MA Eχ 02

isagila

Собрано 12.06.2023 в 23:50

Содержание

1. Интегрирование функции одной переменной

1.1. Определение и свойства неопределенного интеграла.

Def 1.1.1. Кусочная дифференцируемая функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Теорема 1.1.2. Разность двух первообразных для одной и той же функции — константа.

Доказательство. Пусть дана функция $f(x)$ и две её первообразные $F_1(x)$, $F_2(x)$. Обозначим из разность как $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Производная этой функции будет равна $\varphi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Из множества дифференцируемости $F_1(x)$ и $F_2(x)$ выберем наименьшее и выделим в нем отрезок $[a; x]$. По т. Лагранжа:

$$\exists \xi \in (a; x) \colon \varphi'(\xi) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}$$

Т.к. $\forall \xi \colon \varphi'(\xi) = 0$, то $\varphi(x) - \varphi(a) = 0$, т.е. $\varphi(x) = \varphi(a)$. Т.к. отрезок произвольный, то это значения функции $\varphi(x)$ равны во всех точках, т.е. она константа. ■

Следствие 1.1.3. Первообразные для $f(x)$ составляют множество функций вида $\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$, где $F(x)$ это какая-либо первообразная.

Def 1.1.4. Семейство первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ по аргументу x.

Замечание 1.1.5. О существовании первообразной

Не для каждой функции существует первообразная, но для каждой непрерывной на отрезке. Даже если первообразная существует, то она не всегда выражается в элементарных функциях, например, $\int e^{-x^2} \mathrm{d}x$.

Далее рассмотрим некоторые свойства неопределенного интеграла.

Lm 1.1.6.

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$$

Доказательство.

$$\mathrm{d}F(x) = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x \implies \int \mathrm{d}F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}F(x) + C$$

■

Lm 1.1.7.

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$$

Доказательство.

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

■

Lm 1.1.8. Линейность

$$\int \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$$

Доказательство.

$$\int \alpha f(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}(\alpha F(x)) = \alpha F(x) + C$$

При первым переходе используется свойство линейности дифференциала, а при втором — 1.1.6. Доказательство для суммы функций аналогично. ■

1.2. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям.

Замечание 1.2.1. Интеграл сохраняет инвариантность своей формы, т.е.

$$\int f(\clubsuit)\mathrm{d}\clubsuit = F(\clubsuit) + C$$

Теорема 1.2.2. О замене производной в неопределенном интеграле
Если $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ обратимая и дифференцируемая функция, то

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Доказательство. Возьмем производные от обоих частей:

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'_x = f(x)$$

$$\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\right)'_x = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\right)'_t \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \overset{1.1.7}{=\!=} f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x)$$

■

Замечание 1.2.3. Формула работает в обе стороны:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \overset{\sqrt{x}=t}{=\!=} \int \frac{e^t}{t}2t\mathrm{d}t = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$$\int e^{x^2}\underbrace{2x\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}x^2} \overset{x^2=t}{=\!=} \int e^t\mathrm{d}t = e^t + C = e^{x^2} + C$$

Теорема 1.2.4. Интегрирование по частям

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

Доказательство. Рассмотрим равенство $(uv)' = u'v + uv'$ и проинтегрируем обе его части:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\int (uv)'\mathrm{d}x = \int u'v + uv'\mathrm{d}x$$

$$uv = \int u'v\mathrm{d}x + \int uv'\mathrm{d}x \qquad \text{Линейность интеграла (1.1.8)}$$

$$uv = \int v\mathrm{d}u + \int u\mathrm{d}v \qquad \text{Внесение под дифференциал (1.2.2)}$$

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int u\mathrm{d}v$$

■

Замечание 1.2.5. Интегрирование по частям используется если $\int v\mathrm{d}u$ вычисляется проще, чем интеграл $\int u\mathrm{d}v$. В качестве функции u выбирают ту, которая упрощается при дифференцировании.

1.3. Интегрирование рациональных функций (общая схема). Разложение дроби на простейшие.

Выделим 4 типа простейших дробей:

$$(I): \quad \frac{A}{x-a} \qquad (II): \quad \frac{A}{(x-a)^2} \qquad (III): \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \qquad (IV): \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$

где $(x^2 + px + q)$ неразложимый на множители многочлен, а A, M, N — неопределенные коэффициенты.

Метод неопределенных коэффициентов:

Пусть дана дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(n)}$, в которой $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ это многочлены с вещественными коэффициентами. Требуется разложить её на простейшие.

1. Если $m \geqslant n$, то необходимо выделить целую часть. Далее будем считать, что $m < n$.
2. Раскладываем знаменатель на множители, т.е. приводим его к виду

$$P_n = a_0(x-x_1)^{b_1}\dots(x-x_t)^{b_t}(x^2+p_1x+q_1)^{c_1}\dots(x^2+p_rx+q_r)^{c_r}$$

3. Для каждой скобки в знаменателе записываем некоторую дробь по следующему правилу:

$$
\begin{aligned}
(x-x_i) &\to & \frac{A}{x-x_i}\\
(x-x_i)^k &\to & \frac{A}{x-x_i}+\ldots+\frac{A}{(x-x_i)^k}\\
(x^2+p_ix+q_i) &\to & \frac{Ax+B}{x^2+p_ix+q_i}\\
(x^2+p_ix+q_i)^k &\to & \frac{Ax+B}{x^2+p_ix+q_i}+\ldots+\frac{Ax+B}{(x^2+p_ix+q_i)^k}
\end{aligned}
$$

У каждой скобки будет свой набор констант.

4. Получаем уравнение относительно коэффициентов $A, B\ldots$, которые находятся в числителе полученных дробей.
5. Приводит полученную дробь к общему знаменателю и приравниваем её к исходной дроби.
6. Т.к. знаменатели полученных дробей равны, то должны быть равны и числители. Пользуемся тем, что два полинома равны когда равны все коэффициенты перед одинаковыми степенями. Получаем систему уравнений (по количеству коэффициентов).
7. Решаем систему, находим коэффициенты. Подставляем их в разложение исходной дроби на сумму простейших дробей.

Теперь интегрирование рациональных дробей свелось к тому, чтобы разложить их на простейшие, а потом, пользуясь линейностью интеграла (1.1.8), проинтегрировать каждую из дробей по-отдельности. Подробнее об интегрировании простейших дробей написано в вопросе **1.4.**

1.4. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование простейших дробей 1,2,3.

- Интегрирование простейших дробей I-ого типа
$$\int\frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\int\frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a} = \ln|x-a|+C$$
- Интегрирование простейших дробей II-ого типа
$$\int\frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x = A\int(x-a)^{-k}\,\mathrm{d}(x-a) = \frac{A}{1-k}\cdot(x-a)^{1-k} = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}$$
- Интегрирование простейших дробей III-его типа
$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x \tag{1}$$
Попытаемся внести числитель под дифференциал:
$$\mathrm{d}\big(x^2+px+q\big) = (2x+p)\mathrm{d}x$$
$$(Mx+N) = \frac{M}{2}\left(2x+\frac{2N}{M}\right) = \frac{M}{2}\left(2x+p+\frac{2N}{M}-p\right) = \frac{M}{2}(2x+p)+\underbrace{\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}_{h}$$
Подставим это в (1):
$$\int\frac{(2x+p)+h}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x+\int\frac{h}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$
Далее вычислим каждый из интегралов по-отдельности:
$$\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{d}\big(x^2+px+q\big)}{x^2+px+q} = \ln\left|x^2+px+q\right|+C$$
$$\int\frac{h}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = h\cdot\int\frac{1}{(x+{}^p\!/\!_2)^2+\underbrace{q-({}^p\!/\!_2)^2}_{g}}\mathrm{d}x = \frac{h}{g}\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{x+{}^p\!/\!_2}{g}\right)+C$$
Подставим полученные выражения в исходный интеграл (1):
$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{h}{g}\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{x+{}^p\!/\!_2}{g}\right)+C$$
$$h=\left(N-\frac{Mp}{2}\right), g = q-\left(\frac{p}{2}\right)^2$$
- Интегрирование простейших дробей IV-его типа
Рассмотрим на примере:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x \tag{1}$$

Первый из полученных интегралов мы уже вычислить, это простейшая дробь III-ого типа. Таким образом этот интеграл будет равен $\operatorname{arctg} x + C$. Далее работаем со вторым интегралом:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{x\,\mathrm{d}\big(x^2+1\big)}{(x^2+1)^2} = \left[\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)\right] = -\frac{1}{2}\cdot\int x\cdot\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \tag{2}$$

Полученный интеграл возьмем по частям:

$$\int \underbrace{x}_{u}\,\mathrm{d}\underbrace{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}_{v} = \frac{x}{x^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x + C \tag{3}$$

Подставим (3) в (2), а полученное выражение в исходный интеграл (1):

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \\ \operatorname{arctg} x &+ \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x\right) + C = \\ &\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C\end{aligned}$$

Замечание 1.4.1. В случаях с более высокой степенью каждая подобная итерация будет приводить к уменьшению степени знаменателя на единицу.

TODO: И вообще это рекуррентные интегралы, которые считаются последовательно от 1-ой степени до данной.

1.5. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Замечание 1.5.1. Всякая рациональная дробь интегрируемая, поэтому можно попытаться с помощью замены свести функции другого вида к рациональным дробям.

Если требуется вычислить интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, где R это некоторая *рациональная* функция, то можно применить универсальную тригонометрическую подстановку:

$$x = 2\operatorname{arctg} t \iff t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

Тогда составляющие интеграла преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} &= \frac{2\sin{}^x\!/_2\cos{}^x\!/_2}{\sin^2{}^x\!/_2+\cos^2{}^x\!/_2} = \frac{2\operatorname{tg}{}^x\!/_2}{\operatorname{tg}^2{}^x\!/_2+1} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} &= \frac{\cos^2{}^x\!/_2-\sin^2{}^x\!/_2}{\sin^2{}^x\!/_2+\cos^2{}^x\!/_2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2{}^x\!/_2}{\operatorname{tg}^2{}^x\!/_2+1} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \mathrm{d}x &= \mathrm{d}(2\operatorname{arctg} t) = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в исходный интеграл, получаем:

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x \overset{\text{УТП}}{=\!=} \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

1.6. Интегрирование тригонометрических функций вида $R(\sin^m x, \cos^n x)$, $R(\sin mx, \cos nx)$.

Рассмотрим интегралы вида $\int \sin^m x\cos^m x\mathrm{d}x$

1. n или m нечетное
   Пусть m нечетное, тогда $m = 2k+1$. Подставим это в исходный интеграл:
   $$\int \sin^m x\cos^m \mathrm{d}x = \int \sin^m x\cos^{2k}\cos x\mathrm{d}x = \int \sin^m x(1-\sin^2 x)^k\,\mathrm{d}(\sin x) \overset{t=\sin x}{=\!=\!=} \int t^m x(1-t^2)^k\mathrm{d}t$$
   Получили интеграл от полинома $\implies$ умеем его решать.
2. n и m четные
   Обозначим $n = 2p$, $m = 2q$, тогда:
   $$\int \sin^m x\cos^m \mathrm{d}x = \int (\sin^2 x)^p(\cos^2 x)^q\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^p\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^q\mathrm{d}x$$
   Далее раскрываем скобки и упрощаем. Получится либо первый случай (с нечетной степенью), либо второй, но с меньшей степенью.

Интегралы видов

- $\int \sin mx \sin nx \mathrm{d}x$
- $\int \sin mx \cos nx \mathrm{d}x$
- $\int \cos mx \cos nx \mathrm{d}x$

решаются при помощи использования тригонометрических формул, которые сводят произведение к сумме/разности:

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\Big(\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)\Big)$$
$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\Big(\sin((m-n)x) + \sin((m+n)x)\Big)$$
$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\Big(\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)\Big)$$

TODO: На лекции были интегралы вида $\int \sin^m x \cos^m \mathrm{d}x$, а не $R(\sin^m x, \cos^n x)$.

1.7. Интегрирование некоторых иррациональных функций, метод тригонометрической подстановки.

- Интегралы вида $\int R(\sqrt{x^2 \pm 1}, x)\mathrm{d}x$ решаются с помощью замены x на гиперболическую функцию:

$$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \qquad \cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

Замечание 1.7.1. Данные функции называются гиперболическим синусом и гиперболическим косинусом соответственно.

Lm 1.7.2. Основное гиперболическое тождество

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$$

Доказательство.

$$\cosh^2 - \sinh^2 = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2u} + 2 + e^{-2u} - e^{2u} + 2 - e^{-2u}\right) = 1$$

■

Замечание 1.7.3. Заметим, что

$$\ln|\sinh + \cosh| = \ln\left|\frac{e^u - e^{-u}}{2} + \frac{e^u - e^{-u}}{2}\right| = \ln e^u = u$$

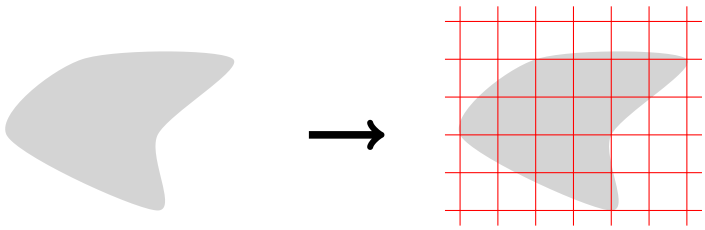
Пример:
Вычислим 'длинный' логарифм:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \begin{bmatrix} x = \sinh u \implies 1 + x^2 = \cosh^2 u \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sinh u) = \cosh u \mathrm{d}u \\ u = \ln\left|\underbrace{x}_{\sinh u} + \underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{\cosh u}\right| \quad (1.7.3) \end{bmatrix} = \int \frac{\cosh u}{\cosh u}\mathrm{d}u = u + C = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C$$

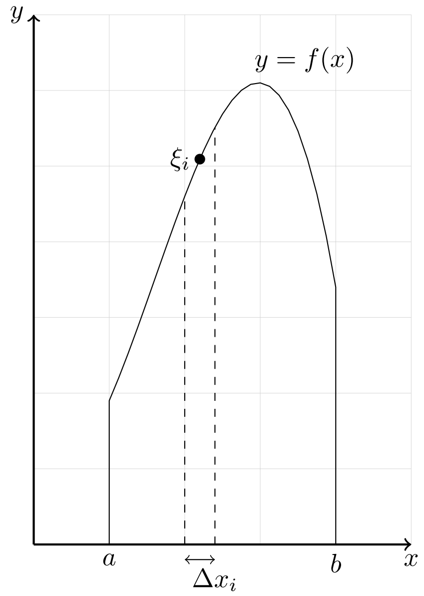
- Интегралы вида $\int R(\sqrt{1-x^2}, x)\mathrm{d}x$ решаются с помощью замены x на синус или косинус.
- Интегралы вида $\int R(\sqrt[k_1]{x}, \dots, \sqrt[k_n]{x})\mathrm{d}x$ решаются с помощью замены $t = \sqrt[K]{x}$, где K это НОД для $k_1, \dots, k_n$.
- Интегралы вида $\int R(\sqrt{ax+b}, x)\mathrm{d}x$ решаются с помощью замены $t = \sqrt{ax+b}$. При этом $x = \frac{t^2-b}{a}$, $\mathrm{d}x = \frac{2t}{a}\mathrm{d}t$.

1.8. Определенный интеграл. Определение, свойства линейности и аддитивности.

Постановка задачи: требуется найти площадь криволинейной фигуры. Разобьем фигуру на квадраты и найдем площадь каждого из них. После это сложим полученные площади.



Упростим задачу: пусть нужно посчитать площадь криволинейной трапеции.



1. Разбиение области $[a; b]$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ назовем частичным, если длину обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Разбиение (дробление) обозначим $T = \{x_i\}_{i=0}^{n}$. Введем понятие *ранга* дробления τ: $\tau = \max \Delta x_i$.

2. Выберем среднюю точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Тогда $f(\xi_i)$ это высота элементарного прямоугольника. Значит площадь элементарного прямоугольника будет равна $S_e = \Delta x_i f(\xi_i)$.

3. Просуммируем площади всех элементарных прямоугольников: $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\xi_i)$. Данная сумма называется интегральной суммой Римана.

4. Возьмем предел при $n \to \infty$ и $\tau \to 0$:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\xi_i) \tag{1}$$

Def 1.8.1. Если полученный предел интегральных сумм (1) существует, конечен, **не зависит дробления и выбора средней точки**,то он называется определенным интегралом.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\xi_i)$$

a, b называются пределами интегрирования, $f(x)$ — подынтегральной функцией, а $\mathrm{d}x$ — дифференциалом переменной (или элементом длины).

Замечание 1.8.2. В определении выше $a < b$. Доопределим для случаев $a = b$ и $a > b$:

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

Замечание 1.8.3. Интеграл Римана определен лдя кусочно-непрерывных (т.е. имеющих конечное число разрывов) функций.

Т.к. интеграл является пределом сумм, то его свойства вытекают из свойств пределов:

1. Линейность

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

2. Аддитивность

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Замечание 1.8.4. Свойство аддитивности выполняется даже в случае, если $c \notin [a; b]$. Это легко проверить пользуясь свойством 1.8.2.

1.9. Геометрический смысл определенного интеграла. Оценка определенного интеграла. Теорема о среднем.

Геометрический смысл определенного интеграла следует из его построения: определенный интеграл по модулю равен площади криволинейной трапеции.

Lm 1.9.1. Пусть $f \in C_{[a;b]}$ и определен $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. m, M — наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Тогда

$$(b-a)m \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)M$$

Доказательство.
$$\forall x \in [a;b]\colon m \leqslant f(x) \leqslant M \implies \forall \xi_i \in [a;b]\colon m \leqslant f(\xi_i) \leqslant M$$
$$m\Delta x_i \leqslant f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant M\Delta x_i$$
$$m\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant M\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$$
$$m\lim_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \leqslant \lim_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant M\lim_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$$
$$(b-a)m \leqslant \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)M$$
■

<u>Теорема</u> 1.9.2. Теорема Лагранжа о среднем (в интегральной форме)

Пусть $f \in C_{[a;b]}$ и определен $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Тогда
$$\exists \xi \in (a;b)\colon \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 1.9.1:
$$(b-a)m \leqslant \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)M \implies m \leqslant \frac{1}{b-a}\cdot\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M$$
По т. Больцано-Коши функция $f(x)$ принимает все значения от минимального m до максимального M. Значит $\exists \xi \in (a;b)$, что
$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\cdot\int\limits_a^b f(x) \implies \int\limits_a^b f(x) = f(\xi)(b-a)$$
■

Замечание 1.9.3. Геометрический смысл теоремы Лагранжа заключается в том, что на промежутке $(a;b)$ всегда найдется такая точка ξ, что площадь криволинейной трапеции будет в точности равна площади прямоугольника со сторонами $(b-a)$ и $(f(\xi)-f(m))$.

<u>Lm</u> 1.9.4. Если $f(x), g(x) \in C_{[a;b]}$, определены $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ и при этом $\forall x \in [a;b]\colon f(x) \geqslant g(x)$, то
$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

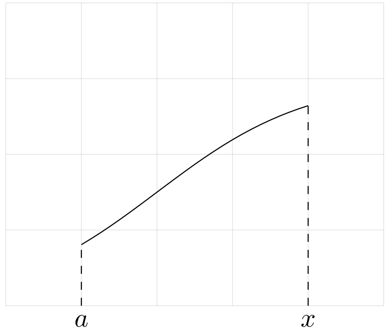
Доказательство. Рассмотрим $h(x) = f(x)-g(x)$. Она будет неотрицательная на отрезке $[a;b]$, значит $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$. Далее пользуемся аддитивностью и получаем искомое неравенство. ■

<u>Lm</u> 1.9.5. Пусть $f \in C_{[a;b]}$ и определен $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Тогда
$$\left|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

Доказательство. Т.к. определенный интеграл это предел интегральных сумм, то можно воспользоваться предельных переходом, а затем свойством о том, что модуль суммы не превосходит сумму модулей. ■

Замечание 1.9.6. Выкалывание из отрезка $[a;b]$ конечного числа точек не меняет значение интеграла.

1.10. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Барроу.



Def 1.10.1. Интегралом с переменных верхним пределом называется

$$\int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

где x — переменный верхний предел.

Замечание 1.10.2. $\forall x \in [a;+\infty]$ соответствует определенное значение $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, т.е. определена функция верхнего предела, которая геометрически является площадью криволинейной трапеции с подвижным правым краем.

Теорема 1.10.3. Теорема Барроу

Пусть $f \in C_{[a;b]}$ и определен $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. Тогда $\Phi'(x) = f(x)$.

Доказательство. Раскроем производную $\Phi'(x)$ по определению, после чего воспользуемся линейностью интеграла:

$$\Phi'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}$$

Далее по т. Лагранжа (1.9.2) $\exists \xi \in (a;b)$ такая, что:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \left[\left.\begin{matrix}\Delta x \to 0\\ \xi \in (x, x+\Delta x)\end{matrix}\right\} \implies \xi \to x\right] = f(x)$$

■

1.11. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.

Теорема 1.11.1. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть $f(x) \in C_{[a;b]}$, определен $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ и $F(x)$ это некоторая первообразная для $f(x)$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, где $x \in [a;b]$. Тогда по т. Барроу (1.10.3) $\Phi(x) = F(x)+C$.

Найдем значение функции $\Phi(x)$ в точке a:

$$\left.\begin{matrix}\Phi(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0\\ \Phi(a) = F(a) + C\end{matrix}\right\} \implies C = -F(a)$$

Теперь найдем значение функции $\Phi(x)$ в точке b:

$$\left.\begin{matrix}\Phi(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\\ \Phi(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)\end{matrix}\right\} \implies \int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

■

Замечание 1.11.2. Формула Ньютона-Лейбница работает в тех случаях, когда можно найти $F(x)$ или хотя бы её значения на концах отрезка $[a;b]$.

Замечание 1.11.3. Если функция $f(x)$ кусочно заданная, то используем свойство аддитивности и разбиваем отрезок на части.

1.12. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям.

Замена в определенном интеграле выполняется также, как и в неопределенном за исключением смены пределов интегрирования. Более формально:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

$$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$$

Интегрирование по частям для определенных интегралов выполняется также, как и для неопределенных:

$$\int\limits_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\mathrm{d}u$$

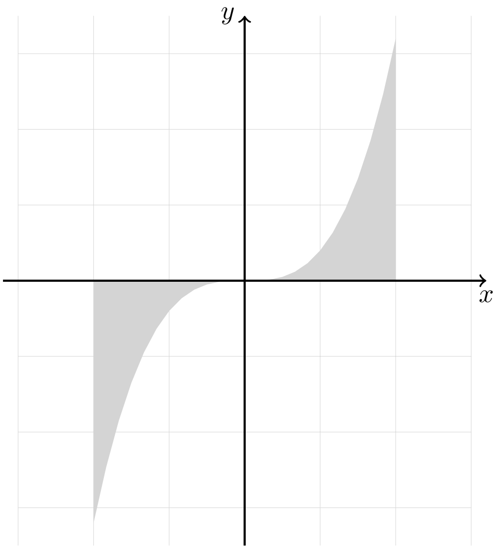
Стоит отметить несколько свойств определенных интегралов для четных и нечетных функций на симметричном промежутке

<u>Lm</u> 1.12.1. Если $f(x)$ нечетная функция, то

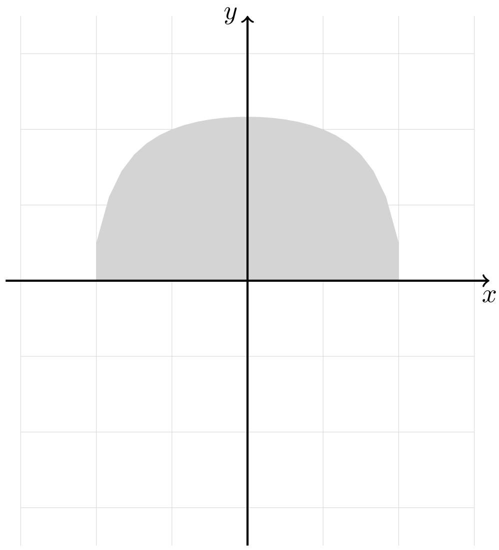
$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

<u>Lm</u> 1.12.2. Если $f(x)$ четная функция, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

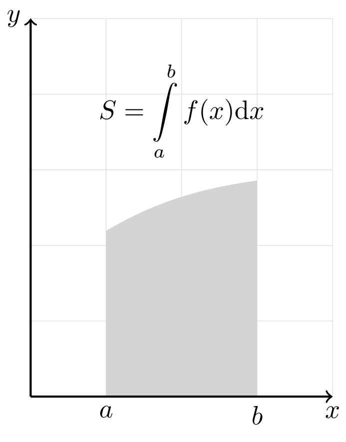


(a) $f(-x) = -f(x)$

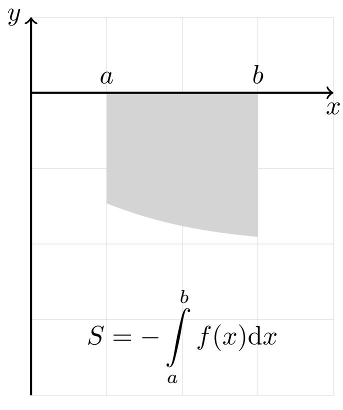


(b) $f(-x) = f(x)$

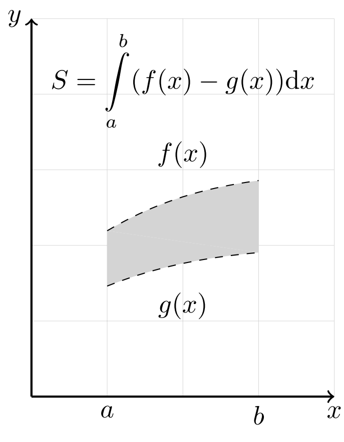
1.13. Приложения определенного интеграла: вычисление площадей в декартовых координатах.



(a) $f(x) \geqslant 0$



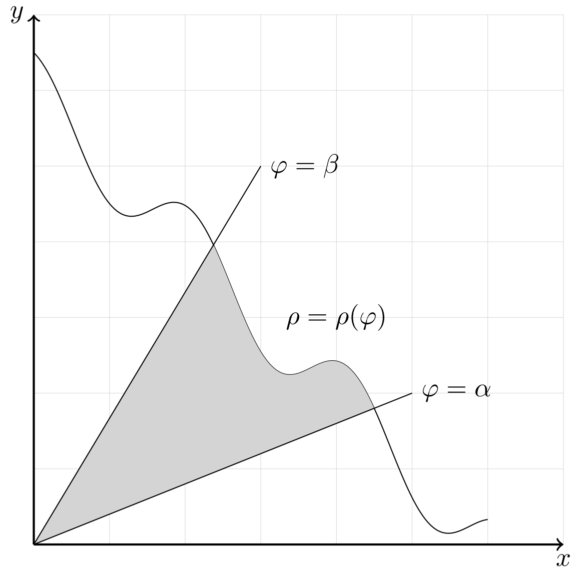
(b) $f(x) \leqslant 0$



(c) $f(x) \geqslant g(x)$

Замечание 1.13.1. Для случая (c) расположение функций $f(x)$, $g(x)$ относительно нуля не важно. Важно лишь, чтобы $\forall x \in [a; b]\colon f(x) \geqslant g(x)$.

1.14. Приложения определенного интеграла: вычисление площади криволинейного сектора в полярных координатах.



Построим интеграл:

1. Дробление отрезка $[\alpha, \beta]$ на подотрезки $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$, $\tau = \max \Delta\varphi_i$.
2. В каждом отрезке выбираем среднюю точку ξ_i. Ищем $\rho(\xi_i)$, приближаем площадь элементарного сектора площадью кругового.
$$S_{sec} = \frac{\pi\rho^2(\xi_i)}{2\pi} \cdot \Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\rho^2(\xi_i)\Delta\varphi_i$$
3. Площадь это предел интегральных сумм
$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\rho^2(\xi_i)\Delta\varphi_i$$
4. Переход к интегралу
$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

Замечание 1.14.1. Если кривая задана параметрически $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, то площадь можно вычислить по формуле:

$$S = \int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$$
$$a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$$

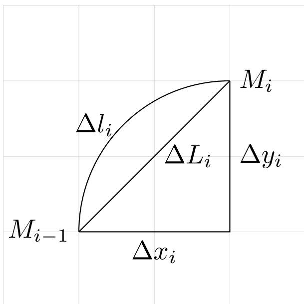
1.15. Приложения определенного интеграла: вычисление длины дуги кривой (вывод формулы).

Пусть дана гладкая (без самопересечений, разрывов и циклов) дуга $\breve{AB}$ задаваемая уравнением $y = y(x)$, где $y(x)$ функция, дифференцируемая на $[a; b]$. Найдем её длину.

Построим интеграл:

1. Дробление $\breve{AB}$ такими M_i, что $AM_0 \dots M_nB \approx \breve{AB}$.
2. Стянем точки M_{i-1} и M_i хордой и получим координатный треугольник.

$$\Delta l_i \approx \Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i$$



3. Заметим, что $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$ это отношение конечных приращений, поэтому можно применить т. Лагранжа:
$$\exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \colon \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(\xi_i)$$
$$\Delta L_i = \sqrt{1 + y'(\xi_i)^2}\Delta x_i$$
4. Составим предел интегральных сумм и перейдем к интегралу:
$$L = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + y'(\xi_i)^2}\Delta x_i \implies L = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + y'(x)^2}\mathrm{d}x$$

Замечание 1.15.1. Выражение $\mathrm{d}l = \sqrt{1 + y'(x)^2}\mathrm{d}x$ называется дифференциалом дуги.

1.16. Приложения определенного интеграла: вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически.

Рассмотрим формулу $L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\mathrm{d}x$ при условии, что кривая задана параметрически. Получим:

$$
\begin{aligned}
x = \varphi(t), y = \psi(t) \\
\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t \\
a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta), t \in [\alpha; \beta] \\
y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}
\end{aligned}
$$

Подставим это в исходную формулу:

$$
L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\mathrm{d}t
$$

$$
a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)
$$

1.17. Приложения определенного интеграла: вычисление объемов тел с известными площадями сечений и тел вращения.

Пусть дано некоторое тело и известны площади его сечений в плоскости $\perp Ox$, т.е. известна функция $S(x)$, определяющая площадь сечения в зависимости от x. Построим интеграл:

1. Дробление: отрезок $[a; b]$, где a и b это крайние точки тела, делится на подотрезки $[x_{i-1}, x_i]$. Через x_i проводится плоскость $\perp Ox$ и выделяется элементарный слой.
2. Приближаем объем этого слоя объемом цилиндра с основанием $S(\xi_i)$, где ξ_i это некоторая средняя точка из отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.
3. Составляем предел интегральных сумм и переходим к интегралу.

$$
V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^n S(\xi_i)\Delta x_i \implies V = \int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x
$$

Замечание 1.17.1. Сечения обязательно должны быть $\perp Ox$, в противном случае получится объем, умноженный на коэффициент наклона сечения по отношению к оси Ox.

Рассмотрим нахождение объема тел вращения.

Подставим в полученную выше формулу $S_{sec} = S_\circ = \pi f(x)^2$. Получим, что объем тела вращения равен:

$$
V = \pi \int\limits_a^b f(x)^2\mathrm{d}x
$$

1.18. Несобственные интегралы 1-го рода (на неограниченном промежутке). Определение и свойства.

Def 1.18.1. Интеграл от функции на неограниченном промежутке называет несобственным интегралом 1-ого рода.

$$
\begin{aligned}
\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \overset{def}{=\!=} \lim_{\beta\to+\infty} \int\limits_a^\beta f(x)\mathrm{d}x \\
\int\limits_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x \overset{def}{=\!=} \lim_{\beta\to-\infty} \int\limits_\beta^a f(x)\mathrm{d}x \\
\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \overset{def}{=\!=} \int\limits_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,\ c \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Def 1.18.2. Если предел в определении 1.18.1 существует и конечен, то говорят, что интеграл *сходится* ($\succ$), в противном случае говорят, что интеграл *расходится* ($\prec$).

Несобственные интегралы 1-ого рода обладают теми же свойствами, что и рассмотренные ранее интегралы:

1. Линейность

$$
\int\limits_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{d}x = \lambda \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x
$$

2. Аддитивность

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

3. Сравнение

$$\forall x \in [a;+\infty] \colon f(x) \geqslant g(x) \implies \int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int\limits_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$$

Замечание 1.18.3. Если

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

и при этом один из двух полученных интегралов расходится, то расходится и изначальный интеграл.

1.19. Вычисление несобственного интеграла 1-го рода: формула Ньютона-Лейбница, интегрирование по частям, замена переменной.

Т.к. несобственный интеграл первого рода это по сути предел, то его можно вычислить с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \left(\lim_{\beta\to+\infty} F(\beta)\right) - F(a) = \lim_{\beta\to+\infty} F(x)\Big|_a^\beta$$

Интегрирование по частями и замена переменной выполняются также, как и в определенном интеграле (аккуратнее с пределами интегрирования при замене).

Замечание 1.19.1. Иногда после замены несобственный интеграл может превратиться в собственный.

1.20. Несобственные интегралы 2-го рода (от неограниченной функции). Определение, вычисление и свойства.

Def 1.20.1. Пусть $f(x) \in C_{[a;b]}$ и b это точка бесконечного разрыва ($\lim_{x\to b} f(x) = \infty$), тогда интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \overset{def}{=\!=} \lim_{\beta\to b} \int\limits_a^\beta f(x)\mathrm{d}x$$

называется несобственным интегралом 2-ого рода.

Замечание 1.20.2. Существуют также другие формы несобственных интегралов 2-ого рода:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \overset{def}{=\!=} \lim_{\alpha\to a} \int\limits_\alpha^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \overset{def}{=\!=} \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

В первом случае точкой бесконечного разрыва является точка a, а во втором — $c \in (a;b)$.

Несобственные интегралы второго рода обладают теми же свойствами (линейность, аддитивность, сравнение) и вычисляются так же, как и несобственные интегралы 1-ого рода:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to b} F(x)\Big|_a^\beta$$

1.21. Признаки сходимости несобственных интегралов: первый признак сравнения (в неравенствах).

1.22. Признаки сходимости несобственных интегралов: второй признак сравнения (предельный).

1.23. Признаки сходимости несобственных интегралов: теорема об абсолютной сходимости. Понятие условной сходимости.

1.24. Сходимость интегралов 1-го и 2-го рода от степенных функций.

2. Интегрирование функции нескольких переменных

2.1. Двойной интеграл. Определение и свойства.

2.2. Вычисление двойного интеграла. Кратный интеграл.

2.3. Определение и вычисление тройного интеграла.

2.4. Криволинейные координаты.

2.5. Замена переменных в двойном и тройном интегралах. Якобиан.

2.6. Криволинейный интеграл 1-го рода: определение, свойства, вычисление, геометрический и физический смысл.

2.7. Криволинейный интеграл 2-го рода как работа силы вдоль пути. Определение, вычисление и свойства.

2.8. Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода: формула связи.

2.9. Теорема (формула) Грина.

2.10. Интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Теорема о независимости интеграла от пути, равносильность I,II,III утверждений.

2.11. Интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Теорема о независимости интеграла от пути, равносильность III, IV утверждений.

2.12. Следствие теоремы о независимости от пути (формула Ньютона-Лейбница).

2.13. Поверхностный интеграл 1-го рода: определение, свойства, вычисление, геометрический и физический смысл.

2.14. Поверхностный интеграл 2-го рода как поток жидкости через поверхность.

2.15. Связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода.

2.16. Поверхностный интеграл 2-го рода: математическое определение, вычисление, свойства.

2.17. Теорема Гаусса-Остроградского.

2.18. Теорема Стокса.

2.19. Скалярное и векторное поля: определения, геометрические характеристики. Дифференциальные и интегральные характеристики полей (определения).

2.20. Виды векторных полей и их свойства (теоремы о поле градиента и поле вихря).

2.21. Механический смысл потока и дивергенции.

2.22. Механический смысл вихря и циркуляции.

2.23. Векторная запись теорем теории поля и их механический смысл.