# LA E$\chi$ 02

isagila

Собрано 10.06.2023 в 10:12

# Содержание

# 1. Линейная алгебра

## 1.1. Евклидово пространство: определение, неравенство Коши-Буняковского. Нормированное евклидово пространство.

**Def 1.1.1.** Скалярным произведением называется функция двух элементов линейного пространства $x, y \in L^n$ обозначаемая $(x, y) \to \mathbb{R}$, для которой выполнены аксиомы: $\forall x, y \in L^n, \lambda \in \mathbb{C}$

1. $(x, y) = (y, x)$
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
3. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
4. $(x, x) \geqslant 0$, $(x, x) = 0 \implies x = 0$

**Def 1.1.2.** Линейное пространство с введенным скалярным произведением называется евклидовым пространством $E^n$.

*Замечание* 1.1.3. Если $L = C_{[a;b]}$, то скалярное произведение обычно определяется как $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$

**Теорема 1.1.4.** Неравенство Коши-Буняковского

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y)$$

*Доказательство.* Рассмотрим скалярное произведение:

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) \geqslant 0$$
$$(\lambda x - y, \lambda x - y) = \lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) \geqslant 0$$

Полученное выражение можно рассмотреть как квадратное уравнение относительно $\lambda$. Т.к. оно неотрицательно $\forall \lambda$, то его дискриминант будет $\leqslant 0$. Таким образом

$$\begin{aligned} 4\lambda^2(x, y)^2 - 4\lambda^2(x, x)(y, y) &\leqslant 0 \\ (x, y)^2 - (x, x)(y, y) &\leqslant 0 \\ (x, y)^2 &\leqslant (x, x)(y, y) \end{aligned}$$

■

**Def 1.1.5.** Нормой называется функция одного элемента линейного пространства $x \in L^n$, обозначаемая $\|x\|$ и определяемая аксиомами: $\forall x, y \in L^n, \lambda \in \mathbb{C}$:

1. $\|\lambda x\| = \lambda\|x\|$
2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
3. $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0 \implies x = 0$

**Def 1.1.6.** Евклидово пространство называется *нормированным*, если в нем определена норма.

*Замечание* 1.1.7. Чаще всего норма определяется как $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

## 1.2. Ортонормированный базис, ортогонализация базиса. Матрица Грама.

**Def 1.2.8.** *Углом* между двумя элементами Евклидова пространства называется

$$\cos \angle(x, y) = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

**Def 1.2.9.** Для элемента Евклидова пространства ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю.

$$x \perp y \iff (x, y) = 0$$

**Теорема 1.2.10.** Во всяком $E^n$ можно выделить ортонормированный базис размера $n$.

*Доказательство.* Пусть у нас есть базис $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$. Ортогонализируем его, полученный базис обозначим $\mathcal{E}' = \{\mathbb{e}'_1, \dots, \mathbb{e}'_n\}$. Этот базис можно нормировать и получить искомый ортонормированный базис $\mathcal{E} = \{\mathbb{e}_1, \dots, \mathbb{e}_n\}$.

**Процесс ортогонализации Грама-Шмидта:**

Будем добавлять векторы в базис $\mathcal{E}$ из базиса $B$ по-одному:

**База:** начнем с одного произвольного вектора $\beta_1$. Тогда $\mathbb{e}'_1 = \beta_1$.

**Переход:** пусть у нас уже выделен набор из $k-1$ ортогональных векторов $\{\mathbb{e}'_1, \dots, \mathbb{e}'_{k-1}\}$ и в него требуется добавить вектор $\beta_k$.

Будем искать $\mathbb{e}'_k$ в виде

$$\mathbb{e}'_k = \beta_k + \lambda_1 \mathbb{e}'_{k-1} + \lambda_2 \mathbb{e}'_{k-2} + \ldots + \lambda_{k-1} \mathbb{e}'_1$$

Чтобы $\mathbb{e}'_k$ был ортогонален остальным векторам уже построенной системы, необходимо, чтобы скалярные произведение $\mathbb{e}'_k$ с остальными векторами системы равнялись нулю. Рассмотрим на примере $\mathbb{e}'_1$:

$$(\mathbb{e}'_k, \mathbb{e}'_1) = (\beta_k, \mathbb{e}'_1) + \lambda_1(\mathbb{e}'_{k-1}, e'_1) + \ldots + \lambda_{k-1}(\mathbb{e}'_1, \mathbb{e}'_1) = 0$$

Учитывая то, что построенная система ортогональна, то $(\mathbb{e}'_i, \mathbb{e}'_j) = 0$ $(i, j < k)$. Значит выражение выше упрощается и остается:

$$(\beta_k, \mathbb{e}'_1) + \lambda_{k-1}(\mathbb{e}'_1, \mathbb{e}'_1) = 0$$
$$\lambda_{k-1} = -\frac{(\beta_k, \mathbb{e}'_1)}{(\mathbb{e}'_1, \mathbb{e}'_1)}$$

Аналогично можно получить оставшиеся коэффициенты $\lambda_i$. Тогда добавляемый в систему вектор $\mathbb{e}'_k$ будет иметь вид:

$$\mathbb{e}'_k = \beta_k - \frac{(\beta_k, \mathbb{e}'_{k-1})}{(\mathbb{e}'_{k-1}, \mathbb{e}'_{k-1})} \cdot \mathbb{e}'_{k-1} - \ldots - \frac{(\beta_k, \mathbb{e}'_1)}{(\mathbb{e}'_1, \mathbb{e}'_1)} \cdot \mathbb{e}'_1$$

■

**Def 1.2.11.** Матрицей Грама называется матрица составленная из скалярных произведений

$$\begin{pmatrix} (\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_1) & \ldots & (\mathbb{e}_k, \mathbb{e}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_k) & \ldots & (\mathbb{e}_k, \mathbb{e}_k) \end{pmatrix}$$

*Замечание* 1.2.12. В ортогональном базисе матрица Грама диагональная, а в ортонормированном — единичная.

## 1.3. Ортогональность вектора подпространству. Ортогональное дополнение. Теорема Пифагора.

**Def 1.3.13.** Пусть дано Евклидово пространство $E^n$. Элемент $h \in E^n$ называется ортогональным (перпендикулярным) подпространству $G \subset E^n$, если $\forall x \in G \colon h \perp x$.

*Следствие* 1.3.14. Выделим в подпространстве $G$ базис $\mathcal{E} = \{\mathbb{e}_1, \dots, \mathbb{e}_k\}$. Если $h \perp e_i \forall \mathbb{e}_i \in \mathcal{E}$, то $h \perp G$.

*Доказательство.* Любой элемент $x \in G$ можно представить в виде $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbb{e}_i$. Рассмотрим скалярное произведение $(h, x)$. По свойствам линейности разложим его на $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (h, \mathbb{e}_i)$. Т.к. $h$ ортогонален каждому из базисных векторов, то полученная сумма будет равна нулю, значит $h$ ортогонален любому $x \in G$. ■

**Def 1.3.15.** Пусть дано Евклидово пространство $E^n$. Ортогональным дополнением $F$ к подпространству $G \subset E^n$ называется совокупность векторов $h \perp G$.

*Замечание* 1.3.16. Из определения 1.3.13 следует, что $F$ также является подпространством $E^n$.

**Теорема 1.3.17.** Евклидово пространство $E^n$ является прямой суммой подпространства $F \subset E^n$ и его ортогонального $G = F^{\perp}$.

$$E^n = F \oplus F^{\perp}$$

*Доказательство.* В Евклидовом пространстве $E^n$ выделим базис, после чего разложим произвольный элемент пространства $x \in E^n$ по этому базису:

$$\mathcal{E} = \{\underbrace{\mathbb{e}_1, \dots, \mathbb{e}_k}_{\text{Базис } G}, \mathbb{e}_{k+1}, \dots \mathbb{e}_n\}$$

$$x = \underbrace{x_1 \mathbb{e}_1 + \cdots + x_k \mathbb{e}_k}_{\overline{x}} + \underbrace{x_{k+1} \mathbb{e}_{k+1} + \cdots + x_n \mathbb{e}_n}_{\hat{x}} = \overline{x} + \hat{x}$$

**TODO:** Дальше в конспекте что-то непонятное ■

**TODO:** Теорема Пифагора?

### 1.4. Задача о перпендикуляре.

### 1.5. Линейный оператор: определение, основные свойства.

**Def 1.5.18.** Пусть $V^n, W^m$ линейные пространства. Отображение $\mathcal{A}\colon V^n \to W^m$, которое $\forall x \in V^n$ сопоставляет $y \in W^m$ называется линейным оператором при выполнении следующих условий: $\forall x_1, x_2 \in V^n, \lambda \in \mathbb{C}$:

1. $\mathcal{A}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}x_1 + \mathcal{A}x_2$
2. $\mathcal{A}(\lambda x_1) = \lambda(\mathcal{A}x_1)$

*Замечание* 1.5.19. $y = \mathcal{A}x$ означает, что $y$ порождается применением оператора $\mathcal{A}$

Обозначим некоторые базовые свойства линейных операторов. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}\colon V^n \to W^m$ это линейные операторы, тогда определены:

1. Сумма $(\mathcal{A} + \mathcal{B})x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$
2. Умножение на число $(\lambda\mathcal{A})x = \lambda(\mathcal{A}x)$
3. Нулевой оператор $\Theta x = 0, \forall x \in V^n$
4. Противоположный оператор $-\mathcal{A} = (-1) \cdot \mathcal{A}$

Далее рассмотрим операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\colon V^n \to V^n$ действующие в одном линейном пространстве. Для таких операторов определена композиция (произведение) $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x)$. В общем случае она не коммутативна $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$.

Свойства композиции операторов:

1. $\lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A}) \cdot \mathcal{B}$
2. $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{C} + \mathcal{B} \cdot \mathcal{C}$
3. $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C}$
4. $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot C) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}$

**Def 1.5.20.** Композиция оператора самим с собой $n$ раз называется $n$-ой степенью оператора: $\mathcal{A}^n = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n}$

Для степени оператора справедливо равенство $\mathcal{A}^{n+m} = \mathcal{A}^n \cdot \mathcal{A}^m$

### 1.6. Обратный оператор. Взаимно-однозначный оператор. Ядро и образ оператора. Теорема о размерностях.

**Def 1.6.21.** Оператор $I\colon V^n \to V^n$ называется тождественным оператором, если $Ix = x, \forall x \in V^n$.

**Def 1.6.22.** Пусть даны операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B}\colon V^n \to V^n$. Оператор $\mathcal{B}$ называется обратным для оператора $\mathcal{A}$, если их композиция равна тождественному оператору.

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1} \iff \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = I$$

**Def 1.6.23.** Оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ называется взаимно-однозначным, если разным $x \in V^n$ сопоставляются разные $y \in V^n$.

$$x \neq y \implies \mathcal{A}x \neq \mathcal{A}y \quad \forall x, y \in V^n$$

**Lm 1.6.24.** Если оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ взаимно-однозначный, то $\mathcal{A}x = 0 \implies x = 0$.

*Доказательство.* От противного

$$\begin{aligned} \sqsupset x = x_1 - x_2 \neq 0 &\implies x_1 \neq x_2 \\ \mathcal{A}x = \mathcal{A}(x_1 - x_2) = \mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2 = 0 &\implies \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \end{aligned}$$

Это невозможно, т.к. $\mathcal{A}$ взаимно-однозначный. ■

**Теорема 1.6.25.** Взаимно-однозначный оператор переводит линейно-независимый набор в линейно-независимый набор.

*Доказательство.* Пусть дан взаимно-однозначный оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ и линейно-независимый набор $\{x_1, \dots, x_n\}$. Построим набор образов $\{\mathcal{A}x_1, \dots, \mathcal{A}x_n\}$. Составим его нулевую линейную комбинацию, после чего воспользуемся линейностью оператора:

$$\lambda_1 \mathcal{A}x_1 + \ldots + \lambda_n \mathcal{A}x_n = 0$$
$$\mathcal{A}\Big(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n\Big) = 0$$

По 1.6.24 получаем, что $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$. Т.к. набор $\{x_1, \dots, x_n\}$ линейно независим, то $\forall \lambda_i = 0$ ■

*Следствие* 1.6.26. Взаимно-однозначный оператор переводит базис в базис.

**Теорема 1.6.27.** Оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ взаимно-однозначный $\iff \exists \mathcal{A}^{-1}$.

*Доказательство.* $\Longrightarrow$ Пусть $x \xrightarrow{\mathcal{A}} y$. Рассмотрим оператор $\mathcal{B}$ такой, что $y \xrightarrow{\mathcal{B}} x$. Т.к. $\mathcal{A}$ взаимно-однозначный, то $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = I$.

$\Longleftarrow$ От противного

$$\begin{aligned} \exists\, x_1 \neq x_2, \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 &= x \\ x_1 = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x_1 &= \mathcal{A}^{-1}x \\ x_2 = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x_2 &= \mathcal{A}^{-1}x \\ x_1 \neq x_2 \implies \mathcal{A}^{-1}x &\neq \mathcal{A}^{-1}x \end{aligned}$$

Получили противоречие. ■

**Def 1.6.28.** Пусть дан линейный оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to W^m$. Множество $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{x \in V^n \mid \mathcal{A}x = 0\}$ называется ядром оператора $\mathcal{A}$.

**Lm 1.6.29.** Оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ взаимно-однозначный $\implies \mathrm{Ker}\mathcal{A} = \{0\}$.

*Доказательство.* От противного, пусть $x \neq 0 \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}$. Тогда по 1.6.24 $\mathcal{A}\,0 = 0$, но в то же время $\mathcal{A}x = 0, x \neq 0$. Нарушается взаимно-однозначность. ■

**Def 1.6.30.** Пусть дан линейный оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to W^m$. Множество $\mathrm{Im}\mathcal{A} = \{y \in W^m \mid \exists x \in V^n \colon y = \mathcal{A}x\}$ называется образом оператора $\mathcal{A}$.

**Теорема 1.6.31.** Пусть дан оператор $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$. Тогда

$$\dim \mathrm{Ker}\mathcal{A} + \dim \mathrm{Im}\mathcal{A} = n$$

*Доказательство.* Т.к. $\mathrm{Ker}\mathcal{A}$ и $\mathrm{Im}\mathcal{A}$ это подпространства $V^n$, то $\exists W \subset V^n \mid W \oplus \mathrm{Ker}A = V^n$. Тогда $\dim W + \dim \mathrm{Ker}A = n$. Требуется доказать, что $\dim W = \dim \mathrm{Im}\mathcal{A}$.

Сначала покажем, что $\mathcal{A}\colon W \to \mathrm{Im}\mathcal{A}$ взаимно-однозначный. От противного:

$$\begin{aligned} \exists\, x_1 \neq x_2 \in W \colon \mathcal{A}x_1 &= \mathcal{A}x_2 \\ \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \implies \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \implies (x_1 - x_2) &\in \mathrm{Ker}\mathcal{A} \\ x_1, x_2 \in W \implies (x_1 - x_2) &\in W \end{aligned}$$

Но это невозможно, т.к. $W \oplus \mathrm{Ker}A = V^n \implies W \cap \mathrm{Ker}A = \varnothing$.

В $\mathrm{Im}\mathcal{A}$ выделим базис $\{y_1, \dots, y_k\}$. Т.к. $\mathcal{A}$ взаимно-однозначный, то выделенный базис порождается линейно-независимым набором (см. 1.6.25) $\{x_1, \dots, x_k\}, x_i \in W$. Значит $\dim W \geqslant \dim \mathrm{Im}\mathcal{A}$.

Предположим, что $\dim W > \dim \mathrm{Im}\mathcal{A}$. Обозначим $\dim W = p$, дополним систему $\{x_1, \dots, x_k\}$ до $p$ линейно-независимых векторов. Т.к. оператор $\mathcal{A}\colon W \to \mathrm{Im}\mathcal{A}$ взаимно-однозначный, то он должен перевести полученную линейно-независимую систему в линейно-независимую . Однако это невозможно, т.к. $\mathrm{Im}\mathcal{A}$ имеет базис меньшей размерности. ■

*Замечание* 1.6.32. Можно доказать, что

$$\begin{cases} V_1 \subset V^n \\ V_2 \subset V^n \\ \dim V_1 + \dim V_2 = n \end{cases} \implies \exists \mathcal{A}\colon V^n \to V^n, \mathrm{Ker}\mathcal{A} = V_1, \mathrm{Im}\mathcal{A} = V_2$$

**Def 1.6.33.** Рангом оператора $\mathcal{A}\colon V^n \to V^n$ называется размерность его образа:

$$\mathrm{rang}\mathcal{A} = \dim \mathrm{Im}\mathcal{A}$$

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \colon V^n \to V^n$. Рассмотрим некоторые свойства ранга линейного оператора:

1. Если оператор $\mathcal{A}$ взаимно-однозначный, то $\mathrm{rang}\mathcal{A} = n$ (это следствие из 1.6.31).
2. $\mathrm{rang}(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \leqslant \mathrm{rang}\mathcal{A}$, $\mathrm{rang}(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \leqslant \mathrm{rang}\mathcal{B}$
3. $\mathrm{rang}(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = \mathrm{rang}\mathcal{A} + \mathrm{rang}\mathcal{B} - \dim V$

## 1.7. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы при переходе к новому базису.

Пусть дан оператор $\mathcal{A} \colon V^n \to V^n$ и $x, y \in V^n$, $\mathcal{A}x = y$.

Выделим в $V^n$ базис, разложим $x$ по этому базису. После чего применим к нему оператор $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \{\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_n\} \\ x &= x_1\mathbb{e}_1 + \cdots + x_n\mathbb{e}_n \\ y &= x_1\mathcal{A}\mathbb{e}_1 + \cdots + x_n\mathcal{A}\mathbb{e}_n \end{aligned}$$

Далее применим оператор к каждому из базисных векторов:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbb{e}_i &= a_{1,i}\mathbb{e}_1 + \ldots + a_{n,i}\mathbb{e}_n \\ y = x_1\Big(a_{1,1}\mathbb{e}_1 + \ldots + a_{n,1}\mathbb{e}_n\Big) + \cdots + x_n\Big(&a_{1,n}\mathbb{e}_1 + \ldots + a_{n,n}\mathbb{e}_n\Big) \\ y = \mathbb{e}_1\Big(x_1a_{1,1} + \ldots + x_na_{1,n}\Big) + \cdots + \mathbb{e}_n\Big(&x_1a_{n,1} + \ldots + x_na_{n,n}\Big) \end{aligned}$$

Заметим, что $y$ также можно разложить по базису. Составим СЛАУ и запишем её в матричном виде:

$$\left\{\begin{matrix} x_1a_{1,1} & + \ldots + & x_na_{1,n} = & y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_na_{n,1} & + \ldots + & x_na_{n,n} = & y_n \end{matrix}\right\} \iff AX = Y$$

**Def 1.7.34.** Матрицей оператора $\mathcal{A}$ **в данном базисе** называется матрица составленная из столбцов-коэффициентов разложения образов базисных векторов по этому же базису.

*Замечание* 1.7.35. Если $A^{-1} = A^T$, то матрица оператора называется ортогональной.

## 1.8. Собственные числа и собственные векторы оператора. Теоремы о диагональной матрице оператора.

## 1.9. Сопряженный и самосопряженный операторы в вещественном евклидовом пространстве: определения, основные свойства. Свойства собственных чисел и собственных векторов самосопряженного оператора.

## 1.10. Структура образа самосопряженного оператора. Проектор. Спектральное разложение оператора.

## 1.11. Ортогональная матрица и ортогональный оператор. Поворот плоскости и пространства как ортогональное преобразование.

## 1.12. Билинейные формы: определения, свойства. Матрица билинейной формы.

## 1.13. Квадратичная форма: определения, приведение к каноническому виду.

## 1.14. Знакоопределенность квадратичной формы: необходимые и достаточные. условия. Критерий Сильвестра.

# 2. Дифференциальные уравнения

## 2.1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ДУ): задача о радиоактивном распаде и задача о падении тела. Определение ДУ, решения ДУ и их геометрический смысл. Задача Коши.

## 2.2. Уравнение с разделяющимися переменными.

**Def 2.2.1.** Уравнение вида
$$m(x)N(y)\mathrm{d}x + M(x)n(y)\mathrm{d}y = 0$$
называется уравнением с разделяющимися переменными.

Для решения таких уравнений необходимо разделить обе части на $M(x)N(y)$, перенести одно из слагаемых в правую часть, после чего проинтегрировать обе части.

$$m(x)N(y)\mathrm{d}x + M(x)n(y)\mathrm{d}y = 0$$
$$\frac{m(x)}{M(x)}\mathrm{d}x + \frac{n(y)}{N(y)}\mathrm{d}y = 0$$
$$\int \frac{m(x)}{M(x)}\mathrm{d}x = -\int \frac{n(y)}{N(y)}\mathrm{d}y$$

*Замечание* 2.2.2. В случае, если $M(x) = 0$ или $N(y) = 0$, то уравнение решается непосредственным интегрированием.

*Замечание* 2.2.3. Решения вида $x = const, y = const$ не всегда получаемы из общего решения.

## 2.3. Однородное уравнение.

**Def 2.3.4.** Функция $f(x, y)$ называется *однородной* $m$-ого измерения ($m \geqslant 0$), если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$.

**Def 2.3.5.** Дифференциальное уравнение $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$ называется *однородным*, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ однородные функции одного измерения $m$.

Однородные уравнения решаются заменой $t = \dfrac{y}{x}$. Покажем, откуда появляется подобная замена. Преобразуем функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$:

$$P(x, y) = P\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^m P\left(1, \frac{y}{x}\right)$$
$$Q(x, y) = Q\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^m Q\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Вернемся к исходному уравнению:

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0 \mid : \mathrm{d}x$$
$$y' = -\frac{P(1, {}^{y}/_{x})}{Q(1, {}^{y}/_{x})} = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$
$$\frac{y}{x} = t \implies \begin{cases} f(1, {}^{y}/_{x}) = \tilde{f}(t) \\ y = xt,\ y'_x = t + xt' \end{cases}$$
$$t + xt' = \tilde{f}(t)$$
$$x \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \tilde{f}(t) - t$$
$$\frac{\mathrm{d}t}{\tilde{f}(t) - t} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Таким образом исходное однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющими переменными.

*Замечание* 2.3.6. Случай $\tilde{f}(t) - t = 0$ нужно рассмотреть отдельно.

## 2.4. Уравнение в полных дифференциалах.

**Def 2.4.7.** Дифференциальное уравнение $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если
$$\exists z(x, y) \colon \mathrm{d}z = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$$

Критерием того, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах может служить равенство

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Решение уравнений в полных дифференциалах сводится к поиску функции $z(x, y)$, удовлетворяющей условиям. Про то, как найти такую функцию можно прочитать в конспекте по матанализу в разделе про интегралы, независящие от пути. После того, как такая функция будет найдена, решить ДУ не составит проблем:

$$\begin{aligned} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y &= 0 \\ \mathrm{d}z &= 0 \\ z &= C \end{aligned}$$

**TODO:** Интегрирующий множитель

## 2.5. Линейное уравнение первого порядка. Метод Лагранжа.

**Def 2.5.8.** Линейным однородным уравнением первого порядка (ЛОДУ$_1$) называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = 0$$

ЛОДУ$_1$ является уравнением с разделяющими переменными, поэтому оно решается следующим образом:

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -p(x)y \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -p(x)\mathrm{d}x \\ \overline{y} &= C \cdot \underbrace{e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}_{y_1} \end{aligned}$$

*Замечание* 2.5.9. При решении данного уравнения мы поделили на $y \neq 0$. Заметим, что $y = 0$ также является решением ЛОДУ$_1$, однако оно получаемо из общего решения при $C = 0$.

**Def 2.5.10.** Линейным неоднородным уравнением первого порядка (ЛНДУ$_1$) называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \quad q(x) \neq 0$$

**Метод Лагранжа** (метод вариации произвольной постоянной) для решения ЛНДУ$_1$:

1. Найдем частное решение $y_1$ соответствующего однородного уравнения.
2. Будем искать решение ЛНДУ$_1$ в виде $y(x) = y_1(x) \cdot C(x)$. Преобразуем ДУ в соответствии с этой заменой

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= q(x) \\ y_1'(x)C(x) + y_1(x)C'(x) + p(x)y_1(x)C(x) &= q(x) \\ y_1(x)C'(x) + C(x)\underbrace{\Big(y_1'(x) + p(x)y_1(x)\Big)}_{=0} &= q(x) \\ y_1(x)C'(x) &= q(x) \\ C(x) &= \int \frac{q(x)}{y_1(x)}\mathrm{d}x + C \end{aligned}$$

3. Подставим найденную функцию $C(x)$ в $y(x) = y_1(x) \cdot C(x)$.

**TODO:** Уравнение Бернулли, Клеро, Риккати и пр.

## 2.6. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения.

## 2.7. Уравнения $n$-ого порядка, допускающие понижение порядка.

К уравнениям, допускающим понижение порядка относятся:

1. Непосредственно интегрируемые уравнения вида $y^{(n)}(x) = f(x)$.
   Они решаются интегрированием обоих частей $n$ раз.

2. Уравнения не содержащие $y(x)$ в явном виде.
   Они решаются заменой $z(x) = y'(x)$, $z'(x) = y''(x)$.

   *Замечание* 2.7.11. В общем случае производится замена самой младшей из присутствующих производных.
3. Уравнения не содержащие $x$ в явном виде.
   Они решаются заменой $z(y) = y'(x)$, тогда $y''(x) = z'_y y'_x = z'(y) \cdot z(y)$

## 2.8. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) : определения, решение ЛОДУ$_2$ с постоянными коэффициентами для случая различных вещественных корней характеристического уравнения.

**Def 2.8.12.** Линейным дифференциальным уравнением $n$-ого порядка (ЛДУ$_n$) называется

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = f(x), \quad a_0(x) \neq 0$$

**Def 2.8.13.** Разрешенным ЛДУ$_n$ называется

$$y^{(n)}(x) + b_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + b_n(x)y(x) = f(x)$$

**Def 2.8.14.** Если в ЛДУ$_n$ $\forall i$: $a_i(x) = p_i \in \mathbb{R}$, то такое ЛДУ$_n$ называется ЛДУ$_n$ с постоянными коэффициентами. Оно имеет вид

$$y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n y(x) = f(x)$$

**Def 2.8.15.** Линейным однородным дифференциальным уравнение $n$-ого порядка называется ЛДУ$_n$ вида

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = 0,$$

**Def 2.8.16.** Линейным неоднородным дифференциальным уравнение $n$-ого порядка называется ЛДУ$_n$ вида

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = f(x), \quad f(x) \neq 0$$

Рассмотрим ЛОДУ$_2$ вида $y'' + py' + qy = 0$. Любой паре $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ можно поставить в соответствие квадратное уравнение $k^2 + pk + q = 0$. По т. Виета $p = -(k_1 + k_2), q = k_1 k_2$, где $k_1, k_2$ это корни уравнения. Подставим полученные выражения в исходное ДУ:

$$\begin{aligned}
y'' - (k_1 + k_2)y' + k_1 k_2 &= 0 \\
y'' - k_1 y' - k_2 y' + k_1 k_2 &= 0 \\
(y'' - k_2 y') - k_1(y' - k_2) &= 0 \\
\sqsupset u(x) &= y' - k_2 y \\
u' - k_1 u = 0 \implies u(x) = c_1 e^{k_1 x} \implies y' - k_2 y &= c_1 e^{k_1 x}
\end{aligned}$$

Сначала найдем частное решение соответствующего ЛОДУ$_1$: $\overline{y} = c_2 e^{k_2 x}, y_1 = e^{k_2 x}$. Далее будем варьировать постоянную $c_2$, тогда $y(x) = C_2(x) e^{k_2 x}$. Подставим это в исходное ДУ:

$$\begin{aligned}
C_2'(x)e^{k_2 x} + C_2(x) \cdot k_2 \cdot e^{k_2 x} - k_2 \cdot C_2(x) e^{k_2 x} &= c_1 e^{k_1 x} \\
C_2'(x) e^{k_2 x} &= c_1 e^{k_1 x}
\end{aligned}$$

В итоге получаем уравнение

$$\boxed{C_2'(x) = c_1 e^{(k_1 - k_2)x}} \tag{$\bigstar$}$$

Проанализируем это уравнение. Всего будет рассмотрено 3 случая: один в этом параграфе, остальные — в двух последующих.

($\bigstar$) **случай I**: $k_1 \neq k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

В заданных ограничениях имеем

$$\begin{aligned}
C_2'(x) &= c_1 e^{(k_1 - k_2)x} \\
C_2(x) &= \frac{c_1}{k_1 - k_2} e^{(k_1 - k_2)x} + \tilde{c_2} \\
y(x) = C_2(x) y_1(x) &= \underbrace{\frac{c_1}{k_1 - k_2}}_{\tilde{c_1}} e^{k_1 x} + \tilde{c_2} e^{k_2 x} \\
y(x) &= \tilde{c_1} e^{k_1 x} + \tilde{c_2} e^{k_2 x}
\end{aligned}$$

## 2.9. Решение ЛОДУ$_2$ с постоянными коэффициентами для случая вещественных кратных корней характеристического уравнения.

($\bigstar$) **случай II**: $k_1 = k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Пусть $k_1 = k_2 = k$, тогда получаем:

$$\begin{aligned} C_2'(x) &= c_1 e^{(k_1-k_2)x} \\ C_2(x) &= c_1 x + c_2 \\ y(x) = C_2(x) y_1(x) &= (c_1 x + c_2) e^{kx} \\ y(x) &= c_1 x \cdot e^{kx} + c_2 e^{kx} \end{aligned}$$

## 2.10. Решение ЛОДУ$_2$ с постоянными коэффициентами для случая комплексных корней характеристического уравнения.

($\bigstar$) **случай III**: $k_{1,2} = \alpha + \beta i, k_{1,2} \in \mathbb{C}$

В заданных ограничениях получаем

$$\begin{aligned} C_2'(x) &= c_1 e^{(k_1-k_2)x} \\ C_2(x) &= \frac{c_1}{k_1 - k_2} e^{(k_1-k_2)x} + \tilde{c_2} \\ y(x) = C_2(x) y_1(x) &= \underbrace{\frac{c_1}{k_1 - k_2}}_{\tilde{c_1}} e^{k_1 x} + \tilde{c_2} e^{k_2 x} \\ y(x) &= \tilde{c_1} e^{k_1 x} + \tilde{c_2} e^{k_2 x} \\ y(x) &= \tilde{c_1} e^{\alpha x} e^{\beta i x} + \tilde{c_2} e^{\alpha x} e^{-\beta i x} \end{aligned}$$

Далее используем формулу $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$:

$$\begin{aligned} y(x) = e^{\alpha x} \Big( \tilde{c_1} \big( \cos(\beta x) + i \sin(\beta x) \big) + \tilde{c_2} \big( \cos(\beta x) - i \sin(\beta x) \big) \Big) \\ y(x) = e^{\alpha x} \Big( \cos(\beta x) \underbrace{\big( \tilde{c_1} + \tilde{c_2} \big)}_{\widehat{c_1}} + i \sin(\beta x) \underbrace{\big( \tilde{c_1} - \tilde{c_2} \big)}_{\widehat{c_2}} \Big) \\ y(x) = e^{\alpha x} \Big( \widehat{c_1} \cos(\beta x) + \widehat{c_2} i \sin(\beta x) \Big) \end{aligned}$$

**TODO:** Конспект не очень хороший в этом моменте, возможно что-то неправильно

**Lm 2.10.17.** Если $y(x) = u(x) + iv(x)$ это решение ЛОДУ$_2$, то $y(x) = u(x) + v(x)$ также являются решением ЛОДУ$_2$.

*Доказательство.* Рассмотрим функцию $y(x) = u(x) + v(x)$:

$$\begin{cases} y(x) = u(x) + v(x) \\ y'(x) = u'(x) + v'(x) \\ y''(x) = u''(x) + v''(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y''(x) + py'(x) + qy(x) = u''(x) + v''(x) + pu'(x) + pv'(x) + u(x) + qu(x) + qv(x) = 0 \\ \Big( u''(x) + pu'(x) + qu(x) \Big) + \Big( v''(x) + pv'(x) + qv(x) \Big) = 0 \end{aligned}$$

Это равенство верно, т.к. $u(x)$ и $v(x)$ решения ЛОДУ$_2$. ■

Значит, по 2.10.17 общее решение ($\bigstar$) в третьем случае будет иметь вид

$$y(x) = e^{\alpha x} \Big( \widehat{c_1} \cos(\beta x) + \widehat{c_2} \sin(\beta x) \Big)$$

## 2.11. Свойства решений ЛОДУ$_2$: линейная независимость решений, определитель Вронского. Теоремы 1,2.

Рассмотрим множество $\Omega$ непрерывных функций с непрерывными производными 2ого порядка. Определим линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}[y] = y'' + py' + q \to f(x)$.

**Def 2.11.18.** Будем называть функции $y_1, \ldots, y_n$ линейно-независимыми на отрезке $[a;b]$, если

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i = 0 \implies \forall c_i = 0$$

**Def 2.11.19.** Определитель Вронского (вронскиан) $\mathcal{W}$ это определитель, составленный из $n$ функций и всех их производных вплоть до $(n-1)$-ого порядка. Он имеет вид:

$$\mathcal{W} = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

**Lm 2.11.20.** Если два решения ЛОДУ$_2$ линейно-зависимы на $[a;b]$, то их вронскиан на $[a;b]$ равен нулю.

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}[y_1] = 0 \\ &\mathcal{L}[y_2] = 0 \\ &y_1 = \lambda y_2 \end{aligned}\right\} \implies \mathcal{W} = 0$$

*Доказательство.*

$$\mathcal{W} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda y_2' & y_2' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_2 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0$$

■

**Lm 2.11.21.** Если два решения ЛОДУ$_2$ линейно-независимы на $[a;b]$, то их вронскиан на $[a;b]$ не равен нулю.

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}[y_1] = 0 \\ &\mathcal{L}[y_2] = 0 \\ &y_1 \neq \lambda y_2 \end{aligned}\right\} \implies \mathcal{W} \neq 0$$

*Доказательство.* От противного

$$\begin{aligned} \sqsupset \mathcal{W} = 0 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \mid : y_1^2 \neq 0 \\ \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = 0 \\ \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0 \\ \frac{y_2}{y_1} = const \\ y_1 = \lambda y_2 \end{aligned}$$

Получили противоречие. ■

**Теорема 2.11.22.** Линейная зависимость/независимость функций определяется равенством их вронскиана нулю.

*Доказательство.* Следствие из 2.11.20 и 2.11.21. ■

*Замечание* 2.11.23. Для проверки набора функций на линейную зависимость/независимость лучше использовать именно вронскиан, а не непосредственное определение линейной зависимости функций на отрезке.

**Теорема 2.11.24.** Рассмотрим функции на отрезке $[a;b]$. Если на этом отрезке найдется точка, в которой вронскиан равен нулю, вронскиан будет равен нулю на всем отрезке. Дуально, если найдется точка, в которой вронскиан не равен нулю, то он будет не равен нулю на всем отрезке.

$$\exists x_0 \in [a;b] \mid W(x_0) = W_0 \neq 0 \implies \forall x \in [a,b] \colon W(x) \neq 0$$
$$\exists x_0 \in [a;b] \mid W(x_0) = W_0 = 0 \implies \forall x \in [a,b] \colon W(x) = 0$$

*Доказательство.* Пусть $y_1$ и $y_2$ это решения ДУ, тогда

$$\Big\{ y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0 \cdot \ y_1 y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0 \mid \cdot \, y_2 \quad -$$
$$(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + p(y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0$$

Заметим, что выражение в левой скобке это $\mathcal{W}'$, а во правой — $\mathcal{W}$:

$$\mathcal{W} = y_1y_2' - y_1'y_2$$
$$\mathcal{W}' = (y_1y_2' - y_1'y_2)' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' = y_1y_2'' - y_1''y_2$$

Подставим это в полученное ранее уравнение:

$$(y_1y_2'' - y_2y_1'') + p(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0$$
$$\mathcal{W}' + p\mathcal{W} = 0$$
$$\mathcal{W} = c_1e^{-\int p\mathrm{d}x}$$
$$\mathcal{W}(x_0) = c_1e^{-\int_{x_0}^{x_0} p\mathrm{d}x} = c_1 = \mathcal{W}_0$$
$$\mathcal{W}(x) = c_1e^{-\int_{x_0}^{x} p\mathrm{d}x} = \mathcal{W}_0e^{-\int_{x_0}^{x} p\mathrm{d}x}$$

Таким образом, если $\mathcal{W}_0 = 0$, то $\mathcal{W}(x) = 0$ на всем отрезке $[a;b]$. Дуально, если $\mathcal{W}_0 \neq 0$, то т.к. второй множитель всегда больше нуля (это экспонента) $\mathcal{W}(x) \neq 0$.

**TODO:** Откуда такие границы в интегралах? ■

*Замечание* 2.11.25. Таким образом, чтобы узнать равен ли вронскиан нулю на отрезке, достаточно узнать его значение в одной произвольной точке этого отрезка.

## 2.12. Свойства решений ЛОДУ$_2$: линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Определитель Вронского. Теоремы о вронскиане.

**Lm 2.12.26.** Линейная комбинация решений ЛОДУ$_2$ также является решением.

$$\left.\begin{matrix}\mathcal{L}[y_1] = 0\\ \mathcal{L}[y_2] = 0\end{matrix}\right\} \implies \begin{cases}\mathcal{L}[y_1 + y_2] = 0\\ \mathcal{L}[\lambda y_1] = 0 \; (\forall\lambda \in \mathbb{R})\end{cases}$$

*Доказательство.* Рассмотрим на примере $y = y_1 + y_2$. Подставим в исходное ДУ, раскроем и сгруппируем

$$y'' + py' + qy = 0$$
$$(y_1 + y_2)'' + p(y_1 + y_2)' + q(y_1 + y_2) = 0$$
$$(y_1'' + py_1' + qy_1) + (y_2'' + py_2' + qy_2) = 0$$

Это верно, т.к. $y_1$ и $y_2$ это решения исходного ДУ. Случай $y = \lambda y_1$ рассматривает аналогично. ■

*Следствие* 2.12.27. Множество решений ЛОДУ образует линейное пространство.

**Теорема 2.12.28.** О существовании и единственности решения ЛОДУ$_2$.

$$y'' = g(x, y, y') = f(x) - py' - qy$$

Если $g, g_y', g_{y'}'$ непрерывны в области $D \ni (x_0, y_0)$, то задача Коши

$$\begin{cases}\mathcal{L}[y] = f(x)\\ y_0 = y(x_0)\\ y_0' = y'(x_0)\end{cases}$$

имеет единственное решение.

*Доказательство. (Без доказательства)* ■

## 2.13. Свойства решений ЛОДУ$_2$ : линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ$_2$. Фундаментальная система решений (определение).

**Теорема 2.13.29.** О структуре общего решения ЛОДУ$_2$.

Если $\mathcal{L}[y_1] = 0$, $\mathcal{L}[y_2] = 0$ и $y_1, y_2$ линейно независимы, то $\overline{y} = c_1y_1 + c_2y_2$ – общее решение ЛОДУ$_2$.

*Доказательство.* Начнем с того, что $\overline{y} = c_1y_1 + c_2y_2$ это решение как линейная комбинация решений (см. 2.12.26). Рассмотрим точку $(x_0, y_0)$ в рамках задачи Коши:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[y] = 0 \\ y_0 = y(x_0) \\ y_0' = y'(x_0) \end{cases} \iff \begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y_0 \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = y_0' \end{cases} \iff \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$$

**TODO:** Глянуть переходы выше, в конспекте противоречиво написано

По т. Крамера решение полученной СЛАУ будет единственным только в том случае, если определитель главной матрицы не равен нулю. Это выполняется, т.к. этот определитель это вронскиан, который не равен нулю, т.к. решения линейно-независимы. ∎

**Def 2.13.30.** Фундаментальная система решений (ФСР) ЛОДУ$_n$ это максимальный (по включению) набор линейно независимых решений ДУ.

## 2.14. Свойства решений ЛНДУ$_2$ : теоремы о структуре общего решения и решении ДУ с суммой правых частей.

**Теорема 2.14.31.** Общее решение ЛНДУ$_2$ представимо в виде суммы общего решения соответствующего ЛОДУ$_2$ и некоторого частного решения ЛНДУ$_2$.

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy = f(x) \\ y = \overline{y} + y^* \\ \mathcal{L}[\overline{y}] = 0, \mathcal{L}[y^*] = f(x) \end{aligned}$$

*Доказательство.* Сначала покажем, что $y$ будет являться решением ДУ:

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\overline{y}] + \mathcal{L}[y^*] = 0 + f(x) = f(x)$$

Показать, что это решение будет являться общим можно аналогично 2.13.29. ∎

**Lm 2.14.32.** Если правая часть ЛНДУ$_2$ представлена суммой $f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение этого ЛНДУ$_2$ будет суммой двух частных решений ЛНДУ$_2$, в которых правая часть является каждым из слагаемых.

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x) \\ \mathcal{L}[y_1^*] = f_1(x), \mathcal{L}[y_2^*] = f_2(x) \\ y^* = y_1^* + y_2^* \end{aligned}$$

*Доказательство.*

$$\mathcal{L}[y^*] = \mathcal{L}[y_1^*] + \mathcal{L}[y_2^*] = f_1(x) + f_2(x)$$

∎

## 2.15. Структура решения ЛОДУ$_n$: линейная независимость решений, нахождение фундаментальной системы решений по корням характеристического уравнения.

*Замечание* 2.15.33. О существовании и единственности решения задачи Коши.

Пусть

$$y^{(n)} = g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

при этом $y, y', g$ непрерывны и ограничены в области

$$\begin{aligned} |x - x_0| < h_0, \\ |y - y_0| < h_1, \\ \dots \\ \left|y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}\right| < h_n, \end{aligned}$$

где $(x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ это начальные условия. Тогда существует единственное решение задачи Коши.

**TODO:** Разве не все частные производные по $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ должны бы непрерывны?

По аналогии с ЛОДУ$_2$ для ЛОДУ$_n$ можно составить характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y] = y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_{n-1}y' + p_n y = 0 \quad p_i \in \mathbb{R} \\ \mathcal{L}[e^{kx}] = k^n e^{kx} + p_1 \cdot k^{n-1} e^{kx} + \ldots + p_n e^{kx} = 0 \,|: e^{kx} \neq 0 \\ k^n + p_1 k^{n-1} + \ldots + p_n = 0 \end{aligned}$$

Далее аналогично рассмотрим некоторые случаи:

1. Набору $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{R}$ различных вещественных корней соответствует набор частных линейно-независимых решений однородного уравнения $y_1 = e^{k_1 x}, \ldots, y_m = e^{k_m x}$.
2. Набору $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = k \in \mathbb{R}$ повторяющихся вещественных корней соответствует набор частных линейно-независимых решений однородного уравнения $y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}, \ldots, y_m = x^{m-1}e^{kx}$.
3. Каждой уникальной паре вида $k = \alpha + i\beta$ соответствует пара частных линейно-независимых решений однородного уравнения $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$.
4. Каждой паре кратности $m$ вида $k = \alpha + i\beta$ соответствует $m$ пар частных линейно-независимых решений однородного уравнения вида

$$\begin{array}{cccccc} y_1 & = & e^{\alpha x}\cos\beta x, & y_2 & = & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ y_3 & = & xe^{\alpha x}\cos\beta x, & y_4 & = & xe^{\alpha x}\sin\beta x \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ y_{2m-1} & = & x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, & y_{2m} & = & x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{array}$$

*Замечание* 2.15.34. Общим решением ЛОДУ$_n$ будет линейная оболочка набора частных решений, соответствующих корням характеристического уравнения.

**Def 2.15.35.** Вронскианом ДУ называется вронскиан его ФСР.

*Замечание* 2.15.36. Все доказанные свойства вронскиана распространяются и на бОльшую размерность.

**TODO:** Ударение меня победило

## 2.16. Решение ЛНУ$_2$ с постоянными коэффициентами: специальная правая часть, поиск частного решения методом неопределенных коэффициентов.

**Def 2.16.37.** Специальной правой частью называется (СПЧ)

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$$

где $\alpha, \beta, n, m$ некоторые коэффициенты.

### Поиск частного решения методом неопределенных коэффициентов

Идея: пусть в ЛНДУ$_n$ правая часть является специальной. Можно предположить, что она была получена дифференцированием функции со схожей структурой, поэтому будем искать частное решение ЛНДУ$_n$ в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(U_l(x)\cos\beta x + W_l(x)\sin\beta x),\; l = max(n, m)$$

Алгоритм:

1. Составляем и решаем характеристическое уравнение.
2. Извлекаем из СПЧ коэффициенты $\alpha, \beta, n, m$.
3. Считаем $r$ — количество совпадений корней характеристического уравнения с $\alpha \pm i\beta$. Совпадение комплексной пары считаем один раз.
4. Составляем $y^*$ с неопределенными коэффициентами: полиномы $U, W$ степени $l = max(n, m)$.
5. Подставляем $y^*$ в уравнение, находим неопределенные коэффициенты.

Пример #01:

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x} \\ k^2 - 3k + 2 = 0 \\ k_1 = 1, k_2 = 2 \\ 2e^{3x} \implies \alpha = 3, \beta = 0, n = 0, m = 0 \end{aligned}$$

Число $\alpha + i\beta$ не совпадает с корнями характеристического уравнения, поэтому будем искать частное решение в виде $y^* = Ae^{3x}$:

$$\begin{aligned}(Ae^{3x})'' - 3(Ae^{3x})' + 2(Ae^{3x}) &= 2e^{3x}\\ 9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} &= 2e^{3x} \mid : e^{3x}\\ 9A - 9A + 2A &= 2\\ A &= 1\end{aligned}$$

Итого: частное решение будет равно $y^* = e^{3x}$

Пример #02:

$$\begin{aligned}y'' - 3y' + 2y &= e^x\\ k^2 - 3k + 2 &= 0\\ k_1 = 1, k_2 &= 2\\ e^x \implies \alpha = 1, \beta = 0, n &= 0, m = 0\end{aligned}$$

Корень характеристического уравнения $k_1$ совпал с числом $\alpha + i\beta$, поэтому будем искать частное решение в виде $y^* = Axe^x$:

$$\begin{aligned}(Axe^x)'' - 3(Axe^x)' + 2(Axe^x) &= e^x\\ e^x(2A + Ax) - 3e^x(A + Ax) + 2Axe^{3x} &= 2e^{3x} \mid : e^x\\ 2A + Ax - 3A - 3Ax + 2Ax &= 2\\ A &= -2\end{aligned}$$

Итого: частное решение будет равно $y^* = -2e^x$

*Замечание* 2.16.38. Почему необходимо умножать на $x^r$? Если этого не делать, то полученное уравнение с неопределенными коэффициентами не будет иметь решений. Это происходит в тех случаях, когда выбранное частное решение совпадает с общим решением (именно поэтому мы смотрим на корни характеристического уравнения, потому что общее решение формируется на их основе). В этих случаях нарушается структура общего решения ЛНДУ$_n$.

## 2.17. Решение ЛНУ$_2$ : метод вариации произвольных постоянных (Лагранжа).

Метод универсален для правой части любого вида и даже для $\mathcal{L}[y] = f(x)$ с непостоянными коэффициентами.

Рассмотрим на примере:

$$\begin{aligned}y'' - 3y' + 2y &= 2e^{3x}\\ k^2 - 3k + 2 &= 0\\ k_1 = 1, k_2 &= 2\\ \overline{y} = c_1 \underbrace{e^x}_{y_1} &+ c_2 \underbrace{e^{2x}}_{y_2}\end{aligned}$$

Будем искать $y(x)$ в виде $y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2(x)$. Пусть $C_1(x) = g(x) + c_1, C_2(x) = h(x) + c_2$, тогда:

$$\begin{aligned}y(x) &= (g(x) + c_1)y_1 + (h(x) + c_2)y_2\\ y(x) &= \underbrace{c_1y_1 + c_2y_2}_{\overline{y}} + \underbrace{g(x)y_1 + h(x)y_2}_{y^*}\end{aligned}$$

В нашем примере получаем, что $y^* = g(x)e^x + h(x)e^{2x}$. Заметим, что функции $g(x)$ и $h(x)$ можно представить по-разному. Подберем их так, чтобы выполнялось равенство

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \qquad (\blacktriangle)$$

Вычислим производные $y'(x)$ и $y''(x)$:

$$\begin{aligned}y(x) &= y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2(x)\\ y'(x) &= \underbrace{C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2}_{\blacktriangle \to 0} + C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'\\ y''(x) &= C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2''\end{aligned}$$

Вернемся к исходному ДУ и подставим в него все полученные равенства:

$$
\begin{array}{rcccccccc}
y''(x) & = & C_1'(x)y_1' & + & C_1(x)y_1'' & + & C_2'(x)y_2' & + & C_2(x)y_2'' \\
py'(x) & = & & & pC_1(x)y_1' & & & + & pC_2(x)y_2' \\
qy(x) & = & & & qC_1(x)y_1 & & & + & qC_2(x)y_2 \\
f(x) & = & C_1'(x)y_1' & + & 0 & + & C_2'(x)y_2' & + & 0
\end{array}
$$

Суммы во втором и четвертом столбцах обнуляются, т.к. если вынести из них $C_1(x)$ и $C_2(x)$ соответственно, то в скобках останется ЛОДУ$_2$, а $y_1, y_2$ — его корни.

Таким образом мы получили второе условие для системы (первое условие это ($\blacktriangle$)) для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Искомая система будет иметь вид:

$$
\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}
$$

Подведем итог и обобщим алгоритм решения ЛНДУ$_n$:

1. Решаем соответствующее ЛОДУ$_n$, получаем набор корней $y_1, \ldots, y_n$.
2. Составляем СЛАУ следующего вида:

$$
\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}
$$

3. Решаем её и находим производные варьируемых функций. Интегрируем их (не забывая про константу).
4. Общее решение ЛНДУ$_n$ будет иметь вид $y = C_1(x)y_1 + \ldots + C_n(x)y_n$

## 2.18. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение методом исключения.

## 2.19. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение матричным методом в случае различных вещественных собственных чисел.

## 2.20. Теория устойчивости: определение устойчивости по Ляпунову, фазовая плоскость, траектории ДУ. Примеры устойчивого и неустойчивого решения