

# MA E<sub>χ</sub> 02

isagila

@pochtineploho

@DUBSTEPHAVEGUN

Собрано 18.06.2023 в 18:49



# Содержание

<b>1. Интегрирование функции одной переменной</b>	<b>3</b>
1.1. Определение и свойства неопределенного интеграла. . . . .	3
1.2. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям. . . . .	3
1.3. Интегрирование рациональных функций (общая схема). Разложение дроби на простейшие. . . . .	4
1.4. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование простейших дробей 1,2,3. . . . .	5
1.5. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка. . . . .	6
1.6. Интегрирование тригонометрических функций вида $R(\sin^m x, \cos^n x)$ , $R(\sin mx, \cos nx)$ . . . . .	6
1.7. Интегрирование некоторых иррациональных функций, метод тригонометрической подстановки. . . . .	7
1.8. Определенный интеграл. Определение, свойства линейности и аддитивности. . . . .	8
1.9. Геометрический смысл определенного интеграла. Оценка определенного интеграла. Теорема о среднем. . . . .	9
1.10. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Барроу. . . . .	10
1.11. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. . . . .	10
1.12. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. . . . .	10
1.13. Приложения определенного интеграла: вычисление площадей в декартовых координатах. . . . .	11
1.14. Приложения определенного интеграла: вычисление площади криволинейного сектора в полярных координатах. . . . .	11
1.15. Приложения определенного интеграла: вычисление длины дуги кривой (вывод формулы). . . . .	12
1.16. Приложения определенного интеграла: вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически. . . . .	12
1.17. Приложения определенного интеграла: вычисление объемов тел с известными площадями сечений и тел вращения. . . . .	13
1.18. Несобственные интегралы 1-го рода (на неограниченном промежутке). Определение и свойства. . . . .	13
1.19. Вычисление несобственного интеграла 1-го рода: формула Ньютона-Лейбница, интегрирование по частям, замена переменной. . . . .	14
1.20. Несобственные интегралы 2-го рода (от неограниченной функции). Определение, вычисление и свойства. . . . .	14
1.21. Признаки сходимости несобственных интегралов: первый признак сравнения (в неравенствах). . . . .	14
1.22. Признаки сходимости несобственных интегралов: второй признак сравнения (предельный). . . . .	15
1.23. Признаки сходимости несобственных интегралов: теорема об абсолютной сходимости. Понятие условной сходимости. . . . .	15
1.24. Сходимость интегралов 1-го и 2-го рода от степенных функций. . . . .	16
<b>2. Интегрирование функции нескольких переменных</b>	<b>18</b>
2.1. Двойной интеграл. Определение и свойства. . . . .	18
2.2. Вычисление двойного интеграла. Кратный интеграл. . . . .	19
2.3. Определение и вычисление тройного интеграла. . . . .	19
2.4. Криволинейные координаты. . . . .	20
2.5. Замена переменных в двойном и тройном интегралах. Якобиан. . . . .	20
2.6. Криволинейный интеграл 1-го рода: определение, свойства, вычисление, геометрический и физический смысл. . . . .	21
2.7. Криволинейный интеграл 2-го рода как работа силы вдоль пути. Определение, вычисление и свойства. . . . .	22
2.8. Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода: формула связи. . . . .	22
2.9. Теорема (формула) Грина. . . . .	23
2.10. Интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Теорема о независимости интеграла от пути, равносильность I, II, III утверждений. . . . .	24
2.11. Интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Теорема о независимости интеграла от пути, равносильность III, IV утверждений. . . . .	25
2.12. Следствие теоремы о независимости от пути (формула Ньютона-Лейбница). . . . .	25
2.13. Поверхностный интеграл 1-го рода: определение, свойства, вычисление, геометрический и физический смысл. . . . .	26
2.14. Поверхностный интеграл 2-го рода как поток жидкости через поверхность. . . . .	27
2.15. Связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода. . . . .	28
2.16. Поверхностный интеграл 2-го рода: математическое определение, вычисление, свойства. . . . .	28
2.17. Теорема Гаусса-Остроградского. . . . .	29
2.18. Теорема Стокса. . . . .	29
2.19. Скалярное и векторное поля: определения, геометрические характеристики. Дифференциальные и интегральные характеристики полей (определения). . . . .	30
2.20. Виды векторных полей и их свойства (теоремы о поле градиента и поле вихря). . . . .	31
2.21. Механический смысл потока и дивергенции. . . . .	32
2.22. Механический смысл вихря и циркуляции. . . . .	33
2.23. Векторная запись теорем теории поля и их механический смысл. . . . .	33

# 1. Интегрирование функции одной переменной

## 1.1. Определение и свойства неопределенного интеграла.

**Def 1.1.1.** Кусочная дифференцируемая функция  $F(x)$  называется первообразной для функции  $f(x)$ , если  $F'(x) = f(x)$ .

**Теорема 1.1.2.** Разность двух первообразных для одной и той же функции — константа.

*Доказательство.* Пусть дана функция  $f(x)$  и две её первообразные  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$ . Обозначим их разность как  $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ . Производная этой функции будет равна  $\varphi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ .

Из множества дифференцируемости  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  выберем наименьшее и выделим в нем отрезок  $[a; x]$ . По т. Лагранжа:

$$\exists \xi \in (a; x): \varphi'(\xi) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}$$

Т.к.  $\forall \xi: \varphi'(\xi) = 0$ , то  $\varphi(x) - \varphi(a) = 0$ , т.е.  $\varphi(x) = \varphi(a)$ . Т.к. отрезок произвольный, то значения функции  $\varphi(x)$  равны во всех точках, т.е. она константа. ■

*Следствие 1.1.3.* Первообразные для  $f(x)$  составляют множество функций вида  $\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ , где  $F(x)$  это какая-либо первообразная.

**Def 1.1.4.** Семейство первообразных функции  $f(x)$  называется неопределенным интегралом функции  $f(x)$  по аргументу  $x$ .

*Замечание 1.1.5.* О существовании первообразной

Не для каждой функции существует первообразная, но для каждой непрерывной на отрезке. Даже если первообразная существует, то она не всегда выражается в элементарных функциях, например,  $\int e^{-x^2} dx$ .

Далее рассмотрим некоторые свойства неопределенного интеграла.

**Lm 1.1.6.**

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

*Доказательство.*

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx \implies \int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$$

**Lm 1.1.7.**

$$\left( \int f(x)dx \right)' = f(x)$$

*Доказательство.*

$$\left( \int f(x)dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

**Lm 1.1.8.** Линейность

$$\begin{aligned} \int \alpha f(x)dx &= \alpha \int f(x)dx \\ \int (f(x) + g(x))dx &= \int f(x)dx + \int g(x)dx \end{aligned}$$

*Доказательство.*

$$\int \alpha f(x)dx = \int d(\alpha F(x)) = \alpha F(x) + C$$

При первом переходе используется свойство линейности дифференциала, а при втором — 1.1.6. Доказательство для суммы функций аналогично. ■

## 1.2. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям.

*Замечание 1.2.1.* Таблица интегралов

$$\begin{array}{ll}
\int 0 dx = C & \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \\
\int 1 dx = x + C & \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \\
\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, x > 0 & \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad |x| < |a| \\
\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C & \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \\
\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C & \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \quad |x| \neq a \\
\int e^x dx = e^x + C & \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \\
\int \sin x dx = -\cos x + C & \int \cos x dx = \sin x + C
\end{array}$$

*Замечание 1.2.2.* Интеграл сохраняет инвариантность своей формы, т.е.

$$\int f(\clubsuit) d\clubsuit = F(\clubsuit) + C$$

**Теорема 1.2.3.** О замене производной в неопределенном интеграле

Если  $x = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  обратимая и дифференцируемая функция, то

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

*Доказательство.* Возьмем производные от обеих частей:

$$\begin{aligned}
& \left( \int f(x) dx \right)'_x = f(x) \\
& \left( \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right)'_x = \left( \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right)'_t \frac{dt}{dx} \stackrel{1.1.7}{=} f(\varphi(t)) \varphi'(t) \frac{dt}{dx} = f(\varphi(t)) \varphi'(t) \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x)
\end{aligned}$$

*Замечание 1.2.4.* Формула работает в обе стороны:

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx & \stackrel{\sqrt{x}=t}{=} \int \frac{e^t}{t} 2t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C \\
\int e^{x^2} \underbrace{2x dx}_{dx^2} & \stackrel{x^2=t}{=} \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2} + C
\end{aligned}$$

**Теорема 1.2.5.** Интегрирование по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

*Доказательство.* Рассмотрим равенство  $(uv)' = u'v + uv'$  и проинтегрируем обе его части:

$$\begin{aligned}
& (uv)' = u'v + uv' \\
& \int (uv)' dx = \int (u'v + uv') dx \\
& uv = \int u'v dx + \int uv' dx && \text{Линейность интеграла (1.1.8)} \\
& uv = \int v du + \int u dv && \text{Внесение под дифференциал (1.2.3)} \\
& \int u dv = uv - \int v du
\end{aligned}$$

*Замечание 1.2.6.* Интегрирование по частям используется если  $\int v du$  вычисляется проще, чем интеграл  $\int u dv$ . В качестве функции  $u$  выбирают ту, которая упрощается при дифференцировании.

### 1.3. Интегрирование рациональных функций (общая схема). Разложение дроби на простейшие.

Выделим 4 типа простейших дробей:

$$(I): \frac{A}{x-a} \quad (II): \frac{A}{(x-a)^k} \quad (III): \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad (IV): \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$

где  $(x^2 + px + q)$  неразложимый на множители многочлен, а  $A, M, N$  — неопределенные коэффициенты.

Метод неопределенных коэффициентов:

Пусть дана дробь  $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ , в которой  $Q_m(x)$  и  $P_n(x)$  это многочлены с вещественными коэффициентами. Требуется разложить её на простейшие.

1. Если  $m \geq n$ , то необходимо выделить целую часть. Далее будем считать, что  $m < n$ .

2. Раскладываем знаменатель на множители, т.е. приводим его к виду

$$P_n = a_0(x-x_1)^{b_1} \dots (x-x_t)^{b_t} (x^2+p_1x+q_1)^{c_1} \dots (x^2+p_rx+q_r)^{c_r}$$

3. Для каждой скобки в знаменателе записываем некоторую дробь по следующему правилу:

$$\begin{aligned} (x-x_i) &\rightarrow \frac{A}{x-x_i} \\ (x-x_i)^k &\rightarrow \frac{A}{x-x_i} + \dots + \frac{A_k}{(x-x_i)^k} \\ (x^2+p_ix+q_i) &\rightarrow \frac{Ax+B}{x^2+p_ix+q_i} \\ (x^2+p_ix+q_i)^k &\rightarrow \frac{Ax+B}{x^2+p_ix+q_i} + \dots + \frac{A_kx+B_k}{(x^2+p_ix+q_i)^k} \end{aligned}$$

У каждой скобки будет свой набор констант.

4. Получаем уравнение относительно коэффициентов  $A, B, \dots$ , которые находятся в числителе полученных дробей.

5. Приводим полученную дробь к общему знаменателю и приравниваем её к исходной дроби.

6. Т.к. знаменатели полученных дробей равны, то должны быть равны и числители. Пользуемся тем, что два полинома равны когда равны все коэффициенты перед одинаковыми степенями. Получаем систему уравнений (по количеству коэффициентов).

7. Решаем систему, находим коэффициенты. Подставляем их в разложение исходной дроби на сумму простейших дробей.

Теперь интегрирование рациональных дробей свелось к тому, чтобы разложить их на простейшие, а потом, пользуясь линейностью интеграла (1.1.8), проинтегрировать каждую из дробей по-отдельности. Подробнее об интегрировании простейших дробей написано в вопросе 1.4.

#### 1.4. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование простейших дробей 1,2,3.

- Интегрирование простейших дробей I-ого типа

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + C$$

- Интегрирование простейших дробей II-ого типа

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{A}{1-k} \cdot (x-a)^{1-k} = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}}$$

- Интегрирование простейших дробей III-его типа

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx \quad (1)$$

Попытаемся внести числитель под дифференциал:

$$\begin{aligned} d(x^2+px+q) &= (2x+p)dx \\ (Mx+N) &= \frac{M}{2} \left( 2x + \frac{2N}{M} \right) = \frac{M}{2} \left( 2x+p + \frac{2N}{M} - p \right) = \frac{M}{2} (2x+p) + \underbrace{\left( N - \frac{Mp}{2} \right)}_h \end{aligned}$$

Подставим это в (1):

$$\int \frac{\frac{M}{2}(2x+p) + h}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \cdot \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \int \frac{h}{x^2+px+q} dx$$

Далее вычислим каждый из интегралов по-отдельности:

$$\begin{aligned}\frac{M}{2} \cdot \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx &= \frac{M}{2} \cdot \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} = \frac{M}{2} \cdot \ln|x^2+px+q| + C \\ \int \frac{h}{x^2+px+q} dx &= h \cdot \int \frac{1}{(x+p/2)^2 + \underbrace{q-(p/2)^2}_{g^2}} dx = \frac{h}{g} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{x+p/2}{g} \right) + C\end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в исходный интеграл (1):

$$\begin{aligned}\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \frac{M}{2} \cdot \ln|x^2+px+q| + \frac{h}{g} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{x+p/2}{g} \right) + C \\ h &= \left( N - \frac{Mp}{2} \right), g^2 = q - \left( \frac{p}{2} \right)^2\end{aligned}$$

• Интегрирование простейших дробей IV-ого типа

Пример 1.4.1.

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

Первый из полученных интегралов мы уже вычислить, это простейшая дробь III-ого типа. Таким образом этот интеграл будет равен  $\operatorname{arctg} x + C$ . Далее работаем со вторым интегралом:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{x d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \left[ \frac{dt}{t^2} = -d\left(\frac{1}{t}\right) \right] = -\frac{1}{2} \cdot \int x \cdot d\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \quad (2)$$

Полученный интеграл возьмем по частям:

$$\int \underbrace{\frac{x}{u}}_u d \underbrace{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}_v = \frac{x}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x + C \quad (3)$$

Подставим (3) в (2), а полученное выражение в исходный интеграл (1):

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} &= \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \\ &= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x \right) + C = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C\end{aligned}$$

*Замечание 1.4.2.* В случаях с более высокой степенью каждая подобная итерация будет приводить к уменьшению степени знаменателя на единицу. Обычно подобные интегралы раскладываются с помощью подведения под дифференциал и линейности, после чего используется следующая рекуррентная формула:

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} \cdot I_{n-1}$$

## 1.5. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка.

*Замечание 1.5.1.* Всякая рациональная дробь интегрируемая, поэтому можно попытаться с помощью замены свести функции другого вида к рациональным дробям.

Если требуется вычислить интеграл вида  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ , где  $R$  это некоторая *рациональная* функция, то можно применить универсальную тригонометрическую подстановку:

$$x = 2 \operatorname{arctg} t \iff t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

Тогда составляющие интеграла преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}\sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin x/2 \cos x/2}{\sin^2 x/2 + \cos^2 x/2} = \frac{2 \operatorname{tg} x/2}{\operatorname{tg}^2 x/2 + 1} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2}{\sin^2 x/2 + \cos^2 x/2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x/2}{\operatorname{tg}^2 x/2 + 1} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx &= d(2 \operatorname{arctg} t) = \frac{2}{1+t^2} dt\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в исходный интеграл, получаем:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \stackrel{\text{УТП}}{=} \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

## 1.6. Интегрирование тригонометрических функций вида $R(\sin^m x, \cos^n x)$ , $R(\sin mx, \cos nx)$ .

Рассмотрим интегралы вида  $\int \sin^m x \cos^n x dx$

1.  $n$  или  $m$  нечетное

Пусть  $n$  нечетное, тогда  $n = 2k + 1$ . Подставим это в исходный интеграл:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k d(\sin x) \stackrel{t = \sin x}{=} \int t^m (1 - t^2)^k dt$$

Получили интеграл от полинома  $\Rightarrow$  умеем его решать.

2.  $m$  и  $n$  четные

Обозначим  $m = 2p$ ,  $n = 2q$ , тогда:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int (\sin^2 x)^p (\cos^2 x)^q dx = \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^p \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^q dx$$

Далее раскрываем скобки и упрощаем. Получится либо первый случай (с нечетной степенью), либо второй, но с меньшей степенью.

Интегралы видов

- $\int \sin mx \sin nx dx$
- $\int \sin mx \cos nx dx$
- $\int \cos mx \cos nx dx$

решаются при помощи использования тригонометрических формул, которые сводят произведение к сумме/разности:

$$\begin{aligned} \sin mx \sin nx &= \frac{1}{2} (\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)) \\ \sin mx \cos nx &= \frac{1}{2} (\sin((m-n)x) + \sin((m+n)x)) \\ \cos mx \cos nx &= \frac{1}{2} (\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)) \end{aligned}$$

**TODO:** На лекции были интегралы вида  $\int \sin^m x \cos^n x dx$ , а не  $R(\sin^m x, \cos^n x)$ .

## 1.7. Интегрирование некоторых иррациональных функций, метод тригонометрической подстановки.

- Интегралы вида  $\int R(\sqrt{x^2 \pm 1}, x) dx$  решаются с помощью замены  $x$  на гиперболическую функцию:

$$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \quad \cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

Данные функции называются гиперболическим синусом и гиперболическим косинусом соответственно.

**Lm 1.7.1.** Основное гиперболическое тождество

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$$

*Доказательство.*

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = \left( \frac{e^u + e^{-u}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^u - e^{-u}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2u} + 2 + e^{-2u} - e^{2u} + 2 - e^{-2u}) = 1$$

■

*Замечание 1.7.2.* Заметим, что

$$\ln |\sinh u + \cosh u| = \ln \left| \frac{e^u - e^{-u}}{2} + \frac{e^u + e^{-u}}{2} \right| = \ln e^u = u$$

Пример 1.7.3. Вычислим 'длинный' логарифм:

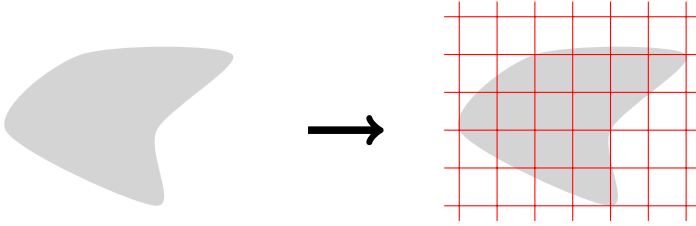
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[ \begin{array}{l} x = \sinh u \Rightarrow 1+x^2 = \cosh^2 u \\ dx = d(\sinh u) = \cosh u du \\ u = \ln \left| \underbrace{x}_{\sinh u} + \underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{\cosh u} \right| \end{array} \right] \stackrel{(1.7.2)}{=} \int \frac{\cosh u}{\cosh u} du = u + C = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + C$$

- Интегралы вида  $\int R(\sqrt{1-x^2}, x) dx$  решаются с помощью замены  $x$  на синус или косинус.
- Интегралы вида  $\int R(\sqrt[k]{x}, \dots, \sqrt[k]{x}) dx$  решаются с помощью замены  $t = \sqrt[k]{x}$ , где  $K$  это НОД для  $k_1, \dots, k_n$ .
- Интегралы вида  $\int R(\sqrt{ax+b}, x) dx$  решаются с помощью замены  $t = \sqrt{ax+b}$ . При этом  $x = \frac{t^2-b}{a}$ ,  $dx = \frac{2t}{a} dt$ .

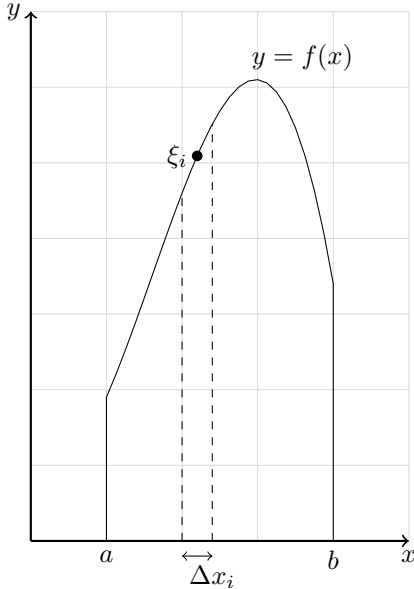


## 1.8. Определенный интеграл. Определение, свойства линейности и аддитивности.

Постановка задачи: требуется найти площадь криволинейной фигуры. Разобьем фигуру на квадраты и найдем площадь каждого из них. После это сложим полученные площади.



Упростим задачу: пусть нужно посчитать площадь криволинейной трапеции.



1. Разбиение области  $[a; b]$ :  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Отрезок  $[x_{i-1}, x_i]$  назовем частичным, его длину обозначим  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Разбиение (дробление) обозначим  $T = \{x_i\}_{i=0}^n$ . Введем понятие *ранга* дробления  $\tau$ :  $\tau = \max \Delta x_i$ .
2. Выберем среднюю точку  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Тогда  $f(\xi_i)$  это высота элементарного прямоугольника. Значит площадь элементарного прямоугольника будет равна  $S_e = f(\xi_i)\Delta x_i$ .
3. Просуммируем площади всех элементарных прямоугольников:  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ . Данная сумма называется интегральной суммой Римана.
4. Возьмем предел при  $n \rightarrow \infty$  и  $\tau \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \quad (1)$$

**Def 1.8.1.** Если полученный предел интегральных сумм (1) существует, конечен, не зависит от дробления и выбора средней точки, то он называется определенным интегралом.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

$a, b$  называются пределами интегрирования,  $f(x)$  — подынтегральной функцией, а  $dx$  — дифференциалом переменной (или элементом длины).

*Замечание 1.8.2.* В определении выше  $a < b$ . Доопределим для случаев  $a = b$  и  $a > b$ :

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

*Замечание 1.8.3.* Интеграл Римана определен для кусочно-непрерывных (т.е. имеющих конечное число разрывов) функций.

Т.к. интеграл является пределом сумм, то его свойства вытекают из свойств пределов:

1. Линейность

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

2. Аддитивность

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

*Замечание 1.8.4.* Свойство аддитивности выполняется даже в случае, если  $c \notin [a; b]$ . Это легко проверить пользуясь свойством 1.8.2.



### 1.9. Геометрический смысл определенного интеграла. Оценка определенного интеграла. Теорема о среднем.

Геометрический смысл определенного интеграла следует из его построения: определенный интеграл по модулю равен площади криволинейной трапеции.

**Лм 1.9.1.** Пусть  $f \in C_{[a;b]}$  и определен  $\int_a^b f(x)dx$ .  $m, M$  — наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ . Тогда

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)M$$

*Доказательство.*

$$\forall x \in [a; b]: m \leq f(x) \leq M \implies \forall \xi_i \in [a; b]: m \leq f(\xi_i) \leq M$$

$$m\Delta x_i \leq f(\xi_i)\Delta x_i \leq M\Delta x_i$$

$$m \sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \leq M \sum_{i=1}^n \Delta x_i$$

$$m \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \leq M \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta x_i$$

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)M$$

■

**Теорема 1.9.2.** Теорема Лагранжа о среднем (в интегральной форме)

Пусть  $f \in C_{[a;b]}$  и определен  $\int_a^b f(x)dx$ . Тогда

$$\exists \xi \in (a; b): \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

*Доказательство.* Воспользуемся леммой 1.9.1:

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)M \implies m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx \leq M$$

По т. Больцано-Коши функция  $f(x)$  принимает все значения от минимального  $m$  до максимального  $M$ . Значит  $\exists \xi \in (a; b)$ , что

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx \implies \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

■

*Замечание 1.9.3.* Геометрический смысл теоремы Лагранжа заключается в том, что на промежутке  $(a; b)$  всегда найдется такая точка  $\xi$ , что площадь криволинейной трапеции будет в точности равна площади прямоугольника со сторонами  $(b-a)$  и  $f(\xi)$ .

**Лм 1.9.4.** Если  $f(x), g(x) \in C_{[a;b]}$ , определены  $\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx$  и при этом  $\forall x \in [a; b]: f(x) \geq g(x)$ , то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $h(x) = f(x) - g(x)$ . Она будет неотрицательная на отрезке  $[a; b]$ , значит  $\int_a^b h(x)dx \geq 0$ . Далее пользуемся аддитивностью и получаем искомое неравенство. ■

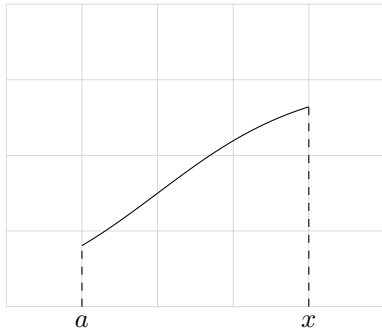
**Лм 1.9.5.** Пусть  $f \in C_{[a;b]}$  и определен  $\int_a^b f(x)dx$ . Тогда

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

*Доказательство.* Т.к. определенный интеграл это предел интегральных сумм, то можно воспользоваться предельным переходом, а затем свойством о том, что модуль суммы не превосходит сумму модулей. ■

*Замечание 1.9.6.* Выкалывание из отрезка  $[a; b]$  конечного числа точек не меняет значение интеграла.

## 1.10. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Барроу.



**Def 1.10.1.** Интегралом с переменных верхним пределом называется

$$\int_a^x f(t)dt$$

где  $x$  — переменный верхний предел.

*Замечание 1.10.2.*  $\forall x \in [a; +\infty]$  соответствует определенное значение  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ , т.е. определена функция верхнего предела, которая геометрически является площадью криволинейной трапеции с подвижным правым краем.

### Теорема 1.10.3. Теорема Барроу

Пусть  $f \in C_{[a;b]}$  и определен  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ . Тогда  $\Phi'(x) = f(x)$ .

*Доказательство.* Раскроем производную  $\Phi'(x)$  по определению, после чего воспользуемся линейностью интеграла:

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}$$

Далее по т. Лагранжа (1.9.2)  $\exists \xi \in (x; x + \Delta x)$  такая, что:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \left[ \begin{array}{l} \Delta x \rightarrow 0 \\ \xi \in (x, x + \Delta x) \end{array} \right] \Rightarrow \xi \rightarrow x = f(x)$$

## 1.11. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.

### Теорема 1.11.1. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть  $f(x) \in C_{[a;b]}$ , определен  $\int_a^b f(x)dx$  и  $F(x)$  это некоторая первообразная для  $f(x)$ . Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ , где  $x \in [a; b]$ . Тогда по т. Барроу (1.10.3)  $\Phi(x) = F(x) + C$ . Найдем значение функции  $\Phi(x)$  в точке  $a$ :

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 \\ \Phi(a) = F(a) + C \end{array} \right\} \Rightarrow C = -F(a)$$

Теперь найдем значение функции  $\Phi(x)$  в точке  $b$ :

$$\left. \begin{array}{l} \Phi(b) = \int_a^b f(t)dt \\ \Phi(b) = F(b) + C = F(b) - F(a) \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

*Замечание 1.11.2.* Формула Ньютона-Лейбница работает в тех случаях, когда можно найти  $F(x)$  или хотя бы её значения на концах отрезка  $[a; b]$ .

*Замечание 1.11.3.* Если функция  $f(x)$  кусочно заданная, то используем свойство аддитивности и разбиваем отрезок на части.

## 1.12. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям.

Замена в определенном интеграле выполняется также, как и в неопределенном за исключением смены пределов интегрирования. Более формально:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$$

Интегрирование по частям для определенных интегралов выполняется также, как и для неопределенных:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Стоит отметить несколько свойств определенных интегралов для четных и нечетных функций на симметричном промежутке:

**Lm 1.12.1.** Если  $f(x)$  нечетная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

**Lm 1.12.2.** Если  $f(x)$  четная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$



(a)  $f(-x) = -f(x)$



(b)  $f(-x) = f(x)$

### 1.13. Приложения определенного интеграла: вычисление площадей в декартовых координатах.



(a)  $f(x) \geq 0$



(b)  $f(x) \leq 0$



(c)  $f(x) \geq g(x)$

*Замечание 1.13.1.* Для случая (c) расположение функций  $f(x)$ ,  $g(x)$  относительно нуля не важно. Важно лишь, чтобы  $\forall x \in [a; b]: f(x) \geq g(x)$ .

### 1.14. Приложения определенного интеграла: вычисление площади криволинейного сектора в полярных координатах.



Построим интеграл:

1. Дробление отрезка  $[\alpha, \beta]$  на подотрезки  $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ ,  $\tau = \max \Delta\varphi_i$ .
2. В каждом отрезке выбираем среднюю точку  $\xi_i$ . Ищем  $\rho(\xi_i)$ , приближаем площадь элементарного сектора площадью кругового.

$$S_{sec} = \frac{\pi \rho^2(\xi_i)}{2\pi} \cdot \Delta\varphi_i = \frac{1}{2} \rho^2(\xi_i) \Delta\varphi_i$$

3. Площадь это предел интегральных сумм

$$S = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho^2(\xi_i) \Delta\varphi_i$$

4. Переход к интегралу

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

*Замечание 1.14.1.* Если кривая задана параметрически  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ , то площадь можно вычислить по формуле:

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \varphi'(t) dt$$

$$a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$$

### 1.15. Приложения определенного интеграла: вычисление длины дуги кривой (вывод формулы).

Пусть дана гладкая (без самопересечений, разрывов и циклов) дуга  $\check{A}B$  задаваемая уравнением  $y = y(x)$ , где  $y(x)$  функция, дифференцируемая на  $[a; b]$ . Найдем её длину.

Построим интеграл:

1. Дробление  $\check{A}B$  такими  $M_i$ , что  $AM_0 \dots M_n B \approx \check{A}B$ .
2. Стянем точки  $M_{i-1}$  и  $M_i$  хордой и получим координатный треугольник.

$$\Delta l_i \approx \Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$



3. Заметим, что  $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$  это отношение конечных приращений, поэтому можно применить т. Лагранжа:

$$\exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]: \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(\xi_i)$$

$$\Delta L_i = \sqrt{1 + y'(\xi_i)^2} \Delta x_i$$

4. Составим предел интегральных сумм и перейдем к интегралу:

$$L = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + y'(\xi_i)^2} \Delta x_i \implies L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

*Замечание 1.15.1.* Выражение  $dl = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$  называется дифференциалом дуги.

### 1.16. Приложения определенного интеграла: вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически.

Рассмотрим формулу  $L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$  при условии, что кривая задана параметрически. Получим:

$$\begin{aligned}
x &= \varphi(t), y = \psi(t) \\
dx &= \varphi'(t)dt \\
a &= \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta), t \in [\alpha; \beta] \\
y'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}
\end{aligned}$$

Подставим это в исходную формулу:

$$\begin{aligned}
L &= \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \varphi'(t) dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt \\
&\qquad\qquad\qquad a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)
\end{aligned}$$

*Замечание 1.16.1.* Таким образом, дифференциал дуги в при параметрическом задании будет равен

$$\begin{aligned}
dl &= \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt \\
x &= \varphi(t), y = \psi(t)
\end{aligned}$$

### 1.17. Приложения определенного интеграла: вычисление объемов тел с известными площадями сечений и тел вращения.

Пусть дано некоторое тело и известны площади его сечений в плоскости  $\perp Ox$ , т.е. известна функция  $S(x)$ , определяющая площадь сечения в зависимости от  $x$ . Построим интеграл:

1. Дробление: отрезок  $[a; b]$ , где  $a$  и  $b$  это крайние точки тела, делится на подотрезки  $[x_{i-1}, x_i]$ . Через  $x_i$  проводится плоскость  $\perp Ox$  и выделяется элементарный слой.
2. Приближаем объем этого слоя объемом цилиндра с основанием  $S(\xi_i)$ , где  $\xi_i$  это некоторая средняя точка из отрезка  $[x_{i-1}, x_i]$ .
3. Составляем предел интегральных сумм и переходим к интегралу.

$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \Delta x_i \implies V = \int_a^b S(x) dx \quad (RV)$$

*Замечание 1.17.1.* Сечения обязательно должны быть  $\perp Ox$ , в противном случае получится объем, умноженный на коэффициент наклона сечения по отношению к оси  $Ox$ .

Рассмотрим нахождение объема тел вращения.

Подставим в полученную выше формулу  $S_{sec} = S_o = \pi f(x)^2$ . Получим, что объем тела вращения равен:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

### 1.18. Несобственные интегралы 1-го рода (на неограниченном промежутке). Определение и свойства.

**Def 1.18.1.** Интеграл от функции на неограниченном промежутке называет несобственным интегралом 1-ого рода.

$$\begin{aligned}
\int_a^{+\infty} f(x) dx &\stackrel{\text{def}}{\iff} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^\beta f(x) dx \\
\int_{-\infty}^a f(x) dx &\stackrel{\text{def}}{\iff} \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \int_\beta^a f(x) dx \\
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &\stackrel{\text{def}}{\iff} \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

**Def 1.18.2.** Если предел в определении 1.18.1 существует и конечен, то говорят, что интеграл *сходится* ( $\succ$ ), в противном случае говорят, что интеграл *расходится* ( $\prec$ ).

Несобственные интегралы 1-ого рода обладают теми же свойствами, что и рассмотренные ранее интегралы:

1. Линейность

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

2. Аддитивность

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

3. Сравнение

$$\forall x \in [a; +\infty]: f(x) \geq g(x) \implies \int_a^{+\infty} f(x) dx \geq \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

Замечание 1.18.3. Если

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

и при этом один из двух полученных интегралов расходится, то расходится и изначальный интеграл.

**1.19. Вычисление несобственного интеграла 1-го рода: формула Ньютона-Лейбница, интегрирование по частям, замена переменной.**

Т.к. несобственный интеграл первого рода это по сути предел, то его можно вычислить с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \left( \lim_{\beta \rightarrow +\infty} F(\beta) \right) - F(a) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} F(x) \Big|_a^\beta$$

Интегрирование по частями и замена переменной выполняются также, как и в определенном интеграле (аккуратнее с пределами интегрирования при замене).

Замечание 1.19.1. Иногда после замены несобственный интеграл может превратиться в собственный.

**1.20. Несобственные интегралы 2-го рода (от неограниченной функции). Определение, вычисление и свойства.**

**Def 1.20.1.** Пусть  $f(x) \in C_{[a;b]}$  и  $b$  это точка бесконечного разрыва ( $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$ ), тогда интеграл

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{\iff} \lim_{\beta \rightarrow b-} \int_a^\beta f(x) dx$$

называется несобственным интегралом 2-ого рода.

Замечание 1.20.2. Существуют также другие формы несобственных интегралов 2-ого рода:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\stackrel{\text{def}}{\iff} \lim_{\alpha \rightarrow a+} \int_\alpha^b f(x) dx \\ \int_a^b f(x) dx &\stackrel{\text{def}}{\iff} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \end{aligned}$$

В первом случае точкой бесконечного разрыва является точка  $a$ , а во втором —  $c \in (a; b)$ .

Несобственные интегралы второго рода обладают теми же свойствами (линейность, аддитивность, сравнение) и вычисляются так же, как и несобственные интегралы 1-ого рода:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b} F(x) \Big|_a^\beta$$

**1.21. Признаки сходимости несобственных интегралов: первый признак сравнения (в неравенствах).**

**Теорема 1.21.1.** Пусть  $f(x), g(x): [a, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  и на этом отрезке выполняется неравенство  $f(x) \geq g(x) \geq 0$ . Тогда:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \succ \implies \int_a^{+\infty} g(x)dx \succ \quad (a)$$

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \prec \implies \int_a^{+\infty} f(x)dx \prec \quad (b)$$

*Доказательство.* (a) Сначала докажем первое утверждение. Т.к.  $f(x) \geq 0$ , то  $I = \int_a^b f(x)dx \geq 0 \in \mathbb{R}$ , при этом т.к. этот интеграл сходится, то  $I \in \mathbb{R}$ . Далее рассмотрим второй интеграл, по определению имеем:

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_a^{\beta} g(x)dx}_{h(\beta)}$$

Заметим, т.к.  $g(x) \geq 0$ , то функция  $h(\beta)$  монотонно возрастает при  $\beta \rightarrow +\infty$ . При этом значение этой функции ограничено сверху числом  $I \in \mathbb{R}$ . Значит по свойствам пределов данный предел конечен, из чего следует, что интеграл  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  сходится.

(b) Доказательство второго утверждения вытекает из первого. От противного: пусть  $\int_a^{+\infty} f(x)$  сходится. Тогда по пункту a интеграл  $\int_a^{+\infty} g(x)$  тоже должен сходиться. Противоречие. ■

## 1.22. Признаки сходимости несобственных интегралов: второй признак сравнения (предельный).

**Теорема 1.22.1.** Пусть  $f(x), g(x): [a; +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f(x) > 0, g(x) > 0$ . Тогда если предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

существует, конечен и не равен нулю, то функции оба интеграла  $\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_a^{+\infty} g(x)dx$  ведут себя одинаково в плане сходимости (т.е. либо оба сходятся, либо оба расходятся).

*Доказательство.* По определению предела получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = r &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \forall x \in [a; +\infty], x > \delta: \left| \frac{f(x)}{g(x)} - r \right| < \varepsilon \\ &r - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < r + \varepsilon \mid \cdot g(x) > 0 \\ &(r - \varepsilon)g(x) < f(x) < (r + \varepsilon)g(x) \end{aligned}$$

Далее используем признак сравнения в неравенствах (1.21.1). Рассмотрим два случая:

$$\square \int_a^{+\infty} f(x)dx \succ \implies \int_a^{+\infty} (r - \varepsilon)g(x)dx \succ$$

Т.к.  $r \in \mathbb{R}$ , а  $\varepsilon > 0$  произвольное положительное число, то интеграл  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  также будет сходиться. Второй случай рассматривается аналогично:

$$\square \int_a^{+\infty} f(x)dx \prec \implies \int_a^{+\infty} (r + \varepsilon)g(x)dx \prec \implies \int_a^{+\infty} g(x)dx \prec$$

■

## 1.23. Признаки сходимости несобственных интегралов: теорема об абсолютной сходимости. Понятие условной сходимости.

**Теорема 1.23.1.** Пусть  $f(x): [a; +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx \succ \implies \int_a^{+\infty} f(x)dx \succ$$

*Доказательство.* Раскроем интегралы  $\left| \int_a^{+\infty} f(x)dx \right|$  и  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  по определению:



$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| = \left| \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^\beta f(x) dx \right| = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left| \int_a^\beta f(x) dx \right|$$

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^\beta |f(x)| dx$$

Далее воспользуемся свойством определенных интегралов (1.9.5)  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$  и предельным переходом:

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left| \int_a^\beta f(x) dx \right| \leq \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^\beta |f(x)| dx$$

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

Т.к. интеграл в правой части сходится, то обозначим его значение  $r \in \mathbb{R}$ . Раскрывая модуль по определению получаем:

$$-r \leq \int_a^{+\infty} f(x) dx \leq r$$

Другими словами значение интеграла ограничено, а значит интеграл сходится. ■

**Def 1.23.2.** Если  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx \succ$ , то интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  называется абсолютно сходящимся.

**Def 1.23.3.** Если  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx \prec$ , а  $I = \int_a^{+\infty} f(x) dx \succ$  интеграл  $I$  называется условно сходящимся.

## 1.24. Сходимость интегралов 1-го и 2-го рода от степенных функций.

**Def 1.24.1.** Интегралы, про сходимость которых известна, называются *эталоновыми*. Обычно они используются в признаках сравнения.

Исследуем на сходимость интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ . Рассмотрим три случая:

$$\begin{aligned} \alpha = 1 \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} &= \ln |x| \Big|_1^{+\infty} & \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \prec \\ \alpha > 1 \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} &= \left( \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} & \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \succ \\ \alpha < 1 \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} &= \left( \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} & \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \prec \end{aligned}$$

Исследуем на сходимость интеграл  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ . Также рассмотрим три случая:

$$\begin{aligned} \alpha = 1 \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)} &= \ln |x-a| \Big|_a^b & \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{x-a} \prec \\ \alpha > 1 \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} &= \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_a^b = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \lim_{x \rightarrow a+} \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \prec \\ \alpha < 1 \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} &= \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_a^b = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \lim_{x \rightarrow a+} \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \succ \end{aligned}$$

Аналогично можно исследовать сходимость интеграла  $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ . Таким образом получаем:

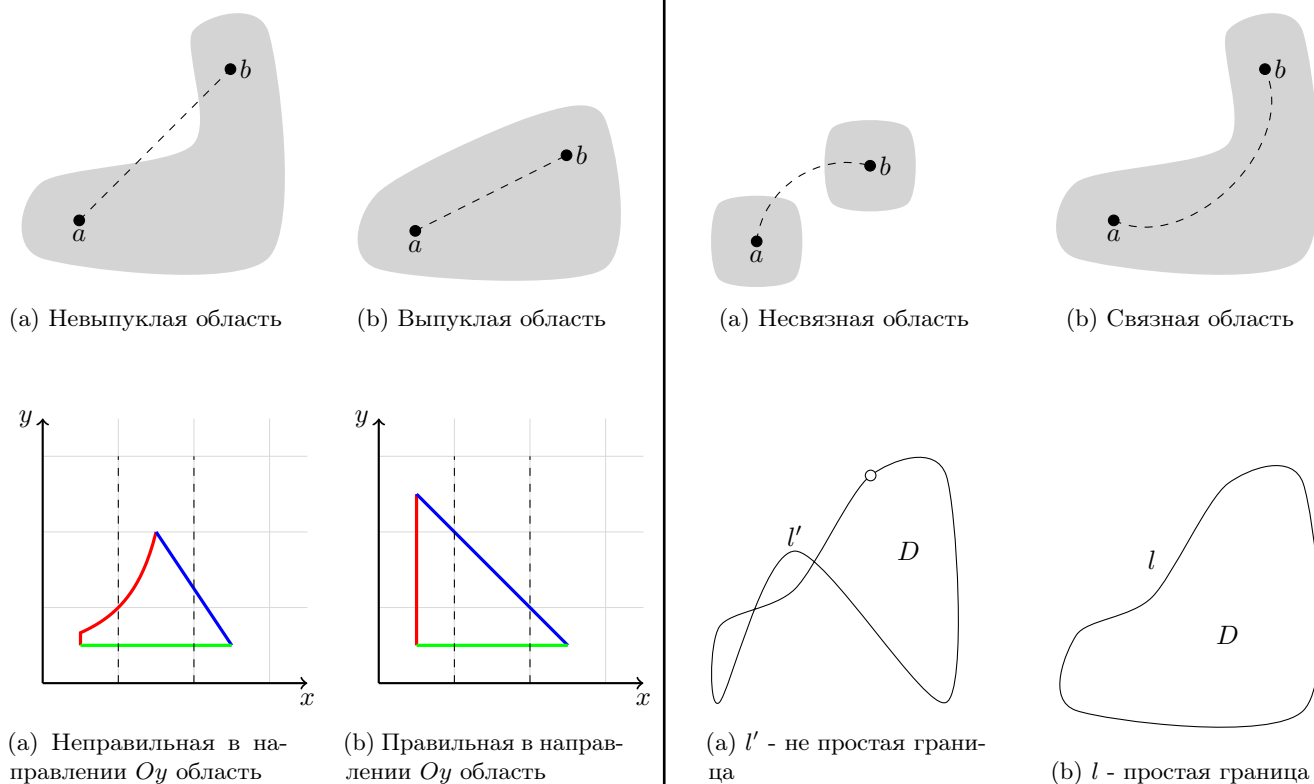
$$\begin{array}{lll}
\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \succ \alpha > 1 & \int_1^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \succ \alpha < 1 & \int_1^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \succ \alpha < 1 \\
\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \prec \alpha \leq 1 & \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \prec \alpha \geq 1 & \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \prec \alpha \geq 1
\end{array}$$

*Замечание 1.24.2.* Как правило для проверки на сходимость интегралов разного вида используют разные эталонные интегралы:

$$\begin{array}{l}
\int_a^{+\infty} f(x)dx \longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \\
\int_a^b f(x)dx \longrightarrow \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}
\end{array}$$

## 2. Интегрирование функции нескольких переменных

### 2.1. Двойной интеграл. Определение и свойства.



Замечание 2.1.1. Об области  $D$

Область  $D$  должна быть:

1. Выпуклой (3b), т.е. любые две точки можно стянуть отрезком, который полностью содержится в области  $D$ .
2. Правильной в координатном направлении. На рисунке 4a отрезки, параллельные  $Oy$ , при 'выходе' из области пересекают красную и синюю границы, которые имеют разное аналитическое задание. В то время как на рисунке 4b отрезки 'входят' в область через зеленую границу, а 'выходят' **только** через синюю.
3. Связной (5b), т.е. любые две точки можно стянуть дугой, которая полностью содержится в области  $D$ .
4. Ограничена простой кривой (6b), т.е. граница области должна задаваться непрерывной дифференцируемой функцией и не иметь разрывов, изломов, самопересечений.

Замечание 2.1.2. Если область  $D$  обладает всеми вышеперечисленными свойствами, т.е.  $D$  выпуклая, правильная в координатном направлении, связная и имеет простую кривую в качестве границы, то будем называть такую область *хорошей*.

Построим двойной интеграл:

1. Разбиваем область  $D$  на прямоугольники размера  $\Delta x_i \times \Delta y_i = \Delta S_i$ .
2. Выбираем средние точки  $M_i$ , вычисляем  $f(M_i)$ .
3. Составляем предел интегральных сумм, переходим к двойному интегралу.

$$\iint_D f(x) \underbrace{dx dy}_{dS}$$

Замечание 2.1.3. Геометрический смысл двойного интеграла заключается в том, что он равен объему криволинейного цилиндра (если  $f(x, y) > 0$ ).

Т.к. двойной интеграл можно свести к двум обычным определенным интегралам (см. 2.2.1), то он обладает такими же свойствами:

1. Линейность
2. Аддитивность
3. Оценка (через минимальное/максимальное значение в области)
4. Применима т. Лагранжа ( $\exists \xi \in D$  такая, что объем криволинейного цилиндра будет равен объему обычного цилиндра с высотой  $f(\xi)$ )

5. Сравнение (в т.ч. по модулю):

$$\forall x, y \in D: 0 \leq f(x, y) \leq g(x, y) \implies 0 \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy$$

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy$$

## 2.2. Вычисление двойного интеграла. Кратный интеграл.

**Теорема 2.2.1.** Сведение двойного интеграла к повторным

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

*Доказательство.* Пусть область  $D$  правильная в направлении  $Oy$ . Найдем  $x_1$  и  $x_2$  — границы области для переменной  $x$ . Далее будем 'идти' по оси  $x$  от  $x_1$  к  $x_2$ .

Рассмотрим момент, в котором  $x = const$ . В этот момент  $y$  может меняться в диапазоне от  $y_1(x)$  до  $y_2(x)$ , где  $y_2(x)$ ,  $y_1(x)$  это функции от  $x$ , задающие 'верхнюю' и 'нижнюю' границы текущего отрезка в области  $D$  (для этого и требовалась правильность в направлении  $Oy$ ). Значит мы можем вычислить площадь сечения как

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x = const, y) dy = F(x = const, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = \check{F}(x)$$

Далее применим формулу для вычисления объема тела с известными площадями сечений (RV):

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \check{F} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

■

*Замечание 2.2.2.* Полученный интеграл называется кратным (повторным).

*Замечание 2.2.3.* Порядок интегрирования можно изменить, если область правильная в обоих направлениях.

Если область правильная только в одном из направлений, то внутренний интеграл должен браться по переменной, соответствующей этому направлению.

Если область неправильная ни в одном из направлений, то её необходимо разбить на части (пользуясь аддитивностью интегралов), каждая из которых должна быть правильной хотя бы в одном из направлений.

## 2.3. Определение и вычисление тройного интеграла.

Пусть в  $\mathbb{R}^3$  есть область, в которой определена скалярная величина и 'плотность' её распределения  $\rho(x, y, z)$ . Тогда содержание этой величины в данной области будет равно:

$$\iiint_T \rho(x, y, z) \underbrace{dx dy dz}_{dV}$$

*Замечание 2.3.1.* В определении выше рассматривается область, правильная в направлении  $Oz$ .

*Замечание 2.3.2.* Свойства тройного интеграла, а также способ его вычисления полностью аналогичен двойному интегралу:

1. Определяем границы для одной из переменных.
2. Выражаем границы для второй переменной через первую, а для третьей — через первые две.
3. Сводим все к повторным интегралам.

Формула для вычисления тройного интеграла будет выглядеть следующим образом:

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

## 2.4. Криволинейные координаты.

Полярные координаты определяются как:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad \rho \geq 0, \varphi \in [0; 2\pi)$$

$$dxdy \longrightarrow \rho d\rho d\varphi$$

Цилиндрические координаты определяются как:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \rho \geq 0, \varphi \in [0; 2\pi), z \in \mathbb{R}$$

$$dxdydz \longrightarrow \rho d\rho d\varphi dz$$

Сферические координаты определяются как:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \theta \end{cases} \quad \rho \geq 0, \varphi \in [0; 2\pi), \theta \in [0, \pi]$$

$$dxdydz \longrightarrow \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$$

*Замечание 2.4.1.* О том, почему элементы объема имеют именно такое задание можно прочесть в следующем вопросе.

## 2.5. Замена переменных в двойном и тройном интегралах. Якобиан.



(a)  $dS = dxdy$



(b)  $dS' \neq d\rho d\varphi$

Дробление в выбранной СК проводится соответствующими координатными линиями/поверхностями. Потребуем малости  $du$ ,  $dv$ . Тогда площадь криволинейного прямоугольника будет мало отличаться от площади обычного прямоугольника  $ABCD$ , значит:

$$dS' = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \left\| \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ B_x - A_x & B_y - A_y & 0 \\ D_x - A_x & D_y - A_y & 0 \end{pmatrix} \right\| \quad (1)$$

Рассмотрим полученные разницы координат точек:

$$\begin{aligned} B_x - A_x &= \varphi(u, v + \Delta v) - \varphi(u, v) = \Delta_v \varphi \approx \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \\ B_y - A_y &= \psi(u, v + \Delta v) - \psi(u, v) = \Delta_v \psi \approx \frac{\partial \psi}{\partial v} dv \\ D_x - A_x &= \varphi(u + \Delta u, v) - \varphi(u, v) = \Delta_u \varphi \approx \frac{\partial \varphi}{\partial u} du \\ D_y - A_y &= \psi(u + \Delta u, v) - \psi(u, v) = \Delta_u \psi \approx \frac{\partial \psi}{\partial u} du \end{aligned}$$

Подставим это в (1). Имеем:

$$dS' \approx \left| \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} du - \frac{\partial \psi}{\partial v} dv \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} du \right) \right| = \underbrace{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right|}_{|J|} \cdot dudv$$

$|J|$  можно записать в виде определителя:

$$|J| = \begin{vmatrix} \varphi'_v & \varphi'_u \\ \psi'_v & \psi'_u \end{vmatrix}$$

**Def 2.5.1.** Определитель  $J$  составленный из частных производных исходных переменных по каждой из новых переменных называется определителем Якоби (якобианом).

Его геометрический смысл заключается в том, что он является коэффициентом искажения при переходе от одной СК к другой.

В итоге получаем, что  $dS = dx dy = |J| d\rho d\varphi$ , причем  $|J| = \lim_{\Delta S, \Delta S' \rightarrow 0} \frac{\Delta S'}{\Delta S}$ . Итоговая формула замены при смене СК имеет вид:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv$$

*Замечание 2.5.2.* Якобиан при стандартном переходе в полярные координаты ( $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$ ) равен  $\rho$ .

В тройном интеграле замены проводятся аналогично (только якобиан будет третьей размерности). Некоторые стандартные замены можно найти в предыдущем вопросе.

## 2.6. Криволинейный интеграл 1-го рода: определение, свойства, вычисление, геометрический и физический смысл.

Задача: найти массу  $m$ , распределенную с плотностью  $f$  по участку плоской кривой (простая дуга  $\check{AB}$ ).

*Замечание 2.6.1.* Постановка задачи определяет физический смысл криволинейного интеграла первого рода.

Составим интеграл: разобьем дугу  $\check{AB}$  на элементарные дуги  $dl$ . Масса таких дуг будет равна  $f(x, y)dl$ , значит масса всей дуги будет равна

$$\int_{AB} f(x, y) dl$$

Полученный интеграл называется криволинейным интегралом 1-ого рода.

*Замечание 2.6.2.* О математическом определении

1. Введем ДПСК  $\check{AB} \rightarrow y = y(x), x \in [a; b]$ .
2. Разобьем дугу на элементарные дуги  $l_i$ , тогда элементарная масса будет равна  $m_i = f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i$ .
3. Составим предел интегральных сумм

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i$$

4. Перейдем к интегралу и получим такое же выражение, что и выше.

*Замечание 2.6.3.* О вычислении

$dl$  это дифференциал дуги (см. 1.15.1), значит получаем, что

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} |dx|$$

или в параметрическом виде (см. 1.16.1):

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} |dt|$$

Дифференциалы  $dx$  и  $dt$  находятся под модулем, т.к. если дуга проходится в обратном направлении (т.е.  $dx, dy, dt < 0$ ), то получится отрицательное число. Однако  $dl$  здесь имеет смысл длины и не может быть отрицательным.

*Замечание 2.6.4.* Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления прохода дуги:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl$$

Остальные его свойства совпадают со свойствами определенного интеграла.

*Замечание 2.6.5.* Геометрический смысл криволинейного интеграла заключается в том, что он равен части площади поверхности криволинейного цилиндра, основанием которого является дуга  $\check{AB}$ .

## 2.7. Криволинейный интеграл 2-го рода как работа силы вдоль пути. Определение, вычисление и свойства.

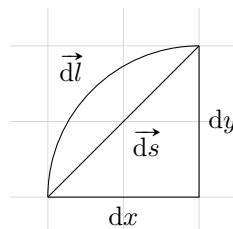
Пусть дана простая дуга  $\check{AB}$  и некоторая сила  $\vec{F}(P, Q)$ , где  $P = P(x, y)$ ,  $Q = Q(x, y)$  это некоторые функции, зависящие от координат.

Построим интеграл:

1. Введем ДПСК
2. Вычислим среднюю элементарную работу  $dA$  вдоль элемента дуги  $dl$ , а потом просуммируем все полученные элементарные работы:

$$dA = \vec{F} d\vec{s} = (P, Q) \cdot (dx, dy)$$

$$A = \int_{AB} dA = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$



3. Получили криволинейный интеграл 2-ого рода.

*Замечание 2.7.1.* Можно рассматривать действие силы в каждом координатном направлении (в проекциях):

$$A_x = \int_{AB} P(x, y)dx \quad A_y = \int_{AB} Q(x, y)dy$$

поэтому криволинейный интеграл 2-ого рода иногда называют криволинейным интегралом в проекциях.

*Замечание 2.7.2.* О математическом определении

Криволинейный интеграл можно определить математически (дробление, составление интегральных сумм, переход к пределу, а затем и к интегралу), для этого нужно рассмотреть проекции на оси координат. В каждой из проекций получится криволинейный интеграл первого рода.

*Замечание 2.7.3.* О вычислении

Параметризуем дугу и сведем все к определенному интегралу:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \implies dx = \varphi'(t)dt \\ y = \psi(t) \implies dy = \psi'(t)dt \\ t \in [t_1, t_2] \iff A \rightarrow B \end{cases}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)dt$$

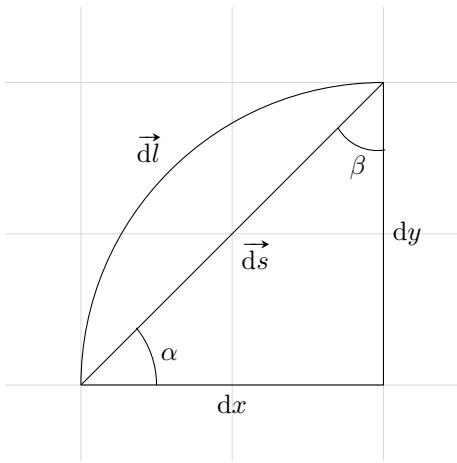
*Замечание 2.7.4.* Криволинейный интеграл 2-ого рода (в отличие от криволинейного интеграла 1-ого рода) зависит от направления обхода:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = - \int_{BA} Pdx + Qdy$$

Остальные его свойства совпадают со свойствами определенного интеграла.

## 2.8. Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода: формула связи.





$$\begin{aligned} \int_{AB} Pdx + Qdy &= \int_{AB} (P, Q) \cdot (dx, dy) = \\ &= \int_{AB} (P, Q) \cdot (\cos \alpha dl, \cos \beta dl) = \\ &= \int_{AB} (P \cos \alpha + Q \cos \beta) dl \end{aligned}$$

Таким образом получили формулу связи криволинейных интегралов 1-ого и 2-ого рода.

*Замечание 2.8.1.* При достаточно малых  $\vec{ds}$  можно обозначить  $\vec{\tau} = (\cos \alpha, \cos \beta)$ , тогда получим криволинейный интеграл 2-ого рода в векторной форме:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AB} \vec{F} \cdot (\cos \alpha, \cos \beta) dl = \int_{AB} \vec{F} \cdot \vec{\tau} dl$$

## 2.9. Теорема (формула) Грина.

**Теорема 2.9.1.** Теорема Грина

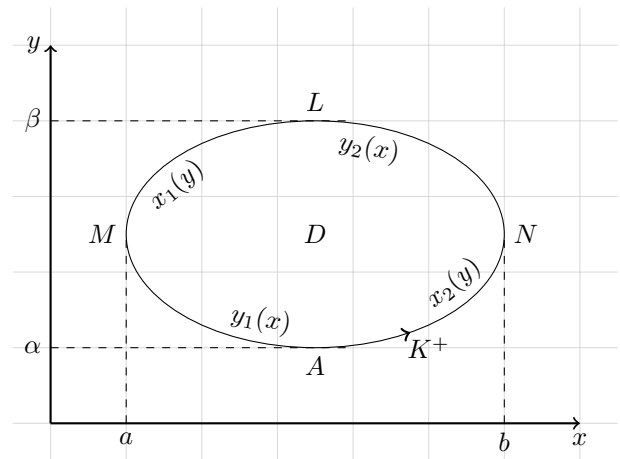
Пусть  $D$  правильная  $\uparrow Ox, \uparrow Oy, \Gamma_D = K$

Даны функции  $P(x, y), Q(x, y): K, D \rightarrow \mathbb{R}$

Определен  $\oint_{K^+} Pdx + Qdy$

Тогда

$$\oint_{K^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$



*Доказательство.* Рассмотрим двойной интеграл  $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$  и сведем его к повторному:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b \left( P(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} \right) dx = \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx$$

Используя формулу вычисления криволинейного интеграла 2-ого рода (2.7.3) в обратную сторону получаем:

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx &= \\ &= \int_{MLN} P(x, y) dx - \int_{MAN} P(x, y) dx = \\ &= - \int_{NLM} P(x, y) dx - \int_{MAN} P(x, y) dx = \\ &= - \oint_{K^+} P(x, y) dx \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что  $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_{K^+} Q(x, y) dy$ . Объединяя эти равенства получаем, что

$$\oint_{K^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \oint_{K^+} Q(x, y) dy - \left( - \oint_{K^+} P(x, y) dx \right) = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

*Замечание 2.9.2.* Формула Грина работает в обе стороны. Вычисляется тот интеграл, который проще.

*Следствие 2.9.3.* С помощью формулы Грина можно получить формулу для площади фигуры через криволинейный интеграл 2-ого рода:

$$S = \iint_D dx dy = \left[ \begin{matrix} P = -y/2 \\ Q = x/2 \end{matrix} \right] \Rightarrow Q'_x - P'_y = 1 \Big] = \oint_{K^+} -\frac{y}{2} dx + \frac{x}{2} dy = \frac{1}{2} \oint_{K^+} x dy - y dx$$

## 2.10. Интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Теорема о независимости интеграла от пути, равносильность I,II,III утверждений.

Пусть на  $\check{A}B \in D$  определен  $I = \int_{AB} P dx + Q dy$ , тогда

**Def 2.10.1.** Интеграл  $I$  называется независимым от пути интегрирования (далее НЗП), если

$$\forall M, N \in D: \int_{AMB} P dx + Q dy = \int_{ANB} P dx + Q dy$$

**Теорема 2.10.2.** Следующие утверждения равносильны:

- I.  $\int_{AB} P dx + Q dy$  не зависит от пути.
- II.  $\oint_K P dx + Q dy = 0$ .
- III.  $P'_y = Q'_x$  (везде в области  $D$ ).
- IV.  $\exists \Phi(x, y): d\Phi = P dx + Q dy$ .

*Доказательство.*  $I \Rightarrow II$  (НЗП  $\Rightarrow \oint = 0$ )

Если интеграл не зависит от пути, то по определению:

$$\int_{AMB} = \int_{ANB} \Rightarrow \int_{AMB} - \int_{ANB} = 0 \Rightarrow \int_{AMB} + \int_{BNA} = 0 \Rightarrow \oint_K = 0$$

*Доказательство.*  $I \Leftarrow II$  (НЗП  $\Leftarrow \oint = 0$ )

Пусть в области  $D$  есть некоторые точки  $M$  и  $N$ , тогда интеграл по контуру можно представить в виде:

$$\oint_K = 0 \Rightarrow \int_{AMB} + \int_{BNA} = 0 \Rightarrow \int_{AMB} - \int_{ANB} = 0 \Rightarrow \int_{AMB} = \int_{ANB}$$

Т.к. точки  $M$  и  $N$  выбраны произвольно  $\in D$ , то это выполняется для любых точек  $M, N \Rightarrow$  интеграл не зависит от пути по определению.

*Доказательство.*  $II \Rightarrow III$  ( $\oint = 0 \Rightarrow P'_y = Q'_x$ )

От противного: пусть

$$\exists M(x_0, y_0) \in D: P'_y \neq Q'_x \Rightarrow Q'_x - P'_y > 0$$

Знак больше выбран для определенности, можно и рассмотреть и с минусом: доказательство будет аналогичным.

Окружим точку  $M(x_0, y_0)$  окрестностью  $u_\varepsilon(M_0)$ . Применим формулу Грина для  $K = \Gamma_u$ :

$$\begin{aligned} \oint_K P dx + Q dy &= \iint_{u(M_0)} (Q'_x - P'_y) dx dy \\ Q'_x - P'_y > 0 &\Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}^+: Q'_x - P'_y > \delta > 0 \\ \iint_{u(M_0)} (Q'_x - P'_y) dx dy &> \iint_{u(M_0)} \delta dx dy = \delta S(u(M_0)) > 0 \end{aligned}$$

Получаем, что  $\oint_K P dx + Q dy > 0$ . Противоречие.

*Доказательство.*  $II \Leftarrow III$  ( $\oint = 0 \Leftarrow P'_y = Q'_x$ )

Применяем формулу Грина:

$$\begin{aligned} P'_y = Q'_x &\Rightarrow Q'_x - P'_y = 0 \\ \int_D (Q'_x - P'_y) dx dy &= 0 = \oint_{K=\Gamma_D} P dx + Q dy \end{aligned}$$

*Доказательство.*  $I \implies IV$  ( $HЗП \implies \exists \Phi(x, y)$ )

Рассмотрим интеграл  $\int_{AB} Pdx + Qdy$ . Заменим точку  $B$  на 'плавающую' точку  $M(x, y)$ . Получим:

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= \int_{AM} Pdx + Qdy \\ d\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy\end{aligned}\quad (1)$$

Покажем, что  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y)$ . Рассмотрим частное приращение функции  $\Phi(x, y)$  по  $x$ :

$$\Delta_x \Phi = \Phi(x + \Delta, y) - \Phi(x, y) = \int_{AM_1} - \int_{AM} = \int_{MM_1} = \int_{MM_1} Pdx + Qdy$$

где точка  $M_1$  имеет координаты  $(x + \Delta, y)$ . Т.к. интеграл не зависит от пути, то выберем удобный путь интегрирования  $y = const \implies dy = 0$ :

$$\int_{MM_1} Pdx + Qdy = \int_{MM_1} Pdx$$

Воспользуемся т. Лагранжа о среднем(1.9.2):

$$\exists \xi \in (x, x + \Delta): \int_{MM_1} Pdx = P(\xi, y)\Delta x$$

В итоге получаем, что

$$\Phi(x + \Delta, y) - \Phi(x, y) = P(\xi, y)\Delta x$$

Подставим это в определение частной производной для  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x, y) - \Phi(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(\xi, y) = \left[ \begin{array}{l} \Delta x \rightarrow 0 \\ \xi \in (x, x + \Delta x) \end{array} \right] \implies \xi \rightarrow x = P(x, y)$$

Аналогично можно показать, что  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y)$ . Подставляя полученные выражения в (1) получаем искомое равенство. ■

*Доказательство.*  $III \Leftarrow IV$  ( $P'_y = Q'_x \Leftarrow \exists \Phi(x, y)$ )

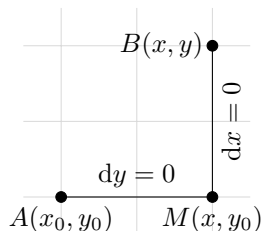
Раскроем дифференциал функции  $\Phi(x, y)$  по определению:

$$Pdx + Qdy = d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$$

Далее возьмем частные производные  $P'_y$  и  $Q'_x$ :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
■

**Замечание 2.10.3.** Функция  $\Phi(x, y)$  называется потенциалом, либо первообразной для подынтегрального выражения.



**Замечание 2.10.4.** Если интеграл не зависит от пути, то часто бывает удобно рассмотреть путь  $A(x_0, y_0) \rightarrow M(x, y_0) \rightarrow B(x, y)$ . При таком подходе интеграл разбивается на два, причем в каждом из них половина обнуляется (т.к.  $dx = 0$  либо  $dy = 0$ ).

## 2.11. Интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Теорема о независимости интеграла от пути, равносильность III, IV утверждений.

**Замечание 2.11.1.** Теорема 2.10.2 полностью доказана в предыдущем вопросе.

## 2.12. Следствие теоремы о независимости от пути (формула Ньютона-Лейбница).

**Теорема 2.12.1.** Формула Ньютона-Лейбница для интегралов, не зависящих от пути интегрирования  
Пусть выполнены условия теоремы 2.10.2, тогда

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \Phi(B) - \Phi(A)$$

*Доказательство.* Параметризуем дугу  $\check{AB}$ :

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \implies dx = x'_t dt \\ y &= \psi(t) \implies dy = y'_t dt \\ t &\in [t_1; t_2] \iff A \rightarrow B \end{aligned}$$

Подставим это в исходный интеграл:

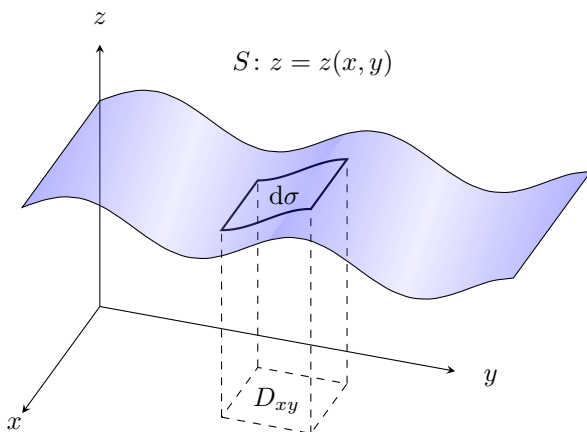
$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AB} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \right) dt$$

Заметим, что то, что стоит в скобках, это полная производная  $\Phi$  по  $t$ . Тогда имеем:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Phi(x(t), y(t))}{dt} dt = \Phi(x(t), y(t)) \Big|_{t_1}^{t_2} = \Phi(B) - \Phi(A)$$

■

### 2.13. Поверхностный интеграл 1-го рода: определение, свойства, вычисление, геометрический и физический смысл.



Пусть  $f(x, y, z)$  это плотность распределения некоторой скалярной величины. Введена ДПСК, поверхность простая  $z = z(x, y)$ .

Элемент поверхности  $d\sigma$  вырезается координатными плоскостями  $x = const, y = const$ . Выделим элементарную массу  $dm$ . Умножая среднюю плотность на размер элементарного участка получаем  $dm = f(x, y, z)d\sigma$ . Полную массу получим 'суммированием':

$$m = \iint_S dm = \iint_S f(x, y, z)d\sigma$$

Получили поверхностный интеграл 1-ого рода (по участку поверхности).

*Замечание 2.13.1.* Физический смысл поверхностного интеграла 1-ого рода вытекает из его построения: он равен массе участка неоднородной поверхности.

*Замечание 2.13.2.* О математическом определении

Поверхностный интеграл 1-ого рода можно определить математически аналогично уже рассмотренным интегралам:

1. Дробим  $S$  плоскостями  $x = const, y = const$  на элементарные участки  $\Delta\sigma_i$ .
2. В каждом участке выбираем среднюю точку  $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  и вычисляем  $f(M_i)$ .
3. Составляем предел интегральных сумм и переходим к интегралу:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta\sigma_i$$

*Замечание 2.13.3.* О вычислении

Введем параметризацию  $z = z(x, y)$  и спроецируем поверхность на плоскость  $Oxy$ , т.е.  $D_{xy} = S_{пр. xy}$ . Получим

$$\iint_S f(x, y, z)d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$$

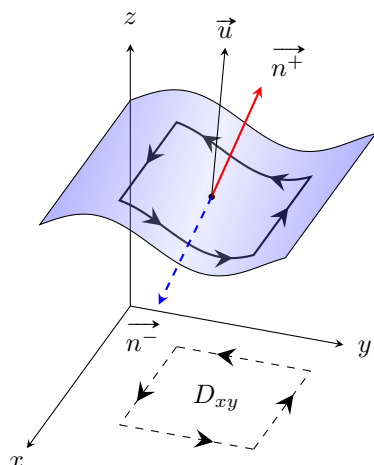
При необходимости можно вводить другую параметризацию и проектировать поверхность на другую координатную плоскость.

Замечание 2.13.4. С помощью поверхностного интеграла 1-ого рода можно найти площадь поверхности следующим образом:

$$S_{\text{пов.}} = \iint_S d\sigma$$

## 2.14. Поверхностный интеграл 2-го рода как поток жидкости через поверхность.

Замечание 2.14.1. О поверхности, обходе участка и направлении нормали. Постановка задачи



Будем рассматривать только двусторонние поверхности. Положительной нормалью  $\vec{n}^+$  будет называть ту нормаль, у которой угол с осью  $Oz$  меньше 90 градусов. Сторону  $S$  с положительной нормалью будет называть *верхней*. Дуально определим отрицательную нормаль и *нижнюю* сторону поверхности. Согласуем обходы  $S$  и  $D_{xy} = S_{\text{пр. } xy}$ . Пусть через данный участок поверхности течет жидкость со скоростью  $\vec{v}$  и плотностью  $\rho$ . Вычислим количество жидкости, проходящей через  $t$  за единицу времени  $t$ . Будем считать поток положительным, если он течет в направлении положительной нормали и отрицательным если в направлении отрицательной.

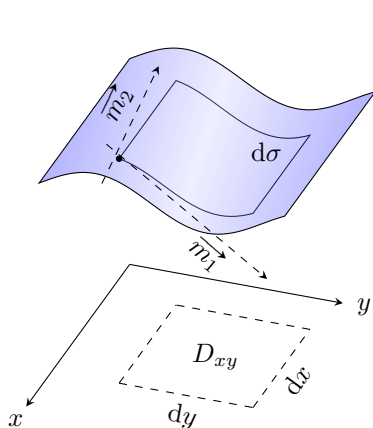
Рассмотрим более простую задачу: пусть поверхность  $S$  плоская, а  $v = \text{const}$ . Тогда жидкость, которая протечет через участок поверхности, может рассматриваться как наклонный цилиндр. Найдём его объем по известной формуле  $V = h \cdot S_{\text{осн.}}$ , причем высота будет равна проекции скорости на нормаль, умноженной на время. Таким образом поток  $\Pi$  будет равен  $\Pi = V = (\vec{v} \cdot \vec{n}_0) \Delta t S$ .

Теперь вернемся к исходной задаче: поверхность  $S$  криволинейная и через неё действует некоторая векторная величина  $\vec{F} = (P, Q, R)$ . Тогда полученную ранее формулу можно использовать для вычисления элементарного потока  $d\Pi = (\vec{F} \cdot \vec{n}_0) d\sigma$ . Переход к вычислению всего потока осуществляется с помощью двойного интеграла:

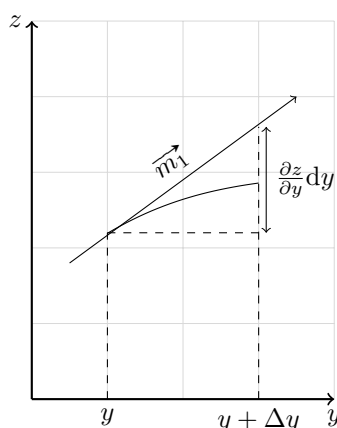
$$\Pi = \iint_S d\Pi = \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}_0) d\sigma \quad (\text{SIV})$$

Полученный интеграл называется поверхностным интегралом 2-ого рода в векторной форме.

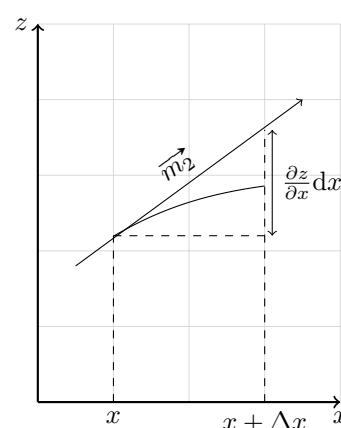
Замечание 2.14.2. Найдём связь между  $d\sigma$  и  $dx dy$



(a) В пространстве



(b)  $x = \text{const}$



(c)  $y = \text{const}$

Проведем касательные  $\vec{m}_1$  и  $\vec{m}_2$  в плоскостях  $x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$ . Их векторное произведение будет задавать нормаль к поверхности в этой точке:  $\vec{n} = \vec{m}_1 \times \vec{m}_2$ . Значит площадь элементарного параллелограмма, построенного на  $m_1$  и  $m_2$ , будет  $\approx d\sigma$  с точностью до б.м. более высокого порядка.

Вычислим полученное векторное произведение:

$$\begin{aligned}\vec{m}_1 &= (0, dy, \frac{\partial z}{\partial y} dy) & \vec{m}_2 &= (dx, 0, \frac{\partial z}{\partial x} dx) \\ \vec{n} = m_1 \times m_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & dy & \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ dx & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} dx \end{vmatrix} = \underbrace{\left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right)}_{\vec{p}} dx dy\end{aligned}$$

Нормируем и домножим на  $-1$  полученный вектор  $\vec{p}$ , чтобы получить единичный вектор в направлении положительной нормали  $n_0^+$ :

$$n_0^+ = \frac{(-z'_x, -z'_y, 1)}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \Rightarrow \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}$$

Итак, площадь элементарного параллелограмма будет равна:

$$d\sigma = |\vec{n}| \approx \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} |dxdy| = \frac{1}{|\cos \gamma|} |dxdy| \Rightarrow dxdy \approx \pm \cos \gamma d\sigma$$

Аналогично  $dxdz = \pm \cos \beta d\sigma$ ,  $dydz = \pm \cos \alpha d\sigma$ .

*Замечание 2.14.3.*  $d\sigma > 0$  как площадь элементарного участка.  $dxdy$ ,  $dxdz$ ,  $dydz$  это проекции  $d\sigma$  и их знак зависит от обхода  $d\sigma$ , т.е. от знака нормали  $\vec{n}$ . Далее опустим  $\pm$ , т.к. косинус учитывает знак, т.е. при  $dxdy < 0$  будет  $\cos \gamma < 0$ .

Переведем полученную ранее формулу для поверхностного интеграла 2-ого рода в координатную форму:

$$\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}_0) d\sigma = \iint_S (P, Q, R) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) d\sigma = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma \quad (\text{SIC})$$

Подставим в это выражение полученные формулы связи  $d\sigma$  с  $dxdy$ ,  $dxdz$  и  $dydz$ . Получим формулу для поверхностного интеграла 2-ого рода в проекциях:

$$\iint_S P dydz + Q dxdz + R dxdy \quad (\text{SIP})$$

## 2.15. Связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода.

Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода была получена при нахождении формулы для поверхностного интеграла 2-ого рода в проекциях (SIC):

$$\underbrace{\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}_0) d\sigma}_{\text{II род}} = \underbrace{\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma}_{\text{I род}}$$

Формулы для нахождения направляющих косинусов также же были получены в предыдущем вопросе:

$$\cos \alpha = \frac{\mp z'_x}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \quad \cos \beta = \frac{\mp z'_y}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \quad \cos \gamma = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \quad (\text{ANG})$$

## 2.16. Поверхностный интеграл 2-го рода: математическое определение, вычисление, свойства.

*Замечание 2.16.1.* О математическом определении

Чтобы математически определить поверхностный интеграл 2-ого рода, сначала отдельно определяются интегралы в проекциях на координатные плоскости, после чего вычисляется из суммы. При построении поверхностного интеграла 2-ого в проекциях была получена соответствующая формула связи (SIC  $\rightarrow$  SIP):

$$\underbrace{\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma}_{\text{I род}} = \underbrace{\iint_S P dydz + Q dxdz + R dxdy}_{\text{II род}}$$

*Замечание 2.16.2.* О вычислении

Рассмотрим криволинейный интеграл 2-ого рода в проекциях (SIP):

$$\iint_S P dydz + Q dxdz + R dxdy$$

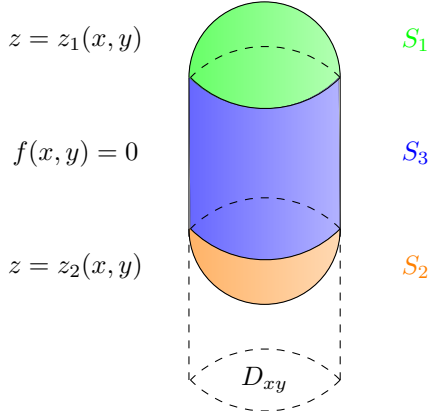
Спроецируем поверхность  $S$  на координатную плоскость  $Oxy$ , получим некоторую область  $D_{xy}$ :

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy \quad (\star)$$

Знак  $\pm$  ставится потому, что в поверхностном интеграле  $dx dy \approx \cos \gamma d\sigma$  это проекция и косинус учитывает знак (т.е. направление обхода  $d\sigma$ ). А в двойном интеграле  $dx dy$  это площадь элементарного участка  $\Rightarrow dx dy > 0$ .

Таким образом вычисление поверхностного интеграла 2-ого рода в проекциях сводится к вычислению трех двойных интегралов в проекции на каждую из координатных плоскостей (но нужно не забывать про знаки).

## 2.17. Теорема Гаусса-Остроградского.



Пусть дано правильное в направлении  $Oz$  замкнутое тело  $T$ , образованное поверхностями  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ .

В области, содержащей тело, определена тройка скалярных функций  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$ , каждая из которых дифференцируема и имеет непрерывные частные производные.

### Теорема 2.17.1. Теорема Гаусса-Остроградского.

При выполнении условий, описанных выше, справедливо равенство

$$\iiint_T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oiint_{S_T} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma$$

*Доказательство.* Рассмотрим одну из частей тройного интеграла и перейдем к повторному:

$$\iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_2(x, y)}^{z_1(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy$$

Теперь, используя формулу вычисления  $(\star)$  в обратную сторону, перейдем к поверхностному интегралу:

$$\iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy = \iint_{S_1^+} R(x, y, z) dx dy + \iint_{S_2^-} R(x, y, z) dx dy$$

Заметим, что

$$\gamma_3 = 90^\circ \Rightarrow \cos \gamma d\sigma = 0 = dx dy \Rightarrow \iint_{S_3^+} R(x, y, z) = 0$$

поэтому этот интеграл можно добавить к полученному ранее выражению и собрать три полученных поверхностных интеграла в один интеграл по поверхности тела:

$$\iint_{S_1^+} R(x, y, z) dx dy + \iint_{S_2^-} R(x, y, z) dx dy + \iint_{S_3^+} R(x, y, z) dx dy = \oiint_{S_T} R(x, y, z) dx dy = \oiint_{S_T} R \cos \gamma d\sigma$$

Таким образом мы получили первое слагаемое в поверхностном интеграле в правой части формулы. Аналогично можно показать, что

$$\iiint_T \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \oiint_{S_T} P \cos \alpha d\sigma \quad \iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \oiint_{S_T} Q \cos \beta d\sigma$$

## 2.18. Теорема Стокса.





Пусть поверхность  $S$  опирается на замкнутый контур  $L$ .  
 $D_{xy} = S_{\text{пр. } Oxy}$ ,  $K = L_{\text{пр. } Oxy}$   
 В области, содержащей  $S$ , определена тройка скалярных функций  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$ , каждая из которых дифференцируема и имеет непрерывные частные производные.

### Теорема 2.18.1. Теорема Стокса.

При выполнении условий, описанных выше, справедливо равенство

$$\iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha \right) + \left( \frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) d\sigma = \oint_{L^+} P dx + Q dy + R dz$$

*Доказательство.* Рассмотрим слагаемое  $\oint_{L^+} P dx$  в интеграле в правой части. Применяя формулу вычисления в обратную сторону, получаем, что

$$\oint_{L^+} P dx = \oint_{K^+} P(x, y, z(x, y)) dx + 0 dy \stackrel{2.9.1}{=} \iint_{D_{xy}} \left( 0 - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_{D_{xy}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad (1)$$

Возьмем производную в подынтегральном выражении, учитывая то, что  $x$  и  $y$  это независимые переменные, а  $P$  — сложная функция:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

Первое слагаемое будет равно нулю, т.к  $x$  и  $y$  это независимые переменные. Подставим это в (1), а также заменим  $dx dy$  на  $\cos \gamma d\sigma$ :

$$- \iint_{D_{xy}} \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) \cos \gamma d\sigma = - \iint_{D_{xy}} \left( \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cos \gamma \right) d\sigma \quad (2)$$

Упростим второе слагаемое, используя полученные ранее формулы для косинусов (ANG):

$$\frac{\partial z}{\partial y} \cos \gamma = \frac{z'_y}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} = - \cos \beta \quad (3)$$

Подставим (3) в (2) и получим:

$$- \iint_{D_{xy}} \left( \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta \right) d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) d\sigma$$

Таким образом мы получили первое слагаемое в поверхностном интеграле в левой части формулы. Аналогично можно рассмотреть  $\oint_{L^+} Q dy$ ,  $\oint_{L^+} R dz$  получить и оставшиеся два слагаемых. ■

*Замечание 2.18.2.* Формулу Стокса можно записать в другом виде, если собрать коэффициенты при косинусах:

$$\iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha d\sigma + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta d\sigma + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma d\sigma = \oint_{L^+} P dx + Q dy + R dz$$

Также можно представить интеграл в левой части в виде поверхностного интеграла 2-ого рода:

$$\iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy dz = \oint_{L^+} P dx + Q dy + R dz$$

## 2.19. Скалярное и векторное поля: определения, геометрические характеристики. Дифференциальные и интегральные характеристики полей (определения).

**Def 2.19.1.** Скалярная функция  $u = u(x, y, z): \mathbb{R}^3 \rightarrow R$  называется скалярным полем.

**Def 2.19.2.** Тройка скалярных функций  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$ , действующих из  $\mathbb{R}^3$  в  $\mathbb{R}$  определяют векторное поле, т.е. векторную величину  $\vec{F} = (P, Q, R)$ , действующую в каждой точке пространства.

	Скалярное поле	Векторное поле
Геометрические характеристики	Линии (поверхности) уровня $u(x, y) = const.$	Векторные линии и векторные трубки
Дифференциальные характеристики	Производная по направлению и градиент $\frac{\partial u}{\partial s} = \vec{\nabla} u \cdot \vec{s}_0$ $\vec{\text{grad}} u = \vec{\nabla} u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right)$	Дивергенция и ротор(вихрь) $\text{div } \vec{F} \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ $\text{rot } \vec{F} \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{\nabla}_x & \vec{\nabla}_y & \vec{\nabla}_z \\ \vec{F}_x & \vec{F}_y & \vec{F}_z \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \vec{\nabla} \times \vec{F}$
Интегральные характеристики	<b>TODO:</b> Кажется их нет	Поток и циркуляция $\Pi \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \iint_S \vec{F} \vec{n}_0 d\sigma \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \iint_S \vec{F}_n d\sigma$ $\Gamma = \oint_L \vec{F} d\vec{l}$

**Def 2.19.3.** Векторная линия векторного поля это кривая, в каждой точке которой вектор поля  $\vec{F}$  является касательным к ней.

**Def 2.19.4.** Объединении непересекающихся векторных линий называется векторной трубкой.

*Замечание 2.19.5.* Отыскание векторных линий сводится к нахождению интегральных кривых из условия

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

*Пример 2.19.6.* Дано векторное поле  $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ . Требуется найти векторную линию, проходящую через  $M_0(1, 0)$ .

В данном примере  $P(x, y) = y$ , а  $Q(x, y) = -x$ . Составим ДУ и решим его:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \Rightarrow xdx + ydy = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

Подставим начальные условия  $y(1) = 0$ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2C \\ 1 + 0 = 2C \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

**Def 2.19.7.** Оператор Гамильтона/Набла

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

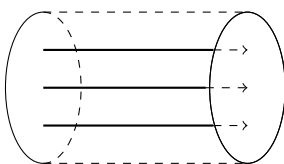
**Def 2.19.8.** Оператор Лапласа (лапласиан)

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

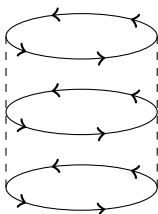
## 2.20. Виды векторных полей и их свойства (теоремы о поле градиента и поле вихря).

**Def 2.20.1.** Если  $\text{rot } \vec{F} = 0$ , то поле  $\vec{F}$  называется безвихревым.

**Def 2.20.2.** Если  $\text{div } \vec{F} = 0$ , то поле  $\vec{F}$  называется соленоидальным.



(a)  $\text{rot } \vec{F} = 0$



(b)  $\text{div } \vec{F} = 0$

*Замечание 2.20.3.* Безвихревому полю соответствуют незамкнутые векторные линии, а соленоидальному — замкнутые.

*Замечание 2.20.4.* В действительности поле может быть сложнее, но можно показать, что всякое поле является композицией этих двух типов.

**Def 2.20.5.** Векторное поле  $\vec{F}$  называется потенциальным, если

$$\exists u(x, y, z): \vec{F} = \vec{\nabla} u$$

Функция  $u(x, y, z)$  в этом случае называется скалярным потенциалом поля  $\vec{F}$ .

**Теорема 2.20.6.** Всякое безвихревое потенциально. Другими словами

$$\text{rot } \vec{F} = 0 \iff \exists u(x, y, z): \vec{F} = \vec{\nabla} u$$

*Доказательство.*  $\implies$  По определению ротора (в координатной форме):

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial z} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned}$$

Подберем  $u(x, y, z)$  так, чтобы  $u'_x = P$ ,  $u'_y = Q$  и  $u'_z = R$ . Тогда:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

$\Leftarrow$  Пусть  $\exists u(x, y, z): \vec{F} = \vec{\nabla} u$ . Тогда по определению ротора (в векторной форме):

$$\text{rot } \vec{F} = \text{rot } \vec{\nabla} u = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \cdot u = \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})}_{=0} \cdot u = 0$$

*Следствие 2.20.7.*

$$\text{rot } \vec{\nabla} u = 0$$

**Теорема 2.20.8.**

$$\text{div rot } \vec{F} = 0$$

*Доказательство.* По определению дивергенции и ротора (в векторной форме)

$$\text{div rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})}_{=0} \cdot \vec{F} = 0$$

## 2.21. Механический смысл потока и дивергенции.

**Теорема 2.21.1.** О механическом смысле потока

Поток это количество жидкости, протекающей за единицу времени через площадку  $S$  в заданном направлении.

*Доказательство.* Механический смысл потока был выяснен при построении поверхностного интеграла 2ого рода.

**Теорема 2.21.2.** О механическом смысле дивергенции

Дивергенция  $\text{div } \vec{F}(M_0)$  это мощность мощность точечного источника поля  $\vec{F}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим равенство в т. Гаусса-Остроградского (2.17.1):

$$\iiint_T \text{div } \vec{F} dv = \oiint_{S_T} \vec{F} d\vec{\sigma} = \Pi$$

Выберем в пространстве, где действует  $\vec{F}$ , точку  $M_0$  и окружим её объемом в границей  $S$ . К тройному интегралу в левой части равенства применима т. Лагранжа о среднем:

$$\exists M \in V: \iiint_T \text{div } \vec{F} dv = \text{div } \vec{F}(M) \cdot V$$

Будем стягивать выделенный ранее объем в точку  $M_0$ , получим

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ V \rightarrow 0}} \text{div } \vec{F}(M) \cdot V &= \lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ V \rightarrow 0}} \Pi \quad | : V \\ \text{div } \vec{F}(M_0) &= \frac{\Pi}{V} \end{aligned}$$

Выражение в правой части это и есть мощность точечного источника.

*Следствие 2.21.3.* Таким образом т. Гаусса-Остроградского (2.17.1) утверждает, что поток равен сумме мощностей точечных источников.

## 2.22. Механический смысл вихря и циркуляции.

**Теорема 2.22.1.** О механическом смысле ротора (вихря)

Ротор равен отношению циркуляции к площадке, т.е. работе силы вдоль бесконечно малого контура.

*Доказательство.* Рассмотрим равенство в т. Стокса (2.18.1):

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{\sigma} = \oint_{L^+} \vec{F} d\vec{l} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma$$

Выделим в пространстве, где действует  $\vec{F}$ , поверхность  $S$ , окруженную контуром  $L$ . К двойному интегралу в левой части равенства применима т. Лагранжа о среднем:

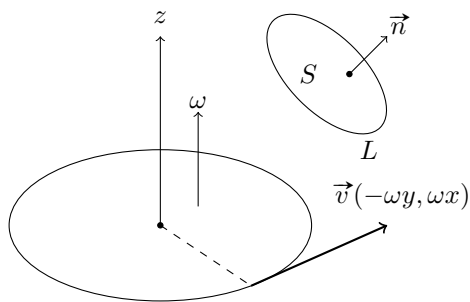
$$\exists M \in S: \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{\sigma} = \operatorname{rot} \vec{F}(M) \cdot S$$

Будем стягивать выделенную ранее поверхность в точку  $M_0$ , получим

$$\lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ S \rightarrow 0}} \operatorname{rot} \vec{F}(M) \cdot S \lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ S \rightarrow 0}} \Gamma \quad | : S \\ \operatorname{rot} \vec{F}(M_0) = \frac{\Gamma}{S}$$

**Теорема 2.22.2.** О механическом смысле циркуляции

Циркуляция это работа поля по вращению бесконечно малого колеса.



Рассмотрим поле линейных скоростей плоско вращающегося тела

$$\vec{v} = \underbrace{-\omega y}_P \vec{i} + \underbrace{\omega x}_Q \vec{j}$$

где  $\omega = \text{const}$  — угловая скорость, которая перпендикулярна плоскости вращения.

*Доказательство.* Рассмотрим плоскую площадку  $S$ , расположенную под углом  $\gamma$  к  $Oz$  и ограниченную контуром  $L$ . Найдём циркуляцию по этому контуру:

$$\begin{aligned} \Gamma_L &= \oint_{L^+} P dx + Q dy \stackrel{2.9.1}{=} \iint_{D_{xy}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ \Gamma_L &= \oint_{L^+} -\omega y dx + \omega x dy \stackrel{2.9.1}{=} \iint_{D_{xy}} 2\omega dx dy \end{aligned}$$

Т.к.  $D_{xy}$  это проекция  $S$  на плоскость  $Oxy$ , то  $dx dy = \cos \gamma d\sigma$  (пусть  $\cos \gamma > 0$ ). Получаем

$$\Gamma_L = \iint_{D_{xy}} 2\omega dx dy = \iint_S 2\omega \cos \gamma d\sigma = 2\omega_n \iint_S d\sigma = 2\omega_n S_{\text{площадь}}$$

Где  $\omega_n$  это проекция угловой скорости на нормаль к поверхности  $S$ .

*Следствие 2.22.3.* Таким образом, если  $\vec{n}_S \perp \vec{\omega}$ , то работа равна нулю.

При этом, если учесть механический смысл ротора (2.22.1), то

$$\operatorname{rot} \vec{F}(M_0) = \frac{\Gamma}{S} = 2\omega_n$$

## 2.23. Векторная запись теорем теории поля и их механический смысл.

**Теорема 2.23.1.** О потенциале

$$\int_L P dx + Q dy + R dz \text{ НЗП} \iff \oint_K = 0 \iff \begin{cases} R'_y = Q'_z \\ P'_z = R'_x \\ Q'_x = P'_y \end{cases} \iff \exists u(x, y, z): \vec{\nabla} u = \vec{F}$$

*Доказательство.* Как было показано ранее (2.20.6) последнее равенство равносильно тому, что  $\text{rot } \vec{F} = 0$ . Таким образом

$$\text{rot } \vec{F} = 0 = \oint_K = \Gamma$$

**Теорема 2.23.2.** Теорема Стокса.

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}_0 \cdot d\sigma = \int_L \vec{F} d\vec{l} = \Gamma$$

*Доказательство.* Теорема Стокса в координатной форме уже доказана (2.18.1). Запишем её:

$$\iint_S \underbrace{\left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)}_{\text{rot } \vec{F}_x} \cos \alpha d\sigma + \underbrace{\left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)}_{\text{rot } \vec{F}_y} \cos \beta d\sigma + \underbrace{\left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)}_{\text{rot } \vec{F}_z} \cos \gamma d\sigma = \oint_{L^+} P dx + Q dy + R dz$$

Заметим, что в скобках перед косинусами находятся соответствующие проекции ротора на координатные оси. Учитывая то, что  $\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ , получаем:

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}_0 d\sigma = \int_{L^+} \vec{F} d\vec{l}$$

**Теорема 2.23.3.** Теорема Гаусса-Остроградского.

$$\iiint_T \text{div } \vec{F} dV = \oiint_{S_T} \vec{F} \cdot \vec{n}_0 d\sigma$$

*Доказательство.* Теорема Гаусса-Остроградского в координатной форме уже доказана (2.17.1). Запишем её:

$$\iiint_T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oiint_{S_T} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma$$

Заметим, что под тройным интегралом в левой части выражения находится дивергенция поля  $\vec{F}$ . Тогда

$$\iiint_T \text{div } \vec{F} dv = \oiint_{S_T} \vec{F} \cdot \vec{n}_0 d\sigma$$

*Замечание 2.23.4.* Эти три теоремы устанавливают связь между содержанием величин внутри области и их расходом на границе области. Таким образом они все являются вариациями формулы Ньютона-Лейбница.