PT LEC 03

isagila

Собрано 07.09.2023 в 18:57

https://github.com/isagila/tesc

Содержание

TODO: Хочу на cover поставить другой арт с Тосакой

1. Лекции

1.1. Лекция 23.09.05.

Пусть проводится n реальных экспериментов, в которых событие A появилось n_A раз. Отношение $\mathsf{P}(A) = \frac{n_A}{n}$ называется частотой события A. Эксперименты показывают, что частота «стабилизируется» около некоторого числа, под которым и подразумевается статистическая вероятность.

Def 1.1.1. Пространством элементарных исходов Ω называется множество, содержащее все возможные результаты данного эксперимента, из которых при испытании происходит ровно один. Элементы этого множества называются элементарными исходами и обозначаются ω.

Def 1.1.2. Случайными событиями называются подмножества $A \subseteq \Omega$. Говорят, что в ходе эксперимента событие A наступило, если произошел один из элементарных исходов, принадлежащий A.

Пример 1.1.3. 1. Подбрасывание монеты. $\Omega = \{\Gamma, P\}$

2. Подбрасывание кубика. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, тогда, например, 2 — это элементарный исход, а $A = \{2, 4, 6\}$ это событие «выпало четное число».

3. Подбрасывание монеты дважды. Если учитывать порядок бросков, то $\Omega = \{\Gamma\Gamma, \Gamma P, P\Gamma, PP\}$, если не учитывать порядок бросков, то $\Omega = \{\Gamma\Gamma, \Gamma P, PP\}$.

4. Подбрасывание кубика дважды. $\Omega = \left\{(i, j) \,\middle|\, 1 \leqslant i, j \leqslant 6\right\}$. Событию A «разница выпавших очков делится на 3» благоприятствуют исходы $(1, 4), (4, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 6), (6, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$.

5. Монета подбрасывается до выпадения герба. $\Omega = \{\Gamma, P\Gamma, PP\Gamma, PPP\Gamma, \ldots\}$ — пространство элементарных исходов бесконечно, но счетно.

6. Монета бросается на координатную плоскость. $\Omega = \left\{(x, y) \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R}\right\}$.

Операции над событиями

Выделим два специальных события. Ω — достоверное (универсальное) событие, которое наступает всегда, т.к. содержит все элементарные исходы. Пустое (невозможное) событие $\varnothing$, которое никогда не наступает.

Def 1.1.4. Суммой $A + B$ называется событие, состоящее в том, что произошло событие A или B.

Def 1.1.5. Произведением $A \cdot B$ называется событие, состоящее в том, что произошло событие A и событие B (т.е. оба).

Замечание 1.1.6. Сумма $A_1 + \ldots + A_n$ — произошло хотя бы одно из этих событий. Произведение $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ — произошли все события.

Def 1.1.7. Противоположным к A называется событие $\overline{A}$, состоящее в том, что событие A не произошло.

Def 1.1.8. Дополнением $A \setminus B$ называется событие, состоящее в том, что событие A произошло, а событие B — нет, т.е. $A \setminus B = A \cdot \overline{B}$.

Def 1.1.9. События A и B называются несовместными, если из произведение равно $\varnothing$, т.е. при одном эксперименте может произойти только одно из этих них.

Def 1.1.10. Событие A влечет событие B, если $A \subseteq B$.

Подходы к определению вероятности

Каждому случайному событию A хотим приписать числовую характеристику, отражающую частоту события A: $0 \leqslant \mathsf{P}(A) \leqslant 1$ — вероятность события A.

Подход I. Классическое определение вероятности

Пусть Ω содержит конечное число равновозможных исходов, тогда применимо классическое определение вероятности.

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$$

где m это число исходов, которые благоприятствуют событию A, а n — число всех возможных исходов. В частности, если A_i — элементарный исход, то $\mathsf{P}(A_i) = \frac{1}{n}$. Выделим некоторые свойства.

1. $0 \leqslant \mathsf{P}(A) \leqslant 1$

2. $\mathsf{P}(\Omega) = \dfrac{n}{n} = 1$

3. $\mathsf{P}(\varnothing) = \dfrac{0}{n} = 0$

4. Если A и B — несовместные события, то $\mathsf{P}(A+B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$.

Приведем несложное доказательство 4° свойства.

$\square$ Если A и B — несовместные события, то $|A+B| = |A| + |B|$, значит

$$\mathsf{P}(A+B)\,\frac{|A+B|}{|\Omega|} = \frac{|A|+|B|}{|\Omega|} = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$$

$\blacksquare$

Пример 1.1.11. Найти вероятность того, что на кубике выпадет четное число при одном броске.

$$\left.\begin{array}{l}\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}\\ A = \{2,4,6\}\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = 0.5$$

Подход II. Геометрическое определение вероятности

Замечание 1.1.12. Определение «меры» не вводим, ограничимся тем, что мерой отрезкой является его длина, плоскости — площадь, а пространства — объем.

Пусть Ω можно изобразить в виде замкнутой ограниченной области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ и мера $\mu(\Omega)$ конечна. В эту область наугад бросается точка. Здесь «наугад» означает, что вероятность A зависит лишь от меры A и не зависит от расположения A (грубо говоря, попадание в любую точку равновозможно). При выполнении этих условий применимо геометрическое определение вероятности.

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Свойства геометрического определения вероятности полностью аналогичны свойствам классического определения вероятности.

Замечание 1.1.13. Т.к. мера точки равна нулю, то вероятность попадания в нее также равна нулю, хотя попасть в точку мы можем.

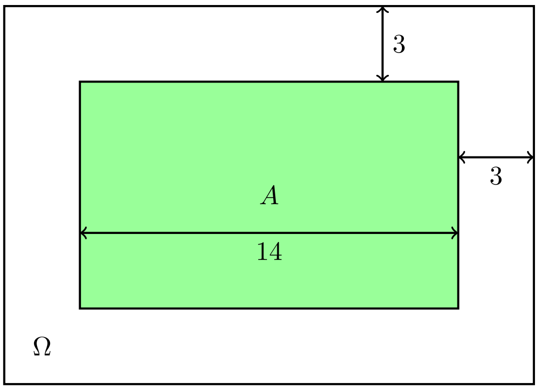
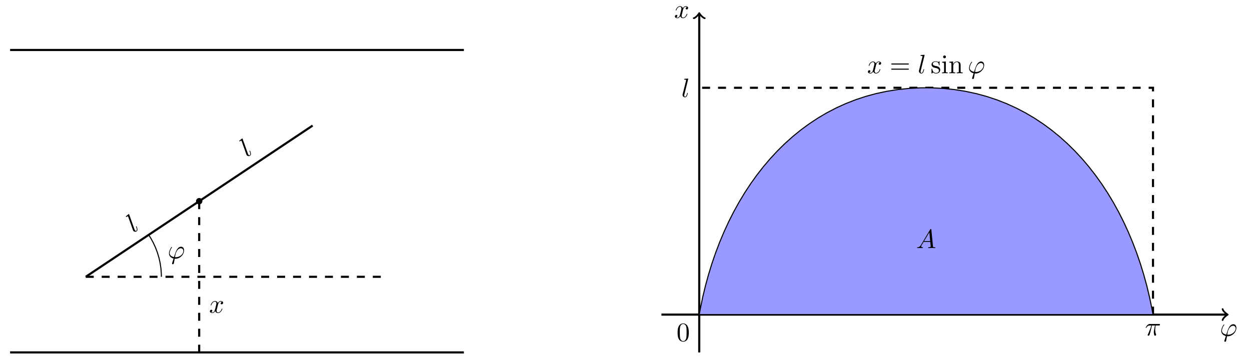


Рис. 1.1.14: Иллюстрация к 1.1.15

Пример 1.1.15. Монета диаметром 6 см наудачу бросается на пол, вымощенный квадратной плиткой со стороной 20 см. Какова вероятность того, что монета окажется целиком на одной плитке?

Решение: положение монеты определяется положением ее центра. Сделаем рисунок (рис. 1.1.14), из которого видно, что монета полностью окажется на одной из плиток, если ее центра окажется во внутреннем (зеленом) квадрате со стороной 14 см. Итого имеем

$$\mathsf{P}(A) = \frac{14^2}{20^2} = \frac{196}{400} = 0.49$$



(a) Схематичное изображение иголки на ламинате

(b) Применение геометрического определения вероятности

Рис. 1.1.16: Иллюстрация к 1.1.17

Пример 1.1.17. Пол застелен ламинатом, на который бросается игла длиной равной длине одной доски ламината. Требуется найти вероятность того, что игла пересечет стык.
Решение: положение иглы определяется ее центром и углом поворота. Стоит отметить, что эти две величины независимы. Пусть игла имеет длину $2l$, сделаем рисунок (рис. 1.1.16a). Обозначим через $x \in [0; l]$ расстояние от середины иглы до ближайшего края доски, а через $\varphi \in [0; \pi]$ — угол между направлением иглы и доской. Таким образом $\Omega = [0; \pi] \times [0; l]$. Игла пересечет доску, если $x \leqslant l \sin \varphi$. Изобразим это (рис. 1.1.16b) и вычислим площадь области A.

$$S_A = \int_0^\pi l \sin \varphi = -l \cos \varphi \Big|_0^\varphi = 2l$$

Учитывая, что $S_\Omega = \pi l$, получаем, что искомая вероятность будет равна $\mathsf{P}\left(A\right) = \dfrac{2l}{\pi l} = \dfrac{2}{\pi}$.

Статистика Максвелла–Больцмана

Поделим прямоугольную область, в которой «летает» r частиц, на n ячеек. Пусть частицы различимы, в одной ячейки может одновременно находится несколько частиц и все размещения равновероятны. Итого вероятность попадания частицы в конкретную область будет равна $\dfrac{1}{n^r}$.

Статистика Бозе–Эйнштейна

Пусть теперь частицы неразличимы, но в одной ячейке все еще может одновременно находится несколько частиц. Получаем следующую формулу для вероятности попадания частицы в конкретную область $\dfrac{1}{C_{n+r-1}^r}$.

Статистика Ферми–Дирака

Пусть частицы неразличимы и в одной ячейки может находится равно одна частица. Значит формула для вероятности будет иметь вид $\dfrac{1}{C_n^r}$.

1.2. !pre Лекция 23.09.12.

Будем строить аксиоматическое определение вероятности. Пусть у нас есть Ω — пространство элементарных исходов случайного эксперимента.

Def 1.2.1. Система $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется σ-алгеброй событий, если выполнены следующие свойства

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$ (замкнутость относительно дополнения)
3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{F}$ (замкнутость относительно счетного объединения)

Замечание 1.2.2. В 1.2.1 свойство 1° избыточно и может быть выведено из 2° и 3°.

$$A \in \mathcal{F} \xrightarrow{2^\circ} \overline{A} \in \mathcal{F} \xrightarrow{3^\circ} \underbrace{(A \cup \overline{A})}_{\Omega} \in \mathcal{F}$$

Свойства σ-алгебры событий

Lm 1.2.3.

$$\varnothing \in \mathcal{F}$$

□

$$\Omega \in \mathcal{F} \xrightarrow{2^\circ} \varnothing = \overline{\Omega} \in \mathcal{F}$$

■

<u>Lm</u> 1.2.4. σ-алгебра событий замкнута относительно счетного объединения.

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

□ Пусть $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, тогда

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \xrightarrow{2^\circ} \overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots \in \mathcal{F} \xrightarrow{3^\circ} \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \in \mathcal{F} \xrightarrow{2^\circ} \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}} \in \mathcal{F}$$

Применяя закон де Моргана (который работает не только в конечном, но и в счетном случае), получаем искомое.

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

■

<u>Lm</u> 1.2.5.

$$A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$$

□

$$A, B \in \mathcal{F} \xrightarrow{2^\circ} \overline{B} \in \mathcal{F} \xrightarrow{3^\circ} A \setminus B = A \cdot \overline{B} \in \mathcal{F}$$

■

Пример 1.2.6.

1. $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega\}$ — тривиальная.
2. $\mathcal{F} = \left\{\varnothing, \Omega, A, \overline{A}\right\}$
3. Пусть $\Omega = \mathbb{R}$, тогда $\mathcal{F}$ это σ-алгебра Борелевских множеств на прямой.

Def 1.2.7. Пусть Ω — пространство элементарных исходов и $\mathcal{F}$ его σ-алгебра. Вероятностью на $\langle \Omega, \mathcal{F} \rangle$ называется функция $\mathsf{P}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами

1. Неотрицательность. $\forall A \in \mathcal{F} \,\Big|\, \mathsf{P}\left(A\right) \geqslant 0$
2. Счетная аддитивность. Если события $A_1, A_2, \ldots$ попарно несовместны, то $\mathsf{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(A_i\right)$.
3. Нормированность. $\mathsf{P}\left(\Omega\right) = 1$

Замечание 1.2.8. Таким образом, вероятность это нормированная мера, а свойства 1–3 называются аксиомами вероятности.

Def 1.2.9. Тройка $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$ называется вероятностным пространством, где Ω это пространство элементарных исходов, $\mathcal{F}$ его σ-алгебра, а P — нормированная мера.

Свойства вероятности

<u>Lm</u> 1.2.10.

$$\mathsf{P}\left(\varnothing\right) = 0$$

□

$$1 = \mathsf{P}\left(\Omega\right) = \mathsf{P}\left(\varnothing + \Omega\right) = \mathsf{P}\left(\varnothing\right) + \mathsf{P}\left(\Omega\right) = \mathsf{P}\left(\varnothing\right) + 1 \Longrightarrow \mathsf{P}\left(\varnothing\right) = 0$$

■

<u>Lm</u> 1.2.11 (Формула обратной вероятности)**.**

$$\mathsf{P}\left(A\right) = 1 - \mathsf{P}\left(\overline{A}\right)$$

□ Т.к. A и $\overline{A}$ несовместны и $A + \overline{A} = \Omega$, то

$$1 = \mathsf{P}\left(A + \overline{A}\right) = \mathsf{P}\left(A\right) + \mathsf{P}\left(\overline{A}\right) \Longrightarrow \mathsf{P}\left(A\right) = 1 - \mathsf{P}\left(\overline{A}\right)$$

■

<u>Lm</u> 1.2.12.

$$0 \leqslant \mathsf{P}(A) \leqslant 1$$

□ $\mathsf{P}(A) \geqslant 0$ по первой аксиоме вероятности. Далее по 1.2.11 имеем, что $\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}\left(\overline{A}\right)$. Т.к. $\mathsf{P}\left(\overline{A}\right) \geqslant 0$, то $\mathsf{P}(A) \leqslant 1$. ■

Аксиома непрерывности

Пусть имеется убывающая цепочка событий $A_1 \supset A_2 \supset \ldots A_n \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$. Тогда $\mathsf{P}(A_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Замечание 1.2.13. Смысл аксиомы непрерывности заключается в том, что при непрерывном изменении области $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ соответствующая вероятность $\mathsf{P}(A)$ также должна изменяться непрерывно.

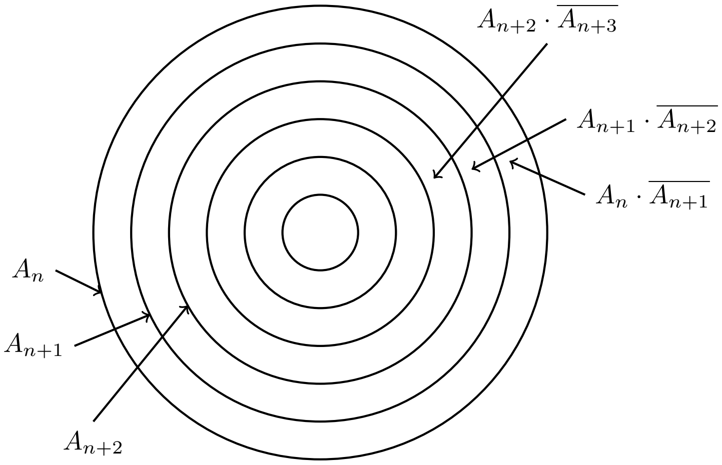


Рис. 1.2.14: Иллюстрация к 1.2.15

Теорема 1.2.15. Аксиома непрерывности следует из аксиомы счетной аддитивности.

□ Изобразим события $A_1, A_2, \ldots$ графически (рис. 1.2.14). Выразим A_n согласно полученному рисунку.

$$A_n = \underbrace{\textstyle\sum_{i=n}^{\infty} A_i \cdot \overline{A_{i+1}}}_{\text{кольца}} + \underbrace{\textstyle\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i}_{\text{«сердцевина»}} \tag{1}$$

Далее заметим, что

$$\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = A_n \cap \bigcap_{i=n+1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap \bigcap_{i=n+1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \xlongequal{\text{усл}} \varnothing \tag{2}$$

Подставим (2) в (1) и получим, что

$$\begin{gathered} A_n = \sum_{i=n}^{\infty} A_i \cdot \overline{A_{i+1}} \\ A_1 = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot \overline{A_{i+1}} = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \overline{A_{i+1}} + \underbrace{\textstyle\sum_{i=n}^{\infty} A_i \cdot \overline{A_{i+1}}}_{A_n} \end{gathered} \tag{3}$$

Далее воспользуемся аксиомой счетной аддитивности.

$$\mathsf{P}(A_1) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\left(A_i \cdot \overline{A_{i+1}}\right) + \mathsf{P}(A_n) = \underbrace{\textstyle\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\left(A_i \cdot \overline{A_{i+1}}\right)}_{S} \tag{4}$$

Получаем числовой ряд S, который будет сходиться, т.е. его сумма равна $\mathsf{P}(A_1)$, которая принадлежит отрезку $[0;1]$. Тогда $\mathsf{P}(A_n)$ это «хвост» ряда. Т.к. ряд сходится, то его хвост стремится к нулю при $n \to \infty$. Итого $\mathsf{P}(A_n) \to 0$ при $n \to \infty$. ■

Замечание 1.2.16. Можно доказать, что счетная аддитивность следует из конечной аддитивности и аксиомы непрерывности.

Свойства операций сложения и умножения

Свойство дистрибутивности $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$. Если события A и B несовместны, то $\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$ (это частный случай аксиомы 2°).

<u>Lm</u> 1.2.17. В общем случае (если про совместность событий A и B ничего не известно) имеем формулу

$$\mathsf{P}(A+B)=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B)-\mathsf{P}(A\cdot B)$$

□ Т.к. $A+B=A\cdot\overline{B}+A\cdot B+\overline{A}\cdot B$, то по второй аксиоме

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A+B)&=\mathsf{P}\left(A\cdot\overline{B}\right)+\mathsf{P}(A\cdot B)+\mathsf{P}\left(\overline{A}\cdot B\right)\\&=\underbrace{\left(\mathsf{P}\left(A\cdot\overline{B}\right)+\mathsf{P}(A\cdot B)\right)}_{\mathsf{P}(A)}+\underbrace{\left(\mathsf{P}\left(\overline{A}\cdot B\right)+\mathsf{P}(A\cdot B)\right)}_{\mathsf{P}(B)}-\mathsf{P}(A\cdot B)\\&=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B)-\mathsf{P}(A\cdot B)\end{aligned}$$

■

Пример 1.2.18. Из колоды в 36 карт достали одну карту. Какова вероятность того, что это будет дама или пика?
Решение: пусть событие D — «выпала дама», а событие S — «выпала пика». Обозначив A искомое событие, имеем

$$\mathsf{P}(A)=\mathsf{P}(D)+\mathsf{P}(S)-\mathsf{P}(D\cdot S)=\frac{4}{36}+\frac{9}{36}-\frac{1}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

При $n=3$ формула усложняется.

$$\mathsf{P}(A_1+A_2+A_3)=\mathsf{P}(A_1)+\mathsf{P}(A_2)+\mathsf{P}(A_3)-\mathsf{P}(A_1\cdot A_2)-\mathsf{P}(A_1\cdot A_3)-\mathsf{P}(A_2\cdot A_3)+\mathsf{P}(A_1\cdot A_2\cdot A_3)$$

В общем же случае получаем следующую формулу

$$\mathsf{P}(A_1+A_2+\ldots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(A_i)-\sum_{i<j}\mathsf{P}(A_i\cdot A_j)+\sum_{i<j<k}\mathsf{P}(A_i\cdot A_j\cdot A_k)-\ldots+(-1)^{n-1}\mathsf{P}(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)$$

Пример 1.2.19. В n конвертов раскладываются n писем. Какова вероятность того, что хотя бы одно письмо попадет в свой конверт? Куда стремится эта вероятность при $n\to\infty$.
Решение: пусть A_i — i-тое письмо в своем конверте, а событие A — хотя бы одно письмо в своем конверте. Тогда $A=A_1+\ldots+A_n$. Применим общую формулу для вероятности суммы. Сначала вычислим вероятности пар, троек и т.д.

$$\mathsf{P}(A_i)=\frac{1}{n}\qquad\mathsf{P}(A_i\cdot A_j)=\frac{1}{A_n^2}\qquad\mathsf{P}(A_i\cdot A_j\cdot A_k)=\frac{1}{A_n^3}\qquad\mathsf{P}(A_1\cdot\ldots\cdot A_n)=\frac{1}{A_n^n}=\frac{1}{n!}$$

Далее вычислим число пар, троек и т.д.

$$\mathsf{P}(A_i)\to n=C_n^1\qquad\mathsf{P}(A_i\cdot A_j)\to C_n^2\qquad\mathsf{P}(A_i\cdot A_j\cdot A_k)\to C_n^3$$

Подставим это в формулу.

$$\mathsf{P}(A)=n\cdot\frac{1}{n}-C_n^2\cdot\frac{1}{A_n^2}+C_n^3\cdot\frac{1}{A_n^3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

С помощью разложения в ряд Тейлора функции e^{-1} можно показать, что полученная сумма будет примерно равна $1-e^{-1}\approx 0.63$.

Независимые события

Под независимыми событиями логично понимать события, не связанные причинно-следственной связью, т.е. факт наступления одного события не влияет на оценку вероятности второго события.
Рассмотрим это на примере классической вероятности. Пусть дано Ω — пространство элементарных исходов, и два события $|A|=m_1$ и $|B|=m_2$. Проведем пару независимых испытаний, тогда получим пространство элементарных исходов $\Omega\times\Omega$, $|\Omega\times\Omega|=n^2$ и $|A\cdot B|=m_1\cdot m_2$. Значит

$$\mathsf{P}(A\cdot B)=\frac{m_1\cdot m_2}{n}=\frac{m_1}{n}\cdot\frac{m_2}{n}=\mathsf{P}(A)\cdot\mathsf{P}(B)$$

Def 1.2.20. События A и B называются независимыми, если $\mathsf{P}(A\cdot B)=\mathsf{P}(A)\cdot\mathsf{P}(B)$.

<u>Lm</u> 1.2.21. Если A и B независимы, то A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы.

□ Т.к. $A=A\cdot(B+\overline{B})=A\cdot B+A\cdot\overline{B}$, то

$$\mathsf{P}(A)=\mathsf{P}(A\cdot B)+\mathsf{P}\left(A\cdot\overline{B}\right)\Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(A\cdot\overline{B}\right)&=\mathsf{P}(A)-\mathsf{P}(A\cdot B)\\&=\mathsf{P}(A)-\mathsf{P}(A)\cdot\mathsf{P}(B)\\&=\mathsf{P}(A)(1-\mathsf{P}(B))\\&=\mathsf{P}(A)\cdot\mathsf{P}\left(\overline{B}\right)\end{aligned}$$

Таким образом события A и $\overline{B}$ независимы. Остальные свойства доказываются аналогично. ■

Def 1.2.22. События $A_1, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если для любого набора номеров вероятность произведения событий с этими номерами равняется произведению отдельных вероятностей.

Замечание 1.2.23. Из независимости в совокупности при $k = 2$ следует попарная независимость. Обратное в общем случае неверно.

Пример 1.2.24. Три грани правильного тетраэдра раскрашены в красный, синий, зеленый цвета, а четвертая грань — во все эти три цвета. Пусть A — «выпала грань с красным цветом», B — «выпала грань с синим цветом» и C — «выпала грань с зеленым цветом».

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\mathsf{P}(A \cdot B) = \mathsf{P}(A \cdot C) = \mathsf{P}(B \cdot C) = \frac{1}{4}$$
$$\mathsf{P}(A \cdot B) = \mathsf{P}(A \cdot C) = \mathsf{P}(B \cdot C) = \frac{1}{4}$$

Т.к. $\mathsf{P}(A \cdot B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$, то A и B независимы. Аналогично попарно независимы A и C, B и C, т.е. все события попарно независимы.

$$\mathsf{P}(A \cdot B \cdot C) = \frac{1}{4} \neq \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B) \cdot \mathsf{P}(C) = \frac{1}{8}$$

Т.е. события A, B и C не являются независимыми в совокупности.

Замечание 1.2.25. В дальнейшем под «независимыми событиями» понимаем независимые в совокупности события.

Пример 1.2.26. Какова вероятность того, что при четырех бросаниях кости выпадет хотя бы одна шестерка.
Решение: пусть событие A_i — на i-том броске $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ выпала шестерка. Обозначим B событие «выпала хотя бы одна шестерка», тогда $B = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$. Получаем, что $\overline{B}$ это событие «не выпала ни одна шестерка», тогда $\overline{B} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}$. Т.к. броски кубиков независимые, то

$$\mathsf{P}\left(\overline{B}\right) = \mathsf{P}\left(\overline{A_1}\right) \cdot \mathsf{P}\left(\overline{A_2}\right) \cdot \mathsf{P}\left(\overline{A_3}\right) \cdot \mathsf{P}\left(\overline{A_4}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.48$$

Значит, $\mathsf{P}(B) = 1 - \mathsf{P}\left(\overline{B}\right) \approx 0.52$.