

# MA E<sub>χ</sub> 02

isagila

Собрано 12.06.2023 в 22:51



# Содержание

<b>1. Интегрирование функции одной переменной</b>	<b>3</b>
1.1. Определение и свойства неопределенного интеграла. . . . .	3
1.2. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям. . . . .	3
1.3. Интегрирование рациональных функций (общая схема). Разложение дроби на простейшие. . . . .	4
1.4. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование простейших дробей 1,2,3. . . . .	5
1.5. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка. . . . .	6
1.6. Интегрирование тригонометрических функций вида $R(\sin^m x, \cos^n x)$ , $R(\sin mx, \cos nx)$ . . . . .	6
1.7. Интегрирование некоторых иррациональных функций, метод тригонометрической подстановки. . . . .	7
1.8. Определенный интеграл. Определение, свойства линейности и аддитивности. . . . .	7
1.9. Геометрический смысл определенного интеграла. Оценка определенного интеграла. Теорема о среднем. . . . .	8
1.10. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Барроу. . . . .	9
1.11. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. . . . .	10
1.12. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. . . . .	10
1.13. Приложения определенного интеграла: вычисление площадей в декартовых координатах. . . . .	11
1.14. Приложения определенного интеграла: вычисление площади криволинейного сектора в полярных координатах. . . . .	11
1.15. Приложения определенного интеграла: вычисление длины дуги кривой (вывод формулы). . . . .	12
1.16. Приложения определенного интеграла: вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически. . . . .	12
1.17. Приложения определенного интеграла: вычисление объемов тел с известными площадями сечений и тел вращения. . . . .	13
1.18. Несобственные интегралы 1-го рода (на неограниченном промежутке). Определение и свойства. . . . .	13
1.19. Вычисление несобственного интеграла 1-го рода: формула Ньютона-Лейбница, интегрирование по частям, замена переменной. . . . .	14
1.20. Несобственные интегралы 2-го рода (от неограниченной функции). Определение, вычисление и свойства. . . . .	14
1.21. Признаки сходимости несобственных интегралов: первый признак сравнения (в неравенствах). . . . .	14
1.22. Признаки сходимости несобственных интегралов: второй признак сравнения (предельный). . . . .	14
1.23. Признаки сходимости несобственных интегралов: теорема об абсолютной сходимости. Понятие условной сходимости. . . . .	14
1.24. Сходимость интегралов 1-го и 2-го рода от степенных функций. . . . .	14
<b>2. Интегрирование функции нескольких переменных</b>	<b>15</b>
2.1. Двойной интеграл. Определение и свойства. . . . .	15
2.2. Вычисление двойного интеграла. Кратный интеграл. . . . .	15
2.3. Определение и вычисление тройного интеграла. . . . .	15
2.4. Криволинейные координаты. . . . .	15
2.5. Замена переменных в двойном и тройном интегралах. Якобиан. . . . .	15
2.6. Криволинейный интеграл 1-го рода: определение, свойства, вычисление, геометрический и физический смысл. . . . .	15
2.7. Криволинейный интеграл 2-го рода как работа силы вдоль пути. Определение, вычисление и свойства. . . . .	15
2.8. Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода: формула связи. . . . .	15
2.9. Теорема (формула) Грина. . . . .	15
2.10. Интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Теорема о независимости интеграла от пути, равносильность I, II, III утверждений. . . . .	15
2.11. Интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Теорема о независимости интеграла от пути, равносильность III, IV утверждений. . . . .	15
2.12. Следствие теоремы о независимости от пути (формула Ньютона-Лейбница). . . . .	15
2.13. Поверхностный интеграл 1-го рода: определение, свойства, вычисление, геометрический и физический смысл. . . . .	15
2.14. Поверхностный интеграл 2-го рода как поток жидкости через поверхность. . . . .	15
2.15. Связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода. . . . .	15
2.16. Поверхностный интеграл 2-го рода: математическое определение, вычисление, свойства. . . . .	15
2.17. Теорема Гаусса-Остроградского. . . . .	15
2.18. Теорема Стокса. . . . .	15
2.19. Скалярное и векторное поля: определения, геометрические характеристики. Дифференциальные и интегральные характеристики полей (определения). . . . .	15
2.20. Виды векторных полей и их свойства (теоремы о поле градиента и поле вихря). . . . .	15
2.21. Механический смысл потока и дивергенции. . . . .	15
2.22. Механический смысл вихря и циркуляции. . . . .	15
2.23. Векторная запись теорем теории поля и их механический смысл. . . . .	15

# 1. Интегрирование функции одной переменной

## 1.1. Определение и свойства неопределенного интеграла.

**Def 1.1.1.** Кусочная дифференцируемая функция  $F(x)$  называется первообразной для функции  $f(x)$ , если  $F'(x) = f(x)$ .

**Теорема 1.1.2.** Разность двух первообразных для одной и той же функции — константа.

*Доказательство.* Пусть дана функция  $f(x)$  и две её первообразные  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$ . Обозначим разность как  $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ . Производная этой функции будет равна  $\varphi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ .

Из множества дифференцируемости  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  выберем наименьшее и выделим в нем отрезок  $[a; x]$ . По т. Лагранжа:

$$\exists \xi \in (a; x): \varphi'(\xi) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}$$

Т.к.  $\forall \xi: \varphi'(\xi) = 0$ , то  $\varphi(x) - \varphi(a) = 0$ , т.е.  $\varphi(x) = \varphi(a)$ . Т.к. отрезок произвольный, то это значения функции  $\varphi(x)$  равны во всех точках, т.е. она константа. ■

*Следствие 1.1.3.* Первообразные для  $f(x)$  составляют множество функций вида  $\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ , где  $F(x)$  это какая-либо первообразная.

**Def 1.1.4.** Семейство первообразных функции  $f(x)$  называется неопределенным интегралом функции  $f(x)$  по аргументу  $x$ .

*Замечание 1.1.5.* О существовании первообразной

Не для каждой функции существует первообразная, но для каждой непрерывной на отрезке. Даже если первообразная существует, то она не всегда выражается в элементарных функциях, например,  $\int e^{-x^2} dx$ .

Далее рассмотрим некоторые свойства неопределенного интеграла.

**Lm 1.1.6.**

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

*Доказательство.*

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx \implies \int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$$

**Lm 1.1.7.**

$$\left( \int f(x)dx \right)' = f(x)$$

*Доказательство.*

$$\left( \int f(x)dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

**Lm 1.1.8.** Линейность

$$\begin{aligned} \int \alpha f(x)dx &= \alpha \int f(x)dx \\ \int (f(x) + g(x))dx &= \int f(x)dx + \int g(x)dx \end{aligned}$$

*Доказательство.*

$$\int \alpha f(x)dx = \int d(\alpha F(x)) = \alpha F(x) + C$$

При первом переходе используется свойство линейности дифференциала, а при втором — 1.1.6. Доказательство для суммы функций аналогично. ■

## 1.2. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям.

*Замечание 1.2.1.* Интеграл сохраняет инвариантность своей формы, т.е.

$$\int f(\clubsuit)d\clubsuit = F(\clubsuit) + C$$

**Теорема 1.2.2.** О замене производной в неопределенном интеграле

Если  $x = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  обратимая и дифференцируемая функция, то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

*Доказательство.* Возьмем производные от обеих частей:

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x)$$

$$\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_t \frac{dt}{dx} \stackrel{1.1.7}{=} f(\varphi(t))\varphi'(t) \frac{dt}{dx} = f(\varphi(t))\varphi'(t) \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x)$$

*Замечание 1.2.3.* Формула работает в обе стороны:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \stackrel{\sqrt{x}=t}{=} \int \frac{e^t}{t} 2t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$$\int e^{x^2} \underbrace{2x dx}_{dx^2} \stackrel{x^2=t}{=} \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2} + C$$

**Теорема 1.2.4.** Интегрирование по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

*Доказательство.* Рассмотрим равенство  $(uv)' = u'v + uv'$  и проинтегрируем обе его части:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\int (uv)' dx = \int u'v + uv' dx$$

$$uv = \int u'v dx + \int uv' dx \quad \text{Линейность интеграла (1.1.8)}$$

$$uv = \int v du + \int u dv \quad \text{Внесение под дифференциал (1.2.2)}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

*Замечание 1.2.5.* Интегрирование по частям используется если  $\int v du$  вычисляется проще, чем интеграл  $\int u dv$ . В качестве функции  $u$  выбирают ту, которая упрощается при дифференцировании.

### 1.3. Интегрирование рациональных функций (общая схема). Разложение дроби на простейшие.

Выделим 4 типа простейших дробей:

$$(I): \frac{A}{x-a} \quad (II): \frac{A}{(x-a)^2} \quad (III): \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad (IV): \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$

где  $(x^2 + px + q)$  неразложимый на множители многочлен, а  $A, M, N$  — неопределенные коэффициенты.

Метод неопределенных коэффициентов:

Пусть дана дробь  $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ , в которой  $Q_m(x)$  и  $P_n(x)$  это многочлены с вещественными коэффициентами. Требуется разложить её на простейшие.

1. Если  $m \geq n$ , то необходимо выделить целую часть. Далее будем считать, что  $m < n$ .
2. Раскладываем знаменатель на множители, т.е. приводим его к виду

$$P_n = a_0(x-x_1)^{b_1} \dots (x-x_t)^{b_t}(x^2+p_1x+q_1)^{c_1} \dots (x^2+p_rx+q_r)^{c_r}$$

3. Для каждой скобки в знаменателе записываем некоторую дробь по следующему правилу:

$$\begin{aligned}
(x - x_i) &\rightarrow \frac{A}{x - x_i} \\
(x - x_i)^k &\rightarrow \frac{A}{x - x_i} + \dots + \frac{A}{(x - x_i)^k} \\
(x^2 + p_i x + q_i) &\rightarrow \frac{Ax + B}{x^2 + p_i x + q_i} \\
(x^2 + p_i x + q_i)^k &\rightarrow \frac{Ax + B}{x^2 + p_i x + q_i} + \dots + \frac{Ax + B}{(x^2 + p_i x + q_i)^k}
\end{aligned}$$

У каждой скобки будет свой набор констант.

- Получаем уравнение относительно коэффициентов  $A, B, \dots$ , которые находятся в числителе полученных дробей.
- Приводит полученную дробь к общему знаменателю и приравниваем её к исходной дроби.
- Т.к. знаменатели полученных дробей равны, то должны быть равны и числители. Пользуемся тем, что два полинома равны когда равны все коэффициенты перед одинаковыми степенями. Получаем систему уравнений (по количеству коэффициентов).
- Решаем систему, находим коэффициенты. Подставляем их в разложение исходной дроби на сумму простейших дробей.

Теперь интегрирование рациональных дробей свелось к тому, чтобы разложить их на простейшие, а потом, пользуясь линейностью интеграла (1.1.8), проинтегрировать каждую из дробей по-отдельности. Подробнее об интегрировании простейших дробей написано в вопросе 1.4.

#### 1.4. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование простейших дробей 1,2,3.

- Интегрирование простейших дробей I-ого типа

$$\int \frac{A}{x - a} dx = A \int \frac{d(x - a)}{x - a} = \ln |x - a| + C$$

- Интегрирование простейших дробей II-ого типа

$$\int \frac{A}{(x - a)^k} dx = A \int (x - a)^{-k} d(x - a) = \frac{A}{1 - k} \cdot (x - a)^{1 - k} = \frac{A}{1 - k} \cdot \frac{1}{(x - a)^{k - 1}}$$

- Интегрирование простейших дробей III-его типа

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx \quad (1)$$

Попытаемся внести числитель под дифференциал:

$$\begin{aligned}
d(x^2 + px + q) &= (2x + p)dx \\
(Mx + N) &= \frac{M}{2} \left( 2x + \frac{2N}{M} \right) = \frac{M}{2} \left( 2x + p + \frac{2N}{M} - p \right) = \frac{M}{2} (2x + p) + \underbrace{\left( N - \frac{Mp}{2} \right)}_h
\end{aligned}$$

Подставим это в (1):

$$\int \frac{(2x + p) + h}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \int \frac{h}{x^2 + px + q} dx$$

Далее вычислим каждый из интегралов по-отдельности:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{d(x^2 + px + q)}{x^2 + px + q} = \ln |x^2 + px + q| + C \\
\int \frac{h}{x^2 + px + q} dx &= h \cdot \int \frac{1}{(x + p/2)^2 + \underbrace{q - (p/2)^2}_g} dx = \frac{h}{g} \cdot \arctg \left( \frac{x + p/2}{g} \right) + C
\end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в исходный интеграл (1):

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \ln |x^2 + px + q| + \frac{h}{g} \cdot \arctg \left( \frac{x + p/2}{g} \right) + C \\
h &= \left( N - \frac{Mp}{2} \right), g = q - \left( \frac{p}{2} \right)^2
\end{aligned}$$

- Интегрирование простейших дробей IV-его типа

Рассмотрим на примере:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

Первый из полученных интегралов мы уже вычислить, это простейшая дробь III-ого типа. Таким образом этот интеграл будет равен  $\arctg x + C$ . Далее работаем со вторым интегралом:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{x d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \left[ \frac{dt}{t^2} = -d\left(\frac{1}{t}\right) \right] = -\frac{1}{2} \cdot \int x \cdot d\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \quad (2)$$

Полученный интеграл возьмем по частям:

$$\int \underbrace{x}_u d \underbrace{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}_v = \frac{x}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} - \arctg x + C \quad (3)$$

Подставим (3) в (2), а полученное выражение в исходный интеграл (1):

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} &= \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \\ &= \arctg x + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{x^2+1} - \arctg x \right) + C = \\ &= \frac{1}{2} \arctg x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C \end{aligned}$$

*Замечание 1.4.1.* В случаях с более высокой степенью каждая подобная итерация будет приводить к уменьшению степени знаменателя на единицу.

**TODO:** И вообще это рекуррентные интегралы, которые считаются последовательно от 1-ой степени до данной.

## 1.5. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка.

*Замечание 1.5.1.* Всякая рациональная дробь интегрируемая, поэтому можно попытаться с помощью замены свести функции другого вида к рациональным дробям.

Если требуется вычислить интеграл вида  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ , где  $R$  это некоторая *рациональная* функция, то можно применить универсальную тригонометрическую подстановку:

$$x = 2 \arctg t \iff t = \tg \frac{x}{2}$$

Тогда составляющие интеграла преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin x/2 \cos x/2}{\sin^2 x/2 + \cos^2 x/2} = \frac{2 \tg x/2}{\tg^2 x/2 + 1} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2}{\sin^2 x/2 + \cos^2 x/2} = \frac{1 - \tg^2 x/2}{\tg^2 x/2 + 1} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx &= d(2 \arctg t) = \frac{2}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в исходный интеграл, получаем:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \xrightarrow{\text{УТП}} \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

## 1.6. Интегрирование тригонометрических функций вида $R(\sin^m x, \cos^n x)$ , $R(\sin mx, \cos nx)$ .

Рассмотрим интегралы вида  $\int \sin^m x \cos^m x dx$

1.  $n$  или  $m$  нечетное

Пусть  $m$  нечетное, тогда  $m = 2k + 1$ . Подставим это в исходный интеграл:

$$\int \sin^m x \cos^m x dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k d(\sin x) \xrightarrow{t=\sin x} \int t^m x (1-t^2)^k dt$$

Получили интеграл от полинома  $\implies$  умеем его решать.

2.  $n$  и  $m$  четные

Обозначим  $n = 2p$ ,  $m = 2q$ , тогда:

$$\int \sin^m x \cos^m x dx = \int (\sin^2 x)^p (\cos^2 x)^q dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^p \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^q dx$$

Далее раскрываем скобки и упрощаем. Получится либо первый случай (с нечетной степенью), либо второй, но с меньшей степенью.

## Интегралы видов

- $\int \sin mx \sin nx dx$
- $\int \sin mx \cos nx dx$
- $\int \cos mx \cos nx dx$

решаются при помощи использования тригонометрических формул, которые сводят произведение к сумме/разности:

$$\begin{aligned}\sin mx \sin nx &= \frac{1}{2} (\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)) \\ \sin mx \cos nx &= \frac{1}{2} (\sin((m-n)x) + \sin((m+n)x)) \\ \cos mx \cos nx &= \frac{1}{2} (\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x))\end{aligned}$$

**TODO:** На лекции были интегралы вида  $\int \sin^m x \cos^n x dx$ , а не  $R(\sin^m x, \cos^n x)$ .

### 1.7. Интегрирование некоторых иррациональных функций, метод тригонометрической подстановки.

- Интегралы вида  $\int R(\sqrt{x^2 \pm 1}, x) dx$  решаются с помощью замены  $x$  на гиперболическую функцию:

$$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \quad \cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

*Замечание 1.7.1.* Данные функции называются гиперболическим синусом и гиперболическим косинусом соответственно.

**Lm 1.7.2.** Основное гиперболическое тождество

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$$

*Доказательство.*

$$\cosh^2 - \sinh^2 = \left( \frac{e^u + e^{-u}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^u - e^{-u}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2u} + 2 + e^{-2u} - e^{2u} + 2 - e^{-2u}) = 1$$

*Замечание 1.7.3.* Заметим, что

$$\ln |\sinh + \cosh| = \ln \left| \frac{e^u - e^{-u}}{2} + \frac{e^u + e^{-u}}{2} \right| = \ln e^u = u$$

Пример:

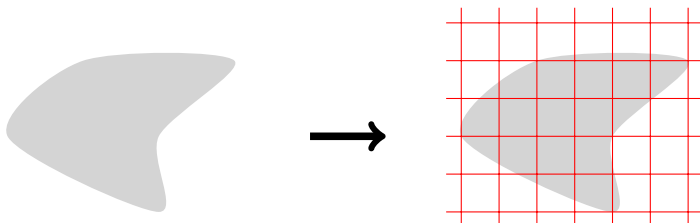
Вычислим 'длинный' логарифм:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[ \begin{array}{l} x = \sinh u \implies 1+x^2 = \cosh^2 u \\ dx = d(\sinh u) = \cosh u du \\ u = \ln \left| \underbrace{x}_{\sinh u} + \underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{\cosh u} \right| \quad (1.7.3) \end{array} \right] = \int \frac{\cosh u}{\cosh u} du = u + C = \ln |x + \sqrt{1+x^2}| + C$$

- Интегралы вида  $\int R(\sqrt{1-x^2}, x) dx$  решаются с помощью замены  $x$  на синус или косинус.
- Интегралы вида  $\int R(\sqrt[k]{x}, \dots, \sqrt[k]{x}) dx$  решаются с помощью замены  $t = \sqrt[k]{x}$ , где  $K$  это НОД для  $k_1, \dots, k_n$ .
- Интегралы вида  $\int R(\sqrt{ax+b}, x) dx$  решаются с помощью замены  $t = \sqrt{ax+b}$ . При этом  $x = \frac{t^2-b}{a}$ ,  $dx = \frac{2t}{a} dt$ .

### 1.8. Определенный интеграл. Определение, свойства линейности и аддитивности.

Постановка задачи: требуется найти площадь криволинейной фигуры. Разобьем фигуру на квадраты и найдем площадь каждого из них. После это сложим полученные площади.



Упростим задачу: пусть нужно посчитать площадь криволинейной трапеции.





1. Разбиение области  $[a; b]$ :  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Отрезок  $[x_{i-1}, x_i]$  назовем частичным, если длину обозначим  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Разбиение (дробление) обозначим  $T = \{x_i\}_{i=0}^n$ . Введем понятие *ранга* дробления  $\tau$ :  $\tau = \max \Delta x_i$ .
2. Выберем среднюю точку  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Тогда  $f(\xi_i)$  это высота элементарного прямоугольника. Значит площадь элементарного прямоугольника будет равна  $S_e = \Delta x_i f(\xi_i)$ .
3. Просуммируем площади всех элементарных прямоугольников:  $\sum_{i=1}^n \Delta x_i f(\xi_i)$ . Данная сумма называется интегральной суммой Римана.
4. Возьмем предел при  $n \rightarrow \infty$  и  $\tau \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(\xi_i) \quad (1)$$

**Def 1.8.1.** Если полученный предел интегральных сумм (1) существует, конечен, **не зависит дробления и выбора средней точки**, то он называется определенным интегралом.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(\xi_i)$$

$a, b$  называются пределами интегрирования,  $f(x)$  — подынтегральной функцией, а  $dx$  — дифференциалом переменной (или элементом длины).

*Замечание 1.8.2.* В определении выше  $a < b$ . Доопределим для случаев  $a = b$  и  $a > b$ :

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

*Замечание 1.8.3.* Интеграл Римана определен для кусочно-непрерывных (т.е. имеющих конечное число разрывов) функций.

Т.к. интеграл является пределом сумм, то его свойства вытекают из свойств пределов:

1. Линейность

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

2. Аддитивность

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

*Замечание 1.8.4.* Свойство аддитивности выполняется даже в случае, если  $c \notin [a; b]$ . Это легко проверить пользуясь свойством 1.8.2.

## 1.9. Геометрический смысл определенного интеграла. Оценка определенного интеграла. Теорема о среднем.

Геометрический смысл определенного интеграла следует из его построения: определенный интеграл по модулю равен площади криволинейной трапеции.

**Lm 1.9.1.** Пусть  $f \in C_{[a;b]}$  и определен  $\int_a^b f(x) dx$ .  $m, M$  — наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ . Тогда

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a)M$$



*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
\forall x \in [a; b]: m \leq f(x) \leq M &\implies \forall \xi_i \in [a; b]: m \leq f(\xi_i) \leq M \\
m \Delta x_i &\leq f(\xi_i) \Delta x_i \leq M \Delta x_i \\
m \sum_{i=1}^n \Delta x_i &\leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq M \sum_{i=1}^n \Delta x_i \\
m \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta x_i &\leq \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq M \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \\
(b-a)m &\leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a)M
\end{aligned}$$

■

**Теорема 1.9.2.** Теорема Лагранжа о среднем (в интегральной форме)

Пусть  $f \in C_{[a;b]}$  и определен  $\int_a^b f(x) dx$ . Тогда

$$\exists \xi \in (a; b): \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

*Доказательство.* Воспользуемся леммой 1.9.1:

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a)M \implies m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx \leq M$$

По т. Больцано-Коши функция  $f(x)$  принимает все значения от минимального  $m$  до максимального  $M$ . Значит  $\exists \xi \in (a; b)$ , что

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx \implies \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

■

*Замечание 1.9.3.* Геометрический смысл теоремы Лагранжа заключается в том, что на промежутке  $(a; b)$  всегда найдется такая точка  $\xi$ , что площадь криволинейной трапеции будет в точности равна площади прямоугольника со сторонами  $(b-a)$  и  $(f(\xi) - f(m))$ .

**Лм 1.9.4.** Если  $f(x), g(x) \in C_{[a;b]}$ , определены  $\int_a^b f(x) dx$ ,  $\int_a^b g(x) dx$  и при этом  $\forall x \in [a; b]: f(x) \geq g(x)$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $h(x) = f(x) - g(x)$ . Она будет неотрицательная на отрезке  $[a; b]$ , значит  $\int_a^b h(x) dx \geq 0$ . Далее пользуемся аддитивностью и получаем искомое неравенство. ■

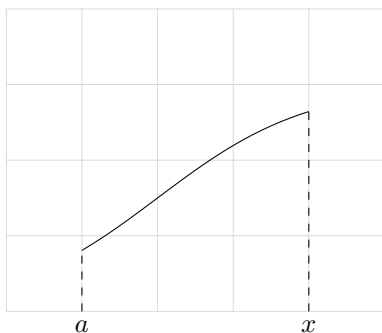
**Лм 1.9.5.** Пусть  $f \in C_{[a;b]}$  и определен  $\int_a^b f(x) dx$ . Тогда

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

*Доказательство.* Т.к. определенный интеграл это предел интегральных сумм, то можно воспользоваться предельным переходом, а затем свойством о том, что модуль суммы не превосходит сумму модулей. ■

*Замечание 1.9.6.* Выкалывание из отрезка  $[a; b]$  конечного числа точек не меняет значение интеграла.

## 1.10. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Барроу.



**Def 1.10.1.** Интегралом с переменных верхним пределом называется

$$\int_a^x f(t)dt$$

где  $x$  — переменный верхний предел.

*Замечание 1.10.2.*  $\forall x \in [a; +\infty]$  соответствует определенное значение  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ , т.е. определена функция верхнего предела, которая геометрически является площадью криволинейной трапеции с подвижным правым краем.

**Теорема 1.10.3.** Теорема Барроу

Пусть  $f \in C_{[a;b]}$  и определен  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ . Тогда  $\Phi'(x) = f(x)$ .

*Доказательство.* Раскроем производную  $\Phi'(x)$  по определению, после чего воспользуемся линейностью интеграла:

$$\Phi'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}$$

Далее по т. Лагранжа (1.9.2)  $\exists \xi \in (a; b)$  такая, что:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \left[ \begin{array}{l} \Delta x \rightarrow 0 \\ \xi \in (x, x + \Delta x) \end{array} \right\} \Rightarrow \xi \rightarrow x = f(x)$$

■

## 1.11. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.

**Теорема 1.11.1.** Формула Ньютона-Лейбница

Пусть  $f(x) \in C_{[a;b]}$ , определен  $\int_a^b f(x)dx$  и  $F(x)$  это некоторая первообразная для  $f(x)$ . Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ , где  $x \in [a; b]$ . Тогда по т. Барроу (1.10.3)  $\Phi(x) = F(x) + C$ . Найдем значение функции  $\Phi(x)$  в точке  $a$ :

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 \\ \Phi(a) = F(a) + C \end{array} \right\} \Rightarrow C = -F(a)$$

Теперь найдем значение функции  $\Phi(x)$  в точке  $b$ :

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(b) = \int_a^b f(t)dt \\ \Phi(b) = F(b) + C = F(b) - F(a) \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

■

*Замечание 1.11.2.* Формула Ньютона-Лейбница работает в тех случаях, когда можно найти  $F(x)$  или хотя бы её значения на концах отрезка  $[a; b]$ .

*Замечание 1.11.3.* Если функция  $f(x)$  кусочно заданная, то используем свойство аддитивности и разбиваем отрезок на части.

## 1.12. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям.

Замена в определенном интеграле выполняется также, как и в неопределенном за исключением смены пределов интегрирования. Более формально:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$$

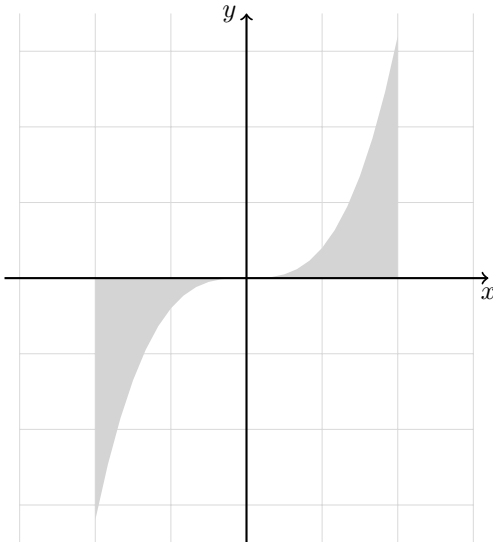
Интегрирование по частям для определенных интегралов выполняется также, как и для неопределенных:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Стоит отметить несколько свойств определенных интегралов для четных и нечетных функций на симметричном промежутке

**Lm 1.12.1.** Если  $f(x)$  нечетная функция, то

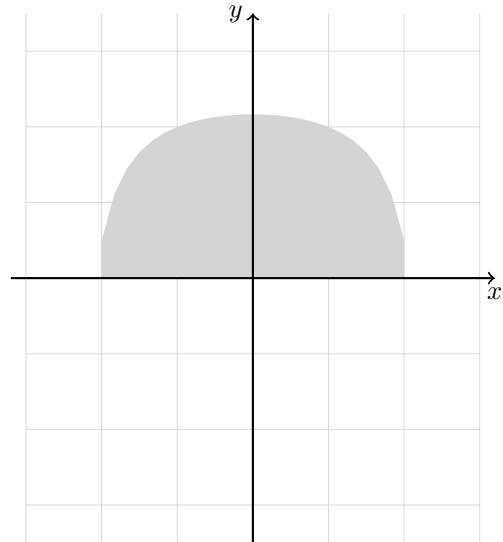
$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$



(a)  $f(-x) = -f(x)$

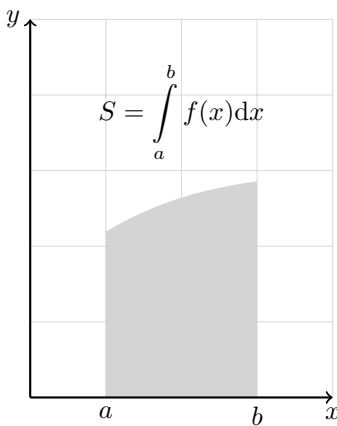
**Lm 1.12.2.** Если  $f(x)$  четная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

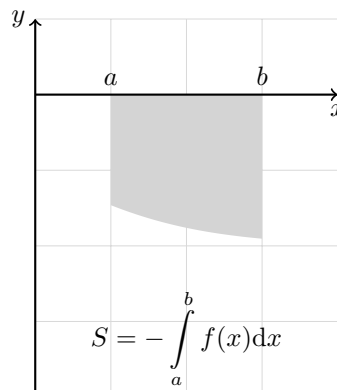


(b)  $f(-x) = f(x)$

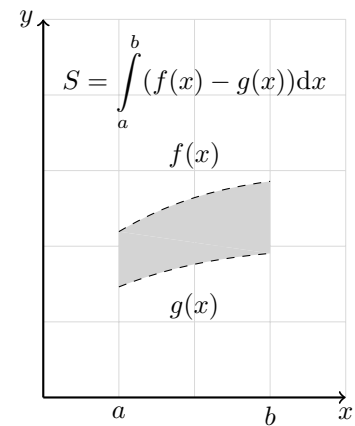
### 1.13. Приложения определенного интеграла: вычисление площадей в декартовых координатах.



(a)  $f(x) \geq 0$



(b)  $f(x) \leq 0$



(c)  $f(x) \geq g(x)$

*Замечание 1.13.1.* Для случая (c) расположение функций  $f(x)$ ,  $g(x)$  относительно нуля не важно. Важно лишь, чтобы  $\forall x \in [a; b]: f(x) \geq g(x)$ .

### 1.14. Приложения определенного интеграла: вычисление площади криволинейного сектора в полярных координатах.



Построим интеграл:

1. Дробление отрезка  $[\alpha, \beta]$  на подотрезки  $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ ,  $\tau = \max \Delta\varphi_i$ .
2. В каждом отрезке выбираем среднюю точку  $\xi_i$ . Ищем  $\rho(\xi_i)$ , приближаем площадь элементарного сектора площадью кругового.

$$S_{sec} = \frac{\pi \rho^2(\xi_i)}{2\pi} \cdot \Delta\varphi_i = \frac{1}{2} \rho^2(\xi_i) \Delta\varphi_i$$

3. Площадь это предел интегральных сумм

$$S = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho^2(\xi_i) \Delta\varphi_i$$

4. Переход к интегралу

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

*Замечание 1.14.1.* Если кривая задана параметрически  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ , то площадь можно вычислить по формуле:

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \varphi'(t) dt$$

$$a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$$

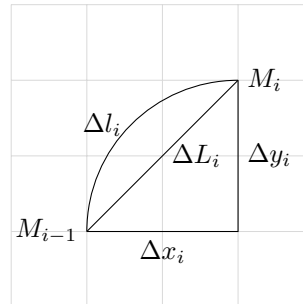
### 1.15. Приложения определенного интеграла: вычисление длины дуги кривой (вывод формулы).

Пусть дана гладкая (без самопересечений, разрывов и циклов) дуга  $\check{AB}$  задаваемая уравнением  $y = y(x)$ , где  $y(x)$  функция, дифференцируемая на  $[a; b]$ . Найдем её длину.

Построим интеграл:

1. Дробление  $\check{AB}$  такими  $M_i$ , что  $AM_0 \dots M_n B \approx \check{AB}$ .
2. Стянем точки  $M_{i-1}$  и  $M_i$  хордой и получим координатный треугольник.

$$\Delta l_i \approx \Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$



3. Заметим, что  $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$  это отношение конечных приращений, поэтому можно применить т. Лагранжа:

$$\exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]: \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(\xi_i)$$

$$\Delta L_i = \sqrt{1 + y'(\xi_i)^2} \Delta x_i$$

4. Составим предел интегральных сумм и перейдем к интегралу:

$$L = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + y'(\xi_i)^2} \Delta x_i \implies L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

*Замечание 1.15.1.* Выражение  $dl = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$  называется дифференциалом дуги.

### 1.16. Приложения определенного интеграла: вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически.

Рассмотрим формулу  $L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$  при условии, что кривая задана параметрически. Получим:

$$\begin{aligned}
x &= \varphi(t), y = \psi(t) \\
dx &= \varphi'(t)dt \\
a &= \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta), t \in [\alpha; \beta] \\
y'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}
\end{aligned}$$

Подставим это в исходную формулу:

$$\begin{aligned}
L &= \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \varphi'(t) dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt \\
&\quad a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)
\end{aligned}$$

### 1.17. Приложения определенного интеграла: вычисление объемов тел с известными площадями сечений и тел вращения.

Пусть дано некоторое тело и известны площади его сечений в плоскости  $\perp Ox$ , т.е. известна функция  $S(x)$ , определяющая площадь сечения в зависимости от  $x$ . Построим интеграл:

1. Дробление: отрезок  $[a; b]$ , где  $a$  и  $b$  это крайние точки тела, делится на подотрезки  $[x_{i-1}, x_i]$ . Через  $x_i$  проводится плоскость  $\perp Ox$  и выделяется элементарный слой.
2. Приближаем объем этого слоя объемом цилиндра с основанием  $S(\xi_i)$ , где  $\xi_i$  это некоторая средняя точка из отрезка  $[x_{i-1}, x_i]$ .
3. Составляем предел интегральных сумм и переходим к интегралу.

$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \Delta x_i \implies V = \int_a^b S(x) dx$$

*Замечание 1.17.1.* Сечения обязательно должны быть  $\perp Ox$ , в противном случае получится объем, умноженный на коэффициент наклона сечения по отношению к оси  $Ox$ .

Рассмотрим нахождение объема тел вращения.

Подставим в полученную выше формулу  $S_{sec} = S_o = \pi f(x)^2$ . Получим, что объем тела вращения равен:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

### 1.18. Несобственные интегралы 1-го рода (на неограниченном промежутке). Определение и свойства.

**Def 1.18.1.** Интеграл от функции на неограниченном промежутке называется несобственным интегралом 1-ого рода.

$$\begin{aligned}
\int_a^{+\infty} f(x) dx &\stackrel{def}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \\
\int_{-\infty}^a f(x) dx &\stackrel{def}{=} \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x) dx \\
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &\stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

**Def 1.18.2.** Если предел в определении 1.18.1 существует и конечен, то говорят, что интеграл *сходится* ( $\succ$ ), в противном случае говорят, что интеграл *расходится* ( $\prec$ ).

Несобственные интегралы 1-ого рода обладают теми же свойствами, что и рассмотренные ранее интегралы:

1. Линейность

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

## 2. Аддитивность

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

## 3. Сравнение

$$\forall x \in [a; +\infty]: f(x) \geq g(x) \implies \int_a^{+\infty} f(x)dx \geq \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

- 1.19. Вычисление несобственного интеграла 1-го рода: формула Ньютона-Лейбница, интегрирование по частям, замена переменной.
- 1.20. Несобственные интегралы 2-го рода (от неограниченной функции). Определение, вычисление и свойства.
- 1.21. Признаки сходимости несобственных интегралов: первый признак сравнения (в неравенствах).
- 1.22. Признаки сходимости несобственных интегралов: второй признак сравнения (предельный).
- 1.23. Признаки сходимости несобственных интегралов: теорема об абсолютной сходимости. Понятие условной сходимости.
- 1.24. Сходимость интегралов 1-го и 2-го рода от степенных функций.

## 2. Интегрирование функции нескольких переменных

- 2.1. Двойной интеграл. Определение и свойства.
- 2.2. Вычисление двойного интеграла. Кратный интеграл.
- 2.3. Определение и вычисление тройного интеграла.
- 2.4. Криволинейные координаты.
- 2.5. Замена переменных в двойном и тройном интегралах. Якобиан.
- 2.6. Криволинейный интеграл 1-го рода: определение, свойства, вычисление, геометрический и физический смысл.
- 2.7. Криволинейный интеграл 2-го рода как работа силы вдоль пути. Определение, вычисление и свойства.
- 2.8. Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода: формула связи.
- 2.9. Теорема (формула) Грина.
- 2.10. Интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Теорема о независимости интеграла от пути, равносильность I, II, III утверждений.
- 2.11. Интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Теорема о независимости интеграла от пути, равносильность III, IV утверждений.
- 2.12. Следствие теоремы о независимости от пути (формула Ньютона-Лейбница).
- 2.13. Поверхностный интеграл 1-го рода: определение, свойства, вычисление, геометрический и физический смысл.
- 2.14. Поверхностный интеграл 2-го рода как поток жидкости через поверхность.
- 2.15. Связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода.
- 2.16. Поверхностный интеграл 2-го рода: математическое определение, вычисление, свойства.
- 2.17. Теорема Гаусса-Остроградского.
- 2.18. Теорема Стокса.
- 2.19. Скалярное и векторное поля: определения, геометрические характеристики. Дифференциальные и интегральные характеристики полей (определения).
- 2.20. Виды векторных полей и их свойства (теоремы о поле градиента и поле вихря).
- 2.21. Механический смысл потока и дивергенции.
- 2.22. Механический смысл вихря и циркуляции.
- 2.23. Векторная запись теорем теории поля и их механический смысл.