LA Eχ 02

isagila

Собрано 09.06.2023 в 18:23

Содержание

1. Линейная алгебра

1.1. Евклидово пространство: определение, неравенство Коши-Буняковского. Нормированное евклидово пространство.

Def 1.1.1. Скалярным произведением называется функция двух элементов линейного пространства $x, y \in L^n$ обозначаемая $(x, y) \to \mathbb{R}$, для которой выполнены аксиомы: $\forall x, y \in L^n, \lambda \in \mathbb{C}$

1. $(x, y) = (y, x)$
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
3. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
4. $(x, x) \geqslant 0$, $(x, x) = 0 \implies x = 0$

Def 1.1.2. Линейное пространство с введенным скалярным произведением называется евклидовым пространством E^n.

Замечание 1.1.3. Если $L = C_{[a;b]}$, то скалярное произведение обычно определяется как $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$

Теорема 1.1.4. Неравенство Коши-Буняковского

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y)$$

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение:

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) \geqslant 0$$
$$(\lambda x - y, \lambda x - y) = \lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) \geqslant 0$$

Полученное выражение можно рассмотреть как квадратное уравнение относительно λ. Т.к. оно неотрицательно $\forall \lambda$, то его дискриминант будет $\leqslant 0$. Таким образом

$$4\lambda^2(x, y)^2 - 4\lambda^2(x, x)(y, y) \leqslant 0$$
$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leqslant 0$$
$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y)$$

■

Def 1.1.5. Нормой называется функция одного элемента линейного пространства $x \in L^n$, обозначаемая $\|x\|$ и определяемая аксиомами: $\forall x, y \in L^n, \lambda \in \mathbb{C}$:

1. $\|\lambda x\| = \lambda\|x\|$
2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
3. $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0 \implies x = 0$

Def 1.1.6. Евклидово пространство называется *нормированным*, если в нем определена норма.

Замечание 1.1.7. Чаще всего норма определяется как $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

1.2. Ортонормированный базис, ортогонализация базиса. Матрица Грама.

Def 1.2.8. *Углом* между двумя элементами Евклидова пространства называется

$$\cos \angle(x, y) = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Def 1.2.9. Для элемента Евклидова пространства ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю.

$$x \perp y \iff (x, y) = 0$$

Теорема 1.2.10. Во всяком E^n можно выделить ортонормированный базис размера n.

Доказательство. Пусть у нас есть базис $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Ортогонализируем его, полученный базис обозначим $E' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$. Этот базис можно нормировать и получить искомый ортонормированный базис $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

Будем добавлять векторы в базис E из базиса B по-одному:

База: начнем с одного произвольного вектора β_1. Тогда $e'_1 = \beta_1$.

Переход: пусть у нас уже выделен набор из $k-1$ ортогональных векторов $\{e'_1, \dots, e'_{k-1}\}$ и в него требуется добавить вектор β_k.

Будем искать e'_k в виде

$$e'_k = \beta_k + \lambda_1 e'_{k-1} + \lambda_2 e'_{k-2} + \ldots + \lambda_{k-1} e'_1$$

Чтобы e'_k был ортогонален остальным векторам уже построенной системы, необходимо, чтобы скалярные произведение e'_k с остальными векторами системы равнялись нулю. Рассмотрим на примере e'_1:

$$(e'_k, e'_1) = (\beta_k, e'_1) + \lambda_1(e'_{k-1}, e'_1) + \ldots + \lambda_{k-1}(e'_1, e'_1) = 0$$

Учитывая то, что построенная система ортогональна, то $(e'_i, e'_j) = 0$ $(i, j < k)$. Значит выражение выше упрощается и остается:

$$(\beta_k, e'_1) + \lambda_{k-1}(e'_1, e'_1) = 0$$
$$\lambda_{k-1} = -\frac{(\beta_k, e'_1)}{(e'_1, e'_1)}$$

Аналогично можно получить оставшиеся коэффициенты λ_i. Тогда добавляемый в систему вектор e'_k будет иметь вид:

$$e'_k = \beta_k - \frac{(\beta_k, e'_{k-1})}{(e'_{k-1}, e'_{k-1})} \cdot e'_{k-1} - \frac{(\beta_k, e'_{k-2})}{(e'_{k-2}, e'_{k-2})} \cdot e'_{k-2} - \ldots - \frac{(\beta_k, e'_1)}{(e'_1, e'_1)} \cdot e'_1$$

■

Def 1.2.11. Матрицей Грама называется матрица составленная из скалярных произведений

$$\begin{pmatrix} (e_1, e_1) & \ldots & (e_k, e_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_1, e_k) & \ldots & (e_k, e_k) \end{pmatrix}$$

Замечание 1.2.12. В ортогональном базисе матрица Грама диагональная, а в ортонормированном — единичная.

1.3. Ортогональность вектора подпространству. Ортогональное дополнение. Теорема Пифагора.

1.4. Задача о перпендикуляре.

1.5. Линейный оператор: определение, основные свойства.

Def 1.5.13. Пусть V^n, W^m линейные пространства. Отображение $\mathcal{A}\colon V^n \to W^m$, которое $\forall x \in V^n$ сопоставляет $y \in W^m$ называется линейным оператором при выполнении следующих условий: $\forall x_1, x_2 \in V^n, \lambda \in \mathbb{C}$:

1. $\mathcal{A}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}x_1 + \mathcal{A}x_2$
2. $\mathcal{A}(\lambda x_1) = \lambda(\mathcal{A}x_1)$

Замечание 1.5.14. $y = \mathcal{A}x$ означает, что y порождается применением оператора $\mathcal{A}$

Обозначим некоторые базовые свойства линейных операторов. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}\colon V^n \to W^m$ это линейные операторы, тогда определены:

1. Сумма $(\mathcal{A} + \mathcal{B})x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$
2. Умножение на число $(\lambda\mathcal{A})x = \lambda(\mathcal{A}x)$
3. Нулевой оператор $\Theta x = 0, \forall x \in V^n$
4. Противоположный оператор $-\mathcal{A} = (-1) \cdot \mathcal{A}$

Далее рассмотрим операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\colon V^n \to V^n$ действующие в одном линейном пространстве. Для таких операторов определена композиция (произведение) $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x)$. В общем случае она не коммутативна $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$.

Свойства композиции операторов:

1. $\lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A}) \cdot \mathcal{B}$
2. $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{C} + \mathcal{B} \cdot \mathcal{C}$
3. $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C}$

4. $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot C) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}$

Def 1.5.15. Композиция оператора самим с собой n раз называется n-ой степенью оператора: $\mathcal{A}^n = \underbrace{\mathcal{A} \cdot \ldots \cdot \mathcal{A}}_{n}$

Для степени оператора справедливо равенство $\mathcal{A}^{n+m} = \mathcal{A}^n \cdot \mathcal{A}^m$

1.6. Обратный оператор. Взаимно-однозначный оператор. Ядро и образ оператора. Теорема о размерностях.

Def 1.6.16. Оператор $I\colon V^n \to V^n$ называется тождественным оператором, если $Ix = x, \forall x \in V^n$.

Def 1.6.17. Пусть даны операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B}\colon V^n \to V^n$. Оператор $\mathcal{B}$ называется обратным для оператора $\mathcal{A}$, если их композиция равна тождественному оператору.

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1} \iff \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = I$$

Def 1.6.18. Оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ называется взаимно-однозначным, если разным $x \in V^n$ сопоставляются разные $y \in V^n$.

$$x \neq y \implies \mathcal{A}x \neq \mathcal{A}y \quad \forall x, y \in V^n$$

Lm 1.6.19. Если оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ взаимно-однозначный, то $\mathcal{A}x = 0 \implies x = 0$.

Доказательство. От противного

$$\exists\, x = x_1 - x_2 \neq 0 \implies x_1 \neq x_2$$
$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}(x_1 - x_2) = \mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2 = 0 \implies \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2$$

Это невозможно, т.к. $\mathcal{A}$ взаимно-однозначный. ∎

Теорема 1.6.20. Взаимно-однозначный оператор переводит линейно-независимый набор в линейно-независимый набор.

Доказательство. Пусть дан взаимно-однозначный оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ и линейно-независимый набор $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Построим набор образов $\{\mathcal{A}x_1, \ldots, \mathcal{A}x_n\}$. Составим его нулевую линейную комбинацию, после чего воспользуемся линейностью оператора:

$$\lambda_1 \mathcal{A}x_1 + \ldots + \lambda_n \mathcal{A}x_n = 0$$
$$\mathcal{A}\Big(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n\Big) = 0$$

По 1.6.19 получаем, что $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$. Т.к. набор $\{x_1, \ldots, x_n\}$ линейно независим, то $\forall \lambda_i = 0$ ∎

Следствие 1.6.21. Взаимно-однозначный оператор переводит базис в базис.

Теорема 1.6.22. Оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ взаимно-однозначный $\iff \exists \mathcal{A}^{-1}$.

Доказательство. $\implies$ Пусть $x \xrightarrow{\mathcal{A}} y$. Рассмотрим оператор $\mathcal{B}$ такой, что $y \xrightarrow{\mathcal{B}} x$. Т.к. $\mathcal{A}$ взаимно-однозначный, то $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = I$.

$\impliedby$ От противного

$$\exists\, x_1 \neq x_2, \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 = x$$
$$x_1 = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}^{-1}x$$
$$x_2 = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x_2 = \mathcal{A}^{-1}x$$
$$x_1 \neq x_2 \implies \mathcal{A}^{-1}x \neq \mathcal{A}^{-1}x$$

Получили противоречие. ∎

Def 1.6.23. Пусть дан линейный оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to W^m$. Множество $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{x \in V^n \mid \mathcal{A}x = 0\}$ называется ядром оператора $\mathcal{A}$.

Lm 1.6.24. Оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ взаимно-однозначный $\implies \mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{0\}$.

Доказательство. От противного, пусть $x \neq 0 \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}$. Тогда по 1.6.19 $\mathcal{A}\,0 = 0$, но в то же время $\mathcal{A}x = 0, x \neq 0$. Нарушается взаимно-однозначность. ∎

Def 1.6.25. Пусть дан линейный оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to W^m$. Множество $\mathrm{Im}\mathcal{A} = \{y \in W^m \mid \exists x \in V^n\colon y = \mathcal{A}x\}$ называется образом оператора $\mathcal{A}$.

Теорема 1.6.26. Пусть дан оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$. Тогда

$$\dim \mathrm{Ker}\mathcal{A} + \dim \mathrm{Im}\mathcal{A} = n$$

Доказательство. Т.к. $\mathrm{Ker}\mathcal{A}$ и $\mathrm{Im}\mathcal{A}$ это подпространства V^n, то $\exists W \subset V^n \mid W \oplus \mathrm{Ker}A = V^n$. Тогда $\dim W + \dim \mathrm{Ker} A = n$. Требуется доказать, что $\dim W = \dim \mathrm{Im}\mathcal{A}$.

Сначала покажем, что $\mathcal{A}\colon W \to \mathrm{Im}\mathcal{A}$ взаимно-однозначный. От противного:

$$\begin{aligned} \sqsupset x_1 \neq x_2 \in W\colon \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \\ \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \implies \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \implies (x_1 - x_2) \in \mathrm{Ker}\mathcal{A} \\ x_1, x_2 \in W \implies (x_1 - x_2) \in W \end{aligned}$$

Но это невозможно, т.к. $W \oplus \mathrm{Ker}A = V^n \implies W \cap \mathrm{Ker}A = \varnothing$.

В $\mathrm{Im}\mathcal{A}$ выделим базис $\{y_1, \dots, y_k\}$. Т.к. $\mathcal{A}$ взаимно-однозначный, то выделенный базис порождается линейно-независимым набором (см. 1.6.20) $\{x_1, \dots, x_k\}, x_i \in W$. Значит $\dim W \geqslant \dim \mathrm{Im}\mathcal{A}$.

Предположим, что $\dim W > \dim \mathrm{Im}\mathcal{A}$. Обозначим $\dim W = p$, дополним систему $\{x_1, \dots, x_k\}$ до p линейно-независимых векторов. Т.к. оператор $\mathcal{A}\colon W \to \mathrm{Im}\mathcal{A}$ взаимно-однозначный, то он должен перевести полученную линейно-независимую систему в линейно-независимую . Однако это невозможно, т.к. $\mathrm{Im}\mathcal{A}$ имеет базис меньшей размерности. ■

Замечание 1.6.27. Можно доказать, что

$$\begin{cases} V_1 \subset V^n \\ V_2 \subset V^n \\ \dim V_1 + \dim V_2 = n \end{cases} \implies \exists \mathcal{A}\colon V^n \to V^n, \mathrm{Ker}\mathcal{A} = V_1, \mathrm{Im}\mathcal{A} = V_2$$

Def 1.6.28. Рангом оператора $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ называется размерность его образа:

$$\mathrm{rang}\mathcal{A} = \dim \mathrm{Im}\mathcal{A}$$

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}\colon V^n \to V^n$. Рассмотрим некоторые свойства ранга линейного оператора:

1. Если оператор $\mathcal{A}$ взаимно-однозначный, то $\mathrm{rang}\mathcal{A} = n$ (это следствие из 1.6.26).
2. $\mathrm{rang}(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}) \leqslant \mathrm{rang}\mathcal{A}$, $\mathrm{rang}(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}) \leqslant \mathrm{rang}\mathcal{B}$
3. $\mathrm{rang}(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}) = \mathrm{rang}\mathcal{A} + \mathrm{rang}\mathcal{B} - \dim V$

1.7. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы при переходе к новому базису.

1.8. Собственные числа и собственные векторы оператора. Теоремы о диагональной матрице оператора.

1.9. Сопряженный и самосопряженный операторы в вещественном евклидовом пространстве: определения, основные свойства. Свойства собственных чисел и собственных векторов самосопряженного оператора.

1.10. Структура образа самосопряженного оператора. Проектор. Спектральное разложение оператора.

1.11. Ортогональная матрица и ортогональный оператор. Поворот плоскости и пространства как ортогональное преобразование.

1.12. Билинейные формы: определения, свойства. Матрица билинейной формы.

1.13. Квадратичная форма: определения, приведение к каноническому виду.

1.14. Знакоопределенность квадратичной формы: необходимые и достаточные. условия. Критерий Сильвестра.

2. Дифференциальные уравнения

2.1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ДУ): задача о радиоактивном распаде и задача о падении тела. Определение ДУ, решения ДУ и их геометрический смысл. Задача Коши.

2.2. Уравнение с разделяющимися переменными.

Def 2.2.1. Уравнение вида

$$m(x)N(y)\mathrm{d}x + M(x)n(y)\mathrm{d}y = 0$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

Для решения таких уравнений необходимо разделить обе части на $M(x)N(y)$, перенести одно из слагаемых в правую часть, после чего проинтегрировать обе части.

$$\begin{aligned} m(x)N(y)\mathrm{d}x + M(x)n(y)\mathrm{d}y = 0 \\ \frac{m(x)}{M(x)}\mathrm{d}x + \frac{n(y)}{N(y)}\mathrm{d}y = 0 \\ \int \frac{m(x)}{M(x)}\mathrm{d}x = -\int \frac{n(y)}{N(y)}\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Замечание 2.2.2. В случае, если $M(x) = 0$ или $N(y) = 0$, то уравнение решается непосредственным интегрированием.

Замечание 2.2.3. Решения вида $x = const, y = const$ не всегда получаемы из общего решения.

2.3. Однородное уравнение.

Def 2.3.4. Функция $f(x, y)$ называется *однородной* m-ого измерения ($m \geqslant 0$), если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$.

Def 2.3.5. Дифференциальное уравнение $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$ называется *однородным*, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ однородные функции одного измерения m.

Однородные уравнения решаются заменой $t = \dfrac{y}{x}$. Покажем, откуда появляется подобная замена. Преобразуем функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$:

$$\begin{aligned} P(x,y) = P\left(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x}\right) = x^m P\left(1, \frac{y}{x}\right) \\ Q(x,y) = Q\left(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x}\right) = x^m Q\left(1, \frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Вернемся к исходному уравнению:

$$\begin{aligned} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0 \mid : \mathrm{d}x \\ y' = -\frac{P(1, {}^{y}/_{x})}{Q(1, {}^{y}/_{x})} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \\ \frac{y}{x} = t \implies \begin{cases} f(1, {}^{y}/_{x}) = \tilde{f}(t) \\ y = xt,\ y'_x = t + xt' \end{cases} \\ t + xt' = \tilde{f}(t) \\ x\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \tilde{f}(t) - t \\ \frac{\mathrm{d}t}{\tilde{f}(t) - t} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \end{aligned}$$

Таким образом исходное однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющими переменными.

Замечание 2.3.6. Случай $\tilde{f}(t) - t = 0$ нужно рассмотреть отдельно.

2.4. Уравнение в полных дифференциалах.

Def 2.4.7. Дифференциальное уравнение $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если

$$\exists z(x,y)\colon \mathrm{d}z = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

Критерием того, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах может служить равенство

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Решение уравнений в полных дифференциалах сводится к поиску функции $z(x, y)$, удовлетворяющей условиям. Про то, как найти такую функцию можно прочитать в конспекте по матанализу в разделе про интегралы, независящие от пути. После того, как такая функция будет найдена, решить ДУ не составит проблем:

$$\begin{aligned} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y &= 0 \\ \mathrm{d}z &= 0 \\ z &= C \end{aligned}$$

TODO: Интегрирующий множитель

2.5. Линейное уравнение первого порядка. Метод Лагранжа.

Def 2.5.8. Линейным однородным уравнением первого порядка (ЛОДУ$_1$) называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = 0$$

ЛОДУ$_1$ является уравнением с разделяющими переменными, поэтому оно решается следующим образом:

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -p(x)y \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -p(x)\mathrm{d}x \\ \overline{y} &= C \cdot \underbrace{e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}_{y_1} \end{aligned}$$

Замечание 2.5.9. При решении данного уравнения мы поделили на $y \neq 0$. Заметим, что $y = 0$ также является решением ЛОДУ$_1$, однако оно получаемо из общего решения при $C = 0$.

Def 2.5.10. Линейным неоднородным уравнением первого порядка (ЛНДУ$_1$) называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \quad q(x) \neq 0$$

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной) для решения ЛНДУ$_1$:

1. Найдем частное решение y_1 соответствующего однородного уравнения.
2. Будем искать решение ЛНДУ$_1$ в виде $y(x) = y_1(x) \cdot C(x)$. Преобразуем ДУ в соответствии с этой заменой

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= q(x) \\ y_1'(x)C(x) + y_1(x)C'(x) + p(x)y_1(x)C(x) &= q(x) \\ y_1(x)C'(x) + C(x)\underbrace{\Big(y_1'(x) + p(x)y_1(x)\Big)}_{=0} &= q(x) \\ y_1(x)C'(x) &= q(x) \\ C(x) &= \int \frac{q(x)}{y_1(x)}\mathrm{d}x + C \end{aligned}$$

3. Подставим найденную функцию $C(x)$ в $y(x) = y_1(x) \cdot C(x)$.

TODO: Уравнение Бернулли, Клеро, Риккати и пр.

2.6. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения.

2.7. Уравнения n-ого порядка, допускающие понижение порядка.

К уравнениям, допускающим понижение порядка относятся:

1. Непосредственно интегрируемые уравнения вида $y^{(n)}(x) = f(x)$.
   Они решаются интегрированием обоих частей n раз.

2. Уравнения не содержащие $y(x)$ в явном виде.
   Они решаются заменой $z(x) = y'(x)$, $z'(x) = y''(x)$.
   Замечание 2.7.11. В общем случае производится замена самой младшей из присутствующих производных.
3. Уравнения не содержащие x в явном виде.
   Они решаются заменой $z(y) = y'(x)$, тогда $y''(x) = z'_y y'_x = z'(y) \cdot z(y)$

2.8. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) : определения, решение ЛОДУ$_2$ с постоянными коэффициентами для случая различных вещественных корней характеристического уравнения.

Def 2.8.12. Линейным дифференциальным уравнением n-ого порядка (ЛДУ$_n$) называется

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = f(x), \quad a_0(x) \neq 0$$

Def 2.8.13. Разрешенным ЛДУ$_n$ называется

$$y^{(n)}(x) + b_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + b_n(x)y(x) = f(x)$$

Def 2.8.14. Если в ЛДУ$_n$ $\forall i$: $a_i(x) = p_i \in \mathbb{R}$, то такое ЛДУ$_n$ называется ЛДУ$_n$ с постоянными коэффициентами. Оно имеет вид

$$y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n y(x) = f(x)$$

Def 2.8.15. Линейным однородным дифференциальным уравнение n-ого порядка называется ЛДУ$_n$ вида

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = 0,$$

Def 2.8.16. Линейным неоднородным дифференциальным уравнение n-ого порядка называется ЛДУ$_n$ вида

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = f(x), \quad f(x) \neq 0$$

Рассмотрим ЛОДУ$_2$ вида $y'' + py' + qy = 0$. Любой паре $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ можно поставить в соответствие квадратное уравнение $k^2 + pk + q = 0$. По т. Виета $p = -(k_1 + k_2), q = k_1 k_2$, где k_1, k_2 это корни уравнения. Подставим полученные выражения в исходное ДУ:

$$\begin{aligned} y'' - (k_1 + k_2)y' + k_1 k_2 &= 0 \\ y'' - k_1 y' - k_2 y' + k_1 k_2 &= 0 \\ (y'' - k_2 y') - k_1(y' - k_2) &= 0 \\ \sqsupset u(x) &= y' - k_2 y \\ u' - k_1 u = 0 \implies u(x) = c_1 e^{k_1 x} \implies y' - k_2 y &= c_1 e^{k_1 x} \end{aligned}$$

Сначала найдем частное решение соответствующего ЛОДУ$_1$: $\overline{y} = c_2 e^{k_2 x}, y_1 = e^{k_2 x}$. Далее будем варьировать постоянную c_2, тогда $y(x) = C_2(x)e^{k_2 x}$. Подставим это в исходное ДУ:

$$\begin{aligned} C_2'(x)e^{k_2 x} + C_2(x) \cdot k_2 \cdot e^{k_2 x} - k_2 \cdot C_2(x)e^{k_2 x} &= c_1 e^{k_1 x} \\ C_2'(x)e^{k_2 x} &= c_1 e^{k_1 x} \end{aligned}$$

В итоге получаем уравнение

$$\boxed{C_2'(x) = c_1 e^{(k_1 - k_2)x}} \qquad (\bigstar)$$

Проанализируем это уравнение. Всего будет рассмотрено 3 случая: один в этом параграфе, остальные — в двух последующих.

($\bigstar$) **случай I**: $k_1 \neq k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

В заданных ограничениях имеем

$$\begin{aligned} C_2'(x) &= c_1 e^{(k_1 - k_2)x} \\ C_2(x) &= \frac{c_1}{k_1 - k_2} e^{(k_1 - k_2)x} + \tilde{c_2} \\ y(x) = C_2(x)y_1(x) &= \underbrace{\frac{c_1}{k_1 - k_2}}_{\tilde{c_1}} e^{k_1 x} + \tilde{c_2} e^{k_2 x} \\ y(x) &= \tilde{c_1} e^{k_1 x} + \tilde{c_2} e^{k_2 x} \end{aligned}$$

2.9. Решение ЛОДУ$_2$ с постоянными коэффициентами для случая вещественных кратных корней характеристического уравнения.

($\bigstar$) **случай II**: $k_1 = k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Пусть $k_1 = k_2 = k$, тогда получаем:

$$\begin{aligned} C_2'(x) &= c_1 e^{(k_1-k_2)x} \\ C_2(x) &= c_1 x + c_2 \\ y(x) = C_2(x)y_1(x) &= (c_1 x + c_2)e^{kx} \\ y(x) &= c_1 x \cdot e^{kx} + c_2 e^{kx} \end{aligned}$$

2.10. Решение ЛОДУ$_2$ с постоянными коэффициентами для случая комплексных корней характеристического уравнения.

($\bigstar$) **случай III**: $k_{1,2} = \alpha + \beta i, k_{1,2} \in \mathbb{C}$

В заданных ограничениях получаем

$$\begin{aligned} C_2'(x) &= c_1 e^{(k_1-k_2)x} \\ C_2(x) &= \frac{c_1}{k_1 - k_2} e^{(k_1-k_2)x} + \tilde{c_2} \\ y(x) = C_2(x)y_1(x) &= \underbrace{\frac{c_1}{k_1 - k_2}}_{\tilde{c_1}} e^{k_1 x} + \tilde{c_2} e^{k_2 x} \\ y(x) &= \tilde{c_1} e^{k_1 x} + \tilde{c_2} e^{k_2 x} \\ y(x) &= \tilde{c_1} e^{\alpha x} e^{\beta i x} + \tilde{c_2} e^{\alpha x} e^{-\beta i x} \end{aligned}$$

Далее используем формулу $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\alpha x}\Big(\tilde{c_1}\Big(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\Big) + \tilde{c_2}\Big(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\Big)\Big) \\ y(x) &= e^{\alpha x}\Big(\cos(\beta x)\underbrace{\Big(\tilde{c_1} + \tilde{c_2}\Big)}_{\widehat{c_1}} + i\sin(\beta x)\underbrace{\Big(\tilde{c_1} - \tilde{c_2}\Big)}_{\widehat{c_2}}\Big) \\ y(x) &= e^{\alpha x}\Big(\widehat{c_1}\cos(\beta x) + \widehat{c_2}\, i \sin(\beta x)\Big) \end{aligned}$$

TODO: Конспект не очень хороший в этом моменте, возможно что-то неправильно

Lm 2.10.17. Если $y(x) = u(x) + iv(x)$ это решение ЛОДУ$_2$, то $y(x) = u(x) + v(x)$ также являются решением ЛОДУ$_2$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $y(x) = u(x) + v(x)$:

$$\begin{cases} y(x) = u(x) + v(x) \\ y'(x) = u'(x) + v'(x) \\ y''(x) = u''(x) + v''(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y''(x) + py'(x) + qy(x) &= u''(x) + v''(x) + pu'(x) + pv'(x) + u(x) + qu(x) + qv(x) = 0 \\ \Big(u''(x) + pu'(x) + qu(x)\Big) &+ \Big(v''(x) + pv'(x) + qv(x)\Big) = 0 \end{aligned}$$

Это равенство верно, т.к. $u(x)$ и $v(x)$ решения ЛОДУ$_2$. ∎

Значит, по 2.10.17 общее решение ($\bigstar$) в третьем случае будет иметь вид

$$y(x) = e^{\alpha x}\Big(\widehat{c_1}\cos(\beta x) + \widehat{c_2}\sin(\beta x)\Big)$$

2.11. Свойства решений ЛОДУ$_2$: линейная независимость решений, определитель Вронского. Теоремы 1,2.

2.12. Свойства решений ЛОДУ$_2$: линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Определитель Вронского. Теоремы о вронскиане.

2.13. Свойства решений ЛОДУ$_2$: линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ$_2$. Фундаментальная система решений (определение).

2.14. Свойства решений ЛНДУ$_2$: теоремы о структуре общего решения и решении ДУ с суммой правых частей.

2.15. Структура решения ЛОДУn: линейная независимость решений, нахождение фундаментальной системы решений по корням характеристического уравнения.

2.16. Решение ЛНУ$_2$ с постоянными коэффициентами: специальная правая часть, поиск частного решения методом неопределенных коэффициентов.

2.17. Решение ЛНУ$_2$: метод вариации произвольных постоянных (Лагранжа).

2.18. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение методом исключения.

2.19. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение матричным методом в случае различных вещественных собственных чисел.

2.20. Теория устойчивости: определение устойчивости по Ляпунову, фазовая плоскость, траектории ДУ. Примеры устойчивого и неустойчивого решения