обратной матрицы методом элементарных преобразований

1. Припишем к исходной матрице единичную матрицу такого же размера.
2. С помощью элементарных преобразований сделаем из левой половины получившейся матрицы единичную матрицу (при этом элементарные преобразования затрагивают всю матрицу, а не только её половину).
3. Матрица, которая окажется в правой половине получившейся матрицы, будет обратной матрицей к исходной матрице.

Пример 1.6.6.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Приписываем } E} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-3I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II\cdot(-0.5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

1.7. Определение СЛАУ. Совместность, определенность. Теорема Крамера.

Def 1.7.1. Система линейных алгебраических уравнений (*СЛАУ*) это

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & + & a_{n,m}x_m & = & b_n \end{cases}$$

Замечание 1.7.2. СЛАУ может быть записана в векторном виде как

$$\overrightarrow{a_1}x_1 + \overrightarrow{a_2}x_2 \dots \overrightarrow{a_m}x_m = \overrightarrow{b}$$

где $\overrightarrow{a}_i = (a_{1,i} \dots a_{n,i})^T$ и $\overrightarrow{b} = (b_1 \dots b_n)^T$. Также СЛАУ может быть записана в матричном виде: $AX = B$, где $A = (\overrightarrow{a}_1 \dots \overrightarrow{a}_m)$, а B это матрица-столбец (размера $n \times 1$).

Def 1.7.3. Решение СЛАУ $(x_1 \dots x_n)$ это упорядоченный набор, который удовлетворяет всем уравнениям СЛАУ.

Def 1.7.4. СЛАУ называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае СЛАУ называется несовместной.

Def 1.7.5. Совместная СЛАУ называется определенной, если она имеет ровно одно решение, в противном случае СЛАУ называется неопределенной.

Теорема 1.7.6. (Крамера) Если в СЛАУ $AX = B$ выполнено условие $\det A \neq 0$, то эта СЛАУ имеет единственное решение.

□ Докажем существование решения. Пусть $X^* = A^{-1}B$ решение данной системы, тогда

1. Обратная матрица A^{-1} определена, т.к. $\det A \neq 0$ по условию теоремы.
2. Умножение определено, т.к. размерности матриц корректны $A^{-1}_{n,n} \cdot B_{n,1}$.

Докажем единственность решения. Пусть $X_1 \neq X_2$ это различные решения, тогда $X_1 = A^{-1}B = X_2 = A^{-1}B$, т.е. эти решения равны. ■

Замечание 1.7.7. СЛАУ в которых $\det A \neq 0$ называют СЛАУ Крамеровского типа.

Решение СЛАУ методом Крамера

Если данная СЛАУ Крамеровского типа, то её решением является вектор $(x_1 \dots x_n)$, где

1. $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$
2. Δ это определитель исходной матрицы.
3. Δ_j это определитель матрицы, полученной заменой j-го столбца на столбец B.

1.8. Линейная зависимость арифметических векторов. Линейная зависимость системы одного и двух векторов.

Def 1.8.1. Линейной комбинацией системы векторов одной размерности $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ называется $\Lambda = \lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_n\alpha_n$, где $\forall\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Def 1.8.2. Линейная комбинация называется нулевой, если она равна нулю $\lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_n\alpha_n = 0$.

Def 1.8.3. Нулевая линейная комбинация называется тривиальной, если $\forall\lambda_i = 0$.

Замечание 1.8.4. Разложить вектор по системе означает представить его в виде линейной комбинации этой системы.

Def 1.8.5. Система векторов одной размерности $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ называется линейно зависимой, если найдется её нулевая нетривиальная линейная комбинация $\lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_n\alpha_n = 0$ $(\exists\lambda_i \neq 0)$.

Есть и другое определение линейно зависимой системы.

Def 1.8.6. Система векторов одной размерности $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ называется линейно зависимой, если один из векторов этой системы является линейной комбинацией других векторов этой системы.

Теорема 1.8.7. Определения 1.8.5 и 1.8.6 равносильны.

□ По 1.8.5 линейной зависимости система векторов называется линейно зависимой, если $\lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_n\alpha_n = 0$ $(\exists\lambda_i \neq 0)$. Найдем $\lambda_i \neq 0$ и разделим на него, затем перенесем все векторы (кроме того, у кого был коэффициент λ_i) в правую часть

$$\alpha_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\alpha_1 \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i}\alpha_n$$

Получается, что α_i это линейная комбинация остальных векторов системы. ■

Def 1.8.8. Система векторов одной размерности $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ называется линейно независимой, если её линейная комбинация равна нулю только в том случае, когда она тривиальна $\lambda_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_n\alpha_n = 0 \Longrightarrow \forall\lambda_i = 0$.

Теорема 1.8.9. Система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

$\square$ Рассмотрим нулевую линейную комбинацию этой системы $\lambda\vec{a} = 0$.
$\Longleftarrow$ Если $\vec{a} = 0$, то найдется бесконечно количество λ, таких что это равенство верно $\Longrightarrow$ система линейно зависима.
$\Longrightarrow$ Если система линейно зависима, то существует бесконечное количество λ таких, что равенство $\lambda\vec{a} = 0$ верно. Значит вектор $\vec{a}$ может быть равен только нулю. ■

Теорема 1.8.10. Система из двух векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны.

$\square$ Рассмотрим нулевую линейную комбинацию этой системы $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = 0$.
$\Longleftarrow$ Если векторы коллинеарны, то $\vec{a} = k\vec{b}$, подставим это в линейную комбинацию $(\lambda k + \mu)\vec{b} = 0$.
Можно найти сколько угодно много λ и μ таких, что $\lambda k + \mu = 0$ Значит существует бесконечное число нетривиальных линейных комбинаций $\Longrightarrow$ система линейно зависима.
$\Longrightarrow$ Если система линейно зависима, то либо $\lambda \neq 0$, либо $\mu \neq 0$ (либо и то, и другое). Пусть для определенности $\lambda \neq 0$ (для $\mu \neq 0$ доказательство аналогично).
Разделим равенство на λ и перенесём все, кроме вектора $\vec{a}$, направо: $\vec{a} = -\frac{\mu}{\lambda}\vec{b}$ Таким образом векторы коллинеарны. ■

1.9. Теоремы о линейно зависимых и независимых системах векторов.

Теорема 1.9.1. Надсистема линейно зависимой системы линейно зависима.

$\square$ Рассмотрим исходную систему, т.к. она линейно зависима, то найдутся такие коэффициенты $\lambda_1 \ldots \lambda_n$, при которых линейная комбинация векторов этой системы будет равна нулю.
При это среди этих коэффициентов точно будет хотя бы один ненулевой (в противном случае линейная комбинация была бы тривиальной, а значит система была бы линейно независимой). Далее рассмотрим надсистему, возьмём векторы из исходной системы с коэффициентами $\lambda_1 \ldots \lambda_n$, а остальные векторы с коэффициентом 0.
Мы получили нулевую линейную комбинацию, в которой точно найдется ненулевой коэффициент, из чего следует, что надсистема линейно зависима. ■

Теорема 1.9.2. Подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

$\square$ От противного: если подсистема была бы линейно зависимой, то по теореме о линейной зависимости надсистемы векторов исходная система (которая является надсистемой для рассматриваемой подсистемы) также была бы линейно зависимой.
Получили противоречие, а значит подсистема линейно независима. ■

1.10. Базис. Определение, основные теоремы.

Def 1.10.1. Базисом $\mathcal{E}$ системы векторов A называется система, обладающая следующими свойствами

1. $\mathcal{E} \subset A$
2. $\mathcal{E}$ линейно независимая система.
3. $\forall\vec{a} \in A \Big| \mathcal{E} \cup \vec{a}$ линейно зависимая система.

Замечание 1.10.2. Последнее свойство можно переформулировать так: $\forall\vec{a} \in A \Big| \vec{a}$ разложим по системе $\mathcal{E}$.

Теорема 1.10.3. Любой вектор системы разложим по базису единственным образом.

$\square$ От противного: пусть существуют два разложения вектора $\vec{a}_p$ по базису $\mathcal{E} = \{\mathbb{e}_1 \ldots \mathbb{e}_n\}$. Вычтем первое из второго

$$\begin{aligned}\vec{a}_p &= \lambda_1\mathbb{e}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbb{e}_n\\ \vec{a}_p &= \mu_1\mathbb{e}_1 + \ldots + \mu_n\mathbb{e}_n\\ 0 &= (\mu_1 - \lambda_1)\mathbb{e}_1 + \ldots + (\mu_n - \lambda_n)\mathbb{e}_n\end{aligned}$$

Т.к. $\mathcal{E}$ — базис, то у него есть только одна нулевая линейная комбинация — тривиальная. Значит $\mu_i - \lambda_i = 0 \Longrightarrow \mu_i = \lambda_i\ \forall i \in [1; n]$, т.е. разложения равны. ■

<u>Lm</u> 1.10.4. Если $\overline{\mathcal{E}} \subset A$, $\overline{\mathcal{E}}$ линейно независима, но не является базисом, то $\exists\vec{a}_p \in A \setminus \overline{\mathcal{E}} \Big| \overline{\mathcal{E}} \cup \vec{a}$ является линейно независимой системой.

$\square$ От противного: если $\forall a_p \in A \backslash \overline{\mathcal{E}} \Big| \overline{\mathcal{E}} \cup \vec{a}$ линейно зависимая система, то $\mathcal{E}$ это базис A по определению. Противоречие. ■

Теорема 1.10.5. Во всякой системе, содержащий хотя бы один ненулевой вектор, можно выделить базис.

□ Пусть у нас есть пустая подсистема.

1. Добавим в подсистему один ненулевой вектор, так чтобы она осталась линейно независимой.

2. Если подсистема является базисом, то теорема верна.

3. Если подсистема не является базисом, то вернёмся к шагу 1. При этом по лемме 1.10.4 обязательно найдется вектор, которым можно дополнить подсистему.

■

1.11. Ранг матрицы. Элементарные преобразования.

Def 1.11.1. Рангом системы векторов называется количество базисных векторов $\operatorname{rank} A$

Замечание 1.11.2. Пусть $\{\mathbb{e}\}_{j=1}^{k}$ это базис системы $\{A\}_{i=1}^{n}$, тогда $k \leqslant n$ и при этом

1. Если $k = n$, то A линейно независимая система.

2. Если $k < n$, то A линейно зависимая система.

Def 1.11.3. Ранг матрицы это ранг системы её строк или ранг системы её столбцов (они равны).

Lm 1.11.4. Система из $n+1$ столбцов высоты n всегда линейно зависима.

□ Если первые n столбцов линейно зависимы, то и вся система зависима. Если первые n столбцов независимы, то они образуют квадратную невырожденную матрицу A порядка n.
Составим матричное уравнение $AX = b$, где b это последний столбце исходной системы. Т.к. матрица A не вырождена, то решением данной системы будет $X = A^{-1}b$. Мы нашли такой набор коэффициентов X, что b является линейной комбинацией системы A, а значит что исходная система линейно зависима. ■

Теорема 1.11.5. Ранг системы строк равен рангу системы столбцов.

□ Несложно доказать, что при элементарных операциях ранг матрицы не изменяется. Вычтем из всех небазисных строк такую линейную комбинацию базисных строк, чтобы они обнулились, при этом базисные строки останутся неизменными.
Рассмотрим матрицу D, которая расположена на пересечении базис строк и базисных столбцов. Она также останется неизменной, т.к. базисные строки не изменились.
Покажем, что столбцы матрицы D линейно независимы. Если бы они были линейно зависимыми, то мы могли бы дополнить их нулями и при этом линейная зависимость сохранилась. Однако при дополнении этих столбцов нулями мы получаем базисные столбцы исходной матрицы (после обнуления линейно зависимых строк), а они линейно независимы. Получаем противоречие.
По лемме 1.11.4 получаем, что столбцов в матрице D (а значит и базисных столбцов в исходной матрице) не больше, чем строк в матрице D (а значит и базисных строк в исходной матрице), в противном случае столбцы были бы линейно зависимы, что противоречит доказанному выше.
Таким образом, получаем, что столбцовый ранг не больше строчного ранга. Проделав аналогичные операции для транспонированной исходной матрицы и учитывая, что ранг столбцов исходной матрицы это ранг строк транспонированной матрицы и наоборот, получим, что строчный ранг не больше столбцового. Это значит, что строчный и столбцовый ранги равны. ■

Замечание 1.11.6. К элементарным преобразованиям относятся

1. Умножение строки на ненулевое число.

2. Перестановка строк.

3. Прибавление одной строки к другой.

Def 1.11.7. Матрица A эквивалентна матрице B ($A \sim B$), если она получена из матрицы B с помощью элементарных преобразований.

1.12. Метод Гаусса (приведение матрицы к ступенчатому виду). Вычисление ранга.

1. Рассмотрим матрицу A, изначально первый столбец будет текущим.

2. Найдем строчку, в которой в текущем столбце стоит ненулевое число.

3. Разделим данную строчку на это число и поменяем её со строчкой, номер которой равен номеру текущего столбца.

4. Вычтем эту строчку (умноженную на необходимые коэффициенты) из всех других строк так, чтобы обнулить все элементы текущего столбца, которые ниже главной диагонали.

5. Проделаем шаги 2-4 последовательно для всех столбцов слева направо.

6. Получим матрицу ступенчатого вида.

Пример 1.12.1.

$$\begin{pmatrix}2&4&6\\1&4&7\\3&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{I\cdot 0.5}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&4&7\\3&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{II-I}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&4\\3&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{II\cdot 0.5}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\3&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{III-3\cdot I}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&-4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{III+4\cdot II}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&3\\0&0&4\end{pmatrix}$$

Замечание 1.12.2. Ранг матрицы равен количеству её ненулевых строк после приведения к ступенчатому виду.

Замечание 1.12.3. Этот метод можно использовать для решения СЛАУ.

1.13. Теория СЛАУ. Теорема Кронекера-Капелли. Два случая совместности (определенные и неопределенные СЛАУ).

Замечание 1.13.1. Матрица $A \mid B$ называется расширенной матрицей системы $AX = B$ Она получается путем приписывания столбца B к матрице A справа.

Теорема 1.13.2. (Кронекера-Капелли) СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы равен рангу обычной матрицы.

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A \mid B) \iff AX = B \text{ совместна}$$

$\square$ $\Longleftarrow$ Если СЛАУ $AX = B$ совместна, то столбец B разложим по матрице A (т.к СЛАУ имеет решение), а значит и по базису этой матрицы.
Ранг исходной матрицы это количество линейно независимых столбцов, т.к. новый столбец B раскладывается по базису, то количество базисных столбцов не изменится, а значит и ранг не изменится.
$\Longrightarrow$ Если $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|B)$, то базисы A и $A|B$ совпадают, а значит столбец B и матрица A разложимы по этому базису.
Таким образом столбец B разложим по матрице A (разложим B по общему базису, а потом добавим оставшиеся столбцы из A с нулевыми коэффициентами). Если столбец B разложим по матрице A, значит $\exists X \,\Big|\, AX = B$, т.е. система совместна. $\blacksquare$

Теория решения СЛАУ (анализ случаев по теореме Кронекера-Капелли)

Рассмотрим «вертикальную матрицу» $A_{k,n}$ $(n < k)$. $\operatorname{rank} A \leqslant n$, значит как минимум $k - n$ строк можно обнулить с помощью метода Гаусса, получаем

$$A_{k,n} = \left(\begin{array}{cc|c} \cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot \end{array}\right) \longrightarrow A_{k,n} = \left(\begin{array}{cc|c} \cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\\ 0&0&*\\ 0&0&* \end{array}\right)$$

где на месте $*$ может стоять любое число.

1. Если хотя бы одна из $*$ не равна нулю, то система несовместна.
2. Если все $*$ равны нулю, то отбрасываем все нулевые строки и работаем с квадратной матрицей (используя теорему 1.13.2 и метод Гаусса).

Рассмотрим «горизонтальную матрицу» $A_{k,n}$ $(n > k)$. Методом Гаусса её можно свести к ступенчатому виду.

$$A_{k,n} = \left(\begin{array}{cccc|c} \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot \end{array}\right) \longrightarrow A_{k,n} = \left(\begin{array}{cccc|c} \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ 0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ 0&0&\cdot&\cdot&\cdot \end{array}\right)$$

Этой матрице соответствует совместная, но неопределенная СЛАУ. Переменные, которым «не хватило» строк в матрице (в данном случае это x_4) называются свободными и могут принимать любые значения, остальные переменные называются связными (зависимыми). Их количество равно $n - \operatorname{rank} A$

Замечание 1.13.3. Не смотря на то, что такая СЛАУ имеет бесконечно много решений, не любой набор будет её решением, т.е. решения это СЛАУ имеют определенную структуру.

1.14. Решение однородной СЛАУ. Структура решения неоднородной СЛАУ.

Def 1.14.1. Однородной СЛАУ называется СЛАУ вида $AX = 0$.

Её общее решение представимо в виде $\mathbb{X} = c_1X_1 + \ldots + c_nX_n$, где $c_i \in \mathbb{R}$ и $\{X_i\}_{i=1}^n$ это ФСР данной СЛАУ. Таким образом общее решение это линейная оболочка ФСР.

Теорема 1.14.2. Однородная СЛАУ всегда совместна: у неё есть тривиальное (нулевое) решение $X = 0$. Нетривиальное решение существует тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} A < n$ (где n количество переменных), т.е. система столбцов линейно зависима.

□ AX можно рассматривать как линейную комбинацию столбцов из матрицы A с коэффициентами X. Если столбцы A линейно независимы, то у них существует только тривиальная нулевая линейная комбинация, т.е. уравнение $AX = 0$ имеет только тривиальное решение. ■

Теорема 1.14.3. Линейная комбинация решений однородной СЛАУ также является решением этой СЛАУ.

□ Пусть X решение СЛАУ $AX = 0$, тогда $A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda \cdot 0 = 0$.
Пусть X_1 и X_2 решения СЛАУ $AX = 0$, тогда $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0$. ■

Def 1.14.4. Неоднородной СЛАУ называется СЛАУ вида $AX = B$, где $B \neq 0$.

Теорема 1.14.5. Общее решение неоднородной СЛАУ $AX = B$ представимо в виде суммы общего решения соответствующей однородной СЛАУ ($AX = 0$) и некого частного решения неоднородной системы.

□ Пусть X^* частное решение неоднородной СЛАУ, а $\overline{X}$ общее решение однородной, тогда $A(X^* + \overline{X}) = AX^* + A\overline{X} = B + 0 = B$. ■

1.15. Линейное координатное пространство. Базис, размерность.

Def 1.15.1. Линейным координатным пространством называется линейное пространство числовых наборов одной размерности n.

Замечание 1.15.2. Базис линейного пространства определяется аналогично обычному базису (подробнее в 1.10.).

Def 1.15.3. Коэффициенты разложения некого вектора по базису называется координатами в данном базисе.

Def 1.15.4. Линейное координатное пространство называется n-мерным (обозначается L^n, $\dim L$ размерность пространства), если найдется линейно независимая система векторов размера n, такая что любая система вектором размерности $n + 1$ будет линейно зависимой.

Теорема 1.15.5. Мерность пространства L^n равна размеру базиса этого пространства.

□ $\Longleftarrow$ Если $\mathcal{E} = \{\mathbb{e}_i\}_{i=1}^n$ базис L^n, то по определению базиса не найдется системы векторов размерности $n + 1$, такой что она будет линейно независимой, при этом сама система $\mathcal{E}$ линейно независима. Это значит, что $\dim L = n$ по определению размерности пространства.
$\Longrightarrow$ По определению мерности линейного координатного пространства найдется такая линейно независимая система $\mathcal{E} = \{\mathbb{e}_i\}_{i=1}^n$, что любая система размера $n+1$ будет линейно зависимой. Покажем, что данная система является базисом линейного пространства L. Рассмотрим систему $\mathcal{E} \cup x$, где x произвольный элемент из L^n.
Т.к. по определению мерности линейного координатного пространства она линейно зависима, то существуют c_i, такие что $xc_0 + \mathbb{e}_1 c_1 + \ldots + \mathbb{e}_n c_n = 0$. При этом $c_0 \neq 0$ (в противном случае $\mathbb{e}_1 c_1 + \ldots + \mathbb{e}_n c_n = 0$, а это возможно только если $\forall c_i = 0$, что противоречит определению линейно зависимой системы: должна найтись нетривиальная нулевая комбинация). Разделим на c_0 и выразим x.

$$x = -\frac{c_1}{c_0}\mathbb{e}_1 - \ldots - \frac{c_n}{c_0}\mathbb{e}_n$$

Значит мы представили x в виде линейной комбинации системы $\mathcal{E}$. Т.к. x произвольный, то любой $x \in L^n$ может быть представлен в виде линейной комбинации системы $\mathcal{E}$. Значит система $\mathcal{E}$ базис по определению, причем её размер совпадает с размерностью L^n. ■

1.16. Подпространство. Линейная оболочка.

Def 1.16.1. L' называется подпространством линейного пространства L, если

1. $L' \subset L$
2. Любая линейная комбинация элементов из L' лежит в L'.

Замечание 1.16.2. Линейное подпространство является линейным пространством

1. Нейтральный элемент получается по 2° для $\lambda = 0$.
2. Обратный элемент получается по 2° для $\lambda = -1$.
3. Остальные аксиомы линейного пространства очевидны.

Def 1.16.3. L' называется собственным подпространством L, если $L' \neq \varnothing$ и $L' \neq L$. В противном случае L' называется несобственным подпространством.

Теорема 1.16.4. Размерность собственного подпространства меньше размерности пространства.

$$L' \subset L \Longrightarrow \dim L' < \dim L$$

$\square$ От противного, пусть $\dim L' = \dim L$. $L' \subset L \Longrightarrow \exists x \in L \,\Big|\, x \notin L'$.
Мы предположили, что $\dim L' = \dim L$, значит размерности базисов также совпадают. Выберем такую систему $\{\mathbb{e}_i\}$, которая будет базисом и для L', и для L. Разложим x по этой системе $x = \sum \lambda_i \mathbb{e}_i$.
По определению подпространства, любая линейная комбинация элементов этого подпространства должна лежать в этом подпространстве, т.е. $x \in L'$. Противоречие. $\blacksquare$

Def 1.16.5. Линейной оболочкой системы векторов $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ называется совокупность всевозможных линейных комбинаций векторов этой системы.

Замечание 1.16.6. Система векторов $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ может содержать линейно зависимые векторы.

Замечание 1.16.7. Линейная оболочка нулевого вектора это несобственное подпространство.

Замечание 1.16.8. Допустим, мы взяли несколько векторов из линейного пространства. Тогда их линейная оболочка будет являться подпространством исходного линейного пространства.

Def 1.16.9. Суммой подпространств L_1 и L_2 называется

$$L_1 + L_2 = \left\{ z = x + y \,\middle|\, \forall x \in L_1 \wedge \forall y \in L_2 \right\}$$

Def 1.16.10. Пересечением подпространств L_1 и L_2 называется

$$L_1 \cdot L_2 = \left\{ x \,\middle|\, \forall x \in L \,\middle|\, x \in L_1 \wedge x \in L_2 \right\}$$

Def 1.16.11. Прямой суммой подпространств L_1 и L_2 называется

$$L_1 \oplus L_2 = \left\{ x = x_1 + x_2 \,\middle|\, \exists!\, x_1 \in L_1 \wedge \exists!\, x_2 \in L_2 \right\}$$

Замечание 1.16.12. Другими словами, (обычная) сумма подпространств L_1 и L_2 называется прямой суммой, если каждой вектор из этой суммы единственным образом разложим по подпространствам L_1 и L_2.

Теорема 1.16.13. (Формула Грассмана) Пусть L_1 и L_2 подпространства линейного пространства L, тогда

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 \cdot L_2) + \dim(L_1 + L_2)$$

1.17. Изоморфизм линейных пространств.

Def 1.17.1. Биекция $F\colon L \to L'$ называется изоморфизмом, если

1. $\forall x \in L (x' \in L')\colon x' = F(x)$
2. $F(x + y) = x' + y' = F(x) + F(y)$
3. $F(\lambda x) = \lambda x' = \lambda F(x)$

Замечание 1.17.2. Последние два свойства определяют линейность отображения (сохранение линейной структуры пространства). Иными словами изоморфизм сохраняет «расстояние» между элементами.

Замечание 1.17.3. Размерности изоморфных пространств совпадают: L изоморфно L' $\Longrightarrow \dim L = \dim L'$.

Замечание 1.17.4. При изоморфизме линейная комбинация переходит в линейную комбинацию (сохраняя тривиальности/нетривиальность), а нулевой вектор в нулевой вектор.

$$F(\varnothing) = F(0 \cdot X) = 0 \cdot F(X) = 0 \cdot X' = \emptyset'$$

Теорема 1.17.5. Если $\dim L = \dim L'$, то L изоморфно L'.

$\square$ Пусть $\mathcal{E} = \{\mathbb{e}_i\}_{i=1}^n$ базис L, а $\mathcal{E}' = \{\mathbb{e}_i'\}_{i=1}^n$ базис L'. Разложим произвольный $x \in L$ по этому базису $\mathcal{E}$.

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{e}_i$$

Поставим этому x в соответствие x' такой, что $F(x) = x' = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{e}_i'$. Причем это соответствие взаимно-однозначно, т.к. $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ базисы. Тогда

$$\left.\begin{array}{l}F(x+y)=\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)\mathbb{e}'_i\\ \sum_{i=1}^n (x_i+y_i)\mathbb{e}'_i=\sum_{i=1}^n x_i\mathbb{e}'_i+\sum_{i=1}^n y_i\mathbb{e}'_i=x'+y'=F(x)+F(y)\end{array}\right\}\Longrightarrow F(x+y)=F(x)+F(y)$$

$$\left.\begin{array}{l}F(\lambda x)=\sum_{i=1}^n \lambda x_i\mathbb{e}'_i\\ \sum_{i=1}^n \lambda x_i\mathbb{e}'_i=\lambda\sum_{i=1}^n x_i\mathbb{e}'_i=\lambda x'=\lambda F(x)\end{array}\right\}\Longrightarrow F(\lambda x)=\lambda F(x)$$

Значит L изоморфно L' по определению. ■

1.18. Пространство решений однородной СЛАУ. Фундаментальная система решений.

Замечание 1.18.1. Пространство решений СЛАУ это линейное подпространство X исходного линейного пространства L системы, причем $\dim X < \dim L$ (в общем случае).

В пространстве решений СЛАУ можно выделить базис, который будет называться фундаментальной системой решений СЛАУ. Размерность этого базиса будет $n - \operatorname{rank} A$, где n количество переменных, а A — исследуемая СЛАУ.

Def 1.18.2. Система $\{X_i\}_{i=1}^n$ называется фундаментальной системой решений (*ФСР*) СЛАУ, если

1. Она линейно независима.
2. Добавление любого решения СЛАУ в эту систему делает её линейно зависимой.
3. Любое решение СЛАУ представимо в виде линейной комбинации векторов этой системы.

1.19. Преобразование базиса и координат.

Переход к новому базису

Пусть есть старый базис $\{\mathbb{e}_i\}_{i=1}^n$ и новый базис $\{\mathbb{e}'_i\}_{i=1}^n$ и необходимо перейти от старого базиса к новому. Разложим каждый из векторов старого базиса по новому базису.

$$\begin{cases}\mathbb{e}_1 & = a_{1,1}\mathbb{e}'_1+\ldots+a_{1,n}\mathbb{e}'_n\\ \vdots & \\ \mathbb{e}_n & = a_{n,1}\mathbb{e}'_1+\ldots+a_{n,n}\mathbb{e}'_n\end{cases}$$

Теперь рассмотрим разложение произвольного вектора x в старом базисе. Заменим в этом разложении каждый из векторов старого базиса на его разложение по новому базису, перегруппируем и получим

$$\begin{aligned}x&=b_1\mathbb{e}_1+\ldots+b_n\mathbb{e}_n\\ x&=b_1(a_{1,1}\mathbb{e}'_1+\ldots+a_{1,n}\mathbb{e}'_n)+\ldots+b_n(a_{n,1}\mathbb{e}'_1+\ldots+a_{n,n}\mathbb{e}'_n)\\ x&=(b_1a_{1,1}+\ldots c+b_na_{n,1})\mathbb{e}'_1+\ldots+(b_1a_{1,n}+\ldots+b_na_{n,n})\mathbb{e}'_n\end{aligned}$$

Замечание 1.19.1. В матричном виде переход к новому базису можно выразить так

$$B'=A^{-1}B$$

А новые координаты можно вычислить так

$$X_{B'}=A^TX_B$$

Преобразования системы координат (СК)

В качестве преобразований СК будет рассматривать только движения, причем будем рассматривать движения именно СК, а не фигуры.

Def 1.19.2. Движение это отображение пространства в себя, которые сохраняет расстояние между точками.

$$M(x,y)\xrightarrow{f}M'(x',y')$$
$$O\xrightarrow{f}O'$$
$$\left|\overrightarrow{OM}\right|=\left|\overrightarrow{O'M'}\right|$$

Существует несколько типов движений.

1. Осевая симметрия.
2. Параллельный перенос (сдвиг).
3. Поворот относительно точки.

Осевая симметрия

Def 1.19.3. Осевой симметрией называется симметрия относительно одной (или нескольких) из осей.

Координаты при этом меняются следующим образом.

Симметрия относительно OY	Симметрия относительно OX
$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$	$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

Параллельный перенос

При параллельном переносе СК на вектор $\overrightarrow{OO'}$ каждая точка переносится на этот вектор. Перенос обозначается $P_{\vec{a}}$, где $\vec{a}$ это вектор переноса.
Координаты при этом меняются следующим образом:

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

где (x_0, y_0) координаты точки O' в старой СК.

Замечание 1.19.4. При параллельном переносе направления осей сохраняются, т.е. $OX \upuparrows O'X'$ и $OY \upuparrows O'Y'$.

Поворот СК

Рассмотрим поворот СК **вокруг начала координат** на угол α **против часовой стрелки**.
Координаты при этом меняются следующим образом:

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \tag{ROT}$$

Замечание 1.19.5. Матрица $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ называется матрицей поворота. Если умножить старые координаты на неё, то получатся новые координаты. Матрица обратного преобразования является обратной матрицей к матрице поворота.

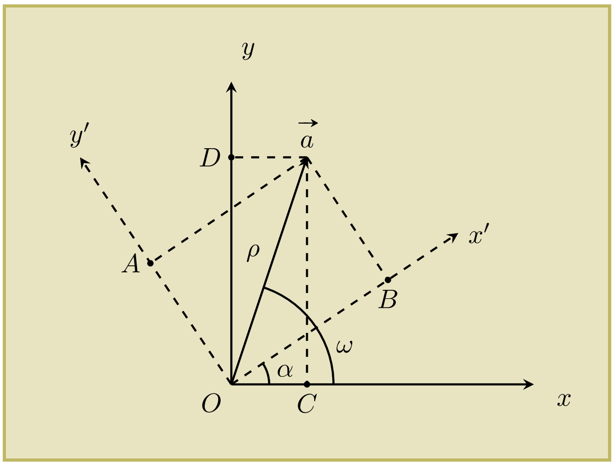


Рис. 1.19.6: Смена координат при повороте СК

Покажем, как можно получить формулы (ROT).

□ При повороте центр СК остается прежним и угол между осями не изменяется, значит $O' = O$ и $\angle(OX, OY) = \angle(OX', OY')$. Пусть $\left|\vec{a}\right| = \rho$, введём полярную СК ($O$ полюс, OX полярная ось). Обозначим (x, y) координаты вектора $\vec{a}$ в старой СК, а (x', y') — в новой. Из рис. 1.19.6 получаем

$$\begin{cases} x' = OB = \rho\cos(\omega - \alpha) \\ y' = OA = \rho\sin(\omega - \alpha) \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x = OC = \rho\cos\omega \\ y = OD = \rho\sin\omega \end{cases} \tag{2}$$

В (1) применим тригонометрические формулы.

$$\begin{cases} x' = \underbrace{\rho\cos\omega}_{x}\cos\alpha + \underbrace{\rho\sin\omega}_{y}\sin\alpha \\ y' = \underbrace{\rho\sin\omega}_{y}\cos\alpha - \underbrace{\rho\cos\omega}_{x}\sin\alpha \end{cases} \tag{3}$$

Подставим (2) в (3).

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = y\cos\alpha - x\sin\alpha \end{cases} \implies \begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

■

1.20. Скалярное произведение и норма векторов. Ортонормированный базис.

Замечание 1.20.1. Для геометрических векторов скалярное произведение определено как $\left(\vec{a}; \vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, где φ это угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Def 1.20.2. В общем случае скалярным произведением $x \in L^n$ и $y \in L^n$ называется число $G \in \mathbb{R}$, такое что

1. $(x; y) = (y; x)$
2. $(x_1 + x_2; y) = (x_1; y) + (x_2; y)$
3. $(\lambda x; y) = \lambda (x; y)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
4. $(x; x) = x^2 \geqslant 0$, причем $x^2 = 0 \implies x = 0$

Скалярное произведение обозначается как $(x; y)$ или $x \cdot y$.

Замечание 1.20.3. Совокупность второго и третьего свойств называется линейностью.

Замечание 1.20.4. **В ортонормированном базисе** для пространства числовых наборов L^n скалярное произведение определено как $(x; y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$. Если оно равно нулю, то векторы перпендикулярны (либо один из векторов нулевой).

Замечание 1.20.5. Скалярное произведение коммутативно (по первому пункту определения) и дистрибутивно

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

Def 1.20.6. В общем случае число $l \in \mathbb{R}$ называется нормой $x \in L^n$, если

1. $\|\lambda x\| = \lambda \|x\| \Big| \forall \lambda \in \mathbb{R}$
2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (неравенство Минковского)
3. $\|x\| \geqslant 0$, причем $\|x\| = 0 \implies x = 0$

Норма обозначается как $\|x\|$.

Замечание 1.20.7. Для пространства числовых наборов L^n норма определена как $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

Замечание 1.20.8. Для геометрических векторов нормой является длина вектора.

Замечание 1.20.9. **В ортонормированном базисе** нормой (зачастую) является корень квадратный из скалярного произведения элемента самого на себя $\|x\| = \sqrt{(x; x)} = \sqrt{x^2}$

Def 1.20.10. Базис называется ортогональным, если все попарные скалярные произведения векторов этого базиса равны нулю. Т.е. базис ортогонален, если все векторы в этом базисе перпендикулярны друг другу.

Замечание 1.20.11. Нулевой вектор **не ортогонален** любому вектору, т.к. он коллинеарен любому вектору, а ортогональность любому вектору привела бы к противоречию.

Def 1.20.12. Базис называется нормированным, если норма (в данном случае норма это тоже самое, что и длина) всех векторов в этом базисе равна единице.

Def 1.20.13. Базис $\{\mathbb{e}_i\}_{i=1}^n$ называется ортонормированным, если он ортогональный и нормированный

$$(e_i; e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Первая строчка дает нормированность, а вторая ортогональность.

1.21. Системы координат. Определение. Декартовы и полярная СК.

Будем говорить, что на множестве Ω введена система координат, если определена биекция S, которая действует из Ω в $\mathbb{R}$. Далее будем считать Ω геометрическим множеством (прямая, плоскость, пространство и т.д.).
Для того, чтобы ввести СК, необходимо определить

1. Точку отсчета.
2. Координатную сетку.
3. Единичные отрезки.
4. Порядок осей.

Def 1.21.1. Координатной сеткой называется семейство координатных линий/координатных плоскостей, таких что

1. Координатные линии одного семейства не пересекаются.
2. Координатные линии разных семейств пересекаются в одной точке.

Замечание 1.21.2. Для того, чтобы определить координаты в СК, необходимо провести кривые параллельные координатным линиям до их пересечения с координатными линиями другого семейства, которые выбраны в качестве осей (рис. 1.21.3). Первая координата называется абсциссой, вторая — ординатой, а третья — аппликатой.

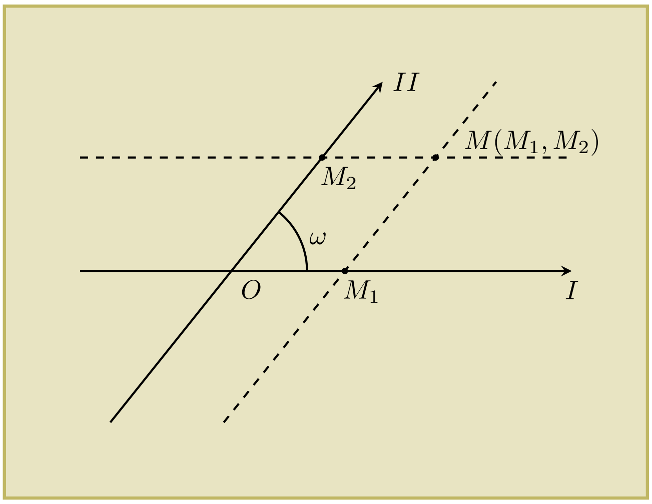


Рис. 1.21.3: Определение координат

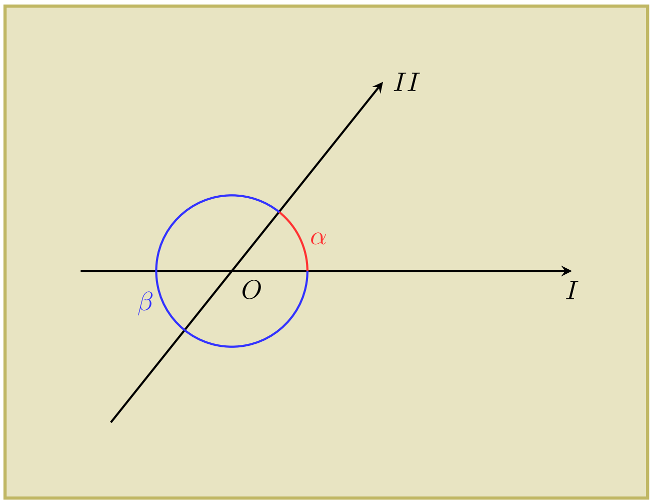


Рис. 1.21.4: Угол между осями СК

Def 1.21.5. Если поворот от первой оси ко второй происходит против часовой стрелки (обычно именно так), то СК называется правоориентированной, в противном случае СК называется левоориентированной.

Угол между осями определяется наименьшим из положительных углов (рис. 1.21.4), т.е. $\omega = \min(\alpha, \beta)$.

Def 1.21.6. Полярная система координат (рис. 1.21.7) это СК, в которой есть

1. Полюс (начало отсчета).
2. Полярная ось (луч OX).
3. Единичный отрезок.
4. Координатная сетка в виде концентрических окружностей и лучей.

При этом точка $M(\rho, \varphi)$ определяется полярным радиусом ρ и полярным углом φ (который считается против часовой стрелки). Для того, чтобы была биекция и одной точке соответствовала одна пара чисел, существуют некоторые
Ограничения

1. $0 \leqslant \rho < +\infty$
2. $0 \leqslant \varphi < 2\pi$

Замечание 1.21.8. Существует разные вариации ограничений угла и радиуса. Например,

1. (a) $-\infty < \rho < +\infty$
   (b) $0 \leqslant \varphi < \pi$
2. (a) $0 \leqslant \rho < +\infty$

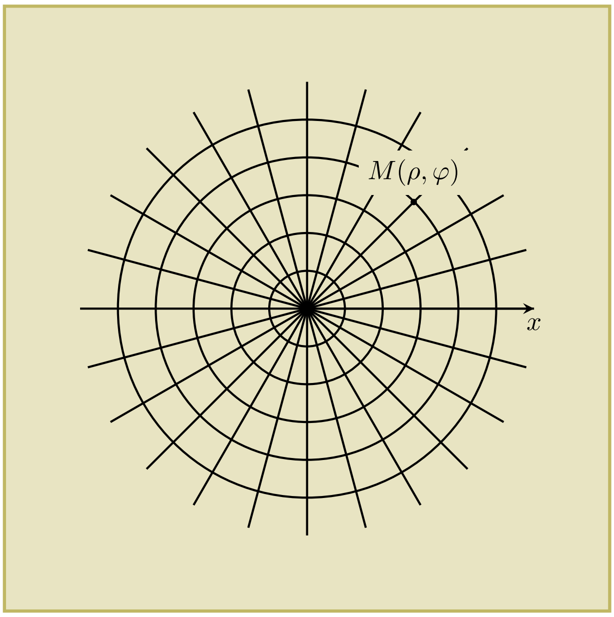


Рис. 1.21.7: Полярная система координат

(b) $-\pi \leqslant \varphi < \pi$

Существуют некоторые виды СК.

1. Прямолинейная (декартова, ДСК) — координатные линии это прямые.
2. Прямоугольная (ДСПК) — угол между координатными прямыми равен $90°$.
3. Криволинейная — координатные линии это кривые.
4. Полярная.

1.22. Геометрический вектор в координатном пространстве. Определение, характеристики.

Замечание 1.22.1. Точку (как упорядоченную пару) нельзя полноценно рассматривать как вектор, т.к. для точек на плоскости не определено сложение и умножение на число.

Каждому геометрическому вектору в координатном пространстве поставим в соответствие упорядоченный набор чисел (которые будут называться его координатами в выбранном базисе) так, чтобы данный вектор являлся линейной комбинацией базисных векторов с этим набором коэффициентов.
Выберем «удобный» ортонормированный базис в ДСК: векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ единичной длины в направлении осей (такие векторы называются декартовыми ортами). Тогда

$$\vec{a} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \qquad \vec{a} \longrightarrow (x, y)$$

Скалярное произведение определим как обычно (1.20.4):

$$\left(\vec{a}\,;\vec{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\angle(\vec{a}\,,\vec{b})$$

Def 1.22.2. Длиной (нормой) вектора будем называть

$$\left\|\vec{a}\right\| = \left|\vec{a}\right| = \sqrt{a^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Def 1.22.3. Направлением будем называть углы, которые вектор образует с осями (рис. 1.22.4), а косинусы этих углов — направляющими.

Теорема 1.22.5. Сумма квадратов направляющих равна единице.

□ Выразим косинусы через проекции вектора $\vec{a}$ на оси.

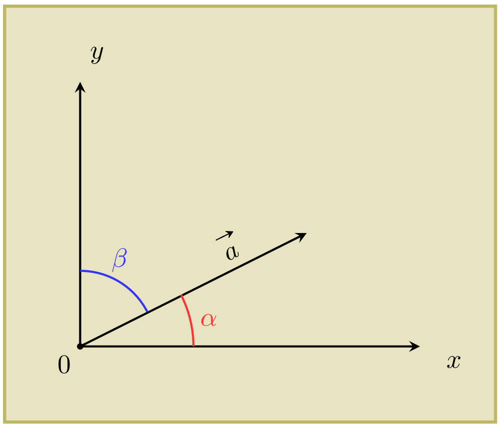


Рис. 1.22.4: Направление вектора

$$\begin{cases} a_x = \text{пр}_{Ox}\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cos\alpha \Longrightarrow \cos\alpha = \dfrac{a_x}{\left|\vec{a}\right|} \\ a_y = \text{пр}_{Oy}\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cos\beta \Longrightarrow \cos\beta = \dfrac{a_y}{\left|\vec{a}\right|} \\ a_z = \text{пр}_{Oz}\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cos\gamma \Longrightarrow \cos\gamma = \dfrac{a_z}{\left|\vec{a}\right|} \end{cases}$$

Сложим квадраты полученных косинусов и раскроем длину вектору по определению 1.22.2.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_x^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} + \frac{a_y^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} + \frac{a_z^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 1$$

■

Замечание 1.22.6. Рассмотрим вектор $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta)$. Его длина равна 1 (по основному тригонометрическому тождеству, т.к. углы α и β смежные), при этом

$$\vec{a} = \left|\vec{a}\right|(\cos\alpha, \cos\beta) \qquad \vec{e} = \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$$

Def 1.22.7. Вектор $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ называется единичным в направлении вектора $\vec{a}$, а операция приведения вектора к единичному в том же направлении называется нормированием.

1.23. Произведения векторов и их приложения.

Подробнее про скалярное произведение можно прочитать в 1.20..

Def 1.23.1. $\vec{a} \times \vec{b}$ называется векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 1.23.3), если

1. $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$, где φ это геометрический угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$
3. Тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (порядок важен) правая (см. 1.23.5).
4. Если один векторов ноль, то результат ноль, т.к. угол между произвольным вектором и нулевым вектором не определен.

Определение 1.23.1 это геометрическое определение векторного произведения, но существует также и алгебраическое определение.

Def 1.23.2. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

где $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Векторное произведение обозначается как $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}; \vec{b}]$.

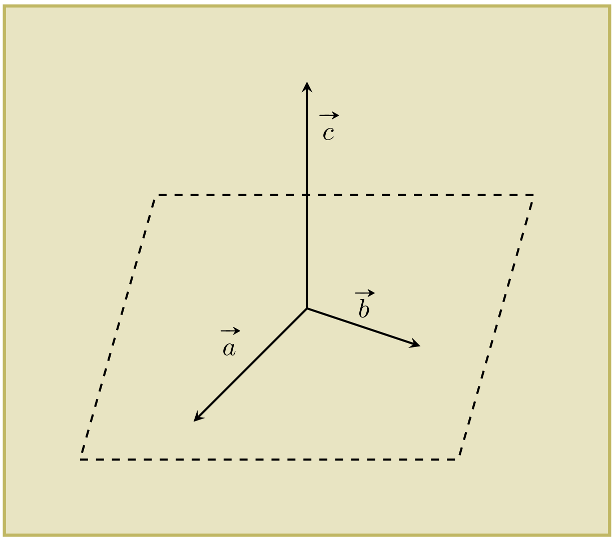


Рис. 1.23.3: Векторное произведение

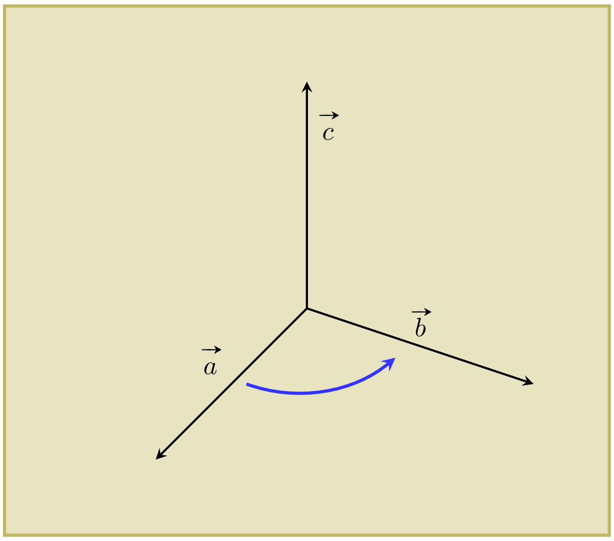


Рис. 1.23.4: Правая тройка

Замечание 1.23.5. Изображенная на рис. 1.23.4 тройка называется правой (аналогично, если c направлен вниз, то левой). Аналогия с правилом буравчика: если «идти» от $\vec{a}$ к $\vec{b}$, то $\vec{c}$ должен оказаться с той же стороны, что и большой палец руки.

Замечание 1.23.6. Векторное произведение некоммутативно $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (это следует из свойств определителя матрицы), но дистрибутивность выполняется

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Замечание 1.23.7. Если векторное произведение равно нулю, то векторы коллинеарны (нулевой вектор коллинеарен любому вектору).

Def 1.23.8. Смешанное произведение это комбинация векторного и скалярного произведений (обозначается $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$).

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \left((\vec{a} \times \vec{b}); \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Замечание 1.23.9. При вычислении смешанного произведения через векторное и скалярное, можно пользоваться тем фактом, что порядок их вычисления неважен. Таким образом можно вычислить сначала скалярное произведение, а потом векторное (или наоборот).

Замечание 1.23.10. По свойству определителя можно определенным образом (но не произвольно!) переставлять переменные в смешанном произведении.

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}$$

Однако (также по свойству определителя)

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}$$

Замечание 1.23.11. Если смешанное произведение равно нулю, то векторы компланарны (либо среди них есть нулевой вектор).

Теорема 1.23.12. Площадь параллелограмма равна модулю векторного произведения векторов, на которых он построен (рис. 1.23.14).

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

□ Воспользуемся известной формулой площади параллелограмма $S = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\alpha$. По геометрическому определению векторного произведения векторов получаем, что $S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$. ■

Замечание 1.23.13. Площадь треугольника построенного на тех же векторах, будет равна половине модуля векторного произведения как половина площади параллелограмма.

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

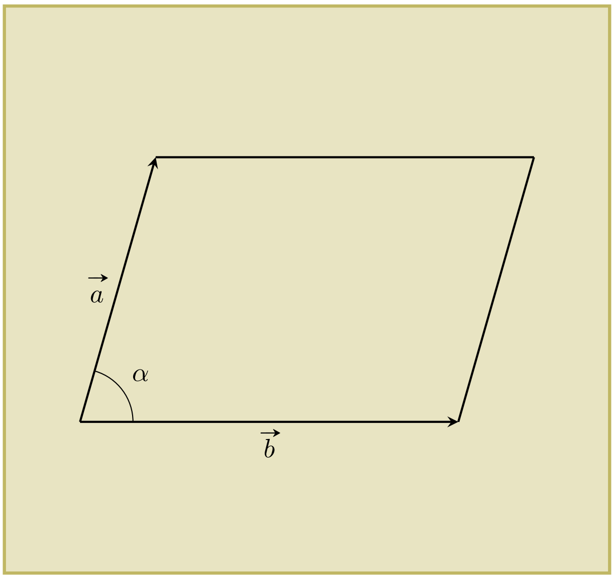


Рис. 1.23.14: Площадь параллелограмма

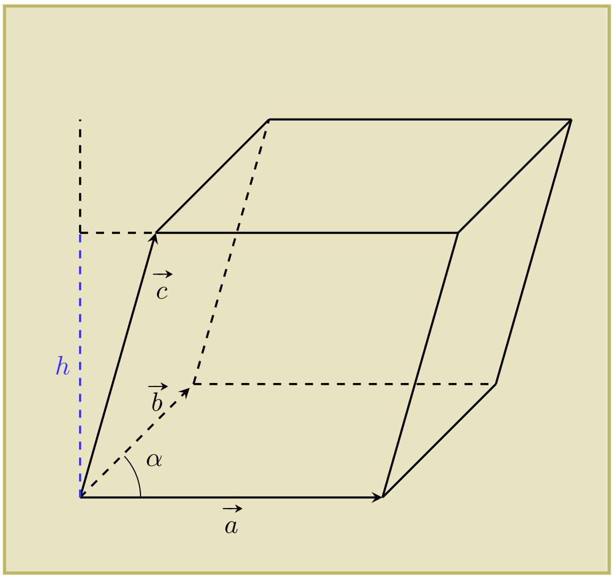


Рис. 1.23.15: Объем параллелепипеда

Теорема 1.23.16. Объём параллелепипеда равен модулю смешанного произведения векторов, на которых он построен (рис. 1.23.15).

$$V = \left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$$

☐ По известной формуле $V = S_{\text{осн}} \cdot h$. Вычислим площадь основания с помощью векторного произведения $S_{\text{осн}} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$. Заметим, что h это ортогональная проекция $\vec{c}$ на векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вычислим её по определению проекции.

$$h = \frac{\left((\vec{a} \times \vec{b}); \vec{c}\right)}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}$$

Подставим полученные значения в исходную формулу.

$$V = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot \frac{\left((\vec{a} \times \vec{b}); \vec{c}\right)}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|} = \left((\vec{a} \times \vec{b}); \vec{c}\right) = \left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$$

■

Замечание 1.23.17. Объём тетраэдра построенного на тех же векторах, будет равен одной шестой модуля векторного произведения.

$$V_{\triangle} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$$

Эта формула выводится на основании двух соображений.

1. Объём пирамиды, построенной на тех же векторах в три раза меньше (известный геометрический факт).
2. Основание тетраэдра вдвое меньше основания пирамиды.

Таким образом получаем множитель $\frac{1}{6}$.

1.24. Коллинеарность, компланарность, ортогональность векторов. Критерии.

Def 1.24.1. Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Теорема 1.24.2. (Критерий коллинеарности)

$$\vec{a} \upuparrows \vec{b} \iff \vec{a} \times \vec{b} = 0 \iff \vec{a} = k\vec{b} \ (k \in \mathbb{R})$$

Def 1.24.3. Три вектора называются компланарными, если они лежат в одной плоскости.

Теорема 1.24.4. (Критерий компланарности) Три вектора компланарны $\iff$ их смешанное произведение равно нулю.

□ Если три вектора компланарны, то они лежат в одной плоскости, значит два из них можно использовать как базис этой плоскости (случаи, когда это нельзя сделать можно рассмотреть отдельно — они тривиальны). В таком случае третий вектор будет их линейной комбинацией, т.к. в определителе одна из строчек будет линейной комбинацией двух других. В таком случае по свойству определитель (а значит и смешанное произведение) будет равен нулю. ■

Def 1.24.5. Два **ненулевых** вектора называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \left(\vec{a}; \vec{b}\right) = 0$$

1.25. Уравнения прямой на плоскости.

Прямая на плоскости может быть задана с помощью

1. Двух точек.
2. Точки и параллельной прямой (не проходящей через эту точку).
3. Точки и перпендикулярной прямой.

Общее уравнение прямой на плоскости

Имеем (рис. 1.25.5)

1. $\vec{n}(A, B)$ — нормальный вектор, который перпендикулярен искомой прямой.
2. $M_0(x_0, y_0)$ — фиксированная точка, через которую надо провести прямую.
3. $M(x, y)$ — плавающая точка на искомой прямой.

Введём обозначения

1. $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$
2. $\vec{r_0} = \overrightarrow{OM_0}$
3. $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r_0} = (x - x_0, y - y_0)$

Т.к. $\vec{n}$ перпендикулярен искомой прямой, а $\overrightarrow{M_0M}$ лежит на ней, то их скалярное произведение равно нулю

$$\left(\vec{n}; \overrightarrow{M_0M}\right) = A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Это уравнение называется (неприведенным?) общим уравнением прямой на плоскости. Если раскрыть скобки и обозначить все числа буквой C, то получится общее уравнение прямой.

$$Ax + By + C = 0$$

Замечание 1.25.1. По данному уравнению можно получить координаты вектора нормали $\vec{n}(A, B)$.

Замечание 1.25.2. Форма задания прямой на плоскости вида $\left((\vec{r} - \vec{r_0}); \vec{n}\right) = 0$ называется нормальной векторной формой.

Замечание 1.25.3. Уравнение вида $kAx + kBy + kC = 0$ $(k \neq 0)$ будет задавать ту же прямую на плоскости.

Теорема 1.25.4. Общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ определяет одну и только одну прямую на плоскости (при условии $A^2 + B^2 > 0$).

□ Пусть уравнение $Ax + By + C = 0$ имеет решение (x_0, y_0), тогда $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Вычтем это уравнение из исходного, получим $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Рассмотрим прямую l, содержащую точку (x_0, y_0). Она перпендикулярна вектору (A, B). Как было показано ранее, точка и вектор нормали однозначно определяют прямую. ■

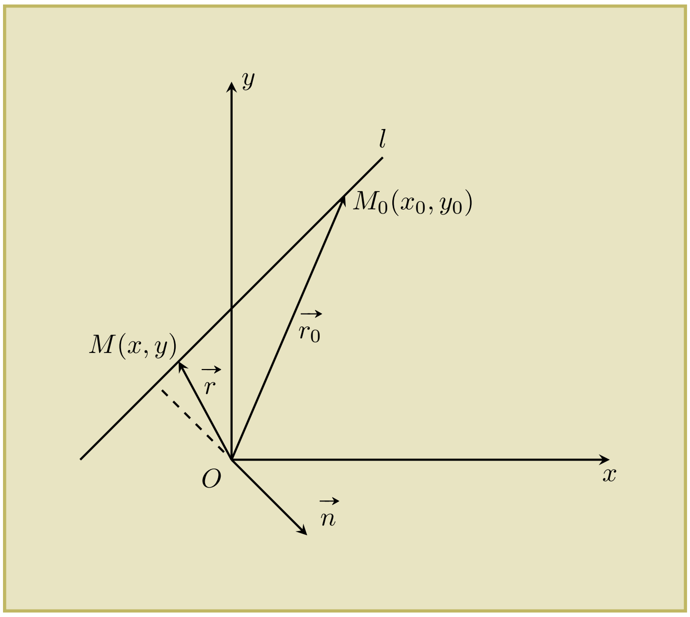


Рис. 1.25.5: Общее уравнение прямой

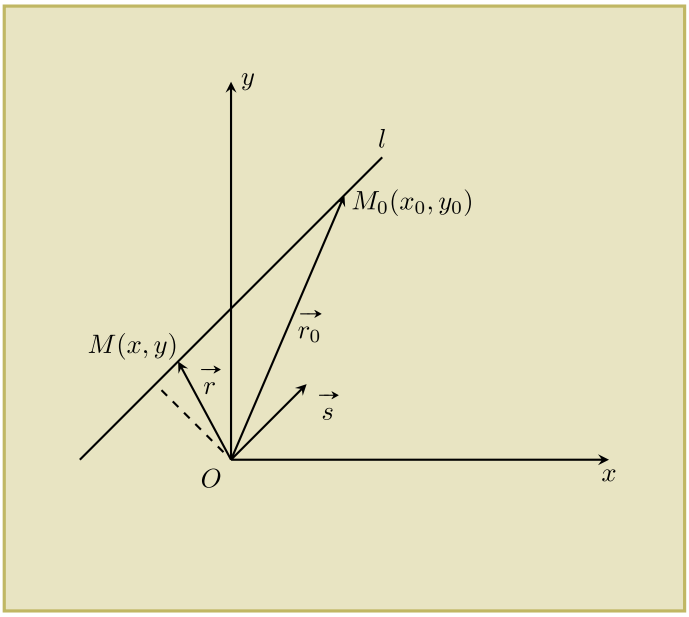


Рис. 1.25.6: Параметрическое уравнение прямой

Параметрическое уравнение прямой на плоскости

Имеем (рис. 1.25.6)

1. $\vec{s}(m, n)$ — вектор по направлению.
2. $M_0(x_0, y_0)$ — фиксированная точка, через которую надо провести прямую.
3. $M(x, y)$ — плавающая точка на искомой прямой.

Введём обозначения:

1. $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$
2. $\vec{r_0} = \overrightarrow{OM_0}$
3. $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r_0} = (x - x_0, y - y_0)$

Т.к. $\overrightarrow{M_0M}$ лежит на искомой прямой, а $\vec{s}$ ему коллинеарен, то $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$, где t — это параметр. Получаем векторное уравнение, которое можно записать в виде системы.

$$\begin{cases} x - x_0 = tm \\ y - y_0 = tn \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \end{cases}$$

Это уравнение называется параметрическим уравнением прямой на плоскости.

Замечание 1.25.7. По данному уравнению можно получить координаты вектора по направлению $\vec{s}(m, n)$ и точку на прямой — $M_0(x_0, y_0)$.

Каноническое уравнение прямой на плоскости

В параметрически заданном уравнении прямой на плоскости выразим параметр t в обоих уравнениях и приравняем результаты. Получим каноническое уравнение прямой на плоскости.

$$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = t \\ \frac{y - y_0}{n} = t \end{cases} \iff \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

Замечание 1.25.8. m и n могут равняться нулю, в этом случае это рассматривается не как деление на ноль, а как условная запись, отображающая структуру прямой.

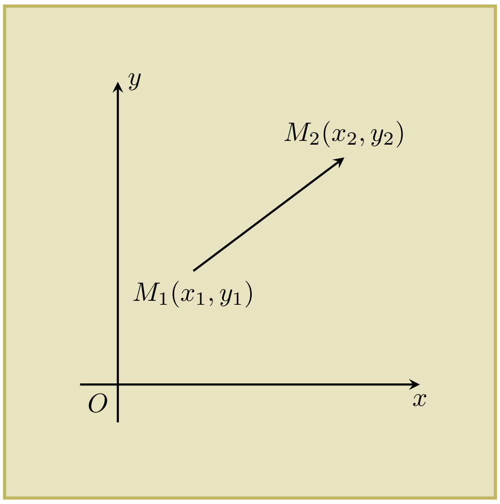


Рис. 1.25.9: Уравнение прямой через две точки

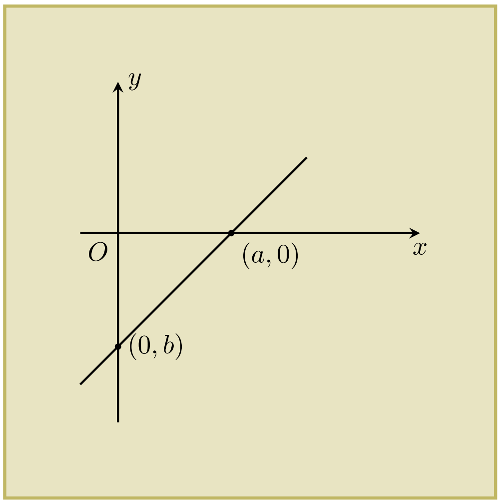


Рис. 1.25.10: Уравнение прямой «в отрезках»

Уравнение прямой на плоскости через две точки

Две точки на плоскости можно рассмотреть как точку и вектор по направлению искомой прямой (рис. 1.25.9). Таким образом задача построения прямой через две точки сводится к задаче построения прямой через точку коллинеарно вектору. В итоге получится следующая формула

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Уравнение прямой на плоскости «в отрезках»

Если в уравнении прямой на плоскости через две точки рассмотреть не произвольные точки плоскости, а точки, лежащие на координатных осях (рис. 1.25.10), то его можно свести к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Замечание 1.25.11. Получить уравнение прямой на плоскости в отрезках можно только если прямая не проходит через начало координат и не параллельна координатным осям. Иными словами прямая должна отсекать от каждой из осей ненулевой отрезок, а от одной из четвертей на плоскости - треугольник конечной ненулевой площади.

1.26. Уравнения плоскости в пространстве.

Плоскость в пространстве может быть задана с помощью

1. Зёх точек (не лежащих на одной прямой).
2. Точки и прямой, которая перпендикулярна этой плоскости.
3. Двумя пересекающимися или параллельными прямыми.

Общее уравнение плоскости в пространстве

Аналогично прямой на плоскости рассматриваем нормальный вектор $\vec{n}(A, B, C)$, фиксированную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и плавающую точку $M(x, y, z)$.
Т.к. вектор $\vec{n}$ перпендикулярен плоскости, то он перпендикулярен любому вектору, лежащему в этой плоскости, значит $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$. Раскрыв скалярное произведение по определению получим общее уравнение плоскости

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Если раскрыть скобки, то получится общее уравнение плоскости в пространстве

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Замечание 1.26.1. По данному уравнению можно получить координаты вектора нормали $\vec{n}(A, B, C)$.

Уравнение плоскости в пространстве через три точки.

Рассмотрим три произвольные точки в пространстве (не лежащие на одной прямой) $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $C(x_3, y_3, z_3)$, а также произвольную точку $M(x, y, z)$, лежащую в искомой плоскости.
Если точка M лежит в той же плоскости, что и точки A, B и C, то векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ компланарны, значит их смешанное произведение равно нулю, получаем

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Это называется уравнением плоскости в пространстве через три точки в форме определителя. Если раскрыть этот определитель по определению, то получится общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Уравнение плоскости в пространстве «в отрезках»

Если в уравнении плоскости в пространстве взять три точки, лежащие на трех осях координат $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$, после чего посчитать определитель, то получится уравнение плоскости «в отрезках»

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Где a, b, c «длины» отрезков, которые плоскость отсекает от координатных осей. Они могут быть отрицательными, это лишь говорит о том, что отрезок лежит в отрицательной части оси.

Замечание 1.26.2. Получить уравнение плоскости в отрезках можно только если плоскость не проходит через начало координат и не параллельна координатным плоскостям. Иными словами плоскость должна отсекать от каждой из осей ненулевой отрезок, а от одного из октантов пространства тетраэдр конечного ненулевого объёма.

1.27. Уравнения прямой в пространстве.

Прямая в пространстве может быть задана с помощью

1. 2ух точек.
2. Точки и направляющего вектора.
3. Двух пересекающихся плоскостей.

Параметрическое уравнение прямой в пространстве

Аналогично прямой на плоскости имеем вектор по направлению $\vec{s}(m, n, k)$, который коллинеарен вектору $\overrightarrow{M_0M}$, где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ фиксированная точка, а M плавающая точка на искомой прямой.

$$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tk \end{cases}$$

Замечание 1.27.1. По данному уравнению можно получить координаты вектора по направлению $\vec{s}(m, n, k)$ и точку на прямой $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Замечание 1.27.2. Физический смысл заключается в том, что (x_0, y_0, z_0) это начальное положение, а (m, n, k) это вектор скорости.

Каноническое уравнение прямой в пространстве

Если в параметрически заданном уравнении прямой в пространстве выразить параметр t во всех уравнениях и приравнять результаты, то получится каноническое уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$$

Замечание 1.27.3. По данному уравнению можно получить координаты вектора по направлению $\vec{s}(m, n, k)$ и точку на прямой $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Уравнение прямой в пространстве через две точки

Две точки в пространстве можно рассмотреть как точку и вектор по направлению искомой прямой. Таким образом задача построения прямой через две точки сводится к задаче построения прямой через точку коллинеарно вектору. В итоге получится следующая формула

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Уравнение прямой в пространстве через пересечение двух плоскостей

Рассмотрим систему из двух уравнений плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Возможны несколько вариантов.

1. Система несовместна (плоскости параллельны).

2. Система совместна, но не определена.

   (a) rank = 1 (плоскости совпадают).

   (b) rank = 2 (плоскости пересекаются).

В случае 2.b ФСР содержит 1 вектор X, а общее решение СЛАУ можно записать как $\mathbb{X} = tX + X^0$. Эта запись эквивалентна уравнению $\vec{r} = t\vec{s} + \vec{r}_0$, которое является векторным уравнением прямой.

Замечание 1.27.4. Чтобы найти уравнение прямой, по которой пересекаются две плоскости необходимо найти одну (любую) точку пересечения этих плоскостей, а также векторное произведение их нормалей, которое будет являться вектором по направлению для искомой прямой.

1.28. Расстояние от точки до прямой на плоскости.

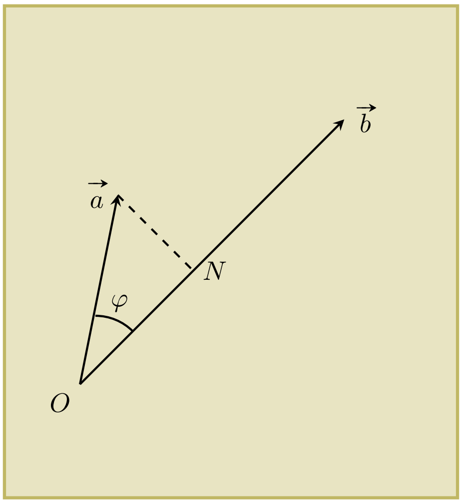


Рис. 1.28.1: Ортогональная проекция

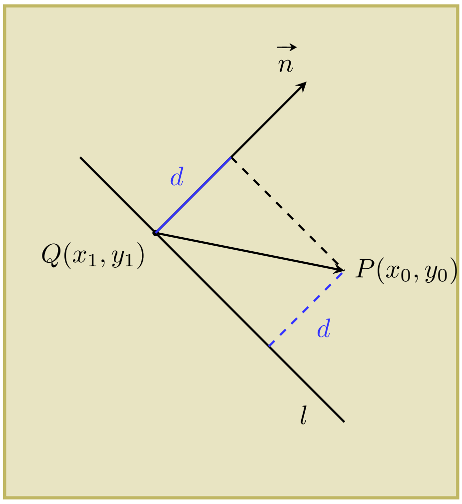


Рис. 1.28.2: Расстояние от точки до прямой

Def 1.28.3. Ортогональной проекцией вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ (рис. 1.28.1) называется

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cos\varphi = \frac{\left(\vec{a}; \vec{b}\right)}{\left|\vec{b}\right|}$$

Теорема 1.28.4. Расстояние от точки (x_0, y_0) до прямой $Ax + By + C = 0$ на плоскости может быть найден про формуле

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

□ Пусть дана точка $P(x_0, y_0)$ и прямая $l\colon Ax + By + C = 0$. Выберем на ней некоторую точку $Q(x_1, y_1)$ (рис. 1.28.2) и построим вектор нормали $\vec{n}$ к прямой из этой точки. Заметим, что искомое расстояние d будет равно модулю ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{QP}$ на вектор нормали.

$$d = \frac{\left(\overrightarrow{QP}; \vec{n}\right)}{\left|\vec{n}\right|} \tag{1}$$

Координаты вектора $\overrightarrow{QP}$ будут равны $(x_0 - x_1, y_0 - y_1)$, координаты вектора нормали (A, B), а его длина $\sqrt{A^2 + B^2}$. Подставим это в (1).

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{2}$$

Т.к. точка Q лежит на прямой l, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, выразим C и подставим его в (2).

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

■

Замечание 1.28.5. Данная формула может быть перенесена в бо́льшую размерность. Например, расстояние от точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ в пространстве будет равно

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

1.29. Кривые второго порядка. Специальные определения. Канонические уравнения. Характеристики.

Кривые второго порядка также называются коническими сечениями, т.к. они получаются при сечении конуса под различными углами (рис. 1.29.1). Также можно встретить название «квадрики».

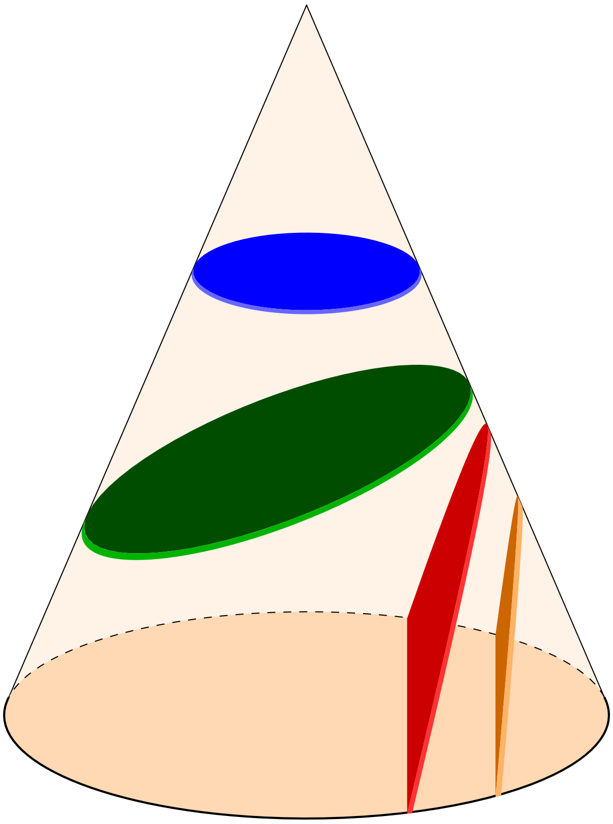


Рис. 1.29.1: Конические сечения

Def 1.29.2. Параболой называется множество точек плоскости равноудаленных от данной точки и данной прямой (точка не лежит на этой прямой). Данная точка называется фокусом F, а данная прямая — директрисой d.

Теорема 1.29.3. Каноническое уравнение параболы $y^2 = 2px$.

□ Возьмем произвольную точку $M(x, y)$, принадлежащую параболе, введём «удобную» СК (рис. 1.29.6). Имеем

$$\rho = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \qquad h = x + \frac{p}{2}$$

Согласно данному ранее определению приравняем их. Упростим и получим

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$
$$x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + xp + \frac{p^2}{4}$$
$$y^2 = 2px$$

■

Замечание 1.29.4. Проверить, что данное уравнение описывает **только** точки параболы можно подставив $y^2 = 2px$ (при $x \geqslant 0$) в уравнения для ρ и h и сравнив результаты.

$$\rho = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = \sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

$$x \geqslant 0 \Longrightarrow \rho = x + \frac{p}{2}$$

Замечание 1.29.5. p называется параболическим параметром.

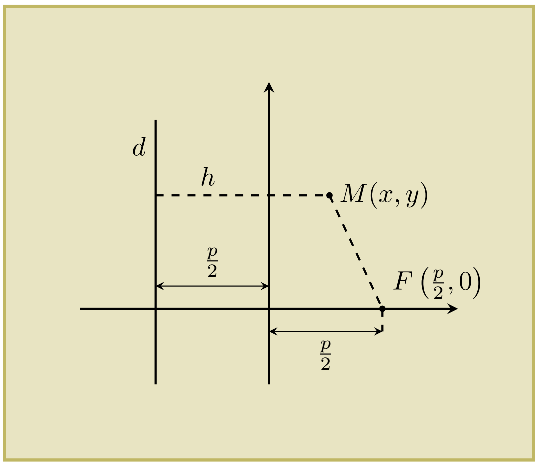


Рис. 1.29.6: Каноническое уравнение параболы

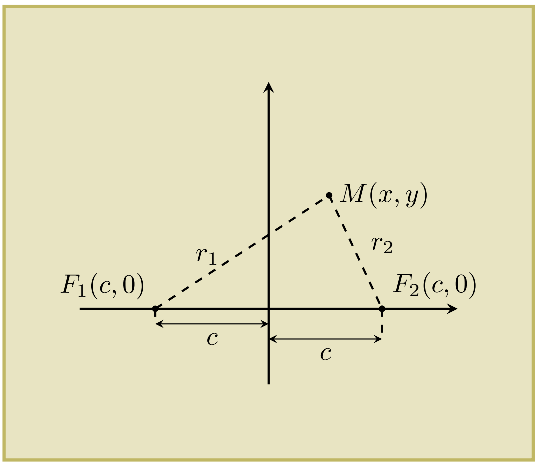


Рис. 1.29.7: Каноническое уравнение эллипса

Def 1.29.8. Эллипсом называется множество точек плоскости сумма расстояний от которых до двух данных точек постоянная. Данные точки называются фокусами F_1 и F_2.

Теорема 1.29.9. Каноническое уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

☐ Возьмем произвольную точку $M(x, y)$, принадлежащую эллипсу, введём «удобную» СК (рис. 1.29.7). Имеем

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Согласно данному ранее определению их сумма должна быть постоянная, обозначим её $2a$. Упростим и получим

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\
(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &+ (x-c)^2 + y^2 \\
2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &- 2cx \\
a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - cx \\
a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\
(a^2x^2 - c^2x^2) + a^2y^2 &= (a^4 - a^2c^2) \\
x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2)
\end{aligned}$$

Исходя из определения $2a > 2c$, значит $a > c$, тогда обозначим $a^2 - c^2 = b^2$ и получим искомое уравнение.

$$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

■

Замечание 1.29.10. Параметр эллипса a называется большой полуосью, а b — малой полуосью.

Эллипс обладает следующими свойствами

1. Симметрия относительно Ox, Oy и O.
2. Ограничен прямоугольником размера $2a \times 2b$.
3. Степень «сжатости» эллипса характеризуется отношением $\dfrac{b}{a}$.

Def 1.29.11. Гиперболой называется множество точек плоскости модуль разности расстояний от которых до двух данных точек постоянен. Данные точки называются фокусами F_1 и F_2.

Теорема 1.29.12. Каноническое уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

□ Вывод уравнения гиперболы полностью аналогичен выводу уравнения эллипса, только в случае гиперболы мы за b^2 обозначаем $a^2 + c^2$. ■

Замечание 1.29.13. Параметр гиперболы a называется действительной полуосью, а b — мнимой полуосью.

Гипербола обладает следующими свойствами

1. Симметрия относительно Ox, Oy и O.

2. Не ограничена, но на бесконечности ведёт себя как пара прямых.

Замечание 1.29.14. Асимптоты гиперболы на бесконечности задаются уравнениями

$$y_{ac} = \pm\frac{b}{a} \cdot x$$

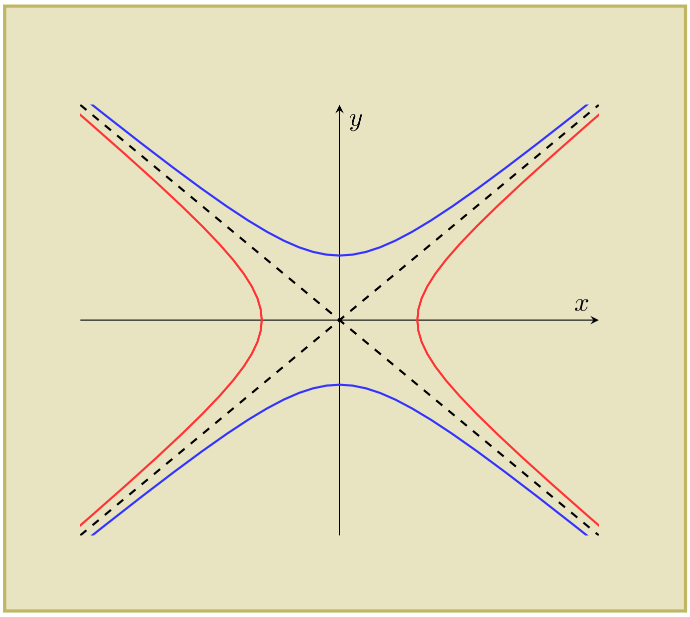


Рис. 1.29.15: Сопряженные гиперболы

Замечание 1.29.16. Сопряженная к данной гипербола задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Например, на рис. 1.29.15 изображены две сопряженные гиперболы.

Def 1.29.17. На данный момент мы определяем эксцентриситет как величину равную единице для параболы и $\dfrac{c}{a}$ для гиперболы и эллипса. Далее будет доказано (1.30.1), что эксцентриситет это характеристика кривой второго порядка, показывающая отношение расстояния от фокуса до точки на кривой к расстоянию от директрисы до той же точки кривой, т.е. $e = \frac{\rho}{h}$.

Рассмотрим эксцентриситет эллипса.

$$e_{\text{элл}} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Т.к. $b < a$, то $0 \leqslant e_{\text{элл}} < 1$. Если у эллипса большая и малая полуоси совпадают ($a = b$), то это окружность и её эксцентриситет равен нулю. Аналогично можно рассмотреть эксцентриситет гиперболы и показать, что $e_{\text{гип}} > 1$.

Def 1.29.18. Директрисой d_i (соответствующей фокусу F_i) называется прямая, которая

1. Лежит в той же полуплоскости, что и фокус F_i.

2. Перпендикулярна оси, проходящей через фокусы (оси Ox в каноническом случае).

3. Находится на расстоянии $\dfrac{a}{e}$ от центра кривой (начала координат в каноническом случае).

Уравнение директрисы для эллипса и гиперболы можно вычислить по формуле $x = \pm\dfrac{a}{e}$, для параболы — $x = -\dfrac{p}{2}$.

1.30. Кривые второго порядка. Универсальные определения. Полярное уравнение. Общее уравнение.

Используя определения эксцентриситета и директрисы (1.29.), сформулируем две теоремы.

Теорема 1.30.1. Для эллипса/гиперболы/параболы верно, что отношение расстояния от точки на кривой до фокуса к расстоянию от директрисы до той же точки кривой есть постоянная величина, равная эксцентриситету.

$$\frac{r_i}{h_i} = e$$

□ Рассмотрим эллипс (рис. 1.30.2). Т.к. $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow y^2 = b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \tag{1}$$

Из рис. 1.30.2 выразим r_1, подставим в него (1) и упростим полученное выражение.

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \sqrt{\frac{a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}} \tag{2}$$

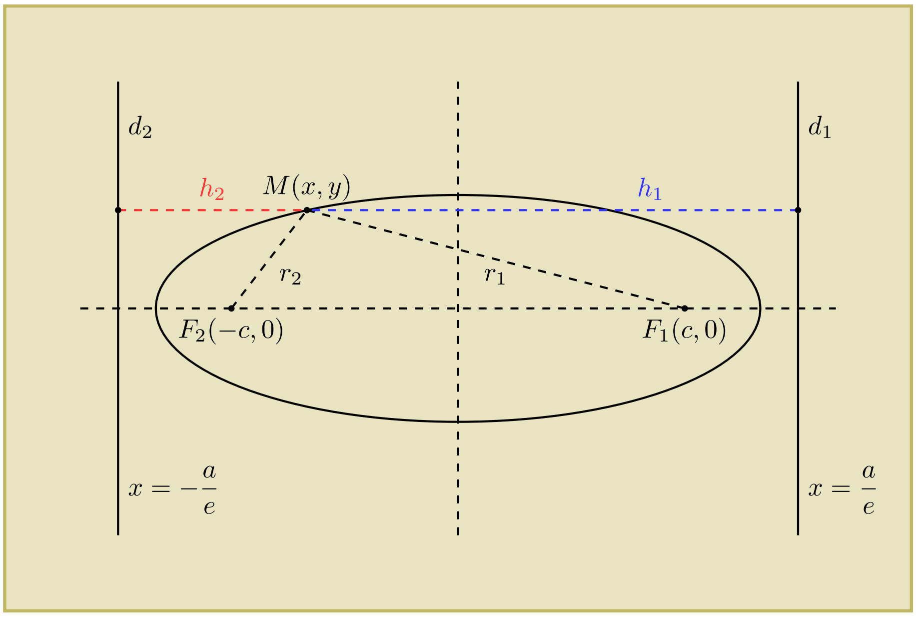


Рис. 1.30.2: Дополнение определения эксцентриситета

Т.к. мы рассматриваем эллипс, то

$$c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow \begin{cases} a^2x^2 - b^2x^2 = c^2x^2 \\ a^2c^2 + a^2b^2 = a^4 - a^2b^2 + a^2b^2 = a^4 \end{cases} \tag{3}$$

Подставим (3) в (2) и упростим.

$$r_1 = \sqrt{\frac{a^4 - 2a^2xc + c^2x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 - xc)^2}{a^2}} = \left|\frac{a^2 - xc}{a}\right| = \left|a - x \cdot \frac{c}{a}\right| \tag{4}$$

Воспользуемся определением эксцентриситета $\frac{c}{a} = e$. Мы рассматриваем эллипс, значит $e \in [0, 1)$, из чего следует, что $a \geqslant xe$. Таким образом можно раскрыть модуль с плюсом. Применяя все эти соображения к (4), имеем

$$r_1 = \left|a - x \cdot \frac{c}{a}\right| = |a - x \cdot e| = a - x \cdot e \tag{5}$$

Из рис. 1.30.2 выразим h_1.

$$h_1 = \frac{a}{e} - x = \frac{a - xe}{e} \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что $\frac{r_1}{h_1} = e$. Доказательство для r_2 и h_2 аналогично. Доказательство для гиперболы и параболы также аналогично. ■

Теорема 1.30.3. Отношение $\frac{r_i}{h_i} = e' = const$ определяет только эллипс/гиперболу/параболу.

Доказанные теоремы позволяют дать общее определение кривой второго порядка.

Def 1.30.4. Кривой второго порядка называется множество точек плоскости, расстояния от которых до данной точки и до данной прямой находятся в постоянном отношении.
Данная точка называется фокусом, а данная прямая — директрисой. Постоянное отношение называется эксцентриситетом e, причем

1. $e < 1 \Longrightarrow$ эллипс.

2. $e = 1 \Longrightarrow$ парабола.

3. $e > 1 \Longrightarrow$ гипербола.

Теорема 1.30.5. Уравнение кривой второго порядка в полярных координатах имеет вид

$$\rho = \frac{ke}{1 \pm e \cdot \cos\varphi}$$

где k равно расстоянию от фокуса до директрисы, а $\pm$ отвечает за то, какой из фокусов мы берём в качестве центра ПСК.

$\square$ Введём «удобную» ПСК (рис. 1.30.6). Обозначим $k = \operatorname{dist}(F, d)$ расстояние от фокуса до директрисы, тогда $r = \rho$ и $h = k + \rho\cos\varphi$. Используя определение эксцентриситета, выразим ρ.

$$e = \frac{r}{h} \Longrightarrow r = h \cdot e$$
$$\rho = (k + \rho\cos\varphi) \cdot e = \frac{ke}{1 - e \cdot \cos\varphi}$$

Однако это было проделано только для одного фокуса, для другого фокуса получится $\rho = \dfrac{ke}{1 + e \cdot \cos\varphi}$. $\blacksquare$

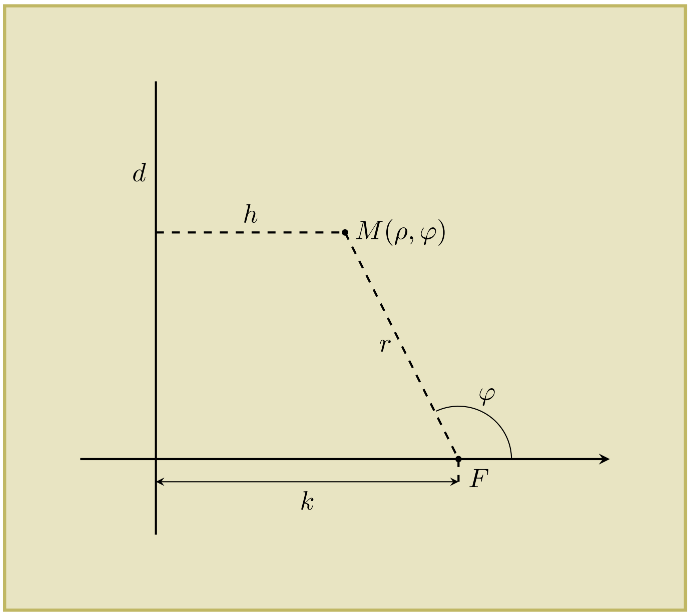


Рис. 1.30.6: Кривые второго порядка в ПСК

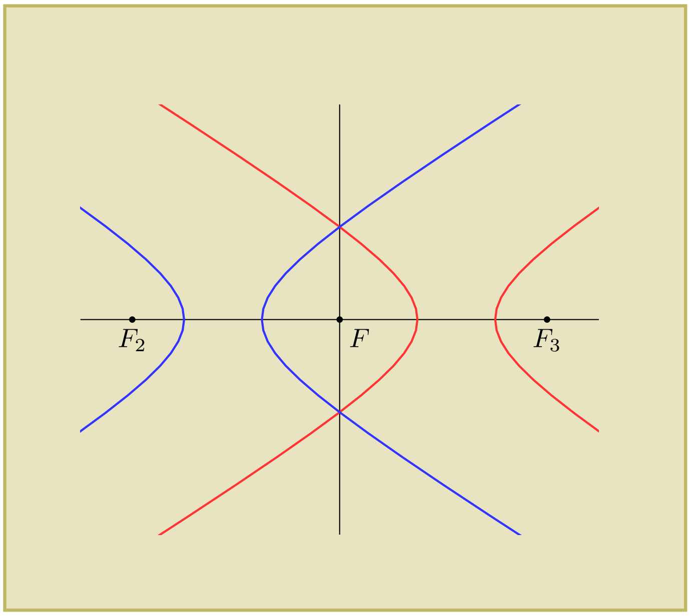


Рис. 1.30.7: Гипербола в ПСК

Замечание 1.30.8. При использовании такого уравнения надо помнить, что в начале координат ПСК окажется один из фокусов кривой второго порядка, а не её центр как это было в ДПСК. Например, на рис. 1.30.7 у красной гиперболы левый фокус находится в $(0, 0)$, а у синей — правый.

Замечание 1.30.9. Общее уравнение **линии** (т.к. могут быть вырожденные случаи) второго порядка имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

1.31. Классификация кривых второго порядка.

Def 1.31.1. Задачей классификации кривых второго порядка называется задача сведения уравнение к простейшему (каноническому) виду при помощи переноса и поворота СК.

Def 1.31.2. Группой старших членов в общем уравнении кривой второго порядка называется $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$.

Def 1.31.3. Группой линейных членов в общем уравнении кривой второго порядка называется $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$.

Перенос СК $Oxy \to O'x'y'$

При переносе координаты меняются по следующим правилам

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

Подставим это в общее уравнение и получим новое уравнение

$$\begin{cases} a'_{11} = a_{11} \\ a'_{12} = a_{12} \\ a'_{22} = a_{22} \\ a'_{13} = a_{13} + a_{11}x_0 + a_{12}y_0 \\ a'_{23} = a_{23} + a_{12}x_0 + a_{22}y_0 \\ a'_{33} = a_{33} + a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 \end{cases}$$

Поворот СК $Oxy \to Ox'y'$

При повороте координаты меняются по следующим правилам

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

Подставим это в общее уравнение и получим новое уравнение

$$\begin{cases} a'_{11} = a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\sin^2\varphi \\ a'_{12} = \sin\varphi\cos\varphi(a_{22} - a_{11}) + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \\ a'_{22} = a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\cos^2\varphi \\ a'_{13} = a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi \\ a'_{23} = a_{23}\cos\varphi - a_{13}\sin\varphi \\ a'_{33} = a_{33} \end{cases}$$

Def 1.31.4. Будем называть инвариантом функцию $I(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33})$, которая не меняет своего значения при переносе и повороте СК.

Выделим три инварианта.

$$I_1 = a_{11} + a_{22} \qquad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Для того, чтобы доказать I_1, I_2 и I_3 действительно инварианты необходимо выполнить перенос и поворот и показать, что инвариант сохранил свое значение (это несложное, но крайне рутинное действие, поэтому мы его опустим).

Def 1.31.5. В зависимости от знака I_2 линии делятся на

1. $I_2 < 0 \implies$ линия гиперболического типа.
2. $I_2 = 0 \implies$ линия параболического типа.
3. $I_2 > 0 \implies$ линия эллиптического типа.

Def 1.31.6. Кривая второго порядка называется центральной (центрально симметричной), если при осевой симметрии $(x, y) \to (-x, -y)$ уравнение не меняется. Таким образом общее уравнение центральной кривой имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

Теорема 1.31.7. У центральной кривой второй инвариант не равен нулю.

□ Выполним перенос СК, обратим внимание на коэффициенты a'_{13} и a'_{23}. Для того, чтобы линия была центральной, необходимо обнулить их, таким образом мы получаем СЛАУ относительно x_0 и y_0:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 = -a_{13} \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 = -a_{23} \end{cases}$$

Если определитель основной матрицы не равен нулю, то это СЛАУ крамеровского типа, и она имеет единственное решение (что нам и требуется). Заметим, что определитель основной матрицы это второй инвариант. Таким образом, если $I_2 \neq 0$, то система имеет единственное решение, значит мы можем обнулить коэффициенты a_{13} и a_{23}, а значит мы можем привести уравнение кривой второго порядка к общему уравнению центральной кривой. ■

Замечание 1.31.8. Согласно данным ранее определениям кривые эллиптического и гиперболического типа всегда центральные, а кривые параболического типа - нет (но они могут иметь ось симметрии).

Приведение к главным осям (обнуление a_{12})

Выполним поворот СК, т.к. мы хотим обнулить a'_{12}, то получим уравнение

$$\begin{aligned}\sin\varphi\cos\varphi(a_{22}-a_{11})+a_{12}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)&=0\\ \sin(2\varphi)(a_{22}-a_{11})+2a_{12}\cos(2\varphi)&=0\\ \operatorname{tg}(2\varphi)&=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}\end{aligned}$$

Получаем формулу для нахождения угла поворота для приведения к главным осям. Поворачиваем СК на наименьший положительный угол φ, удовлетворяющий этому уравнению. Если $a_{11}=a_{22}$, то берем $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

Классификация прямых

Вычисляем три инварианта, далее рассматриваем случаи.

Случай I. Центральная кривая ($I_2\neq 0$).

1. Переносом обнулим a_{13} и a_{23}.
2. Поворотом обнулим a_{12}.
3. Получим уравнение $a''_{11}(x'')^2+a''_{22}(y'')^2+a''_{33}=0$.
4. Выразим третий инвариант после переноса ($a_{13}=a_{23}=0$).

$$I_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&0\\a_{12}&a_{22}&0\\0&0&a_{33}\end{vmatrix}=a_{33}\cdot\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{33}\cdot I_2$$

5. Значит $a_{33}=\dfrac{I_3}{I_2}$, подставим в уравнение из пункта 3. Получим уравнение, которое далее будем исследовать по случаям.

$$a''_{11}(x'')^2+a''_{22}(y'')^2=-\frac{I_3}{I_2}$$

Случай I.a Гиперболическая кривая $I_2<0$

Т.к. $I_2=a''_{11}a''_{22}<0$, то a''_{11} и a''_{22} разных знаков.
Если $a''_{11}>0$ и $a''_{22}<0$, тогда

$$\begin{cases}I_3<0\implies \text{сопряженная гипербола}\\ I_3=0\implies \text{пара пересекающихся прямых}\\ I_3>0\implies \text{гипербола}\end{cases}$$

Если $a''_{11}<0$ и $a''_{22}>0$, тогда

$$\begin{cases}I_3<0\implies \text{гипербола}\\ I_3=0\implies \text{пара пересекающихся прямых}\\ I_3>0\implies \text{сопряженная гипербола}\end{cases}$$

Пара пересекающихся прямых получается из разложения разности квадратов, например в первом случае.

$$(\sqrt{a''_{11}}x''+\sqrt{-a''_{22}}y'')\cdot(\sqrt{a''_{11}}x''-\sqrt{-a''_{22}}y'')=0$$

Причем запись $\sqrt{-a''_{22}}$ корректна, т.к. $a''_{22}<0$.

Случай I.b Эллиптическая кривая $I_2>0$

Т.к. $I_2=a''_{11}a''_{22}>0$, то a''_{11} и a''_{22} одного знака.
Если $a''_{11}>0$ и $a''_{22}>0$, тогда

$$\begin{cases}I_3<0\implies \text{эллипс}\\ I_3=0\implies \text{точка } (0,0)\\ I_3>0\implies \varnothing\end{cases}$$

Если $a''_{11}<0$ и $a''_{22}<0$, тогда

$$\begin{cases}I_3<0\implies \varnothing\\ I_3=0\implies \text{точка } (0,0)\\ I_3>0\implies \text{эллипс}\end{cases}$$

Случай II. Нецентральная кривая ($I_2=0$)

1. Поворотом обнулим a_{12}.

2. Т.к. $I_2 = a'_{11}a'_{22} = 0$, то либо $a'_{11} = 0$ и $a'_{22} \neq 0$, либо наоборот. При этом коэффициенты a_{11} и a_{12} не могут быть равны нулю одновременно, т.к. в таком случае группа старших членов обнуляется, и мы получаем не кривую второго порядка (а прямую в общем случае).

3. Рассмотрим случай $a'_{11} = 0$ и $a'_{22} \neq 0$ (обратный случай рассматривается аналогично). Исследуем следующее уравнение

$$a'_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + a'_{23}y' + a'_{33} = 0$$

Случай II.a $I_3 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix} = -(a'_{13})^2 \cdot a'_{22} \neq 0$$

Т.к. мы рассматриваем случай $a'_{22} \neq 0$, то $a'_{13} \neq 0$. Получаем уравнение

$$a'_{22}(y')^2 + 2a'_{23}y' + 2a'_{13}x + a'_{33} = 0$$

С помощью выделения полного квадрата и переноса СК можно убедиться, что данное уравнение задает параболу.

Случай II.b $I_3 = 0$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix} = -(a'_{13})^2 \cdot a'_{22} = 0$$

Т.к. мы рассматриваем случай $a'_{22} \neq 0$, то $a'_{13} = 0$. Получаем уравнение

$$\begin{aligned} a'_{22}(y')^2 + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \\ a'_{22}\left(y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}\right)^2 - \frac{(a'_{23})^2}{a_{22}} + a'_{33} = 0 \\ \left(y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}\right)^2 = \left(\frac{a'_{23}}{a_{22}}\right)^2 - \frac{a'_{33}}{a'_{22}} \end{aligned}$$

Таким образом в зависимости от знака выражения в правой части это уравнение будет задавать

1. Правая часть $> 0 \Longrightarrow$ пара параллельных прямых.

2. Правая часть $= 0 \Longrightarrow$ одна прямая.

3. Правая часть $< 0 \Longrightarrow \varnothing$.

Замечание 1.31.9. Общее уравнение кривой второго порядка описывает только одно из множеств

1. Эллипс.

2. Гипербола.

3. Парабола.

4. Пара пересекающихся прямых.

5. Пара параллельных прямых.

6. Одна прямая.

7. Точка.

8. Пустое множество.

Причем вырожденные случаи (4–8) возникают только при $I_3 = 0$. О случаях 4 и 5 говорят, что кривая «распалась» на прямые.

1.32. Поверхность в пространстве. Кинетический способ задания поверхности.

Способы конструирования поверхности.

1. Деформация/разрезание/склейка плоскости или её части.
2. Движения (кинетический способ).

Свойства поверхности.

1. Ограничена/не ограничена.
2. Замкнута/незамкнута.
3. Двумерна (имеет два направления).
4. Двусторонняя/односторонняя.

Замечание 1.32.1. Замкнутая поверхность разбивает пространство на две части. У двусторонней поверхности чтобы попасть в ту же точку, но с другой стороны нужно пройти через край поверхности. Двусторонняя поверхность имеет две нормали в одной точке.
Таким образом поверхность по сравнению с плоскостью сохраняет только двумерность, все остальные свойства не сохраняются.

Поверхность можно описать как множество точек кривой l при движении по кривой d (l может деформироваться по ходу движения).

Def 1.32.2. Кривая l называется образующей, а кривая d — направляющей.

Замечание 1.32.3. Если направляющая и образующая это кривые не выше 2ого порядка, то получится поверхность не выше второго порядка.

1.33. Общее уравнение поверхности 2-го порядка. Канонические уравнения. Метод сечений.

Общее уравнение поверхности 2ого порядка имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0$$

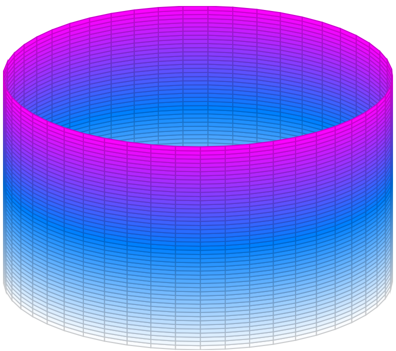


Рис. 1.33.1: Эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

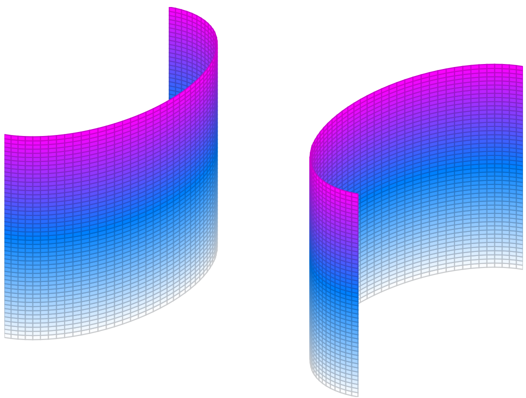


Рис. 1.33.2: Гиперболический цилиндр $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

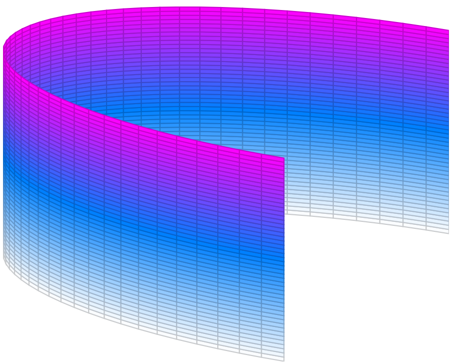


Рис. 1.33.3: Параболический цилиндр $y^2 = 2px$

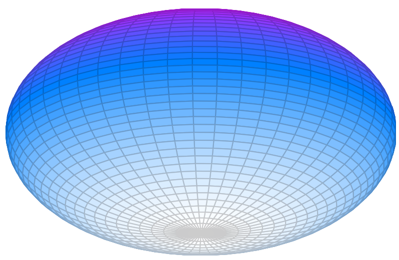


Рис. 1.33.4: Эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

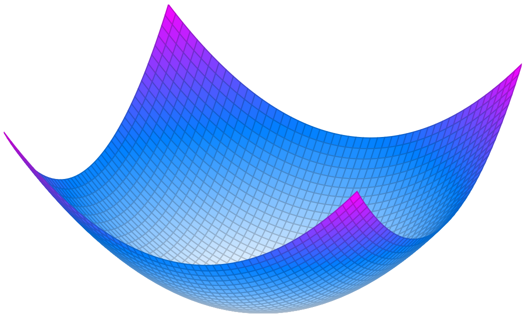


Рис. 1.33.5: Эллиптический параболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$

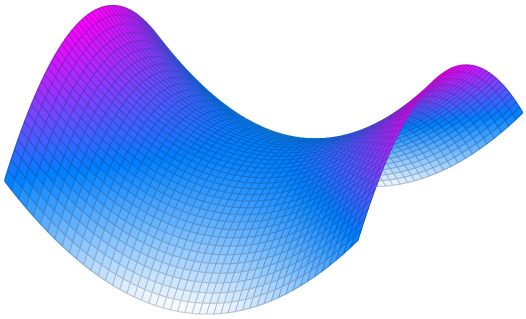


Рис. 1.33.6: Гиперболический параболоид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$

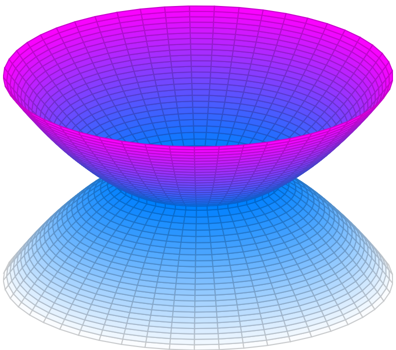


Рис. 1.33.7: Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

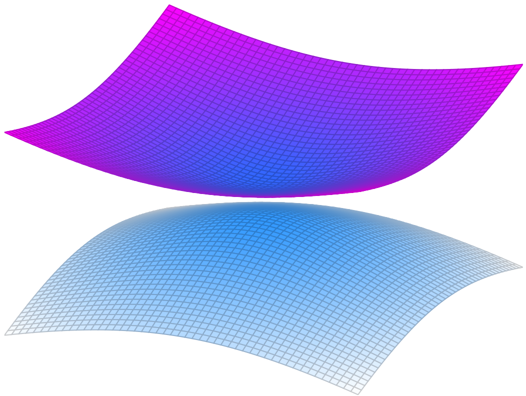


Рис. 1.33.8: Двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

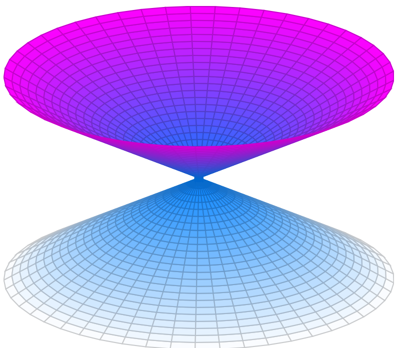


Рис. 1.33.9: Конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

Кривая	Направляющая	Образующая	Примечание
Эллиптический цилиндр	Эллипс	Прямая	
Гиперболический цилиндр	Гипербола	Прямая	
Параболический цилиндр	Парабола	Прямая	
Эллипсоид	Эллипс	Эллипс	
Эллиптический параболоид	Эллипс	Парабола	
Гиперболический параболоид	Парабола	Парабола	
Однополостный гиперболоид	Эллипс	Гипербола	Вращаем гиперболу вокруг оси Oz
Двуполостный гиперболоид	Эллипс	Гипербола	Вращаем гиперболу вокруг оси Oy
Конус	Эллипс	Прямая	Вращаем прямую вокруг оси Oz

Замечание 1.33.10. Метод сечений заключается в выяснении типа кривой в сечении плоскостью, параллельной какой-либо оси координат. Т.е. исходное уравнение исследуется при $x = const$ или $y = const$ или $z = const$. Найдя уравнения кривых в 3-4 разных сечениях можно сделать набросок поверхности.

1.34. Цилиндрические и сферические координаты в пространстве. Преобразование уравнений поверхности.

В цилиндрических координатах точка имеет три координаты $M(\rho, \varphi, z)$, где

1. ρ это расстояние от начала координат до проекции точки M на плоскость Oxy.
2. φ это угол, которая данная проекция составляет с положительным направлением оси Ox.
3. z это «высота» точки над плоскостью Oxy.

Ограничения

1. $\rho > 0$
2. $\varphi \in [0, 2\pi)$
3. $z \in \mathbb{R}$

Преобразование цилиндрических координат в декартовы

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

В сферических координатах точка имеет три координаты $M(\rho, \theta, \varphi)$, где

1. ρ это расстояние от начала координат до точки M.
2. θ это угол между OM и положительным направлением оси Oz (зенитный угол).
3. φ это угол между проекцией OM на плоскость Oxy и положительным направлением оси Ox (азимутальный угол).

Ограничения

1. $\rho > 0$
2. $\varphi \in [0, 2\pi)$
3. $\theta \in [0, \pi)$

Преобразование сферических координат в декартовы

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$