

# MA L<sub>EC</sub> 03

isagila

@pochtineploho

@DUBSTEPHAVEGUN

Собрано 08.10.2023 в 17:23



# Содержание

1. Лекции	3
1.1. Лекция 23.09.01.	3
1.2. Лекция 23.09.08.	5
1.3. Лекция 23.09.15.	7
1.4. Лекция 23.09.22.	10
1.5. Лекция 23.09.29.	12
1.6. Лекция 23.10.06.	14

# 1. Лекции

## 1.1. Лекция 23.09.01.

**Def 1.1.1.** Числовым рядом называется выражение  $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ , где  $\{u_n\}$  это некоторая числовая последовательность. Обозначается  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ .

*Замечание 1.1.2.* Нумерация может вестись с любого целого числа.

**Def 1.1.3.**  $u_n$  называется общим членом ряда.

**Def 1.1.4.**  $S_n = u_1 + \dots + u_k$  называется частичной суммой ряда.

*Замечание 1.1.5.*  $S_n$  также образуют последовательность.

**Def 1.1.6.** Если последовательность частичных сумм сходится, т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$ , то говорят, что ряд сходится к сумме  $S$  ( $S$  называется суммой ряда). Если предел равен бесконечности или не существует, то ряд расходится.

Иногда сумму ряда можно найти простой арифметикой.

*Пример 1.1.7* (Непосредственное вычисление суммы ряда).

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$
$$S_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}_{k=1} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}_{k=2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}_{k=3} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}_{k=n-1} + \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)}_{k=n} = 1 - \frac{1}{n+1}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 = S$$

*Пример 1.1.8* (Геометрический ряд (эталонный)). Пусть  $b \neq 0, b \in \mathbb{R}$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} bq^n = b + bq + bq^2 + bq^3 + \dots + bq^n = b(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) = b \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = S_n$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b}{1 - q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^{n+1})$$

Далее значение предела зависит от  $q$ .

1.  $|q| < 1 \implies q^n \rightarrow 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b}{1 - q} = S$

2.  $|q| > 1 \implies q^n \rightarrow \infty \implies$  ряд расходится.

3.  $q = 1 \implies S_n = b(n+1) \rightarrow \infty \implies$  ряд расходится.

4.  $q = -1 \implies S_n = \frac{b}{2}(1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1) = \begin{cases} b \\ 0 \end{cases} \implies$  две подпоследовательности сходятся к разным числам, значит предела нет и ряд расходится.

*Замечание 1.1.9.* Чаще требуется только определить сходимость ряда не вычисляя его сумму.

### Свойства числовых рядов

**Теорема 1.1.10.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n > \iff \sum_{n=k>1}^{\infty} u_n >$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \iff \sum_{n=k>1}^{\infty} u_n <$$

□

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n > \iff \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_k}_v + u_{k+1} + \dots + u_n \right) = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} v}_{v \in \mathbb{R}} + \lim_{n \rightarrow \infty} (u_{k+1} + \dots + u_n)$$

Для расходящихся доказательство аналогично. ■

*Замечание 1.1.11.* Теорему 1.1.10 можно сформулировать по-другому (не формально): ряд и его «хвост» одновременно сходятся и расходятся.

**Теорема 1.1.12.**

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R} \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha S$$

□

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n > \Longleftrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha u_1 + \dots + \alpha u_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + \dots + u_n) = \alpha S$$

■

*Замечание 1.1.13.* Если ряд расходится, то умножение на  $\alpha \neq 0$  не меняет его расходимости.

**Теорема 1.1.14.**

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R} \\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = S \pm \sigma$$

□

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n}_S \pm \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n}_\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n \pm \sigma_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$$

■

*Замечание 1.1.15.* Ряды складываются и вычитаются почленно.

*Замечание 1.1.16.* Из сходимости разности рядов **не следует** сходимость самих рядов. Например,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \neq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}}_{\text{расходятся}}$$

**Гармонический ряд (эталонный)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots$$

Рассмотрим вспомогательный ряд и вычислим его частичные суммы

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}} + \dots$$

$$\sigma_1 = 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} \quad \sigma_2 = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} \quad \sigma_n = 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2}$$

Последовательность частичных сумм  $\sigma_n$  расходится при  $n \rightarrow \infty$ . Последовательность частичных сумм исходного ряда почленно не меньше  $\sigma_n$ , значит  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ .

**Теорема 1.1.17.** Члены сходящегося ряда можно группировать произвольным образом **не переставляя**.

□ Группируя члены ряда получаем подпоследовательность последовательности частичных сумм. Если существует предел исходной последовательности, то существует и предел любой ее подпоследовательности. ■

*Замечание 1.1.18.* Перестановка членов ряда может изменить сумму. Например, рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ . Он сходится (без доказательства). Далее имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{16} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{32} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{16} + \frac{1}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{32} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots\right) - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} - \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

Получили, что сумма ряда равна своей половине.

## 1.2. Лекция 23.09.08.

*Замечание 1.2.1.* Можно доказать, что определенной перестановкой членов ряда в качестве суммы можно получить любое заданное число.

*Замечание 1.2.2.* Также возможно перемножение рядов. Произведение сходящихся рядов — сходящийся ряд. Формулы для произведения можно найти в литературе.

Далее для краткости ряды будут записываться в виде  $\sum u_n$ . Нижней границей по умолчанию будем считать единицу. В рядах с другой нижней границей и в местах, где необходимо сделать акцент на границе, будет использоваться запись вида  $\sum_{n=0} v_n$ .

Далее рассмотрим некоторые условия сходимости рядов.

**Теорема 1.2.3. (Необходимое условие сходимости ряда)**

$$\sum u_n > \implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

□

$$\sum u_n < \iff \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$$

$$u_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n+1} - S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - S = 0$$

■

*Замечание 1.2.4.* Обратное в общем случае неверно. Например

$$\sum \frac{1}{n} <, \text{ но } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

*Замечание 1.2.5.* Необходимым условием сходимости удобно пользоваться в обратную сторону, т.е. с его помощью проще показать, что ряд расходится.

*Пример 1.2.6.*

$$\begin{aligned} \sum \underbrace{(2n+3) \cdot \sin \frac{1}{n}}_{u_n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{2n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n} = 2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 1 \implies \sum (2n+3) \cdot \sin \frac{1}{n} < \end{aligned}$$

*Пример 1.2.7.*

$$\sum \frac{1}{2n+3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+3} = 0$$

Рассмотрим вспомогательный ряд  $\sum \frac{1}{3n}$ . Можно убедиться, что начиная с  $n = 4$  члены вспомогательного ряда меньше соответствующих членов исследуемого ряда. Заметим, что

$$\sum \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum \frac{1}{n} \implies <$$

Значит, исходный ряд также расходится.

**Теорема 1.2.8. (Критерий Коши для сходимости рядов)**

$$\sum u_n < \iff \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \left| \exists n_0 \in \mathbb{N} \left| n \geq p \geq n_0 : |S_n - S_p| < \varepsilon \right. \right|$$

Стоит отметить, что  $|S_n - S_p| = |u_p + u_{p+1} + \dots + u_n|$ . Такая форма записи иногда будет полезна в дальнейшем.

*Замечание 1.2.9.* Смысл критерия Коши в том, что у сходящегося ряда при заданном  $\varepsilon$  начиная с  $n_0$  весь хвост попадает в  $\varepsilon$ -трубу.

*Замечание 1.2.10.* Критерий не удобен для исследования на сходимость, поэтому обычно используют признаки сходимости.

**Достаточные условия (признаки) сходимости знакоположительных рядов**

*Замечание 1.2.11.* Будем рассматривать только ряды, в которых  $u_n > 0$ , но описанные далее признаки можно применять для любых рядов, предварительно навесив модуль.

**Теорема 1.2.12. (Признак сравнения в неравенствах)** Пусть  $\sum u_n$  — исследуемый ряд, а  $\sum v_n$  — вспомогательный ряд и  $u_n, v_n \geq 0$ . Тогда

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \mid u_n < v_n \\ \sum v_n > \end{array} \right\} \implies \sum u_n > \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \mid u_n > v_n \\ \sum v_n < \end{array} \right\} \implies \sum u_n < \quad (2)$$

□ Сначала докажем (1). Пусть  $S_n = u_1 + u_2 + \dots$  и  $\sigma_n = v_1 + v_2 + \dots$ , т.к.  $\forall n \in \mathbb{N} \mid u_n < v_n$ , то  $S_n \leq \sigma_n$ . Причем эти последовательности возрастают, т.к. ряды знакоположительные. Далее

$$\sum v_n > \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma \in \mathbb{R}$$

Таким образом последовательность  $\{\sigma_n\}$  ограничена числом  $\sigma$ . Последовательность  $\{S_n\}$  возрастает и также ограничена числом  $\sigma$ . Значит по т. Вейерштрасса  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , причем  $S \leq \sigma$ .

Теперь от противного докажем (2). Пусть  $\sum u_n$  сходится, тогда согласно (1)  $\sum v_n$  тоже должен сходиться. Противоречие. ■

*Замечание 1.2.13.* Для установления расходимости ряда в качестве вспомогательного не следует брать ряды с несуществующей как предел суммой.

*Пример 1.2.14.*

$$\sum \frac{1}{n^2} \quad u_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1 \in \mathbb{R} \quad v_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

Неравенство  $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n+1)}$  неверно, однако заметим, что

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2 + n} > \frac{1}{n^2 + 2n + 1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Таким образом по признаку сравнения ряд  $\sum_{n=0} \frac{1}{(n+1)^2}$  сходится. Если перенумеровать, то получим, что и ряд  $\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$  сходится.

**Теорема 1.2.15. (Предельный признак)** Пусть  $\sum u_n$  — исследуемый ряд, а  $\sum v_n$  — вспомогательный ряд и  $u_n, v_n \geq 0$ . Тогда, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

то ряды имеют одинаковую сходимость.

□ Распишем предел по определению, после чего раскроем получившийся модуль (учитывая то, что ряды знакоположительные).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = q \iff \forall \varepsilon > 0 \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0: \left| \frac{u_n}{v_n} - q \right| < \varepsilon$$

$$q - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < q + \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon)v_n < u_n < (q + \varepsilon)v_n \quad (1)$$

При достаточно малом  $\varepsilon$  ряды  $\sum (q + \varepsilon)v_n$ ,  $\sum (q - \varepsilon)v_n$  и  $\sum v_n$  имеют одинаковую сходимость, т.к. домножение на ненулевую константу не влияет на сходимость. Применим признак сравнения.

$$\sum v_n < \implies \sum u_n < \quad \sum v_n > \implies \sum u_n > \quad (2)$$

В первом случае  $u_n$  расходится, т.к. он больше расходящегося ряда (левая часть неравенства (1)), во втором случае  $u_n$  сходится, т.к. он меньше сходящегося ряда (правая часть неравенства (1)). ■

*Замечание 1.2.16.* Т.к.  $u_n$  и  $v_n$  являются бесконечно малыми (иначе вопрос о расходимости ряда  $u_n$  решен, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости 1.2.3), то в предельном признаке устанавливается порядок  $u_n$  по отношению к  $v_n$ . Ряды имеют одинаковый характер сходимости при одном порядке малости.

**Лм 1.2.17.** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \iff u_n = o(v_n)$ . Тогда  $\sum v_n > \implies \sum u_n >$ .

□ Распишем предел по определению.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \left| \exists n_0 \in \mathbb{N} \left| \forall n > n_0: \left| \frac{u_n}{v_n} \right| < \varepsilon \implies u_n < \varepsilon v_n \right. \right| \quad (1)$$

Т.к. ряд  $\sum v_n$  сходится, то выполнен критерий Коши (1.2.8), имеем

$$\forall \varepsilon' > 0 \left| \exists m_0 \in \mathbb{N} \left| \forall n \geq p \geq m_0: |v_p + \dots + v_n| < \varepsilon' \right. \right| \quad (2)$$

Домножим последнее неравенство на  $\varepsilon$  и объединив его с неравенством в (1) получим, что

$$|u_p + \dots + u_n| < \varepsilon |v_p + \dots + v_n| < \underbrace{\varepsilon \varepsilon'}_{\tilde{\varepsilon}} \quad (3)$$

Подставим это в (2), получим

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \left| \exists m_0 \in \mathbb{N} \left| \forall n \geq p \geq m_0: |u_p + \dots + u_n| < \tilde{\varepsilon} \right. \right|$$

Значит ряд  $\sum u_n$  сходится по критерию Коши. ■

*Замечание 1.2.18.* Если в отношении общих членов ряда получилась бесконечность, то лучше использовать другие признаки.

**Теорема 1.2.19. (Признак Даламбера)**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D \in \mathbb{R} = \begin{cases} 0 \leq D < 1 & \implies > \\ D = 1 & \implies \text{необходимо дополнительное исследование} \\ D > 1 & \implies < \end{cases}$$

□ Распишем предел по определению.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D \iff \forall \varepsilon > 0 \left| \exists n_0 \in \mathbb{N} \left| \forall n > n_0: \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - D \right| < \varepsilon \implies (D + \varepsilon)u_n < u_{n+1} < (D + \varepsilon)u_n \right. \right| \quad (1)$$

Рассмотрим правую часть полученного неравенства. Положим  $D + \varepsilon = r < 1$ . Тогда  $u_{n+1} < r \cdot u_n$  начиная с  $n_0$ . Имеем

$$\left. \begin{array}{l} u_{n_0+1} < r u_{n_0} \\ u_{n_0+2} < r u_{n_0+1} < r^2 u_{n_0} \\ \dots \\ u_{n_0+k} < r^k u_{n_0} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \sum u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_{n_0+k} + \dots \\ \sum v_n = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_{n_0}}_{\text{отбросим}} + r u_{n_0} + \dots + r^k u_{n_0} + \dots \\ u_n \leq v_n \end{array} \right. \quad (2)$$

Отбросим «голову» полученных рядов до члена  $u_{n_0}$  включительно. Тогда из ряда  $\sum v_n$  получим ряд

$$\sum v'_n = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{r^k u_{n_0}}_{const} = u_{n_0} \sum_{k=1}^{\infty} r^k \quad (3)$$

Получаем эталонный геометрический ряд, т.к.  $r < 1$  то он сходится. Значит по признаку сравнения сходится и ряд  $\sum u'_n$ , полученный отбрасыванием «головы» ряда  $\sum u_n$ . Отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость, а значит ряд  $\sum u_n$  также сходится.

Аналогично рассмотрим левую часть неравенства (1) и положим  $D - \varepsilon = r > 1$ . Оценим члены ряда снизу вспомогательным рядом  $\sum v'_{n_0+k} = r^k u_{n_0}$ . При  $r > 1$  исходный ряд почленно больше расходящегося, значит тоже расходится. ■

### 1.3. Лекция 23.09.15.

**Теорема 1.3.1. (Радикальный признак Коши)**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = K \in \mathbb{R} = \begin{cases} 0 \leq K < 1 & \implies > \\ K = 1 & \implies \text{необходимо дополнительное исследование} \\ K > 1 & \implies < \end{cases}$$

□ Распишем предел по определению.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = K \iff \forall \varepsilon > 0 \left| \exists n_0 \in \mathbb{N} \left| \forall n > n_0: |\sqrt[n]{u_n} - K| < \varepsilon \implies K - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < K + \varepsilon \right. \right|$$

Рассмотрим случай  $0 \leq K < 1$ . Тогда из правой части неравенства получаем

$$\exists r \left| K < r < 1 \ (\varepsilon = r - K) \implies \sqrt[n]{u_n} < r \implies u_n < r^n \right.$$

Таким образом ряд  $\sum u_n$  почленно меньше ряда  $\sum r^n$  ( $0 < r < 1$ ), который сходится. Значит по признаку сравнения он тоже сходится. Аналогично рассмотрим случай  $K > 1$ . Тогда из левой части неравенства получаем

$$\exists r \mid K > r > 1 \ (\varepsilon = K - r) \implies r < \sqrt[n]{u_n} \implies u_n > r^n$$

Таким образом ряд  $\sum u_n$  почленно больше расходящегося ряда  $\sum r^n$  ( $r > 1$ ), значит он тоже расходится. ■

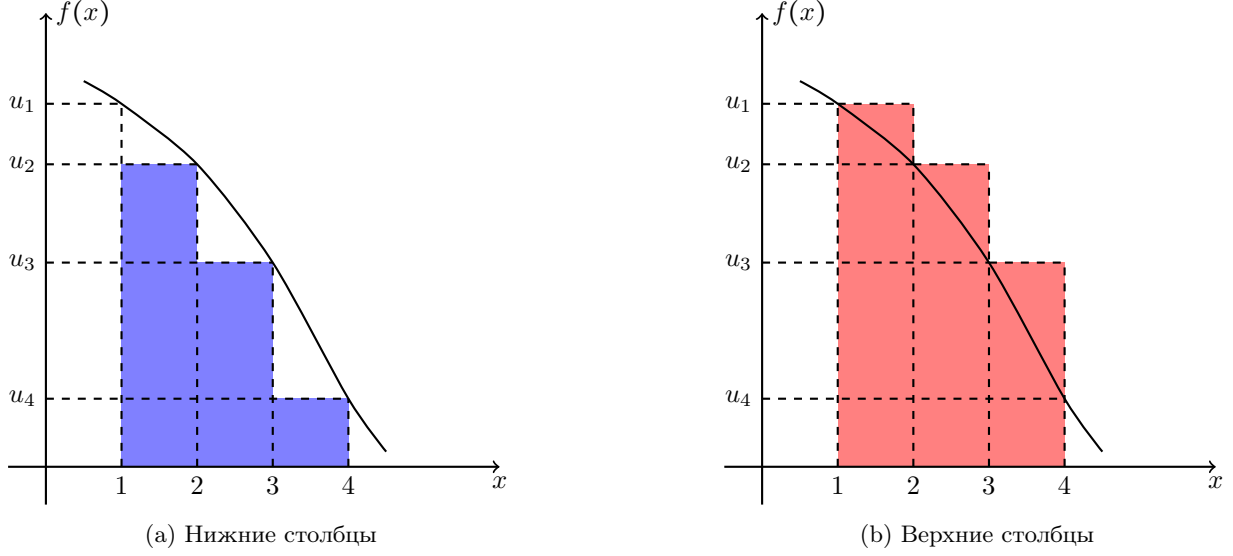


Рис. 1.3.2: Иллюстрация к 1.3.3

**Теорема 1.3.3. (Интегральный признак Коши)** Пусть есть ряд  $\sum_{n=a}^{\infty} u_n$  и интеграл  $\int_a^{\infty} f(x)dx$ . Тогда если  $f(x) \geq 0$ ,  $f(x)$  монотонно убывает и  $\forall n \in \mathbb{N} \mid f(n) = u_n$ , то ряд и интеграл имеют одинаковую сходимость.

□ Пользуясь иллюстрацией рис. 1.3.2 составим неравенство и воспользуемся предельным переходом.

$$\underbrace{\sum_{k=2}^n u_k}_{\text{Нижние столбцы}} \leq \int_1^n f(x)dx \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} u_k}_{\text{Верхние столбцы}}$$

$$S_n - u_1 \leq \int_1^n f(x)dx \leq S_{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - u_1) \leq \int_1^{\infty} f(x)dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n-1})$$

1.  $\sum u_n = S \in \mathbb{R}$

Интеграл сходится, т.к. ограничен снизу и сверху числами  $S - u_1$  и  $S$  соответственно.

2.  $\sum u_n < \infty$

Интеграл расходится, т.к. он не менее бесконечности (левая часть неравенства).

3.  $\int > I$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - u_1) < I \in \mathbb{R} \implies \sum u_n > I$$

4.  $\int < I$

Ряд расходится, т.к. предел его частичных сумм не менее бесконечности (правая часть неравенства). ■

**Пример 1.3.4.** Рассмотрим обобщенный гармонический ряд  $\sum \frac{1}{n^p}$  и исследуем его сходимость с помощью интегрального признака Коши. Введем функцию  $f(x) = \frac{1}{x^p}$ ,  $f(x): [1; +\infty] \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Если  $p = 1$ , то получаем

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty$$

Если  $p \neq 1$ , то

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{1-p} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} (x^{-p+1} - 1)$$



Значит, если  $-p + 1 < 0$ , т.е.  $p > 1$ , то интеграл (а значит и ряд) сходится. Если же  $p < 1$ , то ряд расходится. В итоге

$$\sum \frac{1}{n^p} \quad \begin{cases} p > 1 \implies > \\ p \leq 1 \implies < \end{cases}$$

### Знакопередающиеся ряды

**Def 1.3.5.** Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots \pm u_n \mp$$

где  $u_n > 0$  называют знакопередающимся рядом.

*Замечание 1.3.6.* Следует различать знакопередающиеся и знакопеременные ряды. В знакопередающихся рядах знак чередуется с каждым следующим членом ряда. В знакопеременных знак члена ряда не обязательно чередуется — он может меняться и по более сложным правилам. Примером знакопеременного ряда может быть

$$\sum u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots$$

**Теорема 1.3.7. (Признак Лейбница о сходимости ряда)** Пусть дан знакопередающийся ряд  $\sum (-1)^{n-1} u_n$ . Тогда если  $u_i$  монотонно убывают и  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , то данный ряд сходится.

□ Рассмотрим частичную сумму ряда  $S_{2n}$

$$S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2n-1} - u_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

Т.к.  $\{u_i\}$  монотонно убывает, то  $u_i > u_{i+1}$ , значит все полученные скобки положительные, причем при увеличении  $n$  сумма  $S_{2n}$  накапливается. Таким образом последовательность  $\{S_{2n}\}$  возрастает. Сгруппируем члены ряда в частичной суммой по другому.

$$S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2n-1} - u_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$$

Опять же, в силу монотонности  $\{u_i\}$  все полученные скобки положительные, а  $u_{2n}$  положителен по условию. Значит  $S_{2n} < u_1$ . Итого последовательность  $\{S_{2n}\}$  ограничена сверху и монотонно возрастает, значит

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S \in \mathbb{R}$$

$S_{2n+1}$  отличается от  $S_{2n}$  одним слагаемым  $u_{2n+1}$ , которое не влияет на сходимость.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}}_S + \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1}}_0 = S$$

■

*Замечание 1.3.8* (Об оценке остатка ряда). В доказательстве теоремы 1.3.7 установили, что  $S_{2n} < u_1$  (для  $S_{2n+1}$  это также верно). Рассмотрим следующий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots \pm u_{k+1} \mp u_{k+2} \pm \dots$$

$$R_{k+1} = \sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = \pm \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} u_n$$

Если исходный ряд сходится, то и его остаток  $R_{k+1}$  также сходится. При этом остаток можно оценить (по модулю) старшим членом, т.е.  $|R_{k+1}| < |u_{k+1}|$ . Это позволяет определить, какая погрешность получится, если в приближенных вычислениях использовать частичную сумму ряда.

*Пример 1.3.9.* Пусть дан ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$$

Вычислим его остаток  $R_4$ .

$$R_4 = \left( \frac{1}{16} - \frac{1}{32} \right) + \left( \frac{1}{64} - \frac{1}{128} \right) + \dots = \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \frac{1}{512} + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}}$$

Преобразуем полученное выражение перенумеровав ряд.

$$R_5 = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^{k+2}} = \frac{1}{32} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{24} < \frac{1}{16} = u_4$$

*Замечание 1.3.10.* Заметим, что оценка 1.3.8 не работает для знакоположительных рядов. Приведем пример.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{16} + \dots}_{R_4}$$

$$R_4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = \frac{1}{16} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots \right) = \frac{1}{8} > \frac{1}{16} = u_4$$

**Теорема 1.3.11. (Абсолютная сходимость)**

$$\sum |u_n| > \implies \sum u_n >$$

□ Применим критерий Коши для ряда  $\sum |u_n|$ .

$$\sum |u_n| > \iff \forall \varepsilon > 0 \left| \exists n_0 \in \mathbb{N} \left| \forall n > p > n_0: |S_n - S_p| < \varepsilon \right. \right| \quad (1)$$

Раскроем и преобразуем последнее неравенство. Воспользуемся тем, что модуль суммы не превышает суммы модулей.

$$\begin{aligned} |S_n - S_p| &= \left| |u_p| + \dots + |u_n| \right| < \varepsilon \\ |u_p + \dots + u_n| &\leq |u_p| + \dots + |u_n| < \varepsilon \\ |u_p + \dots + u_n| &< \varepsilon \end{aligned} \quad (2)$$

Если вернуться к 1 и подставить полученное неравенство, то получим критерий Коши для ряда  $\sum u_n$ . ■

**Def 1.3.12.** Ряд называется абсолютно сходящимся, если ряд из модулей сходится. Ряд называется условно сходящимся, если он сходится, но ряд из модулей расходится.

*Пример 1.3.13.* Примером условно сходящегося ряда может быть ряд  $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ .

*Замечание 1.3.14.* Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда не меняет его суммы.

*Замечание 1.3.15.* Ряд из модулей знакоположителен, значит для него можно применять все признаки для знакоположительных рядов рассмотренные ранее.

## 1.4. Лекция 23.09.22.

### Функциональные ряды

**Def 1.4.1.** Ряд  $\sum u_n(x)$ , где  $u_n(x)$  вещественно-значные, называется функциональным.

*Замечание 1.4.2.* Функциональный ряд при фиксированном  $x$  становится числовым. Например

$$\sum x_n \quad \begin{array}{ll} x = 2 & \sum 2^n < \\ x = \frac{1}{2} & \sum \frac{1}{2^n} > \end{array}$$

*Замечание 1.4.3.* Определение общего члена, частичной суммы и суммы ряда сохраняются, но теперь это функции.

**Def 1.4.4.** Если при фиксированном  $x_0$  числовой ряд  $\sum u_n(x_0) >$ , то говорят, что этот ряд сходится в точке  $x = x_0$ . При этом множество  $x$ , в которых ряд  $>$  называется областью сходимости ряда.

*Замечание 1.4.5.* Заметим, что если ряд  $\sum u_n(x)$  сходится к сумме  $S(x)$  и  $S_n(x)$ ,  $r_{n+1}(x)$  — частичная сумма и остаток ряда (т.е.  $S(x) = S_n(x) + r_{n+1}(x)$ ), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S(x) - S_n(x)) = S(x) - \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)}_{S(x)} = 0$$

Таким образом, у сходящегося ряда остаток стремится к нулю.

*Замечание 1.4.6* (О критерии Коши для функциональных рядов).

$$\sum u_n(x) > \text{ в области } D \iff \forall \varepsilon > 0 \left| \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \left| \forall n > m > n_0: |S_n - S_m| < \varepsilon \right. \right|$$

Критерий неудобен, т.к.  $n_0$  различны для разных  $x$ . Можно определить сходимость так, чтобы избавиться от зависимости  $x$ .

**Def 1.4.7.** Ряд  $\sum u_n(x)$  называется сходящимся равномерно в области  $D$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \left| \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \left| \forall n > n_0: |r_{n+1}(x)| < \varepsilon \right. \right|$$

**Def 1.4.8.** Пусть дан функциональный ряд  $\sum u_n(x)$  и сходящийся числовой ряд  $\sum a_n$  такой, что  $\forall n \in \mathbb{N} \left| u_n(x) \right| \leq a_n$  в области  $D$ . Тогда ряд  $\sum u_n(x)$  называется мажорируемым числовым рядом  $\sum a_n$ .

**Теорема 1.4.9. (Признак Вейерштрасса)** Если ряд  $\sum u_n(x)$  мажорируемый, то он равномерно сходится.

□ Пусть исходный ряд мажорируем рядом  $\sum a_n$ . Обозначим остаток этого ряда  $\overline{r_{n+1}} = a_{n+1} + \dots$ , тогда

$$\sum a_n > \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \left| \forall n > n_0: |\overline{r_{n+1}}| < \varepsilon \right. \quad (1)$$

Рассмотрим модуль остатка исходного ряда.

$$|r_{n+1}| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots| < \underbrace{|u_{n+1}(x)|}_{< a_{n+1}} + \underbrace{|u_{n+2}(x)|}_{< a_{n+2}} + \dots < \varepsilon \quad (2)$$

Подставим (2) в (1).

$$\sum a_n > \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \left| \forall n > n_0: |r_{n+1}| < \varepsilon \right. \quad (3)$$

■

*Замечание 1.4.10.* Для мажорируемых рядов работают признаки сходимости Даламбера, Коши и т.д. Они позволяют оценить область сходимости.

*Пример 1.4.11.* Пусть дан функциональный ряд  $\sum \left( \frac{x+n}{2nx} \right)^2$ . Применим признак радикальный Коши и получим

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x+n}{2nx} \right| = \frac{1}{2|x|} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n} + 1 \right| = \frac{1}{2|x|}$$

Теперь, если  $K < 1$ , т.е.  $|x| > \frac{1}{2}$ , то ряд сходится. Далее нужно проверить случай  $K = 1$ , ведь радикальный признак Коши ничего не утверждает о сходимости в этом случае. Для начала рассмотрим  $x = \frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned} \sum \left( \frac{\frac{1}{2} + n}{n} \right)^2 &= \sum \left( 1 + \frac{1}{2n} \right)^2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n \cdot \frac{1}{2}} &= e^{\frac{1}{2}} \neq 0 \end{aligned}$$

Таким образом полученный ряд расходится, т.к. нарушено необходимое условие сходимости ряда. Аналогично рассмотрим случай  $x = -\frac{1}{2}$ .

$$\sum \left( \frac{-\frac{1}{2} + n}{-n} \right)^2 = \sum \left( -1 + \frac{1}{2n} \right)^2 = \sum (-1)^n \cdot \left( 1 - \frac{1}{2n} \right)^2$$

Здесь мы также видим, что нарушено необходимое условие сходимости. Итого, область сходимости имеет вид  $D = (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$ .

### Непрерывность суммы ряда

*Замечание 1.4.12.*

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) + \dots + f_n(x) &= f(x) \\ f_i &\in C_0[a; b] \end{aligned} \right\} \implies f(x) \in C_0[a; b]$$

Однако для бесконечных сумм это в общем случае неверно. Покажем это на следующем примере

$$\begin{aligned} \sum \left( x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \right) \\ S_n(x) &= x^{\frac{1}{2n+1}} - x \\ S(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \end{aligned}$$

Требуется узнать, непрерывна ли функция  $S(x)$ . Рассмотрим три случая.

$$x > 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x^{\frac{1}{2n+1}} - x \right) = 1 - x$$

$$x = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x^{\frac{1}{2n+1}} - x \right) = 0$$

$$x < 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x^{\frac{1}{2n+1}} - x \right) = -1 - x$$

$$S(x) = \begin{cases} 1 - x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 - x & x < 0 \end{cases}$$

Итого мы видим, что непрерывность нарушена.

**Теорема 1.4.13.**

$$\left. \begin{array}{l} S(x) = \sum u_n(x) \\ u_n(x) \in C_0[a; b] \\ \sum u_n(x) \text{ мажорируем на } [a; b] \end{array} \right\} \implies S(x) \in C_0[a; b]$$

□ Мы хотим доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \left| \exists \delta > 0: |\Delta x| < \delta \implies |\Delta S| < \varepsilon \right. \quad (1)$$

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \Delta S &= S(x + \Delta x) - S(x) \\ S(x) &= S_n(x) + r_{n+1}(x) \\ \Delta S_n &= S_n(x + \Delta x) - S_n(x) \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_n(x + \Delta x) + r_{n+1}(x + \Delta x) - S_n(x) - r_{n+1}(x) \\ &= \Delta S_n + r_{n+1}(x + \Delta x) - r_{n+1}(x) \end{aligned} \quad (3)$$

$\Delta S_n$  это конечная сумма, значит

$$\forall \varepsilon > 0 \left| \exists \delta > 0: |\Delta x| < \delta \implies |\Delta S_n| < \frac{\varepsilon}{3} \right. \quad (4)$$

Далее рассмотрим  $r_{n+1}(x)$ . Применим условие мажорируемости (т.е. равномерной сходимости).

$$\forall \varepsilon > 0 \left| \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \left| \forall n > n_0: |r_{n+1}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \right. \right. \quad (\forall x \in [a; b]) \quad (5)$$

Аналогично можно рассмотреть  $r_{n+1}(x + \Delta x)$ . Итого из (4) и (5) получаем, что

$$|\Delta S| = |\Delta S_n + r_{n+1}(x + \Delta x) - r_{n+1}(x)| \leq |S_n| + |r_{n+1}(x + \Delta x)| + |r_{n+1}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad (6)$$

■

*Замечание 1.4.14.* Непрерывность суммы мажоритируемого ряда позволяет такие ряды почленно интегрировать и дифференцировать.

## 1.5. Лекция 23.09.29.

**Теорема 1.5.1. (Интегрирование рядов)** Пусть  $\sum u_n(x) = S(x)$  — мажорируем на  $[a; b]$ . Тогда имеет смысл  $\int_a^x S(t)dt$  ( $\forall x \in [a; b]$ ), а также

$$\int_a^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt \quad (0)$$

□ Если ряд мажорируем, то  $S(x)$  непрерывна и определен интеграл  $\int_a^x S(t)dt = A \in \mathbb{R}$ . Докажем равенство (0). Пользуясь линейностью интеграла получаем

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{k=1}^n u_k(x) + r_{n+1}(x) \\ \int_a^x S(t)dt &= \int_a^x (u_1(t) + \dots + u_n(t))dt + \int_a^x r_{n+1}(t)dt = \sum_{k=1}^n \left( \int_a^x u_k(t)dt \right) + \int_a^x r_{n+1}(t)dt \end{aligned} \quad (1)$$

Далее поработаем с остатком ряда. Имеем  $|r_{n+1}| = |u_{n+1}(t) + u_{n+2}(t) + \dots|$ . Т.к. ряд мажорируем, то  $\forall i: |u_i| \leq a_i$ , где  $\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$  это остаток мажорирующего ряда.

Т.к. мажорирующий ряд сходится, то его остаток  $\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = \varepsilon_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Тогда  $|r_{n+1}(t)| < \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Получаем

$$\left| \int_a^x r_{n+1}(t)dt \right| \leq \int_a^x |r_{n+1}(t)|dt < \int_a^x \varepsilon_n dt = \varepsilon_n(x - a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2)$$

Таким образом  $\int_a^x r_{n+1}(t)dt$  абсолютно сходится к нулю. Используя это и (1), получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x S(t)dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \int_a^x u_k(t)dt \right) + \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x r_{n+1}(t)dt}_{=0} \\ &= \int_a^x S(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_a^x u_k(t)dt \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Полученная формула разрешает почленно интегрировать мажорируемые ряды. ■

**Теорема 1.5.2.**

$$\left. \begin{array}{l} \sum u_n(x) = S(x) \\ \forall n: u_n \in C_1[a; b] \\ \forall n: u'_n \in C_0[a; b] \\ \sum u'_n(x) \text{ мажорируем на } [a; b] \end{array} \right\} \implies \sum u'_n(x) = D(x) = S'(x)$$

□  $D(x)$  непрерывна, т.к. ряд производных мажорируем. Тогда имеет смысл  $\int_a^x D(t)dt$  ( $\forall x \in [a; b]$ ). Используя линейность интеграла получаем

$$\begin{aligned} \int_a^x D(t)dt &= \int_a^x u'_1(t)dt + \int_a^x u'_2(t)dt + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \Big|_a^x = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(a)) \stackrel{\sum u_n(x) = S(x)}{=} S(x) - \underbrace{S(a)}_{=const} \\ D(x) &= \left( \int_a^x D(t)dt \right)' = S'(x) - \underbrace{S'(a)}_{=0} = S'(x) \end{aligned}$$

■

*Замечание 1.5.3.* Не мажорируемые ряды формально дифференцируются и интегрируются почленно, но равенство сумм не выполняется (интеграл суммы не равен сумме интегралов).

*Пример 1.5.4.* Рассмотрим следующий ряд

$$\sum \frac{\sin n^4 x}{n^2} \quad \left| \frac{\sin n^4 x}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \implies \sum \frac{1}{n^2} \text{ мажорирующий}$$

Допустим, мы не проверили, что  $\sum u'_n(x)$  мажорируем и продифференцировали исходный ряд «не глядя».

$$\begin{aligned} \sum u'_n(x) &= \sum \frac{1}{n^2} (\cos(n^4 x) \cdot n^4) = \sum n^2 \cos n^4 x \\ u'_n &= n^2 \underbrace{\cos n^4 x}_{\text{ограничена}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

Мы видим, что не выполняются необходимое условие сходимости.

## Степенные ряды

**Def 1.5.5.** Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  называется степенным рядом или рядом по степени  $x$ .

В степенных рядах обозначение  $\sum c_n x^n$  будет подразумевать, что нижняя граница равна нулю, а не единице, как это было ранее.

*Замечание 1.5.6.* Можно рассматривать степенные ряды со сдвигом в точку  $a$ .

$$\sum c_n (x-a)^n \stackrel{x-a=t}{=} \sum c_n t^n$$

**Теорема 1.5.7. (Абеля. Признак сходимости степенного ряда)** Если  $\sum c_n x^n$  сходится в  $x_0 \neq 0$ , тогда  $\forall x: |x| < |x_0|$  ряд сходится абсолютно и равномерно. Если  $\sum a_n x^n$  расходится в  $x_1$ , тогда  $\forall x: |x| > |x_1|$  ряд расходится.

□ Сначала докажем первую часть теоремы. Ряд  $\sum c_n x^n$  сходится в  $x_0 \implies$  выполнено необходимое условие сходимости  $c_n x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Значит последовательность  $\{u_n\}$  ограничена, т.е.  $\exists M > 0: |c_n x_0^n| \leq M$ . Рассмотрим ряд из модулей элементов исходного ряда

$$\sum |c_n x^n| = |c_0| + |c_1 x| + |c_2 x^2| + \dots + |c_n x^n| + \dots = \underbrace{|c_0|}_{\leq M} + \underbrace{|c_1 x_0|}_{\leq M} \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right| + \underbrace{|c_2 x_0^2|}_{\leq M} \cdot \left| \frac{x^2}{x_0^2} \right| + \dots = \sum |c_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq \sum M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

Т.к.  $|x| < |x_0|$ , то этот ряд сходится  $\implies$  исходный ряд сходится абсолютно. Если  $|x| < |x_0|$ , то  $\exists r > 0: |x| < r < |x_0|$ . Таким образом

$$|c_n x^n| \leq M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \cdot \left| \frac{r}{x_0} \right|^n$$

и  $M \left| \frac{r}{x_0} \right|^n$  — члены мажорирующего ряда.

Вторую часть теоремы докажем от противного. Пусть  $\exists: |x| > |x_1|$  и  $\sum c_n x^n$  сходится. Тогда согласно первой части теоремы в точке  $x_1$  ряд должен сходиться. Противоречие. ■

**Замечание 1.5.8.** Между интервалами сходимости и расходимости степенного ряда найдется точка  $\pm R$  называемая радиусом сходимости ряда. Интервал  $(-R; R)$  называется кругом сходимости.

**Замечание 1.5.9.** В круге сходимости ряд мажорируем  $\implies$  интегрируем. Исследуем возможность дифференцирования. Нужно показать, что  $\sum u'_n(x) = \sum c_n \cdot n \cdot x^{n-1}$  мажорируем. Рассмотрим интервал  $(-r; r) \in (-R; R)$ . В этом интервале исходный ряд сходится, значит

$$\forall \xi \in (-R; R) \setminus (-r; r) \implies \begin{cases} |c_n \xi^n| \leq M \in \mathbb{R}^+ \\ \frac{r}{\xi} < 1 \end{cases}$$

$$\forall x \in (-r; r): |u'_n(x)| = |c_n \cdot n \cdot x^{n-1}| \leq |c_n \cdot n \cdot r^{n-1}| = \left| \frac{c_n \xi^n}{\xi} \right| \cdot \left| n \cdot \left( \frac{r}{\xi} \right)^{n-1} \right| \leq \left| \frac{M}{\xi} \right| \cdot \left| n \cdot \left( \frac{r}{\xi} \right)^{n-1} \right|$$

Если ряд из производных мажорируем, то ряд из вторых производных также мажорируем и т.д.

## 1.6. Лекция 23.10.06.

### Теорема 1.6.1. (Формула Тейлора)

$$\left. \begin{aligned} f(x) &\in C_\infty u_\delta(x_0) \\ \forall x \in (-R; R) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n &= T \\ \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \implies f(x) = T$$

□

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (1)$$

Заметим, что  $T_n(x)$  это частичная сумма ряда (2).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (2)$$

Т.к. ряд степенной, то можно найти радиус сходимости. Пусть в круге радиуса  $R$  ряд Тейлора (2) сходится к сумме  $T$ , тогда перейдем к пределу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{T_n(x)}_T + \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{R_{n+1}(x)}_{=0} \implies f(x) = T$$

■

**Def 1.6.2** (Ряд Маклорена).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Такое разложение  $f(x)$  называется стандартным.

### Стандартные разложения элементарных функций

**I**  $f(x) = e^x$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|x|}{n+1} < 1 \implies \text{область сходимости } \mathbb{R}$$

**II**  $f(x) = \sin x$

$$f^{(n)}(x) = \sin \left( x + \frac{\pi n}{2} \right)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \left( \frac{\pi n}{2} \right)}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{\sin \left( \frac{\pi}{2} (n+1) + \xi \right)}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)} = 0 \implies \text{область сходимости } \mathbb{R}$$

### III $f(x) = \cos x$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$R_{n+1}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

область сходимости  $\mathbb{R}$

### IV.1 $f(x) = \sinh x$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

### IV.2 $f(x) = \cosh x$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Замечание 1.6.3.

$$e^{i\pi} = \sum_{(i\pi)^n}^{n!} = 1 + \frac{i\pi}{1!} - \frac{\pi^2}{2!} - \frac{i\pi^3}{3!} + \frac{\pi^4}{4!} = \underbrace{\left(1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \dots\right)}_{\cos \pi} + i \underbrace{\left(\frac{\pi}{1!} - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \dots\right)}_{\sin \pi} = -1 + 0 = -1$$

Или, если обобщить,  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ .

### V Биномиальный ряд $f(x) = (1+x)^m$ , $m \in \mathbb{R}$

Замечание 1.6.4. Представление остаточного члена в форме Лагранжа и доказательство его сходимости к нулю это сложная задача, поэтому получим представление другим способом.

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(1+x)^{m-1} \\ (1+x)f'(x) &= m(1+x)^m = mf(x) \\ \begin{cases} (1+x)f'(x) = mf(x) \\ f(0) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Получили задачу Коши. Запишем ее для суммы ряда.

$$\begin{cases} (1+x)S'(x) = mS(x) \\ S(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} S(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \\ S'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots \end{cases}$$

$$(1+x)S'(x) = a_1 + \underbrace{a_1x + 2a_2x}_{2a_2x^2} + \underbrace{2a_2x^2 + 3a_3x^2}_{3a_3x^3} + \dots = mS(x) = m + ma_1x + ma_2x^2 + ma_3x^3 + \dots$$

Приравняем коэффициенты.

$$\begin{aligned} a_1 &= m & a_1 &= \frac{m}{1} \\ a_1 + 2a_2 &= ma_1 & 2a_2 &= a_1(m-1) \implies a_2 = \frac{m(m-1)}{2} \\ 2a_2 + 3a_3 &= ma_2 & 3a_3 &= ma_2 - 2a_2 \implies a_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} \\ &\vdots & & \\ a_n &= \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n} \end{aligned}$$

Итого  $(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} C_m^n x^n$ . Выясним радиус сходимости.

$$u_{n-1} = \frac{m(m-1) \dots (m-n+2)}{(n-1)!} x^{n-1} \quad u_n = \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} x^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_n}{u_{n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(m-n+1)x}{n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m}{n} - 1 + \frac{1}{n} \right| = |x| < 1$$

Таким образом, область сходимости  $(-1; 1)$ .

*Замечание 1.6.5.* В некоторых случаях (например  $m \in \mathbb{Z}^+$ )  $x = 1$  входит в область сходимости.

**VI**  $f(x) = \ln(1+x)$

Заметим, что  $f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$  это бином. Получаем

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_m^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$f(x) = \ln(1+x) = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + \dots) dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n!}$$

Область сходимости, как и у бинома, будет равна  $(-1; 1)$ .

*Замечание 1.6.6.* Если взять  $x = \frac{1}{k}$ , то тогда

$$\ln(1+x) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k$$

Т.е. можно рекурсивно получать значения натуральных логарифмов с помощью рядов.

*Замечание 1.6.7* (О применении к приближенным вычислениям). Рассмотрим «неберущийся» интеграл.

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^a \frac{1}{x} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) dx \\ &= \int_0^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^a x^{2n} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)} \end{aligned}$$

Рассмотрим другой «неберущийся» интеграл.

$$\int_0^a e^{-x^2} dx = \int_0^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{a^{2n+1}}{2n+1}$$