LA Eχ 02

isagila @pochtineploho @DUBSTEPHAVEGUN

Собрано 19.06.2023 в 15:04

https://github.com/isagila/tesc

Содержание

1. Линейная алгебра

1.1. Евклидово пространство: определение, неравенство Коши-Буняковского. Нормированное евклидово пространство.

Def 1.1.1. Скалярным произведением называется функция двух элементов линейного пространства $x, y \in L^n$ обозначаемая $(x, y) \to \mathbb{R}$, для которой выполнены аксиомы: $\forall x, y \in L^n, \lambda \in \mathbb{C}$

1. $(x, y) = (y, x)$
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
3. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
4. $(x, x) \geqslant 0$, $(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

Def 1.1.2. Линейное пространство с введенным скалярным произведением называется евклидовым пространством и обозначается E^n.

Замечание 1.1.3. Если $L = C_{[a;b]}$, то скалярное произведение обычно определяется как $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$

Теорема 1.1.4. Неравенство Коши-Буняковского

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y)$$

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение:

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) \geqslant 0$$
$$(\lambda x - y, \lambda x - y) = \lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) \geqslant 0$$

Полученное выражение можно рассмотреть как квадратное уравнение относительно λ. Т.к. оно неотрицательно $\forall \lambda$, то его дискриминант будет $\leqslant 0$. Таким образом

$$4\lambda^2(x, y)^2 - 4\lambda^2(x, x)(y, y) \leqslant 0$$
$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leqslant 0$$
$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y)$$

■

Def 1.1.5. Нормой называется функция одного элемента линейного пространства $x \in L^n$, обозначаемая $\|x\|$ и определяемая аксиомами: $\forall x, y \in L^n, \lambda \in \mathbb{C}$:

1. $\|\lambda x\| = \lambda\|x\|$
2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
3. $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$

Def 1.1.6. Евклидово пространство называется *нормированным*, если в нем определена норма.

Замечание 1.1.7. Чаще всего норма определяется как $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

1.2. Ортонормированный базис, ортогонализация базиса. Матрица Грама.

Def 1.2.1. Косинусом *угла* между двумя элементами Евклидова пространства называется

$$\cos \angle(x, y) = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Def 1.2.2. Для элемента Евклидова пространства ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю.

$$x \perp y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (x, y) = 0$$

Теорема 1.2.3. Во всяком Евклидовом пространстве E^n можно выделить ортонормированный базис размера n.

Доказательство. Т.к. Евклидово пространство является линейным пространством, то по свойству линейного пространства в нем можно выделить базис размера n. Обозначим этот базис $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Ортогонализируем его, полученный базис обозначим $\mathcal{E}' = \{\mathbb{e}_1', \ldots, \mathbb{e}_n'\}$. Этот базис можно нормировать и получить искомый ортонормированный базис $\mathcal{E} = \{\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_n\}$.

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

Будем добавлять векторы в базис $\mathcal{E}'$ из базиса B по-одному:

База: начнем с одного произвольного вектора β_1. Тогда $\mathbb{e}_1' = \beta_1$.

Переход: пусть у нас уже выделен набор из $k-1$ ортогональных векторов $\mathcal{E}'_k = \{\mathbb{e}'_1, \ldots, \mathbb{e}'_{k-1}\}$ и в него требуется добавить вектор β_k.

Будем искать $\mathbb{e}'_k$ в виде

$$\mathbb{e}'_k = \beta_k + \lambda_1 \mathbb{e}'_{k-1} + \lambda_2 \mathbb{e}'_{k-2} + \ldots + \lambda_{k-1} \mathbb{e}'_1$$

Чтобы $\mathbb{e}'_k$ был ортогонален остальным векторам уже построенной системы, необходимо, чтобы скалярные произведение $\mathbb{e}'_k$ с остальными векторами системы равнялись нулю. Рассмотрим на примере $\mathbb{e}'_1$:

$$(\mathbb{e}'_k, \mathbb{e}'_1) = (\beta_k, \mathbb{e}'_1) + \lambda_1(\mathbb{e}'_{k-1}, e'_1) + \ldots + \lambda_{k-1}(\mathbb{e}'_1, \mathbb{e}'_1) = 0$$

Учитывая то, что система $\mathcal{E}'_k$ ортогональна, то $(\mathbb{e}'_i, \mathbb{e}'_j) = 0$ $(\forall i \neq j, i < k, j < k)$. Значит выражение выше упрощается и остается:

$$(\beta_k, \mathbb{e}'_1) + \lambda_{k-1}(\mathbb{e}'_1, \mathbb{e}'_1) = 0$$
$$\lambda_{k-1} = -\frac{(\beta_k, \mathbb{e}'_1)}{(\mathbb{e}'_1, \mathbb{e}'_1)}$$

Аналогично можно получить оставшиеся коэффициенты λ_i. Тогда добавляемый в систему вектор $\mathbb{e}'_k$ будет иметь вид:

$$\mathbb{e}'_k = \beta_k - \frac{(\beta_k, \mathbb{e}'_{k-1})}{(\mathbb{e}'_{k-1}, \mathbb{e}'_{k-1})} \cdot \mathbb{e}'_{k-1} - \ldots - \frac{(\beta_k, \mathbb{e}'_1)}{(\mathbb{e}'_1, \mathbb{e}'_1)} \cdot \mathbb{e}'_1$$

Далее каждый вектор из получившегося ортогонального базиса поделим на его норму и получим ортонормированный базис $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \left\{ \frac{\mathbb{e}'_1}{\|\mathbb{e}'_1\|}, \ldots, \frac{\mathbb{e}'_n}{\|\mathbb{e}'_n\|} \right\} = \{\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_n\}$$

∎

Def 1.2.4. Матрицей Грама называется матрица составленная из скалярных произведений

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_1) & \ldots & (\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbb{e}_k, \mathbb{e}_1) & \ldots & (\mathbb{e}_k, \mathbb{e}_k) \end{pmatrix}$$

Замечание 1.2.5. В силу свойств скалярного произведения матрица Грамма всегда симметричная, причем в ортогональном базисе она диагональная, а в ортонормированном — единичная.

1.3. Ортогональность вектора подпространству. Ортогональное дополнение. Теорема Пифагора.

Def 1.3.1. Пусть дано Евклидово пространство E^n. Элемент $h \in E^n$ называется ортогональным (перпендикулярным) подпространству $G \subset E^n$, если

$$\forall x \in G \colon h \perp x \overset{\text{def}}{\iff} h \perp G$$

Следствие 1.3.2. Выделим в подпространстве G базис $\mathcal{E} = \{\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_k\}$. Тогда

$$\forall \mathbb{e}_i \in \mathcal{E} \colon h \perp e_i \implies h \perp G$$

Доказательство. Выберем произвольный элемент $x \in G$, разложим его по базису $\mathcal{E}$, после чего воспользуемся свойствами скалярного произведения:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbb{e}_i \implies (h, x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underbrace{(h, \mathbb{e}_i)}_{=0} = 0 \xRightarrow{1.2.2} \forall x \in G \colon h \perp x \xLeftrightarrow{1.3.1} h \perp G$$

∎

Def 1.3.3. Пусть дано Евклидово пространство E^n. Ортогональным дополнением $F^{\perp}$ к подпространству $F \subset E^n$ называется совокупность векторов $h \perp F$.

Замечание 1.3.4. Из определения 1.3.1 следует, что F также является подпространством E^n.

Теорема 1.3.5. Евклидово пространство E^n является прямой суммой подпространства $F \subset E^n$ и его ортогонального дополнения $F^{\perp}$.

$$E^n = F \oplus F^{\perp}$$

Доказательство. В E^n выделим ортогональный базис $\mathcal{E}$ (по 1.2.3), после чего разложим произвольный $x \in E^n$ по этому базису:

$$\mathcal{E} = \{\underbrace{\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_k}_{\text{Базис } F}, \mathbb{e}_{k+1}, \ldots \mathbb{e}_n\} \Longrightarrow x = \underbrace{x_1\mathbb{e}_1 + \cdots + x_k\mathbb{e}_k}_{\hat{x}} + \underbrace{x_{k+1}\mathbb{e}_{k+1} + \cdots + x_n\mathbb{e}_n}_{\overline{x}} = \hat{x} + \overline{x}$$

Т.к. базис $\mathcal{E}$ ортогональный, то вектор $\mathbb{e}_{k+1}$ ортогонален каждому из векторов базиса $F \xRightarrow{1.3.2} \mathbb{e}_{k+1} \perp F$. Аналогично остальные векторы, не входящие в базис F, также $\perp F$. Значит $\overline{x} \perp F$ как их линейная комбинация. Множество $\overline{x}$ и составляет $F^\perp$ по определению ортогонального дополнения (1.3.3). ∎

Теорема 1.3.6. Теорема Пифагора

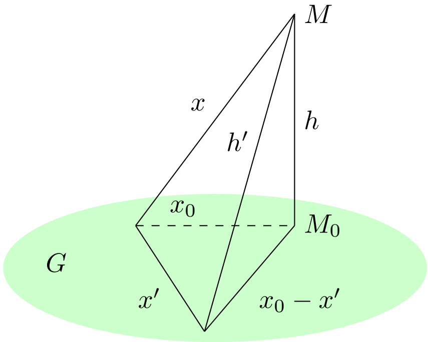
$$\forall x, y \in E^n \colon x \perp y \Longrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Доказательство. Раскроем норму как корень из скалярного произведения элемента на себя, после чего воспользуемся свойствами скалярного произведения:

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \xlongequal{x \perp y \Longrightarrow (x,y) = 0} (x, x) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

∎

1.4. Задача о перпендикуляре.



Постановка задачи: необходимо найти перпендикуляр $h \perp G \colon x_0 + h = x$ ($x_0 \in G, x \in E^n$), т.е. нужно найти точку M_0 — проекцию M на G.
В таком случае x_0 называется *ортогональной* проекцией x на G.

Теорема 1.4.1. В описанных выше условиях h задает кратчайшее расстояние от x до G:

$$\forall x' \in G \mid x' \neq x_0 \colon \underbrace{|x - x'|}_{h'} > \underbrace{|x - x_0|}_{h}$$

Доказательство.

$$\left.\begin{aligned} &x', x_0 \in G \Longrightarrow x_0 - x' \in G \\ &h \perp G \end{aligned}\right\} \Longrightarrow h \perp (x_0 - x')$$

$$\|h'\|^2 = \|x - x'\|^2 = \|x - x_0 + x_0 - x'\| \xlongequal{1.3.6} \underbrace{\|x - x_0\|^2}_{\|h\|^2} + \|x_0 - x'\|$$

$$\|h'\|^2 = \|h\|^2 + \|x_0 - x'\|$$

$$x' \neq x_0 \Longrightarrow \|x_0 - x'\| > 0 \Longrightarrow \|h'\|^2 > \|h\|^2$$

∎

Замечание 1.4.2. x_0 это проекция x на G, отстоящая от x на наименьшее расстояние.

Замечание 1.4.3. О вычислении ортогональной проекции

В G выделим базис $\mathcal{E}$ и разложим x_0 по этому базису:

$$x_0 = \lambda_1\mathbb{e}_1 + \ldots + \lambda_k\mathbb{e}_k \tag{1}$$

Теперь задача состоит в поиске коэффициентов λ_i. воспользуемся тем, что h это перпендикуляр к G:

$$\left.\begin{aligned} &h = x - x_0 \\ &h \perp G \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \mathbb{e}_i \in \mathcal{E} \colon h \perp \mathbb{e}_i \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (x - x_0, \mathbb{e}_i) = 0 \Longrightarrow (x_0, \mathbb{e}_i) = (x, \mathbb{e}_i) \qquad (\forall \mathbb{e}_i \in \mathcal{E}) \tag{2}$$

Подставим (1) в (2) и воспользуемся свойствами скалярного произведения:

$$\forall \mathbb{e}_i \in \mathcal{E} \colon \lambda_1(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_i) + \ldots + \lambda_n(\mathbb{e}_n, \mathbb{e}_i) = (x, e_i)$$

Для каждого $\mathbb{e}_i \in \mathcal{E}$ получаем свое уравнение $\Longrightarrow$ можно составить СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} (\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_1) & \ldots & (\mathbb{e}_k, \mathbb{e}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_k) & \ldots & (\mathbb{e}_k, \mathbb{e}_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, \mathbb{e}_1) \\ \vdots \\ (x, \mathbb{e}_k) \end{pmatrix}$$

Заметим, что матрица коэффициентов полученной СЛАУ это матрица Грамма. Её определитель не равен нулю, т.к. на диагонали стоят скалярные квадраты базисных векторов. Значит по т. Крамера эта СЛАУ будет иметь единственное решение.

1.5. Линейный оператор: определение, основные свойства.

Def 1.5.1. Пусть V^n, W^m линейные пространства. Отображение $\mathcal{A}\colon V^n \to W^m$, которое $\forall x \in V^n$ сопоставляет $y \in W^m$ называется линейным оператором при выполнении следующих условий: $\forall x_1, x_2 \in V^n, \lambda \in \mathbb{C}$:

1. $\mathcal{A}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}x_1 + \mathcal{A}x_2$
2. $\mathcal{A}(\lambda x_1) = \lambda(\mathcal{A}x_1)$

Замечание 1.5.2. $y = \mathcal{A}x$ означает, что y порождается применением оператора $\mathcal{A}$.

Обозначим некоторые базовые свойства линейных операторов. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}\colon V^n \to W^m$ это линейные операторы, тогда определены:

1. Сумма $(\mathcal{A} + \mathcal{B})x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$
2. Умножение на число $(\lambda\mathcal{A})x = \lambda(\mathcal{A}x)$
3. Нулевой оператор $\Theta x = 0, \forall x \in V^n$
4. Противоположный оператор $-\mathcal{A} = (-1) \cdot \mathcal{A}$

Далее рассмотрим операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\colon V^n \to V^n$ действующие в одном линейном пространстве. Для таких операторов определена композиция (произведение) $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x)$. В общем случае она не коммутативна $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$.

Свойства композиции операторов:

1. $\lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A}) \cdot \mathcal{B}$
2. $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot C) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}$
3. $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{C} + \mathcal{B} \cdot \mathcal{C}$
4. $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C}$

Def 1.5.3. Композиция оператора самим с собой n раз называется n-ой степенью оператора: $\mathcal{A}^n = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n}$

Замечание 1.5.4. Для степени оператора справедливо равенство $\mathcal{A}^{n+m} = \mathcal{A}^n \cdot \mathcal{A}^m$

1.6. Обратный оператор. Взаимно-однозначный оператор. Ядро и образ оператора. Теорема о размерностях.

Def 1.6.1. Оператор $I\colon V^n \to V^n$ называется тождественным оператором, если $\forall x \in V^n\colon Ix = x$.

Def 1.6.2. Пусть даны операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B}\colon V^n \to V^n$. Оператор $\mathcal{B}$ называется обратным для оператора $\mathcal{A}$, если их композиция равна тождественному оператору.

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1} \overset{\text{def}}{\iff} \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = I$$

Def 1.6.3. Оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ называется взаимно-однозначным, если разным $x \in V^n$ сопоставляются разные $y \in V^n$.

$$\forall x, y \in V^n\colon x \neq y \Longrightarrow \mathcal{A}x \neq \mathcal{A}y$$

Lm 1.6.4. Если оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ взаимно-однозначный, то $\mathcal{A}x = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Доказательство. От противного:

$$\begin{aligned} \exists\, x = x_1 - x_2 \neq 0 &\Longrightarrow x_1 \neq x_2 \\ \mathcal{A}x = \mathcal{A}(x_1 - x_2) = \mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2 = 0 &\Longrightarrow \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \end{aligned}$$

Противоречие, т.к. $\mathcal{A}$ взаимно-однозначный. ∎

Теорема 1.6.5. Взаимно-однозначный оператор переводит линейно-независимый набор в линейно-независимый набор.

Доказательство. Пусть дан взаимно-однозначный оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ и линейно-независимый набор $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Построим набор образов $\{\mathcal{A}x_1, \ldots, \mathcal{A}x_n\}$. Составим его нулевую линейную комбинацию, после чего воспользуемся линейностью оператора:

$$\lambda_1\mathcal{A}x_1 + \ldots + \lambda_n\mathcal{A}x_n = 0$$
$$\mathcal{A}\Big(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n\Big) = 0$$

Т.к. $\mathcal{A}$ взаимно-однозначный, то по 1.6.4 получаем, что $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$. Набор $\{x_1, \ldots, x_n\}$ линейно независим, значит $\forall \lambda_i = 0$. ∎

Следствие 1.6.6. Взаимно-однозначный оператор переводит базис в базис.

Теорема 1.6.7. Оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ взаимно-однозначный $\iff \exists \mathcal{A}^{-1}$.

Доказательство. $\Longrightarrow$ Пусть $x \xrightarrow{\mathcal{A}} y$. Рассмотрим оператор $\mathcal{B}$ такой, что $y \xrightarrow{\mathcal{B}} x$. Т.к. $\mathcal{A}$ взаимно-однозначный, то $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = I$.

$\Longleftarrow$ От противного

$$\sqsupset x_1 \neq x_2, \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2$$
$$\mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \Longrightarrow \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Получили противоречие. ∎

Def 1.6.8. Пусть дан линейный оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to W^m$. Множество $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{x \in V^n \mid \mathcal{A}x = 0\}$ называется ядром оператора $\mathcal{A}$.

Lm 1.6.9. Оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ взаимно-однозначный $\Longrightarrow \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{0\}$.

Доказательство. От противного, пусть $x \neq 0 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}x = 0$, но в то же время $\mathcal{A}\,0 = 0$. Нарушается взаимно-однозначность. ∎

Def 1.6.10. Пусть дан линейный оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to W^m$. Множество $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \{y \in W^m \mid \exists x \in V^n\colon y = \mathcal{A}x\}$ называется образом оператора $\mathcal{A}$.

Теорема 1.6.11. Пусть дан оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$. Тогда

$$\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} + \dim\operatorname{Im}\mathcal{A} = n$$

Доказательство. Т.к. $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ и $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ это подпространства V^n, то $\exists W \subset V^n \mid W \oplus \operatorname{Ker} A = V^n$. Тогда $\dim W + \dim\operatorname{Ker} A = n$. Требуется доказать, что $\dim W = \dim\operatorname{Im}\mathcal{A}$.

Сначала покажем, что $\mathcal{A}\colon W \to \operatorname{Im}\mathcal{A}$ взаимно-однозначный. От противного:

$$\sqsupset x_1 \neq x_2 \in W\colon \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2$$
$$\mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \Longrightarrow \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \Longrightarrow (x_1 - x_2) \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$$
$$x_1, x_2 \in W \Longrightarrow (x_1 - x_2) \in W$$

Но это невозможно, т.к. $W \oplus \operatorname{Ker} A = V^n \Longrightarrow W \cap \operatorname{Ker} A = \varnothing$.

В $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ выделим базис $\{y_1, \ldots, y_k\}$. Т.к. $\mathcal{A}$ взаимно-однозначный, то выделенный базис порождается линейно-независимым набором $\{x_1, \ldots, x_k\}, x_i \in W$ (по 1.6.5). Значит $\dim W \geqslant \dim\operatorname{Im}\mathcal{A}$.

Предположим, что $\dim W > \dim\operatorname{Im}\mathcal{A}$. Обозначим $\dim W = p$, дополним систему $\{x_1, \ldots, x_k\}$ до p линейно-независимых векторов. Т.к. оператор $\mathcal{A}\colon W \to \operatorname{Im}\mathcal{A}$ взаимно-однозначный, то он должен перевести полученную линейно-независимую систему в линейно-независимую. Однако это невозможно, т.к. $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ имеет базис меньшей размерности. ∎

Замечание 1.6.12. Можно доказать, что

$$\begin{cases} V_1 \subset V^n \\ V_2 \subset V^n \\ \dim V_1 + \dim V_2 = n \end{cases} \Longrightarrow \exists \mathcal{A}\colon V^n \to V^n, \operatorname{Ker}\mathcal{A} = V_1, \operatorname{Im}\mathcal{A} = V_2$$

Def 1.6.13. Рангом оператора $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ называется размерность его образа:

$$\operatorname{rang}\mathcal{A} = \dim\operatorname{Im}\mathcal{A}$$

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}\colon V^n \to V^n$. Рассмотрим некоторые свойства ранга линейного оператора:

1. Если оператор $\mathcal{A}$ взаимно-однозначный, то $\operatorname{rang}\mathcal{A} = n$ (это следствие из 1.6.9 и 1.6.11).
2. $\operatorname{rang}(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \leqslant \operatorname{rang}\mathcal{A}$, $\operatorname{rang}(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \leqslant \operatorname{rang}\mathcal{B}$
3. $\operatorname{rang}(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = \operatorname{rang}\mathcal{A} + \operatorname{rang}\mathcal{B} - \dim V$

1.7. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы при переходе к новому базису.

Пусть дан оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ и $x, y \in V^n$, $\mathcal{A}x = y$.

Выделим в V^n базис $\mathcal{E}$, разложим x по этому базису. После чего применим к нему оператор $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{E} = \{\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_n\}$$
$$x = x_1\mathbb{e}_1 + \cdots + x_n\mathbb{e}_n$$
$$y = \mathcal{A}x = x_1\mathcal{A}\mathbb{e}_1 + \cdots + x_n\mathcal{A}\mathbb{e}_n$$

Далее применим оператор к каждому из базисных векторов:

$$\mathcal{A}\mathbb{e}_i = a_{1,i}\mathbb{e}_1 + \ldots + a_{n,i}\mathbb{e}_n$$
$$y = x_1\Big(a_{1,1}\mathbb{e}_1 + \ldots + a_{n,1}\mathbb{e}_n\Big) + \cdots + x_n\Big(a_{1,n}\mathbb{e}_1 + \ldots + a_{n,n}\mathbb{e}_n\Big)$$
$$y = \mathbb{e}_1\Big(x_1a_{1,1} + \ldots + x_na_{1,n}\Big) + \cdots + \mathbb{e}_n\Big(x_1a_{n,1} + \ldots + x_na_{n,n}\Big)$$

Заметим, что y также можно разложить по базису. Составим СЛАУ и запишем её в матричном виде:

$$\left\{\begin{matrix} x_1a_{1,1} & +\ldots+ & x_na_{1,n} = & y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_na_{n,1} & +\ldots+ & x_na_{n,n} = & y_n \end{matrix}\right\} \iff AX = Y$$

Def 1.7.1. Матрицей оператора $\mathcal{A}$ **в данном базисе** называется матрица составленная из столбцов-коэффициентов разложения образов базисных векторов по этому же базису.

Замечание 1.7.2. Если $A^{-1} = A^T$, то матрица оператора называется ортогональной.

Def 1.7.3. Матрица

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{1,1} & \cdots & \tau_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n,1} & \cdots & \tau_{n,n} \end{pmatrix}$$

такая, что при переходе из базиса $\mathcal{E} = \{\mathbb{e}_i\}_{i=1}^n$ в базис $\mathcal{E}' = \{\mathbb{e}'_i\}_{i=1}^n$ выполняется равенство $\mathcal{E}' = \mathcal{E}T$ называется матрицей перехода к новому базису.

Замечание 1.7.4. В матрице перехода T в каждом столбце стоят коэффициенты разложения нового базиса по старому. При этом координаты вектора x в базисах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ связаны соотношением:

$$x = Tx'$$

Теорема 1.7.5. Пусть дан линейный оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$, который в базисе $\mathcal{E} = \{\mathbb{e}_i\}_{i=1}^n$ имеет матрицу A, в базисе $\mathcal{E}' = \{\mathbb{e}'_i\}_{i=1}^n$ —A'. Тогда

$$A' = T^{-1}AT$$

Доказательство. Рассмотрим столбцы x, y в базисе $\mathcal{E}$ такие, что $Ax = y$. В базисе $\mathcal{E}'$ будет выполняться равенство $A'x' = y'$, получаем:

$$\begin{cases} x = Tx' \\ y = Ty' \end{cases} \implies A(Tx') = (Ty') \mid \cdot T^{-1}$$
$$T^{-1}ATx' = T^{-1}Ty'$$
$$T^{-1}ATx' = y'$$
$$A' = T^{-1}AT$$

■

Некоторые свойства замены базиса:

1. $\mathcal{A}, \mathcal{B}\colon V^n \to V^n, \lambda \in \mathbb{C}$, тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{E}: &\quad & A + \lambda B \\ \mathcal{E}': &\quad T^{-1}(A + \lambda B)T = & A' + \lambda B' \end{aligned}$$

2. Матрица тождественного оператора в любом базисе единичная.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}: &\quad & E \\ \mathcal{E}': &\quad T^{-1}ET = & E \end{aligned}$$

Lm 1.7.6. Определитель матрицы оператора не зависит от базиса, в котором эта матрица рассматривается.

Доказательство. $\det A' = \det\big(T^{-1}AT\big) = \det T^{-1} \cdot \det A \cdot \det T = \det A \cdot \det T^{-1} \cdot \det T = \det A$

■

1.8. Собственные числа и собственные векторы оператора. Теоремы о диагональной матрице оператора.

Def 1.8.1. Пусть дан оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ с матрицей A в некотором базисе $\mathcal{E} = \{\mathbb{e}_i\}_{i=1}^n$. Тогда многочлен

$$\det(A - \lambda E)$$

относительно $\lambda \in \mathbb{R}$ называется характеристическим многочленом.

Def 1.8.2. Пусть дан оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$. Подпространство $U \subseteq V^n$ называется *инвариантным*, если

$$\forall x \in U\colon \mathcal{A}x \in U$$

Def 1.8.3. Пусть дан оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ с матрицей A в некотором базисе $\mathcal{E} = \{\mathbb{e}_i\}_{i=1}^n$.
$x \neq 0 \in V^n$ называется собственным вектором для оператора $\mathcal{A}$, если

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}\colon \mathcal{A}x = \lambda x$$

Тогда λ называется собственным числом (собственным значением) оператора $\mathcal{A}$.

Теорема 1.8.4. Собственные числа оператора являются корнями характеристического многочлена $\det(A - \lambda E)$.

Доказательство. $\Longrightarrow$ Пусть λ – собственное число, тогда

$$\exists x \neq 0 \in V^n \mid \mathcal{A}x = \lambda x$$
$$\mathcal{A}x = \lambda x \Longrightarrow Ax = (\lambda E)x \Longrightarrow (A - \lambda E)x = 0$$

Теперь рассмотрим оператор $\mathcal{B}\colon V^n \to V^n, \mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda I$:

$$(A - \lambda E)x = 0 \Longrightarrow \mathcal{B}x = 0$$
$$x \neq 0 \in \operatorname{Ker}\mathcal{B} \Longrightarrow \dim\operatorname{Ker}\mathcal{B} > 0$$
$$\begin{cases}\dim\operatorname{Ker}\mathcal{B} + \dim\operatorname{Im}\mathcal{B} = n \ (1.6.11) \\ \dim\operatorname{Ker}\mathcal{B} > 0\end{cases} \Longrightarrow \dim\operatorname{Im}\mathcal{B} < n$$
$$\dim\operatorname{Im}\mathcal{B} < n \Longrightarrow \operatorname{rang}\mathcal{B} < n \Longrightarrow \operatorname{rang}B < n$$
$$\operatorname{rang}B < n \Longrightarrow \operatorname{rang}(A - \lambda E) < n \Longrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

$\Longleftarrow$ Аналогичные рассуждения, но в обратную сторону. ■

Def 1.8.5. Полученное в процессе доказательства 1.8.4 уравнение

$$(A - \lambda E)x = 0$$

называют характеристическим (вековым) уравнением.

Теорема 1.8.6. Пусть дан оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$, у которого m различных собственных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Тогда система из собственных векторов $\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_m$, соответствующих этим собственным числам, линейно-независима.

Доказательство. По индукции.

База: $m = 1$, $\{\mathbb{e}_1\}$ линейно-независима, т.к. $\mathbb{e}_1$ ненулевой по определению.

Переход: Пусть $\{\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_k\}$ линейно-независима, покажем, что система $\{\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_k, \mathbb{e}_{k+1}\}$ также линейно-независима.

Составим её нулевую линейную комбинацию и применим к ней оператор $\mathcal{A}$:

$$c_1\mathbb{e}_1 + \ldots + c_{k+1}\mathbb{e}_{k+1} = 0 \tag{1}$$
$$\mathcal{A}(c_1\mathbb{e}_1 + \ldots + c_{k+1}\mathbb{e}_{k+1}) = 0$$
$$c_1\mathcal{A}\mathbb{e}_1 + \ldots + c_{k+1}\mathcal{A}\mathbb{e}_{k+1} = 0$$
$$c_1\lambda_1\mathbb{e}_1 + \ldots + c_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbb{e}_{k+1} = 0$$

Далее снова составим нулевую линейную комбинацию этой системы и домножим её на λ_{k+1}:

$$c_1\mathbb{e}_1 + \ldots + c_{k+1}\mathbb{e}_{k+1} = 0 \mid \cdot\lambda_{k+1} \tag{2}$$
$$c_1\lambda_{k+1}\mathbb{e}_1 + \ldots + c_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbb{e}_{k+1} = 0$$

Теперь из (1) вычтем (2):

$$c_1\mathbb{e}_1(\lambda_1-\lambda_{k+1})+\ldots+c_k\mathbb{e}_k(\lambda_k-\lambda_{k+1})+c_{k+1}\mathbb{e}_{k+1}(\lambda_{k+1}-\lambda_{k+1})=0$$
$$c_1\mathbb{e}_1(\lambda_1-\lambda_{k+1})+\ldots+c_k\mathbb{e}_k(\lambda_k-\lambda_{k+1})=0$$

Каждая из скобок $(\lambda_i-\lambda_{k+1})$ не равна нулю, т.к. все собственные числа различны. Т.к. система $\{\mathbb{e}_1,\ldots,\mathbb{e}_k\}$ является базисом по предположению индукции, то полученное равенство верно только при $\forall c_i=0$ $(1\leqslant i\leqslant k)$.

Подставляя это в исходную нулевую линейную комбинацию, получаем, что

$$c_1\mathbb{e}_1+\ldots+c_{k+1}\mathbb{e}_{k+1}=0$$
$$c_{k+1}\mathbb{e}_{k+1}=0$$

Т.к. собственный вектор $\mathbb{e}_{k+1}$ ненулевой по определению, то $c_{k+1}=0$. Таким образом $\forall c_i=0$, значит нулевая линейная комбинация тривиальна, т.е. полученная система линейно независима. ■

Def 1.8.7. Базис, составленный из собственных векторов, называют собственным базисом.

Теорема 1.8.8. Матрица оператора в собственном базисе диагональна.

Доказательство. Матрица оператора в некотором базисе это коэффициенты разложения образов базисных векторов по этому же базису. Рассмотрим первый базисный вектор:

$$\begin{cases}\mathcal{A}\mathbb{e}_1=a_{1,1}\mathbb{e}_1+\cdots+a_{n,1}\mathbb{e}_n\\ \mathcal{A}\mathbb{e}_1=\lambda_1\mathbb{e}_1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a_{1,1}=\lambda_1,\\ a_{i,1}=0\ \forall i\neq 1\end{cases}$$

Аналогично можно рассмотреть все оставшиеся базисные векторы. Таким образом матрица оператора в базисе из собственных векторов будет иметь вид

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

■

Следствие 1.8.9. Если у оператора $\mathcal{A}\colon V^n\to V^n$ есть n различных собственных чисел, то существует базис, в котором матрица этого оператора диагональна.

Доказательство. Т.к. все собственные числа различны, то соответствующие им n собственных векторов будут линейно независимы (по 1.8.6). Составим из них базис, по только что доказанной теореме матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе будет диагональной. ■

1.9. Сопряженный и самосопряженный операторы в вещественном евклидовом пространстве: определения, основные свойства. Свойства собственных чисел и собственных векторов самосопряженного оператора.

Def 1.9.1. Рассмотрим оператор $\mathcal{A}\colon E^n_{\mathbb{R}}\to E^n_{\mathbb{R}}$. Оператор $\mathcal{A}^*$ называется сопряженным оператором для $\mathcal{A}$, если

$$(\mathcal{A}x,y)=(x,\mathcal{A}^*y)$$

Def 1.9.2. Альтернативное определение: оператор $\mathcal{A}^*$ называется сопряженным оператором для $\mathcal{A}$, если в любом ортонормированном базисе $A^*=A^T$.

Теорема 1.9.3. Равносильность определений 1.9.1 и 1.9.2 сопряженного оператора.

Доказательство. Выберем произвольный ортонормированный базис $\mathcal{E}$. В нем векторам x и y соответствуют координатные столбцы X и Y.

Скалярное произведение $(\mathcal{A}x,y)$ можно записать в виде $(AX)^TY$, т.к. мы работаем в ортонормированном базисе. Преобразуем это выражение:

$$(AX)^TY=X^TA^TY=X^TA^*Y\Longrightarrow(x,\mathcal{A}^*y)$$

■

Некоторые базовые свойства сопряженного оператора:

1. $I^*=I$: $(Ix,y)=(x,y)=(x,Iy)$
2. $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^*=\mathcal{A}^*+\mathcal{B}^*$
3. $(\lambda\mathcal{A})^*=\overline{\lambda}\mathcal{A}^*$
4. $(\mathcal{A}^*)^*=\mathcal{A}$

5. $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \cdot \mathcal{A}^*$
6. Для любого оператора существует единственный сопряженный оператор.

Def 1.9.4. Самосопряженный оператор это оператор, который равен своему сопряженному.

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$$

Следствие 1.9.5. Матрица самосопряженного оператора симметрическая: $A = A^T = A^*$

Далее рассмотрим некоторые свойства самосопряженного оператора.

Lm 1.9.6. Собственные числа самосопряженного оператора всегда вещественные.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — самосопряженный оператор. Рассмотрим собственное число λ и собственный вектор x, соответствующий ему:

$$(\mathcal{A}x, x) \in \mathbb{R}$$
$$(\mathcal{A}x, x) = (\lambda x, x) = \lambda\|x\|^2$$
$$\begin{cases} \lambda\|x\|^2 \in \mathbb{R} \\ \|x\|^2 \in \mathbb{R} \end{cases} \implies \lambda \in \mathbb{R}$$

■

Lm 1.9.7. Собственные векторы самосопряженного оператора, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — самосопряженный оператор. Рассмотрим два собственных числа $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и собственные векторы x_1, x_2, соответствующие им:

$$\begin{cases} (\mathcal{A}x_1, x_2) = (x_1, \mathcal{A}x_2) \\ (\mathcal{A}x_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2) \\ (x_1, \mathcal{A}x_2) = \lambda_2(x_1, x_2) \end{cases} \implies \lambda_1(x_1, x_2) = \lambda_2(x_1, x_2) \implies (\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0$$

Т.к. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то первая скобка не может равняться нулю, значит $(x_1, x_2) = 0 \implies x_1 \perp x_2$. ■

Замечание 1.9.8. Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ это самосопряженные операторы, то $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ не обязательно самосопряженный оператор. Чтобы $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})^*$ необходимо, чтобы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ коммутировали.

Lm 1.9.9. Пусть дан самосопряженный оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$, а $\mathbb{e}$ — его собственный вектор. Тогда подпространство $V_1 = \{x \in V^n \mid x \perp \mathbb{e}\}$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$ и его размерность равна $n-1$.

Доказательство. Собственный вектор $\mathbb{e}$ это линейная оболочка некоторого $\mathbb{e}_f$, т.е. это подпространство V_n. Если $x \in V_1$, то $x \perp \mathbb{e} \implies x \perp \mathbb{e}_f$, таким образом V_1 это ортогональное дополнение $\mathbb{e}_f$.

$\dim \mathbb{e} = 1$, т.к. это линейная оболочка одного вектора $\mathbb{e}_f$. Значит $\dim V_1 = n - 1$.

Теперь докажем, что это пространство инвариантно:

$$x \perp \mathbb{e} \implies (x, \mathbb{e}) = 0$$
$$(\mathcal{A}x, \mathbb{e}) = (x, \mathcal{A}\mathbb{e}) = (x, \lambda\mathbb{e}) = \lambda(x, \mathbb{e}) = 0 \implies \mathcal{A}x \perp \mathbb{e}$$

Таким образом $\mathcal{A}x \in V_1$ по определению V_1. ■

Теорема 1.9.10. У любого самосопряженного оператора есть ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов.

Доказательство. Возьмем одно произвольное собственное число λ, ему будет соответствовать собственный вектор $\mathbb{e}_1$, который мы и возьмем в базис. Далее пользуясь 1.9.9 рассмотрим подпространство V_1, причем $\mathbb{e}_1$ будет ему ортогонален. Проделаем с этим подпространством аналогичную операцию.

Повторим это n раз, после чего нормируем все полученные векторы $\implies$ получим ортонормированный базис. ■

1.10. Структура образа самосопряженного оператора. Проектор. Спектральное разложение оператора.

Теорема 1.10.1. Образ самосопряженного оператора $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ имеет вид

$$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, \mathbb{e}_i)\mathbb{e}_i \mid x \in V^n \right\}$$

где $\mathcal{E} = \{\mathbb{e}_i\}_{i=1}^n$ это ортонормированный базис, λ_i — собственные числа оператора $\mathcal{A}$.

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}x = y &= \\
y_1\mathbb{e}_1 + \ldots + y_n\mathbb{e}_n &= \\
(y, \mathbb{e}_1)\mathbb{e}_1 + \ldots + (y, \mathbb{e}_n)\mathbb{e}_n &= \\
(\mathcal{A}x, \mathbb{e}_1)\mathbb{e}_1 + \ldots + (\mathcal{A}x, \mathbb{e}_n)\mathbb{e}_n &= \\
(x, \mathcal{A}\mathbb{e}_1)\mathbb{e}_1 + \ldots + (x, \mathcal{A}\mathbb{e}_n)\mathbb{e}_n &= \\
(x, \lambda_1\mathbb{e}_1)\mathbb{e}_1 + \ldots + (x, \lambda_n\mathbb{e}_n)\mathbb{e}_n &= \\
\lambda_1(x, \mathbb{e}_1)\mathbb{e}_1 + \ldots + \lambda_n(x, \mathbb{e}_n)\mathbb{e}_n &= \\
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x, \mathbb{e}_i)\mathbb{e}_i
\end{aligned}
$$

■

Замечание 1.10.2. $(x, \mathbb{e}_i)$ это проекция вектора x на собственный вектор.

Таким образом y получается следующим образом: x проецируется на $\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_n$, после чего проекции 'растягиваются' в $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ раз и суммируются.

Def 1.10.3. Оператор вида

$$P_i(x) = (x, \mathbb{e}_i)\mathbb{e}_i$$

называется проектором на одномерное пространство, порожденное собственным вектором.

Замечание 1.10.4. Проектор является самосопряженным оператором.

Def 1.10.5. Спектральным разложением оператора называется представление его в виде линейной комбинации проекторов

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$$

Корректность такого представления следует из 1.10.1 и 1.10.3.

1.11. Ортогональная матрица и ортогональный оператор. Поворот плоскости и пространства как ортогональное преобразование.

Def 1.11.1. Оператор $\mathcal{A}$ называется ортогональным, если

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$$

Def 1.11.2. Альтернативное определение: $\mathcal{A}$ называется ортогональным, если его матрица ортогональна:

$$A^{-1} = A^T$$

Замечание 1.11.3. Ортогональный оператор сохраняет скалярное произведение, т.е. не меняет норму элементов. Таким образом к ортогональным преобразованиям можно отнести параллельный перенос, поворот и осевую симметрию.

Также ортогональное преобразование переводит ортонормированный базис в ортонормированный.

Некоторые примеры ортогональных преобразований в пространстве $\mathbb{R}^3$:

1. Поворот на угол α: $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
2. Осевая симметрия относительно Ox: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Матрицы выше составлены из базисных векторов $\mathbb{e}_i \perp \mathbb{e}_j$, $\|\mathbb{e}_i\| = 1$.

Def 1.11.4. Оператор $\mathcal{A}$ такой, что $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^* = \mathcal{A}^* \cdot \mathcal{A}$ называется нормальным.

Замечание 1.11.5. Заметим, что самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ и ортогональный оператор T нормальные:

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^* = \mathcal{A}^* \cdot \mathcal{A}$$

$$T \cdot T^* = T \cdot T^{-1} = I = T^{-1} \cdot T = T^* \cdot T$$

Замечание 1.11.6. Можно доказать, что собственные числа и векторы нормального оператора $\mathcal{A}$ совпадают с собственными числами и векторами его сопряженного оператора $\mathcal{A}$.

1.12. Билинейные формы: определения, свойства. Матрица билинейной формы.

Def 1.12.1. Функция $\mathscr{B}\colon V^n \to \mathbb{R}$ обозначаемая $\mathscr{B}(u,v)$ $(u,v \in V^n)$ называется билинейной формой, если выполняются следующие требования: $\forall u,w,v \in V^n, \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\mathscr{B}(u+w,v) = \mathscr{B}(u,v) + \mathscr{B}(w,v)$
2. $\mathscr{B}(u,v+w) = \mathscr{B}(u,v) + \mathscr{B}(u,w)$
3. $\mathscr{B}(\lambda u,v) = \lambda\mathscr{B}(u,v)$
4. $\mathscr{B}(u,\lambda v) = \lambda\mathscr{B}(u,v)$

Def 1.12.2. Если к каждой паре базисных векторов применить билинейную форму, то полученные числа можно использовать как коэффициенты матрицы. Это матрица будет называться матрицей билинейной формы **в данном базисе**.

Таким образом матрица B билинейной формы $\mathscr{B}$ в базисе $\mathcal{E} = \{\mathbb{e}\}_{i=1}^n$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \mathscr{B}(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_1) & \dots & \mathscr{B}(\mathbb{e}_1,\mathbb{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{B}(\mathbb{e}_n,\mathbb{e}_1) & \dots & \mathscr{B}(\mathbb{e}_n,\mathbb{e}_n) \end{pmatrix}$$

Def 1.12.3. Билинейная форма $\mathscr{B}$ называется симметричной, если $\mathscr{B}(u,v) = \mathscr{B}(v,u)$.

Def 1.12.4. Билинейная форма $\mathscr{B}$ называется кососимметричной (антисимметричной), если $\mathscr{B}(u,v) = -\mathscr{B}(v,u)$.

Замечание 1.12.5. Применение билинейной формы $\mathscr{B}$ к элементам u и v можно отождествлять с умножением матриц в виде u^TBv.

Тогда можно говорить о ранге билинейной формы и о её преобразовании при смене базиса.

Lm 1.12.6. Ранг билинейной формы это инвариант относительно смены базиса T.

Доказательство. $B_{\mathbb{e}'} = T_{\mathbb{e}'\to\mathbb{e}} B_{\mathbb{e}} T_{\mathbb{e}\to\mathbb{e}'}$

Т.к. матрица $T_{\mathbb{e}'\to\mathbb{e}}$ невырождена, то $\operatorname{rang} B_{\mathbb{e}'} = \operatorname{rang} B_{\mathbb{e}}$ ■

Def 1.12.7. Если ранг билинейной формы $\mathscr{B}\colon V^n \to \mathbb{R}$ равен n, то такая билинейная форма называется невырожденной.

1.13. Квадратичная форма: определения, приведение к каноническому виду.

Def 1.13.1. Числовая функция одного аргумента $\mathscr{K}(u) \mid u \in V^n$, которая порождается билинейной формой $\mathscr{B}(u,v)$ при $u = v$ называется квадратичной формой.

$$\mathscr{K}(u) = \mathscr{B}(u,u)$$

Замечание 1.13.2. Если квадратичная форма порождена симметричной билинейной формой, то эта билинейная форма называется полярной для квадратичной.

Def 1.13.3. Каноническим видом квадратичной формы $\mathscr{K}^d(u)$ является сумма квадратов с некоторыми коэффициентами.

$$\mathscr{K}^d(u) = \lambda_1 u_1^2 + \ldots + \lambda_n u_n^2$$

Причем λ_i называются каноническими коэффициентами.

Def 1.13.4. Если в каноническом виде все коэффициенты λ_i равны ± 1 или 0, то такой вид называется нормальным.

Def 1.13.5. Базис, в котором квадратичная форма является канонической, называется каноническим базисом.

Замечание 1.13.6. Канонический базис не единственный.

Замечание 1.13.7. Пусть квадратичная форма задана в виде

$$\mathscr{K}(u) = a_{1,1}u_1^2 + \ldots + a_{n,n}u_n^2 + 2a_{1,2}u_1u_2 + \ldots + 2a_{1,n}u_1u_n + \ldots + 2a_{n,1}u_nu_1 + \ldots + 2a_{n,n-1}u_nu_{n-1}$$

тогда её матрица будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Теорема 1.13.8. Всякую квадратичную форму $\mathscr{K}(u)$ можно привести к каноническому виду невырожденным преобразованием.

Метод Лагранжа:

Один из способов приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Рассмотрим его на примере $\mathscr{K}(x) = x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

Метод заключается в последовательном выделении полных квадратов:

$$\begin{aligned}
x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\
x_1^2 + 2x_1(3x_2 + x_3) + 9x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \\
\left(x_1^2 + 2x_1(3x_2 + x_3) + (3x_2 + x_3)^2\right) - (3x_2 + x_3)^2 + 9x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \\
(x_1 + 3x_2 + x_3)^2 - 9x_2^2 - 6x_2x_3 - x_3^2 + 9x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 \\
(x_1 + 3x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3
\end{aligned}$$

Далее делаем замену

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 + x_3 \\ y_2 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3) \\ y_3 = \frac{1}{2}(x_2 - x_3) \end{cases}$$

Замены y_2 и y_3 именно такие, потому что остался моном $-4x_2x_3$, из которого мы не можем выделить полный квадрат.

$$\begin{cases} y_2 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3) \\ y_3 = \frac{1}{2}(x_2 - x_3) \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_2 - y_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(x_1 + 3x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3 \\
y_1^2 - 4(y_2 + y_3)(y_2 - y_3) \\
y_1^2 - 4(y_2^2 - y_3^2) \\
y_1^2 - 4y_2^2 + 4y_3^2
\end{aligned}$$

Таким образом, получен канонический вид квадратичной формы $\mathscr{K}^d(y) = y_1^2 - 4y_2^2 + 4y_3^2$.

Матрицу полученного преобразования можно получить из уравнения $x = Py$, для этого обратимся к сделанной замене и найдем обратную матрицу:

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} x$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}^{-1} y$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Пусть K это матрица квадратичной формы $\mathscr{K}(x)$ в исходном базисе, а K^d — в каноническом. Тогда проверить корректность найденной матрицы преобразования можно следующим образом:

$$K^d = P^TKP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ортоногальное преобразование:

Метод, позволяющий привести квадратичную форму к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

Рассмотрим его на примере $\mathscr{K}(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$.

Сначала составим матрицу квадратичной формы, после чего найдем её собственные числа и собственные векторы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Найденные собственные числа будут коэффициентами при квадратах в диагональном виде квадратичной формы $\mathscr{K}^d(y) = -y_1^2 + 3y_2^2$.

Далее нормируем полученные собственные векторы и используем их как столбцы матрицы ортогонального преобразования P:

$$\begin{cases} \mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \widehat{\mathbb{e}_1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ \widehat{\mathbb{e}_2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{cases} \Longrightarrow P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Замечание 1.13.9. Ранг матрицы квадратичной формы это инвариант относительно любого невырожденного преобразования.

1.14. Знакоопределенность квадратичной формы: необходимые и достаточные условия. Критерий Сильвестра.

Def 1.14.1. Квадратичная форма $\mathscr{K}(u)$ называется положительно определенной, если
$\forall u \neq 0\colon \mathscr{K}(u) > 0$.

Def 1.14.2. Квадратичная форма $\mathscr{K}(u)$ называется отрицательно определенной, если
$\forall u \neq 0\colon \mathscr{K}(u) < 0$.

Def 1.14.3. Квадратичная форма $\mathscr{K}(u)$ называется знакопеременной, если
$\exists u\colon \mathscr{K}(u) < 0$ и $\exists v\colon \mathscr{K}(v) > 0$.

Def 1.14.4. Квадратичная форма $\mathscr{K}(u)$ называется квазиположительноопределенной, если
$\exists \widehat{u} \neq 0\colon \mathscr{K}(\widehat{u}) = 0$ и $\forall u \neq \widehat{u}\colon \mathscr{K}(u) > 0$.

Def 1.14.5. Квадратичная форма $\mathscr{K}(u)$ называется квазиотрицательноопределенной, если
$\exists \widehat{u} \neq 0\colon \mathscr{K}(\widehat{u}) = 0$ и $\forall u \neq \widehat{u}\colon \mathscr{K}(u) < 0$.

Замечание 1.14.6. Если квазиопределенная квадратичная форма порождена симметричной билинейной формой, то эта билинейная форма является скалярным произведением.

Пусть дана квадратичная форма $\mathscr{K}^0(x)$ в нормальной форме, тогда её можно записать в виде

$$\mathscr{K}^0(x) = (x_1^2 + \ldots + x_p^2) - (x_{p+1}^2 + \ldots + x_k^2) + 0 \cdot (x_k^2 + \ldots + x_n^2)$$

где в первой скобке находятся квадраты, у которых в нормальной форме был коэффициент 1, а во второй — квадраты с коэффициентом -1. Квадраты с нулевым коэффициентом записываем в третью скобку.

Обозначим p — количество квадратов в первой скобке, а q — во второй.

Def 1.14.7. p и q называются положительным и отрицательным индексами инерции квадратичной формы. Они являются инвариантами.

<u>Теорема</u> 1.14.8. Необходимое и достаточное условие знакоопределенности квадратичной формы
$\mathscr{K}(u)$ знакоопределенная тогда и только тогда, когда один её индексов инерции равен n.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $p = n$, в этом случае квадратичная форма будет положительно определенной. Случай с $q = n$ и отрицательно определенной квадратичной формой рассматривается аналогично.
$\Longrightarrow$ От противного

$$\urcorner\, p < n \Longrightarrow \exists \widehat{u} = (\underbrace{u_1, \ldots, u_p}_{0}, \underbrace{u_{p+1}, \ldots, u_n}_{\neq 0},) \Longrightarrow \begin{cases} \widehat{u} \neq 0 \\ \mathscr{K}(\widehat{u}) \leqslant 0 \end{cases}$$

Получаем противоречие.

$\Longleftarrow$ Если $p = n$, то квадратичная форма имеет следующий нормальный вид:

$$\mathscr{K}^0(u) = u_1^2 + \ldots + u_n^2$$

Очевидно, что $\forall u \neq 0$ она будет больше нуля, а для $u = 0$ она будет равна нулю. Таким образом она положительно определенная по определению. ■

Теорема 1.14.9. $\mathscr{K}(u)$ знакопеременная тогда и только тогда, когда оба её индекса инерции больше нуля.

Теорема 1.14.10. $\mathscr{K}(u)$ квазизнакоопределенная тогда и только тогда, когда один из её индексов инерции равен нулю, а второй меньше n.

Замечание 1.14.11. Теоремы 1.14.9 и 1.14.10 доказываются аналогично теореме 1.14.8.

Def 1.14.12. Угловой минор Δ_i это минор квадратной подматрицы образованной первыми i столбцами и строками.

Теорема 1.14.13. Критерий Сильвестра

Квадратичная форма положительно определенная тогда и только тогда, когда все угловые миноры её матрицы положительны.

Квадратичная форма отрицательно определенная тогда и только тогда, когда первый угловой минор её матрицы отрицательный, а остальные угловые миноры последовательно чередуют свой знак.

Доказательство. Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично.

$\Longrightarrow$ Сначала покажем, что среди угловых миноров нет нулевого. От противного: пусть $\Delta_k = 0$, тогда рассмотрим квадратичную форму $\mathscr{K}_k$, которая образована угловой матрицей размера k:

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k,1} & \dots & b_{k,k} \end{pmatrix} \widetilde{u} = \vec{0}$$

Т.к. $\det_k = 0$, то построенное уравнение имеет нетривиальное решение $\widetilde{u}$. Далее составим вектор $\widehat{u}$ такой, что первые его k компонент равны компонентам вектора $\widetilde{u}$, а остальные — нулю. Тогда $\widehat{u} \neq 0$, но $\mathscr{K}(\widehat{u}) = 0$ (первые k компонент дают ноль, т.к. они взяты из $\widetilde{u}$, а остальные компоненты дают ноль, т.к. они нулевые). Получаем противоречие, ведь квадратичная форма должна быть положительно определенной.

Таким образом ни один из угловых миноров не равен нулю, значит можно применить метод Якоби. Т.к. квадратичная форма положительно определенная, то все её собственные числа положительны, итого:

$$\forall \lambda_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} > 0 \Longrightarrow \forall \Delta_i > 0$$

$\Longleftarrow$ Применим метод Якоби

$$\forall \Delta_i > 0 \Longrightarrow \forall \lambda_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} > 0 \Longrightarrow \begin{cases} \mathscr{K}^d = \lambda_1 u_1^2 + \ldots + \lambda_n u_n^2 \\ \forall \lambda_i > 0 \end{cases}$$

Легко заметить, что полученная квадратичная форма положительно определенная. ∎

2. Дифференциальные уравнения

2.1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ДУ): задача о радиоактивном распаде и задача о падении тела. Определение ДУ, решения ДУ и их геометрический смысл. Задача Коши.

Def 2.1.1. Обыкновенным ДУ$_n$ называется

$$F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$$

Замечание 2.1.2. 'Обыкновенное' означает не в частных дифференциалах, т.е. $y(x)$ это функция одной переменной.

Def 2.1.3. Порядком ДУ называется наивысший порядок входящей в него производной.

Def 2.1.4. Решением ДУ$_n$ является функция, которая обращает его в верное равенство.

Def 2.1.5. Кривые, соответствующие решениям ДУ называются интегральными кривыми.

Def 2.1.6. Если решение ДУ задано неявно $\varphi(x, y(x)) = 0$, то $\varphi(x, y(x)) = 0$ называется интегралом ДУ.

Def 2.1.7. Решение ДУ с неопределенными константами c_i называется общим решением (общим интегралом) ДУ.

Def 2.1.8. Решение ДУ с определенными константами c_i называется частным решением (частным интегралом) ДУ.

Def 2.1.9. Система из ДУ$_n$ и n начальных условий вида

$$\begin{cases} \text{ДУ}_n \\ y_0 = y(x_0) \\ y_0' = y'(x_0) \\ \dots \\ y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

называется задачей Коши. n начальных условий необходимы для определения n констант c_i.

Замечание 2.1.10. Подробнее про задачу Коши и геометрический смысл решений рассказано в 2.6.1.

<u>Задача о радиоактивном распаде</u>:

Пусть есть Q грамм урана, скорость распада которого зависит от его массы с некоторым коэффициентом k. Требуется вывести формулу для подсчета массы урана в момент времени t.

Составим ДУ и решим его:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} &= -kQ \,|: Q \neq 0 \\ \frac{\mathrm{d}Q}{Q\mathrm{d}t} = -k \iff \frac{\mathrm{d}\ln Q}{\mathrm{d}t} &+ k = 0 \\ \frac{\mathrm{d}\ln Q + k\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = 0 \iff \frac{\mathrm{d}(\ln Q + kt)}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ \ln Q + kt &= c_1 \\ Q &= \widehat{c_1} e^{-kt} \end{aligned}$$

Из полученных интегральных кривых выбираем одну, которая соответствует заданным начальным условиям.

<u>Задача о падении тела</u>:

Тело свободно падает вниз с заданной начальной скоростью. Требуется вывести закон движения (закон изменения координат с течением времени).

Составим ДУ и решим его:

$$\begin{aligned} \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} &\implies a = y''(t) = g \\ \frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} = g \implies \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} &= g \implies v(t) = gt + c_1 \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = v(t) = gt + c_1 &\implies y(t) = \frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2 \end{aligned}$$

Как и в первой задаче здесь получено общее решение. Константы можно найти подстановкой начальных условий.

2.2. Уравнение с разделяющимися переменными.

Def 2.2.1. Уравнение вида

$$m(x)N(y)\mathrm{d}x + M(x)n(y)\mathrm{d}y = 0$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

Для решения таких уравнений необходимо разделить обе части на $M(x)N(y)$, перенести одно из слагаемых в правую часть, после чего проинтегрировать обе части.

$$\begin{gathered}
m(x)N(y)\mathrm{d}x + M(x)n(y)\mathrm{d}y = 0 \\
\frac{m(x)}{M(x)}\mathrm{d}x + \frac{n(y)}{N(y)}\mathrm{d}y = 0 \\
\int \frac{m(x)}{M(x)}\mathrm{d}x = -\int \frac{n(y)}{N(y)}\mathrm{d}y
\end{gathered}$$

Замечание 2.2.2. В случае, если $M(x) = 0$ или $N(y) = 0$, то уравнение решается непосредственным интегрированием.

Замечание 2.2.3. Решения вида $x = const, y = const$ не всегда получаемы из общего решения.

2.3. Однородное уравнение.

Def 2.3.1. Функция $f(x, y)$ называется *однородной* m-ого измерения ($m \geqslant 0$), если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$.

Def 2.3.2. Дифференциальное уравнение $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$ называется *однородным*, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ однородные функции одного измерения m.

Однородные уравнения решаются заменой $t = \dfrac{y}{x}$. Покажем, откуда появляется подобная замена. Преобразуем функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$:

$$\begin{aligned}
P(x, y) &= P\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^m P\left(1, \frac{y}{x}\right) \\
Q(x, y) &= Q\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^m Q\left(1, \frac{y}{x}\right)
\end{aligned}$$

Вернемся к исходному уравнению:

$$\begin{aligned}
P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0 \,|: \mathrm{d}x \\
y' = -\frac{P(1, {}^{y}\!/\!{}_{x})}{Q(1, {}^{y}\!/\!{}_{x})} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \\
\frac{y}{x} = t \Longrightarrow \begin{cases} f(1, {}^{y}\!/\!{}_{x}) = \tilde{f}(t) \\ y = xt, \ y'_x = t + xt' \end{cases} \\
t + xt' = \tilde{f}(t) \\
x \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \tilde{f}(t) - t \\
\frac{\mathrm{d}t}{\tilde{f}(t) - t} = \frac{\mathrm{d}x}{x}
\end{aligned}$$

Таким образом исходное однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющими переменными.

Замечание 2.3.3. Случай $\tilde{f}(t) - t = 0$ нужно рассмотреть отдельно. Также в ходе решения было произведено деление на $\mathrm{d}x \Longrightarrow$ нужно рассмотреть случай $x = const$.

2.4. Уравнение в полных дифференциалах.

Def 2.4.1. Дифференциальное уравнение $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если

$$\exists z(x, y)\colon \mathrm{d}z = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$$

Критерием того, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах может служить равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Решение уравнений в полных дифференциалах сводится к поиску функции $z(x, y)$, удовлетворяющей описанным условиям. После того, как такая функция будет найдена, решение ДУ очевидно:

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}z = 0 \Longrightarrow z = C$$

Замечание 2.4.2. О поиске $z(x, y)$

$$z'_x = P(x, y) \Longrightarrow z(x, y) = \int P(x, y)\mathrm{d}x + \varphi(y) \tag{1}$$

$$z'_y = Q(x, y) = \left(\int P(x, y)\mathrm{d}x\right)'_y + \varphi'(y) \Longrightarrow \varphi'(y) = Q(x, y) - \left(\int P(x, y)\mathrm{d}x\right)'_y$$

Покажем, что $(\varphi')'_x = 0$:

$$(\varphi')'_x = Q(x, y)'_x - \left(\int P(x, y)\mathrm{d}x\right)''_{yx} = Q(x, y)'_x - P(x, y)'_y = 0$$

Таким образом из (1) получаем, что

$$\varphi(y) = \int \varphi'(y)\mathrm{d}y$$

Итого алгоритм поиска $z(x, y)$ выглядит следующим образом:

1. Находим $\int P(x, y)\mathrm{d}x$ и прибавляем к нему некоторую неизвестную функцию $\varphi(y)$.
2. Считаем производную по y от полученного выражения и приравниваем её к $Q(x, y)$.
3. Находим $\varphi'(y)$ из полученного выражения.
4. Интегрируем её и подставляем в выражение, полученное в первом пункте.

2.5. Линейное уравнение первого порядка. Метод Лагранжа.

Def 2.5.1. Линейным однородным уравнением первого порядка (ЛОДУ$_1$) называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = 0$$

ЛОДУ$_1$ является уравнением с разделяющими переменными, поэтому оно решается следующим образом:

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -p(x)y \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -p(x)\mathrm{d}x \\ \overline{y} &= C \cdot \underbrace{e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}_{y_1} \end{aligned}$$

Замечание 2.5.2. При решении данного уравнения мы поделили на $y \neq 0$. Заметим, что $y = 0$ также является решением ЛОДУ$_1$, однако оно получаемо из общего решения при $C = 0$.

Def 2.5.3. Линейным неоднородным уравнением первого порядка (ЛНДУ$_1$) называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \quad q(x) \neq 0$$

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной) для решения ЛНДУ$_1$:

1. Найдем частное решение y_1 соответствующего однородного уравнения.
2. Будем искать решение ЛНДУ$_1$ в виде $y(x) = y_1(x) \cdot C(x)$. Преобразуем ДУ в соответствии с этой заменой:

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= q(x) \\ y_1'(x)C(x) + y_1(x)C'(x) + p(x)y_1(x)C(x) &= q(x) \\ y_1(x)C'(x) + C(x)\underbrace{\left(y_1'(x) + p(x)y_1(x)\right)}_{=0} &= q(x) \\ y_1(x)C'(x) &= q(x) \\ C(x) &= \int \frac{q(x)}{y_1(x)}\mathrm{d}x + C \end{aligned}$$

3. Подставим найденную функцию $C(x)$ в $y(x) = y_1(x) \cdot C(x)$.

Замечание 2.5.4. Помимо рассмотренных интегрируемыми являются уравнения Лагранжа, Клеро, Риккати, Бернулли.

Def 2.5.5. ДУ называется уравнением Бернулли, если его можно привести к виду

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

Оно решается с помощью подстановки Бернулли:

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$
$$y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Пример:

$$y' + 2y = y^2 e^x$$
$$u'v + uv' + 2uv = v^2 u^2 e^x$$
$$u'v + u(v' + 2v) = u^2 v^2 e^x$$
$$\begin{cases} v' + 2v = 0 \\ u'v = u^2 v^2 e^x \end{cases}$$

Из первого полученного уравнения находим $v(x)$, потом подставляем его во второе уравнение и находим $u(x)$. Ответом будет $y(x) = u(x) \cdot v(x)$.

2.6. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения.

Теорема 2.6.1. О существовании и единственности решения задачи Коши.

Пусть дана задача Коши

$$\begin{cases} y' = g(x, y) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

и $u(M_0)$ – окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$. Тогда, если g непрерывна в $u(M_0)$, а g'_y — ограничена, то в окрестности $u(M_0)$ существует единственное решение задачи Коши.

Def 2.6.2. Особым решением ДУ называется решение, в каждой точке которого нарушается единственность.

Замечание 2.6.3. Геометрически особое решение это интегральная кривая, через каждую точку которой проходит другая интегральная кривая.

Def 2.6.4. Точка $M(x, y) \in D$ (где D - область заполненная интегральными кривыми) называется обыкновенной, если через неё проходит ровно одна интегральная кривая.

Def 2.6.5. Точка, не являющаяся обыкновенной, называется особой. Через неё может проходить несколько интегральных кривых, либо не проходить ни одной.

Lm 2.6.6. Если ДУ задано в дифференциалах $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$, то условие особой точки имеет вид $P = 0$ или $Q = 0$.

Доказательство. ДУ в дифференциалах можно разрешить относительно каждой из переменных:

$$y' = -\frac{P}{Q} = g_1(x, y)$$
$$x' = -\frac{Q}{P} = g_2(x, y)$$

Далее можно применить теорему 2.6.1 о единственности к каждому из полученных уравнений. Непрерывность g_1, g_2 нарушается при $Q = 0$ и $P = 0$ соответственно. Это и будет условием особой точки. ∎

2.7. Уравнения n-ого порядка, допускающие понижение порядка.

К уравнениям, допускающим понижение порядка относятся:

1. Непосредственно интегрируемые уравнения вида $y^{(n)}(x) = f(x)$.
   Они решаются интегрированием обоих частей n раз.
2. Уравнения не содержащие $y(x)$ в явном виде.
   Они решаются заменой $z(x) = y'(x)$, $z'(x) = y''(x)$.
   Замечание 2.7.1. В общем случае производится замена самой младшей из присутствующих производных.
3. Уравнения не содержащие x в явном виде.
   Они решаются заменой $z(y) = y'(x)$, тогда $y''(x) = z'_y y'_x = z'(y) \cdot z(y)$

2.8. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) : определения, решение ЛОДУ$_2$ с постоянными коэффициентами для случая различных вещественных корней характеристического уравнения.

Def 2.8.1. Линейным дифференциальным уравнением n-ого порядка (ЛДУ$_n$) называется

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = f(x), \quad a_0(x) \neq 0$$

Def 2.8.2. Разрешенным ЛДУ$_n$ называется

$$y^{(n)}(x) + b_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + b_n(x)y(x) = f(x)$$

Def 2.8.3. Если в ЛДУ$_n$ $\forall i$: $a_i(x) = p_i \in \mathbb{R}$, то такое ЛДУ$_n$ называется ЛДУ$_n$ с постоянными коэффициентами. Оно имеет вид

$$y^{(n)}(x) + p_1y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_ny(x) = f(x)$$

Def 2.8.4. Линейным однородным дифференциальным уравнение n-ого порядка называется ЛДУ$_n$ вида

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = 0,$$

Def 2.8.5. Линейным неоднородным дифференциальным уравнение n-ого порядка называется ЛДУ$_n$ вида

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = f(x), \quad f(x) \neq 0$$

Рассмотрим ЛОДУ$_2$ вида $y'' + py' + qy = 0$. Любой паре $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ можно поставить в соответствие квадратное уравнение $k^2 + pk + q = 0$. По т. Виета $p = -(k_1 + k_2), q = k_1k_2$, где k_1, k_2 это корни уравнения. Подставим полученные выражения в исходное ДУ:

$$\begin{aligned} y'' - (k_1 + k_2)y' + k_1k_2y &= 0 \\ y'' - k_1y' - k_2y' + k_1k_2y &= 0 \\ (y'' - k_2y') - k_1(y' - k_2y) &= 0 \\ \sqsupset u(x) &= y' - k_2y \\ u' - k_1u = 0 \Longrightarrow u(x) = c_1e^{k_1x} \Longrightarrow y' - k_2y &= c_1e^{k_1x} \end{aligned}$$

Сначала найдем частное решение соответствующего ЛОДУ$_1$: $\overline{y} = c_2e^{k_2x}, y_1 = e^{k_2x}$. Далее будем варьировать постоянную c_2, тогда $y(x) = C_2(x)e^{k_2x}$. Подставим это в исходное ДУ:

$$\begin{aligned} C_2'(x)e^{k_2x} + C_2(x) \cdot k_2 \cdot e^{k_2x} - k_2 \cdot C_2(x)e^{k_2x} &= c_1e^{k_1x} \\ C_2'(x)e^{k_2x} &= c_1e^{k_1x} \end{aligned}$$

В итоге получаем уравнение

$$\boxed{C_2'(x) = c_1e^{(k_1-k_2)x}} \tag{★}$$

Проанализируем это уравнение. Всего будет рассмотрено 3 случая: один в этом вопросе, остальные — в двух последующих.

(★) **случай I**: $k_1 \neq k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

В заданных ограничениях имеем

$$\begin{aligned} C_2'(x) &= c_1e^{(k_1-k_2)x} \\ C_2(x) &= \frac{c_1}{k_1 - k_2}e^{(k_1-k_2)x} + \tilde{c_2} \\ y(x) = C_2(x)y_1(x) &= \underbrace{\frac{c_1}{k_1 - k_2}}_{\tilde{c_1}}e^{k_1x} + \tilde{c_2}e^{k_2x} \\ y(x) &= \tilde{c_1}e^{k_1x} + \tilde{c_2}e^{k_2x} \end{aligned}$$

2.9. Решение ЛОДУ$_2$ с постоянными коэффициентами для случая вещественных кратных корней характеристического уравнения.

(★) **случай II**: $k_1 = k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Пусть $k_1 = k_2 = k$, тогда получаем:

$$
\begin{aligned}
C_2'(x) &= c_1 e^{(k_1-k_2)x} \\
C_2(x) &= c_1 x + c_2 \\
y(x) = C_2(x) y_1(x) &= (c_1 x + c_2) e^{kx} \\
y(x) &= c_1 x \cdot e^{kx} + c_2 e^{kx}
\end{aligned}
$$

2.10. Решение ЛОДУ$_2$ с постоянными коэффициентами для случая комплексных корней характеристического уравнения.

($\bigstar$) **случай III**: $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i, k_{1,2} \in \mathbb{C}$

В заданных ограничениях получаем

$$
\begin{aligned}
C_2'(x) &= c_1 e^{(k_1-k_2)x} \\
C_2(x) &= \frac{c_1}{k_1-k_2} e^{(k_1-k_2)x} + \tilde{c_2} \\
y(x) = C_2(x) y_1(x) &= \underbrace{\frac{c_1}{k_1-k_2}}_{\tilde{c_1}} e^{k_1 x} + \tilde{c_2} e^{k_2 x} \\
y(x) &= \tilde{c_1} e^{k_1 x} + \tilde{c_2} e^{k_2 x} \\
y(x) &= \tilde{c_1} e^{\alpha x} e^{\beta i x} + \tilde{c_2} e^{\alpha x} e^{-\beta i x}
\end{aligned}
$$

Далее используем формулу $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$:

$$
\begin{aligned}
y(x) = e^{\alpha x}\Big(\tilde{c_1}\Big(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\Big) + \tilde{c_2}\Big(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\Big)\Big) \\
y(x) = e^{\alpha x}\Big(\cos(\beta x)\underbrace{\Big(\tilde{c_1} + \tilde{c_2}\Big)}_{\widehat{c_1}} + i\sin(\beta x)\underbrace{\Big(\tilde{c_1} - \tilde{c_2}\Big)}_{\widehat{c_2}}\Big) \\
y(x) = e^{\alpha x}\Big(\widehat{c_1}\cos(\beta x) + \widehat{c_2} i \sin(\beta x)\Big)
\end{aligned}
$$

<u>Lm</u> 2.10.1. Если $y(x) = u(x) + iv(x)$ это решение ЛОДУ$_2$, то $y(x) = u(x) + v(x)$ также являются решением ЛОДУ$_2$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $y(x) = u(x) + v(x)$:

$$
\begin{cases}
y(x) = u(x) + v(x) \\
y'(x) = u'(x) + v'(x) \\
y''(x) = u''(x) + v''(x)
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
y''(x) + py'(x) + qy(x) = u''(x) + v''(x) + pu'(x) + pv'(x) + u(x) + qu(x) + qv(x) = 0 \\
\Big(u''(x) + pu'(x) + qu(x)\Big) + \Big(v''(x) + pv'(x) + qv(x)\Big) = 0
\end{aligned}
$$

Это равенство верно, т.к. $u(x)$ и $v(x)$ решения ЛОДУ$_2$. ■

Значит, по 2.10.1 общее решение ($\bigstar$) в третьем случае будет иметь вид

$$
y(x) = e^{\alpha x}\Big(\widehat{c_1}\cos(\beta x) + \widehat{c_2}\sin(\beta x)\Big)
$$

2.11. Свойства решений ЛОДУ$_2$: линейная независимость решений, определитель Вронского. Теоремы 1,2.

Рассмотрим множество Ω непрерывных функций с непрерывными производными 2ого порядка. Определим линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}[y] = y'' + py' + qy \to f(x)$.

Def 2.11.1. Будем называть функции $y_1, \ldots, y_n$ линейно-независимыми на отрезке $[a; b]$, если

$$
\sum_{i=1}^{n} c_i y_i = 0 \Longrightarrow \forall c_i = 0
$$

Def 2.11.2. Определитель Вронского (вронскиан) $\mathcal{W}$ это определитель, составленный из n функций и всех их производных вплоть до $(n-1)$-ого порядка. Он имеет вид:

$$
\mathcal{W} = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}
$$

Lm 2.11.3. Если два решения ЛОДУ$_2$ линейно-зависимы на $[a;b]$, то их вронскиан на $[a;b]$ равен нулю.

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}[y_1]=0\\ \mathcal{L}[y_2]=0\\ y_1=\lambda y_2\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \mathcal{W}=0$$

Доказательство.

$$\mathcal{W}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2\\ \lambda y_2' & y_2'\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} y_2 & y_2\\ y_2' & y_2'\end{vmatrix}=0$$

■

Lm 2.11.4. Если два решения ЛОДУ$_2$ линейно-независимы на $[a;b]$, то их вронскиан на $[a;b]$ не равен нулю.

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}[y_1]=0\\ \mathcal{L}[y_2]=0\\ y_1\neq\lambda y_2\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \mathcal{W}\neq 0$$

Доказательство. От противного

$$\begin{aligned}\sqsupset \mathcal{W}=0=\begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=y_1y_2'-y_1'y_2 \mid : y_1^2\neq 0\\ \frac{y_1y_2'-y_1'y_2}{y_1^2}=0\\ \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=0\\ \frac{y_2}{y_1}=const\\ y_1=\lambda y_2\end{aligned}$$

Получили противоречие. ■

Теорема 2.11.5. Линейная зависимость/независимость функций определяется равенством их вронскиана нулю.

Доказательство. Следствие из 2.11.3 и 2.11.4. ■

Замечание 2.11.6. Для проверки набора функций на линейную зависимость/независимость лучше использовать именно вронскиан, а не непосредственное определение линейной зависимости функций на отрезке.

Теорема 2.11.7. Рассмотрим функции на отрезке $[a;b]$. Если на этом отрезке найдется точка, в которой вронскиан равен нулю, вронскиан будет равен нулю на всем отрезке. Дуально, если найдется точка, в которой вронскиан не равен нулю, то он будет не равен нулю на всем отрезке.

$$\exists x_0\in[a;b]\mid W(x_0)=W_0\neq 0\Longrightarrow \forall x\in[a,b]\colon W(x)\neq 0$$
$$\exists x_0\in[a;b]\mid W(x_0)=W_0=0\Longrightarrow \forall x\in[a,b]\colon W(x)=0$$

Доказательство. Пусть y_1 и y_2 это решения ДУ, тогда

$$\begin{cases} y_2''+py_2'+qy_2=0\mid\cdot y_1\\ y_1''+py_1'+qy_1=0\mid\cdot y_2\end{cases}\quad -$$
$$(y_1y_2''-y_2y_1'')+p(y_1y_2'-y_1'y_2)=0$$

Заметим, что выражение в левой скобке это $\mathcal{W}'$, а во правой — $\mathcal{W}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}=y_1y_2'-y_1'y_2\\ \mathcal{W}'=(y_1y_2'-y_1'y_2)'=y_1'y_2'+y_1y_2''-y_1''y_2-y_1'y_2'=y_1y_2''-y_1''y_2\end{aligned}$$

Подставим это в полученное ранее уравнение:

$$\begin{aligned}(y_1y_2''-y_2y_1'')+p(y_1y_2'-y_1'y_2)=0\\ \mathcal{W}'+p\mathcal{W}=0\\ \mathcal{W}=c_1e^{-\int \mathrm{pdx}}\\ \mathcal{W}(x_0)=c_1e^{-\int_{x_0}^{x_0}\mathrm{pdx}}=c_1=\mathcal{W}_0\\ \mathcal{W}(x)=c_1e^{-\int_{x_0}^{x}\mathrm{pdx}}=\mathcal{W}_0e^{-\int_{x_0}^{x}\mathrm{pdx}}\end{aligned}$$

Таким образом, если $\mathcal{W}_0=0$, то $\mathcal{W}(x)=0$ на всем отрезке $[a;b]$. Дуально, если $\mathcal{W}_0\neq 0$, то т.к. второй множитель всегда больше нуля, то $\mathcal{W}(x)\neq 0$. ■

Замечание 2.11.8. Таким образом, чтобы узнать равен ли вронскиан нулю на отрезке, достаточно узнать его значение в одной произвольной точке этого отрезка.

2.12. Свойства решений ЛОДУ$_2$: линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Определитель Вронского. Теоремы о вронскиане.

Lm 2.12.1. Линейная комбинация решений ЛОДУ$_2$ также является решением.

$$\left.\begin{matrix}\mathcal{L}[y_1]=0\\ \mathcal{L}[y_2]=0\end{matrix}\right\} \implies \begin{cases}\mathcal{L}[y_1+y_2]=0\\ \mathcal{L}[\lambda y_1]=0\ (\forall\lambda\in\mathbb{R})\end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим на примере $y=y_1+y_2$. Подставим в исходное ДУ, раскроем и сгруппируем

$$\begin{aligned} y''+py'+qy&=0\\ (y_1+y_2)''+p(y_1+y_2)'+q(y_1+y_2)&=0\\ (y_1''+py_1'+qy_1)+(y_2''+py_2'+qy_2)&=0\end{aligned}$$

Это верно, т.к. y_1 и y_2 это решения исходного ДУ. Случай $y=\lambda y_1$ рассматривается аналогично. ■

Следствие 2.12.2. Множество решений ЛОДУ образует линейное пространство.

Теорема 2.12.3. О существовании и единственности решения ЛОДУ$_2$.

$$y''=g(x,y,y')=f(x)-py'-qy$$

Если $g,g'_y,g'_{y'}$ непрерывны в области $D\ni(x_0,y_0)$, то задача Коши

$$\begin{cases}\mathcal{L}[y]=f(x)\\ y_0=y(x_0)\\ y_0'=y'(x_0)\end{cases}$$

имеет единственное решение.

2.13. Свойства решений ЛОДУ$_2$: линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ$_2$. Фундаментальная система решений (определение).

Теорема 2.13.1. О структуре общего решения ЛОДУ$_2$
Если $\mathcal{L}[y_1]=0$, $\mathcal{L}[y_2]=0$ и y_1,y_2 линейно независимы, то $\overline{y}=c_1y_1+c_2y_2$ – общее решение ЛОДУ$_2$.

Доказательство. Начнем с того, что $\overline{y}=c_1y_1+c_2y_2$ это решение как линейная комбинация решений (см. 2.12.1). Рассмотрим точку (x_0,y_0) в рамках задачи Коши:

$$\begin{cases}\mathcal{L}[y]=0\\ y_0=y(x_0)\\ y_0'=y'(x_0)\end{cases} \iff \begin{cases}c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=y_0\\ c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)=y_0'\end{cases} \iff \begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_0\\ y_0'\end{pmatrix}$$

По т. Крамера решение полученной СЛАУ будет единственным только в том случае, если определитель главной матрицы не равен нулю. Это выполняется, т.к. этот определитель это вронскиан, который не равен нулю, т.к. решения линейно-независимы. ■

Def 2.13.2. Фундаментальная система решений (ФСР) ЛОДУ$_n$ это набор из n линейно независимых решений ДУ.

2.14. Свойства решений ЛНДУ$_2$: теоремы о структуре общего решения и решении ДУ с суммой правых частей.

Теорема 2.14.1. Общее решение ЛНДУ$_2$ представимо в виде суммы общего решения соответствующего ЛОДУ$_2$ и некоторого частного решения ЛНДУ$_2$.

$$\begin{aligned} y''+py'+qy&=f(x)\\ y&=\overline{y}+y^*\\ \mathcal{L}[\overline{y}]=0,\mathcal{L}[y^*]&=f(x)\end{aligned}$$

Доказательство. Сначала покажем, что y будет являться решением ДУ:

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\overline{y}] + \mathcal{L}[y^*] = 0 + f(x) = f(x)$$

Показать, что это решение будет являться общим можно аналогично 2.13.1. ■

<u>Lm</u> 2.14.2. Если правая часть ЛНДУ$_2$ представлена суммой $f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение этого ЛНДУ$_2$ будет суммой двух частных решений ЛНДУ$_2$, в которых правая часть является каждым из слагаемых.

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= f_1(x) + f_2(x) \\ \mathcal{L}[y_1^*] = f_1(x), \mathcal{L}[y_2^*] &= f_2(x) \\ y^* &= y_1^* + y_2^* \end{aligned}$$

Доказательство.

$$\mathcal{L}[y^*] = \mathcal{L}[y_1^*] + \mathcal{L}[y_2^*] = f_1(x) + f_2(x)$$

■

2.15. Структура решения ЛОДУ$_n$: линейная независимость решений, нахождение фундаментальной системы решений по корням характеристического уравнения.

Замечание 2.15.1. О существовании и единственности решения задачи Коши.

Пусть

$$y^{(n)} = g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

при этом $y, y', \dots, y^{(n-1)}, g$ непрерывны и ограничены в области

$$\begin{aligned} |x - x_0| &< h_0, \\ |y - y_0| &< h_1, \\ &\dots \\ \left| y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)} \right| &< h_n, \end{aligned}$$

где $(x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ это начальные условия. Тогда существует единственное решение задачи Коши.

По аналогии с ЛОДУ$_2$ для ЛОДУ$_n$ можно составить характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y] = y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y &= 0 \quad p_i \in \mathbb{R} \\ \mathcal{L}[e^{kx}] = k^n e^{kx} + p_1 \cdot k^{n-1} e^{kx} + \ldots + p_n e^{kx} &= 0 \,|: e^{kx} \neq 0 \\ k^n + p_1 k^{n-1} + \ldots + p_n &= 0 \end{aligned}$$

Далее аналогично рассмотрим некоторые случаи:

1. Набору $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{R}$ различных вещественных корней соответствует набор частных линейно-независимых решений однородного уравнения $y_1 = e^{k_1 x}, \dots, y_m = e^{k_m x}$.
2. Набору $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = k \in \mathbb{R}$ повторяющихся вещественных корней соответствует набор частных линейно-независимых решений однородного уравнения $y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}, \dots, y_m = x^{m-1} e^{kx}$.
3. Каждой уникальной паре вида $k = \alpha + i\beta$ соответствует пара частных линейно-независимых решений однородного уравнения $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$.
4. Каждой паре кратности m вида $k = \alpha + i\beta$ соответствует m пар частных линейно-независимых решений однородного уравнения вида

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 & = & e^{\alpha x} \cos \beta x, & & y_2 & = & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ y_3 & = & x e^{\alpha x} \cos \beta x, & & y_4 & = & x e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ y_{2m-1} & = & x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, & & y_{2m} & = & x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \end{array}$$

Замечание 2.15.2. Общим решением ЛОДУ$_n$ будет линейная оболочка набора частных решений, соответствующих корням характеристического уравнения.

Def 2.15.3. Вронскианом ДУ называется вронскиан его ФСР.

Замечание 2.15.4. Все доказанные свойства вронскиана распространяются и на бОльшую размерность.

2.16. Решение ЛНУ$_2$ с постоянными коэффициентами: специальная правая часть, поиск частного решения методом неопределенных коэффициентов.

Def 2.16.1. Специальной правой частью называется (СПЧ)

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$$

где α, β, n, m некоторые коэффициенты.

Поиск частного решения методом неопределенных коэффициентов

Идея: пусть в ЛНДУ$_n$ правая часть является специальной. Можно предположить, что она была получена дифференцированием функции со схожей структурой, поэтому будем искать частное решение ЛНДУ$_n$ в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(U_l(x)\cos\beta x + W_l(x)\sin\beta x),\ l = max(n, m)$$

Алгоритм:

1. Составляем и решаем характеристическое уравнение.
2. Извлекаем из СПЧ коэффициенты α, β, n, m.
3. Считаем r — количество совпадений корней характеристического уравнения с $\alpha \pm i\beta$. Совпадение комплексной пары считаем один раз.
4. Составляем y^* с неопределенными коэффициентами: полиномы U, W степени $l = max(n, m)$.
5. Подставляем y^* в уравнение, находим неопределенные коэффициенты.

Пример #01:

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= 2e^{3x} \\ k^2 - 3k + 2 &= 0 \\ k_1 = 1, k_2 &= 2 \\ 2e^{3x} \implies \alpha = 3, \beta = 0, n = 0, m &= 0 \end{aligned}$$

Число $\alpha + i\beta$ не совпадает с корнями характеристического уравнения, поэтому будем искать частное решение в виде $y^* = Ae^{3x}$:

$$\begin{aligned} (Ae^{3x})'' - 3(Ae^{3x})' + 2(Ae^{3x}) &= 2e^{3x} \\ 9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} &= 2e^{3x} \mid : e^{3x} \\ 9A - 9A + 2A &= 2 \\ A &= 1 \end{aligned}$$

Итого: частное решение будет равно $y^* = e^{3x}$

Пример #02:

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= e^{x} \\ k^2 - 3k + 2 &= 0 \\ k_1 = 1, k_2 &= 2 \\ e^{x} \implies \alpha = 1, \beta = 0, n = 0, m &= 0 \end{aligned}$$

Корень характеристического уравнения k_1 совпал с числом $\alpha + i\beta$, поэтому будем искать частное решение в виде $y^* = Axe^x$:

$$\begin{aligned} (Axe^{x})'' - 3(Axe^{x})' + 2(Axe^{x}) &= e^{x} \\ e^x(2A + Ax) - 3e^x(A + Ax) + 2Axe^{3x} &= 2e^{3x} \mid : e^{x} \\ 2A + Ax - 3A - 3Ax + 2Ax &= 2 \\ A &= -2 \end{aligned}$$

Итого: частное решение будет равно $y^* = -2e^x$

Замечание 2.16.2. Почему необходимо умножать на x^r? Если этого не делать, то полученное уравнение с неопределенными коэффициентами не будет иметь решений. Это происходит в тех случаях, когда выбранное частное решение совпадает с общим решением (именно поэтому мы смотрим на корни характеристического уравнения, потому что общее решение формируется на их основе). В этих случаях нарушается структура общего решения ЛНДУ$_n$.

2.17. Решение ЛНУ$_2$: метод вариации произвольных постоянных (Лагранжа).

Метод универсален для правой части любого вида и даже для $\mathcal{L}[y] = f(x)$ с непостоянными коэффициентами.

Рассмотрим на примере:

$$
\begin{aligned}
y'' - 3y' + 2y &= 2e^{3x} \\
k^2 - 3k + 2 &= 0 \\
k_1 = 1, k_2 &= 2 \\
\overline{y} &= c_1 \underbrace{e^x}_{y_1} + c_2 \underbrace{e^{2x}}_{y_2}
\end{aligned}
$$

Будем искать $y(x)$ в виде $y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2(x)$. Пусть $C_1(x) = g(x) + c_1, C_2(x) = h(x) + c_2$, тогда:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= (g(x) + c_1)y_1 + (h(x) + c_2)y_2 \\
y(x) &= \underbrace{c_1 y_1 + c_2 y_2}_{\overline{y}} + \underbrace{g(x)y_1 + h(x)y_2}_{y^*}
\end{aligned}
$$

В нашем примере получаем, что $y^* = g(x)e^x + h(x)e^{2x}$. Заметим, что функции $g(x)$ и $h(x)$ можно представить по-разному. Подберем их так, чтобы выполнялось равенство

$$
C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \tag{$\blacktriangle$}
$$

Вычислим производные $y'(x)$ и $y''(x)$:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2(x) \\
y'(x) &= \underbrace{C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2}_{\blacktriangle = 0} + C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' \\
y''(x) &= C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2''
\end{aligned}
$$

Вернемся к исходному ДУ и подставим в него все полученные равенства:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
y''(x) & = & C_1'(x)y_1' & + & C_1(x)y_1'' & + & C_2'(x)y_2' & + & C_2(x)y_2'' \\
py'(x) & = & & & pC_1(x)y_1' & & & + & pC_2(x)y_2' \\
qy(x) & = & & & qC_1(x)y_1 & & & + & qC_2(x)y_2 \\
f(x) & = & C_1'(x)y_1' & + & 0 & + & C_2'(x)y_2' & + & 0
\end{array}
$$

Суммы во втором и четвертом столбцах обнуляются, т.к. если вынести из них $C_1(x)$ и $C_2(x)$ соответственно, то в скобках останется ЛОДУ$_2$, а y_1, y_2 — его корни.

Таким образом мы получили второе условие для системы (первое условие это $\blacktriangle$) для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Искомая система будет иметь вид:

$$
\begin{cases}
C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\
C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)
\end{cases}
\iff
\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}
$$

Подведем итог и обобщим алгоритм решения ЛНДУ$_n$:

1. Решаем соответствующее ЛОДУ$_n$, получаем набор корней $y_1, \ldots, y_n$.
2. Составляем СЛАУ следующего вида:

$$
\begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}
$$

3. Решаем её и находим производные варьируемых функций. Интегрируем их (не забывая про константу).
4. Общее решение ЛНДУ$_n$ будет иметь вид $y = C_1(x)y_1 + \ldots + C_n(x)y_n$

2.18. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение методом исключения.

Def 2.18.1. Пусть $y_1, \ldots, y_n$ — функции от x, дифференцируемые m раз. Тогда система

$$
\begin{cases}
f_1(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n', \ldots, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}) = 0 \\
\ldots \\
f_n(\cdots) = 0
\end{cases}
$$

называется системой дифференциальных уравнений (СДУ).

Def 2.18.2. СДУ называется *нормальной*, если все её уравнения разрешены относительно старшей производной и при этом правые части не содержат производных.

Def 2.18.3. Нормальная СДУ называется автономной, если функции в правой части каждого из её уравнений не зависят явно от независимой переменной.

Замечание 2.18.4. С помощью введения новых переменных ДУ $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ можно свести к системе ДУ следующего вида

$$\begin{cases} y = y_1 \\ y' = y_2 \\ \ldots \\ y^{(n-1)} = y_n \\ y^{(n)} = f(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

где $y_1, \ldots, y_n$ — новые переменные.

Def 2.18.5. Порядком системы называется сумма порядков старших производных каждой из переменных системы. Порядок системы равен порядку ДУ, соответствующему ей.

Решение СДУ методом исключения:

Пусть дана следующая СДУ:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots, \\ \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

Обозначим $f_1(x, y_1, \ldots, y_n) = F_1(x, y_1, \ldots, y_n)$. Дифференцируем первое уравнение по x, получим:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}}_{f_1} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x}}_{f_n} = F_2(x, y_1, \ldots, y_n)$$

Полученное выражение можно продифференцировать еще раз. Подставляя производные из изначального СДУ можно получить аналогичные функции вплоть до $F_n(x, y_1, \ldots, y_n)$. Итого получится следующая система:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = F_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}x^2} = F_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots, \\ \frac{\mathrm{d}^n y_1}{\mathrm{d}x^n} = F_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

Как видно из 2.18.4 полученный вид системы свидетельствует о том, что её можно свести к равносильному ДУ $\varphi(x, y_1, \ldots, y_1^{(n)})$.

<u>Пример</u>:

$$\begin{cases} y' = y + 5x \\ x' = -y - 3x \end{cases} \iff \begin{cases} y'' = y' + 5x' \\ x' = -y - 3x \end{cases} \iff \begin{cases} y'' = y' + 5(-y - 3x) \\ x' = -y - 3x \end{cases} \iff \begin{cases} y'' = y' - 5y + 15x \\ x' = -y - 3x \end{cases}$$

Выразим x из первого уравнения изначальной системы и подставим его в первое уравнение полученной системы:

$$\begin{cases} y' = y + 5x \Longrightarrow x = \frac{1}{5}(y' - y) \\ y'' = y' - 5y + 15x \end{cases} \Longrightarrow y'' = y' - 5y + 3y' - 3y \Longrightarrow y'' - 4y' + 8y = 0$$

Из полученного ЛОДУ$_2$ можно найти y, после чего подставить его в СДУ и найти x.

Замечание 2.18.6. Линейная СДУ сводится к ЛОДУ, т.к. дифференцирование и исключение линейны. Аналогично СДУ с постоянными коэффициентами сводится к ДУ с постоянными коэффициентами.

2.19. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение матричным методом в случае различных вещественных собственных чисел.

Обозначим $(y_1, \ldots, y_n) = Y$ — вектор неизвестных, $\{a_{i,j}\} = A$ — коэффициенты, $(y'_1, \ldots, y'_n) = Y'$ — вектор производных.

Тогда СДУ можно записать в матричном виде как $Y' = AY$. Пусть A это матрица линейного оператора $\mathcal{A}$. Для этого оператора можно найти собственные числа и соответствующие им собственные векторы.

Обозначим собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, а $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ — соответствующие им собственные векторы.

Можно убедиться, что $Y_i = \Gamma_i e^{\lambda_i x}$ будет являться решением СДУ:

$$\begin{cases} Y'_i = \Gamma_i \lambda_i e^{\lambda_i x} = \lambda_i(\Gamma_i e^{\lambda_i x}) \\ \mathcal{A}Y_i = \mathcal{A}(\Gamma_i e^{\lambda_i x}) = \lambda_i(\Gamma_i e^{\lambda_i x}) \end{cases} \Longrightarrow Y'_i = \mathcal{A}Y_i$$

Пусть все собственные числа различные и вещественные, тогда $\forall \lambda_i \colon Y_i = \Gamma_i e^{\lambda_i x}$ это решение, причем $\forall i \neq j \colon Y_i$ и Y_j линейно-независимы. Общее решение СДУ можно записать в виде:

$$\overline{Y} = c_1 Y_1 + \ldots + c_n Y_n$$

Пример:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 8x + 3y \end{cases} \iff Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} Y \iff \begin{cases} \lambda_1 = -1 \Longrightarrow \Gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 5 \Longrightarrow \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = \Gamma_1 e^{\lambda_1 t} \\ Y_2 = \Gamma_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \iff \begin{cases} \overline{x}(t) = c_1 \cdot (-1) \cdot e^{-t} + c_2 \cdot 1 \cdot e^{5t} \\ \overline{y}(t) = c_1 \cdot 2 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot 4 \cdot e^{5t} \end{cases}$$

2.20. Теория устойчивости: определение устойчивости по Ляпунову, фазовая плоскость, траектории ДУ. Примеры устойчивого и неустойчивого решения.

Def 2.20.1. Пусть дана СДУ

$$\begin{cases} x' = f_1(t, x, y) \\ y' = f_2(t, x, y) \end{cases}$$

и $x(t), y(t)$ это её решение, удовлетворяющее начальным условиям $x(t = 0) = x_0, y(t = 0) = y_0$. Рассмотрим $\widetilde{x}(t), \widetilde{y}(t)$ — другое решение, удовлетворяющее начальным условиям с отклонением $\widetilde{x}(t = 0) = \widetilde{x}_0, \widetilde{y}(t = 0) = \widetilde{y}_0$.

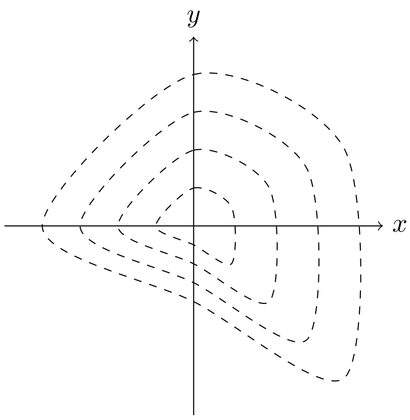
Решение $x(t), y(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \mid \forall t > 0 \;\; \forall x_0, y_0, \widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0 \colon \begin{cases} |x_0 - \widetilde{x}_0| < \delta \\ |y_0 - \widetilde{y}_0| < \delta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |\widetilde{x}(t) - x(t)| < \varepsilon \\ |\widetilde{y}(t) - y(t)| < \varepsilon \end{cases}$$

Исследование на устойчивость линейной автономной системы ДУ:

Пусть дана ДУ:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax + by \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = cx + my \end{cases} \Longrightarrow \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{cx + my}{ax + by} \qquad (\blacklozenge)$$



Def 2.20.2. Общий интеграл для $\blacklozenge$ $\varphi(x, y) = C$ (семейство интегральных кривых) называется фазовым портретом системы или траекторией ДУ.

Замечание 2.20.3. Решения $x = 0$, $y = 0$ являются особыми для $\blacklozenge$.

Запишем СДУ в матричном виде:

$$Y' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & m \end{pmatrix} Y \Longrightarrow \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & m - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Далее все зависит от количества решений:

$$\begin{array}{rcc} \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} & \Longrightarrow & c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} & \Longrightarrow & c_1 e^{\lambda t} + c_2 t \cdot e^{\lambda t} \\ \lambda_{1,2} = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} & \Longrightarrow & e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) \end{array}$$

Подробно рассмотрим случай $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ причем $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

Решаем ДУ методом исключения. Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - (a + m)\lambda + (am - bc) = 0$. Получаем:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = \frac{1}{b}\left(c_1 e^{\lambda_1 t}(\lambda_1 - a) + c_2 e^{\lambda_2 t}(\lambda_2 - a)\right) \end{cases}$$

Подберем константы, соответствующие начальным условиям $x(t=0) = x_0$, $y(t=0) = y_0$ (отклонение от начальных условий $(0,0)$):

$$x(t) = \frac{ax_0 + by_0 - \lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{-ax_0 - by_0 + \lambda_1 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t}$$

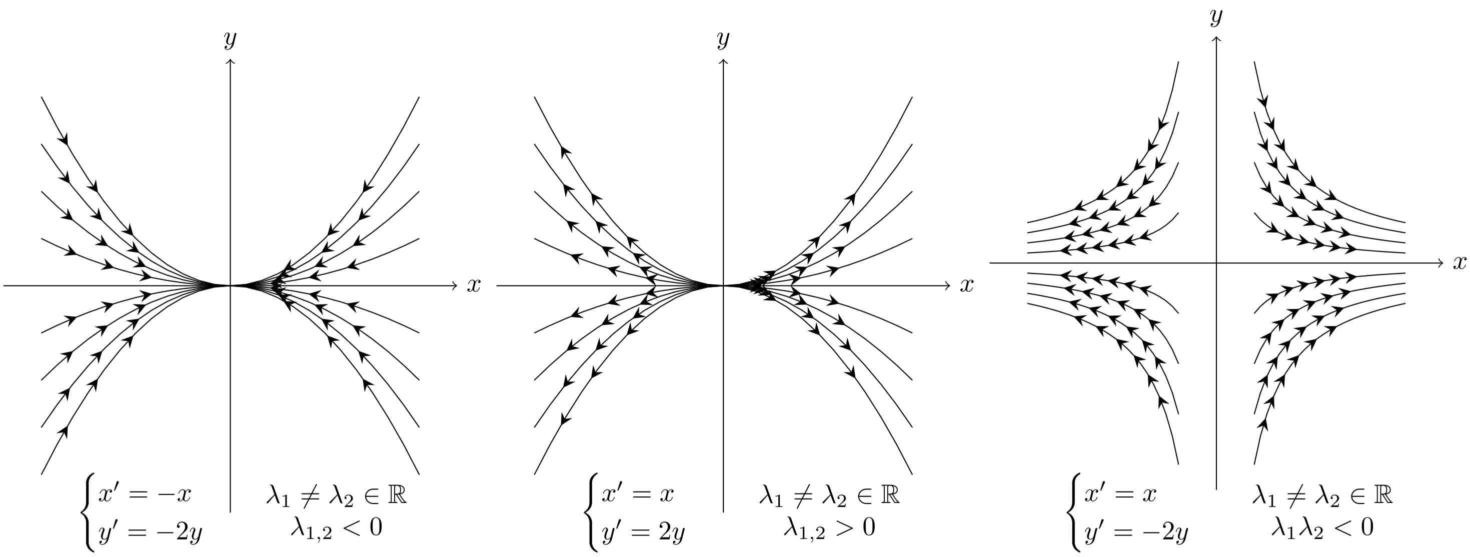
$$y(t) = \frac{1}{b}\left(\frac{ax_0 + by_0 - \lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 - a)e^{\lambda_1 t} + \frac{-ax_0 - by_0 + \lambda_1 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_2 - a)e^{\lambda_2 t}\right)$$

Таким образом

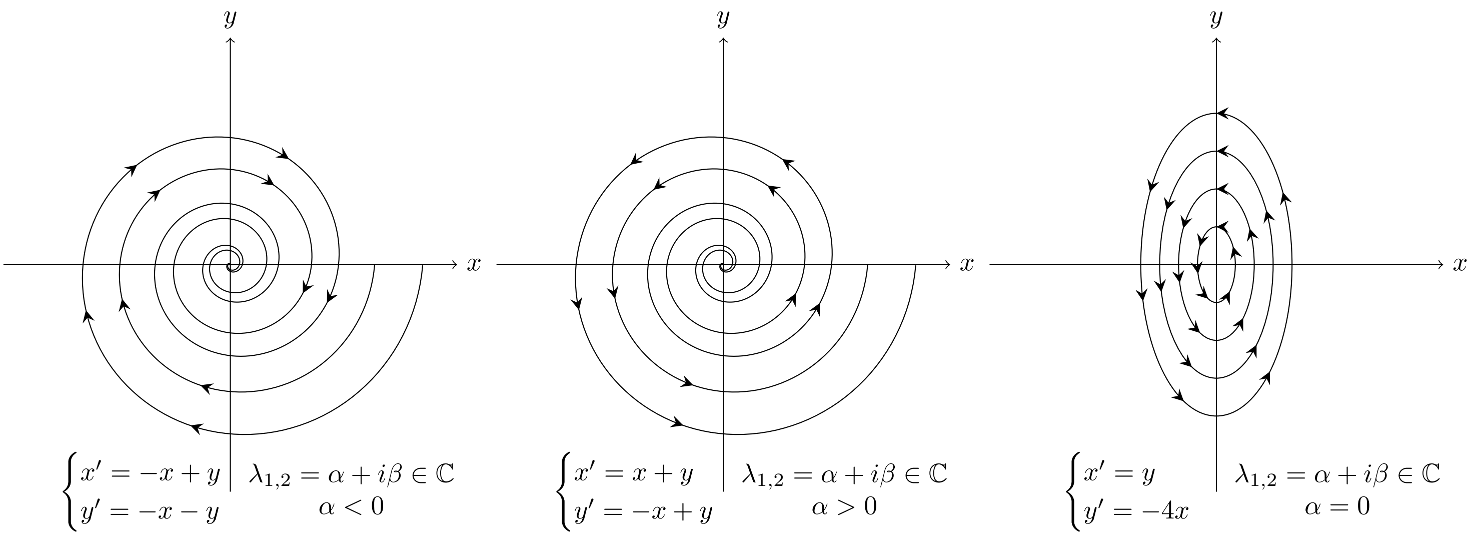
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \colon |x_0| < \delta, |y_0| < \delta \Longrightarrow x(t) < \varepsilon, y(t) < \varepsilon \iff \begin{cases} t \to \infty \\ x_0 \to 0 \\ y_0 \to 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t) \to 0 \\ y(t) \to 0 \end{cases}$$

Значит решение $x = 0, y = 0$ устойчивое.

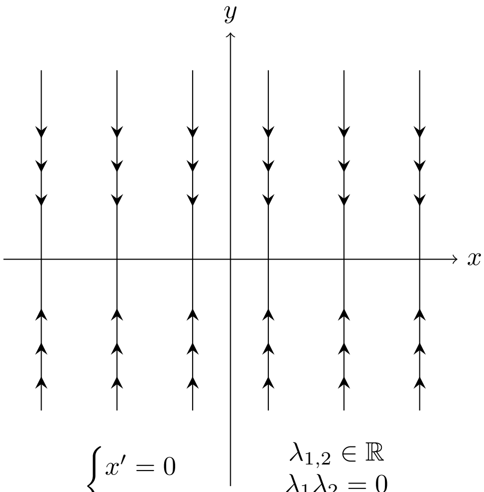
Для остальных случаев приведем пример и построим фазовый портрет:



(a) Устойчивый узел (b) Неустойчивый узел (c) Неустойчивое седло

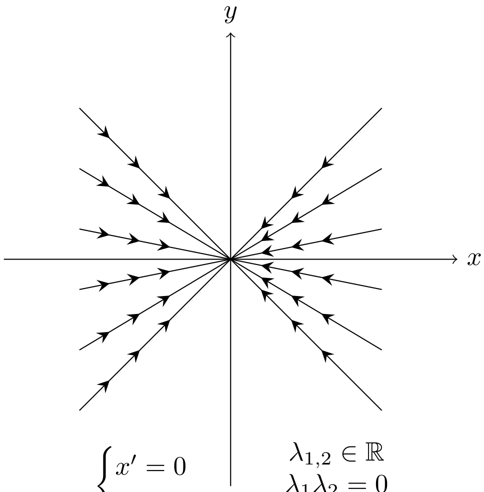


(a) Устойчивый фокус (b) Неустойчивый фокус (c) Центр (неусточивый)



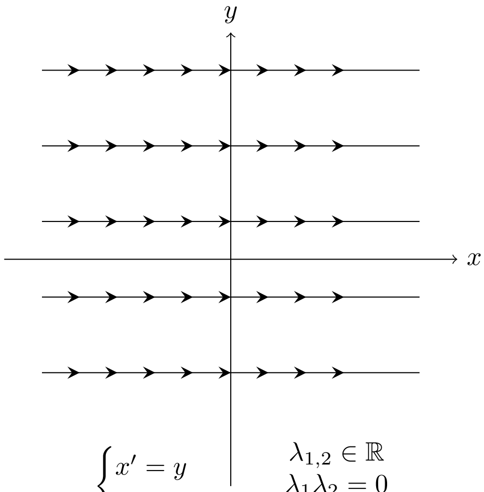
$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = -y \end{cases} \qquad \begin{gathered} \lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \\ \lambda_1\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0 \end{gathered}$$

(a) Неустойчивое



$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = y \end{cases} \qquad \begin{gathered} \lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \\ \lambda_1\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0 \end{gathered}$$

(b) Вырожденный узел (устойчивое)



$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 0 \end{cases} \qquad \begin{gathered} \lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \\ \lambda_1\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0 \end{gathered}$$

(c) Вырожденное седло (неустойчивое)