

# LA E<sub>χ</sub> 02

isagila

Собрано 10.06.2023 в 20:19



# Содержание

<b>1. Линейная алгебра</b>	<b>3</b>
1.1. Евклидово пространство: определение, неравенство Коши-Буняковского. Нормированное евклидово пространство. . . . .	3
1.2. Ортонормированный базис, ортогонализация базиса. Матрица Грама. . . . .	3
1.3. Ортогональность вектора подпространству. Ортогональное дополнение. Теорема Пифагора. . . . .	4
1.4. Задача о перпендикуляре. . . . .	5
1.5. Линейный оператор: определение, основные свойства. . . . .	5
1.6. Обратный оператор. Взаимно-однозначный оператор. Ядро и образ оператора. Теорема о размерностях. . . . .	5
1.7. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы при переходе к новому базису. . . . .	7
1.8. Собственные числа и собственные векторы оператора. Теоремы о диагональной матрице оператора. . . . .	7
1.9. Сопряженный и самосопряженный операторы в вещественном евклидовом пространстве: определения, основные свойства. Свойства собственных чисел и собственных векторов самосопряженного оператора. . . . .	9
1.10. Структура образа самосопряженного оператора. Проектор. Спектральное разложение оператора. . . . .	10
1.11. Ортогональная матрица и ортогональный оператор. Поворот плоскости и пространства как ортогональное преобразование. . . . .	11
1.12. Билинейные формы: определения, свойства. Матрица билинейной формы. . . . .	11
1.13. Квадратичная форма: определения, приведение к каноническому виду. . . . .	11
1.14. Знакоопределенность квадратичной формы: необходимые и достаточные. условия. Критерий Сильвестра. . . . .	11
<b>2. Дифференциальные уравнения</b>	<b>12</b>
2.1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ДУ): задача о радиоактивном распаде и задача о падении тела. Определение ДУ, решения ДУ и их геометрический смысл. Задача Коши. . . . .	12
2.2. Уравнение с разделяющимися переменными. . . . .	12
2.3. Однородное уравнение. . . . .	12
2.4. Уравнение в полных дифференциалах. . . . .	12
2.5. Линейное уравнение первого порядка. Метод Лагранжа. . . . .	13
2.6. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения. . . . .	13
2.7. Уравнения $n$ -ого порядка, допускающие понижение порядка. . . . .	14
2.8. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) : определения, решение ЛОДУ <sub>2</sub> с постоянными коэффициентами для случая различных вещественных корней характеристического уравнения. . . . .	14
2.9. Решение ЛОДУ <sub>2</sub> с постоянными коэффициентами для случая вещественных кратных корней характеристического уравнения. . . . .	15
2.10. Решение ЛОДУ <sub>2</sub> с постоянными коэффициентами для случая комплексных корней характеристического уравнения. . . . .	15
2.11. Свойства решений ЛОДУ <sub>2</sub> : линейная независимость решений, определитель Вронского. Теоремы 1,2. . . . .	16
2.12. Свойства решений ЛОДУ <sub>2</sub> : линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Определитель Вронского. Теоремы о вронскиане. . . . .	17
2.13. Свойства решений ЛОДУ <sub>2</sub> : линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ <sub>2</sub> . Фундаментальная система решений (определение). . . . .	18
2.14. Свойства решений ЛНДУ <sub>2</sub> : теоремы о структуре общего решения и решении ДУ с суммой правых частей. . . . .	18
2.15. Структура решения ЛОДУ <sub>n</sub> : линейная независимость решений, нахождение фундаментальной системы решений по корням характеристического уравнения. . . . .	19
2.16. Решение ЛНУ <sub>2</sub> с постоянными коэффициентами: специальная правая часть, поиск частного решения методом неопределенных коэффициентов. . . . .	19
2.17. Решение ЛНУ <sub>2</sub> : метод вариации произвольных постоянных (Лагранжа). . . . .	21
2.18. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение методом исключения. . . . .	21
2.19. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение матричным методом в случае различных вещественных собственных чисел. . . . .	23
2.20. Теория устойчивости: определение устойчивости по Ляпунову, фазовая плоскость, траектории ДУ. Примеры устойчивого и неустойчивого решения . . . . .	23

# 1. Линейная алгебра

## 1.1. Евклидово пространство: определение, неравенство Коши-Буняковского. Нормированное евклидово пространство.

**Def 1.1.1.** Скалярным произведением называется функция двух элементов линейного пространства  $x, y \in L^n$  обозначаемая  $(x, y) \rightarrow \mathbb{R}$ , для которой выполнены аксиомы:  $\forall x, y \in L^n, \lambda \in \mathbb{C}$

1.  $(x, y) = (y, x)$
2.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
3.  $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
4.  $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \implies x = 0$

**Def 1.1.2.** Линейное пространство с введенным скалярным произведением называется евклидовым пространством  $E^n$ .

*Замечание 1.1.3.* Если  $L = C_{[a;b]}$ , то скалярное произведение обычно определяется как  $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$

**Теорема 1.1.4.** Неравенство Коши-Буняковского

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$$

*Доказательство.* Рассмотрим скалярное произведение:

$$\begin{aligned}(\lambda x - y, \lambda x - y) &\geq 0 \\(\lambda x - y, \lambda x - y) &= \lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) \geq 0\end{aligned}$$

Полученное выражение можно рассмотреть как квадратное уравнение относительно  $\lambda$ . Т.к. оно неотрицательно  $\forall \lambda$ , то его дискриминант будет  $\leq 0$ . Таким образом

$$\begin{aligned}4\lambda^2(x, y)^2 - 4\lambda^2(x, x)(y, y) &\leq 0 \\(x, y)^2 - (x, x)(y, y) &\leq 0 \\(x, y)^2 &\leq (x, x)(y, y)\end{aligned}$$

■

**Def 1.1.5.** Нормой называется функция одного элемента линейного пространства  $x \in L^n$ , обозначаемая  $\|x\|$  и определяемая аксиомами:  $\forall x, y \in L^n, \lambda \in \mathbb{C}$ :

1.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
2.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3.  $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \implies x = 0$

**Def 1.1.6.** Евклидово пространство называется *нормированным*, если в нем определена норма.

*Замечание 1.1.7.* Чаще всего норма определяется как  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ .

## 1.2. Ортонормированный базис, ортогонализация базиса. Матрица Грама.

**Def 1.2.1.** Углом между двумя элементами Евклидова пространства называется

$$\cos \angle(x, y) = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

**Def 1.2.2.** Для элемента Евклидова пространства ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю.

$$x \perp y \iff (x, y) = 0$$

**Теорема 1.2.3.** Во всяком  $E^n$  можно выделить ортонормированный базис размера  $n$ .

*Доказательство.* Пусть у нас есть базис  $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ . Ортогонализируем его, полученный базис обозначим  $\mathcal{E}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ . Этот базис можно нормировать и получить искомый ортонормированный базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ .

**Процесс ортогонализации Грама-Шмидта:**

Будем добавлять векторы в базис  $\mathcal{E}$  из базиса  $B$  по-одному:

**База:** начнем с одного произвольного вектора  $\beta_1$ . Тогда  $e'_1 = \beta_1$ .

**Переход:** пусть у нас уже выделен набор из  $k - 1$  ортогональных векторов  $\{e'_1, \dots, e'_{k-1}\}$  и в него требуется добавить вектор  $\beta_k$ .

Будем искать  $e'_k$  в виде

$$e'_k = \beta_k + \lambda_1 e'_{k-1} + \lambda_2 e'_{k-2} + \dots + \lambda_{k-1} e'_1$$

Чтобы  $e'_k$  был ортогонален остальным векторам уже построенной системы, необходимо, чтобы скалярные произведения  $e'_k$  с остальными векторами системы равнялись нулю. Рассмотрим на примере  $e'_1$ :

$$(e'_k, e'_1) = (\beta_k, e'_1) + \lambda_1 (e'_{k-1}, e'_1) + \dots + \lambda_{k-1} (e'_1, e'_1) = 0$$

Учитывая то, что построенная система ортогональна, то  $(e'_i, e'_j) = 0$  ( $i, j < k$ ). Значит выражение выше упрощается и остается:

$$\begin{aligned} (\beta_k, e'_1) + \lambda_{k-1} (e'_1, e'_1) &= 0 \\ \lambda_{k-1} &= -\frac{(\beta_k, e'_1)}{(e'_1, e'_1)} \end{aligned}$$

Аналогично можно получить оставшиеся коэффициенты  $\lambda_i$ . Тогда добавляемый в систему вектор  $e'_k$  будет иметь вид:

$$e'_k = \beta_k - \frac{(\beta_k, e'_{k-1})}{(e'_{k-1}, e'_{k-1})} \cdot e'_{k-1} - \dots - \frac{(\beta_k, e'_1)}{(e'_1, e'_1)} \cdot e'_1$$

■

**Def 1.2.4.** Матрицей Грама называется матрица составленная из скалярных произведений

$$\begin{pmatrix} (e_1, e_1) & \dots & (e_k, e_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_1, e_k) & \dots & (e_k, e_k) \end{pmatrix}$$

*Замечание 1.2.5.* В ортогональном базисе матрица Грама диагональная, а в ортонормированном — единичная.

### 1.3. Ортогональность вектора подпространству. Ортогональное дополнение. Теорема Пифагора.

**Def 1.3.1.** Пусть дано Евклидово пространство  $E^n$ . Элемент  $h \in E^n$  называется ортогональным (перпендикулярным) подпространству  $G \subset E^n$ , если  $\forall x \in G: h \perp x$ .

*Следствие 1.3.2.* Выделим в подпространстве  $G$  базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\}$ . Если  $h \perp e_i \forall e_i \in \mathcal{E}$ , то  $h \perp G$ .

*Доказательство.* Любой элемент  $x \in G$  можно представить в виде  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i$ . Рассмотрим скалярное произведение  $(h, x)$ . По свойствам линейности разложим его на  $\sum_{i=1}^k \lambda_i (h, e_i)$ . Т.к.  $h$  ортогонален каждому из базисных векторов, то полученная сумма будет равна нулю, значит  $h$  ортогонален любому  $x \in G$ . ■

**Def 1.3.3.** Пусть дано Евклидово пространство  $E^n$ . Ортогональным дополнением  $F$  к подпространству  $G \subset E^n$  называется совокупность векторов  $h \perp G$ .

*Замечание 1.3.4.* Из определения 1.3.1 следует, что  $F$  также является подпространством  $E^n$ .

**Теорема 1.3.5.** Евклидово пространство  $E^n$  является прямой суммой подпространства  $F \subset E^n$  и его ортогонального  $G = F^\perp$ .

$$E^n = F \oplus F^\perp$$

*Доказательство.* В Евклидовом пространстве  $E^n$  выделим базис, после чего разложим произвольный элемент пространства  $x \in E^n$  по этому базису:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \underbrace{\{e_1, \dots, e_k\}}_{\text{Базис } G} \cup \{e_{k+1}, \dots, e_n\} \\ x &= \underbrace{x_1 e_1 + \dots + x_k e_k}_{\bar{x}} + \underbrace{x_{k+1} e_{k+1} + \dots + x_n e_n}_{\hat{x}} = \bar{x} + \hat{x} \end{aligned}$$

**TODO:** Дальше в конспекте что-то непонятное

■

**TODO:** Теорема Пифагора?

#### 1.4. Задача о перпендикуляре.

#### 1.5. Линейный оператор: определение, основные свойства.

**Def 1.5.1.** Пусть  $V^n, W^m$  линейные пространства. Отображение  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow W^m$ , которое  $\forall x \in V^n$  сопоставляет  $y \in W^m$  называется линейным оператором при выполнении следующих условий:  $\forall x_1, x_2 \in V^n, \lambda \in \mathbb{C}$ :

1.  $\mathcal{A}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}x_1 + \mathcal{A}x_2$
2.  $\mathcal{A}(\lambda x_1) = \lambda(\mathcal{A}x_1)$

*Замечание 1.5.2.*  $y = \mathcal{A}x$  означает, что  $y$  порождается применением оператора  $\mathcal{A}$

Обозначим некоторые базовые свойства линейных операторов. Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}: V^n \rightarrow W^m$  это линейные операторы, тогда определены:

1. Сумма  $(\mathcal{A} + \mathcal{B})x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$
2. Умножение на число  $(\lambda \mathcal{A})x = \lambda(\mathcal{A}x)$
3. Нулевой оператор  $\Theta x = 0, \forall x \in V^n$
4. Противоположный оператор  $-\mathcal{A} = (-1) \cdot \mathcal{A}$

Далее рассмотрим операторы  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}: V^n \rightarrow V^n$  действующие в одном линейном пространстве. Для таких операторов определена композиция (произведение)  $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x)$ . В общем случае она не коммутативна  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$ .

Свойства композиции операторов:

1.  $\lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = (\lambda \mathcal{A}) \cdot \mathcal{B}$
2.  $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{C} + \mathcal{B} \cdot \mathcal{C}$
3.  $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C}$
4.  $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}$

**Def 1.5.3.** Композиция оператора самим с собой  $n$  раз называется  $n$ -ой степенью оператора:  $\mathcal{A}^n = \underbrace{\mathcal{A} \cdot \dots \cdot \mathcal{A}}_n$

Для степени оператора справедливо равенство  $\mathcal{A}^{n+m} = \mathcal{A}^n \cdot \mathcal{A}^m$

#### 1.6. Обратный оператор. Взаимно-однозначный оператор. Ядро и образ оператора. Теорема о размерностях.

**Def 1.6.1.** Оператор  $I: V^n \rightarrow V^n$  называется тождественным оператором, если  $Ix = x, \forall x \in V^n$ .

**Def 1.6.2.** Пусть даны операторы  $\mathcal{A}, \mathcal{B}: V^n \rightarrow V^n$ . Оператор  $\mathcal{B}$  называется обратным для оператора  $\mathcal{A}$ , если их композиция равна тождественному оператору.

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1} \iff \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = I$$

**Def 1.6.3.** Оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$  называется взаимно-однозначным, если разным  $x \in V^n$  сопоставляются разные  $y \in V^n$ .

$$x \neq y \implies \mathcal{A}x \neq \mathcal{A}y \quad \forall x, y \in V^n$$

**Lm 1.6.4.** Если оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$  взаимно-однозначный, то  $\mathcal{A}x = 0 \implies x = 0$ .

*Доказательство.* От противного

$$\begin{aligned} \square x = x_1 - x_2 \neq 0 &\implies x_1 \neq x_2 \\ \mathcal{A}x = \mathcal{A}(x_1 - x_2) &= \mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2 = 0 \implies \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \end{aligned}$$

Это невозможно, т.к.  $\mathcal{A}$  взаимно-однозначный. ■

**Теорема 1.6.5.** Взаимно-однозначный оператор переводит линейно-независимый набор в линейно-независимый набор.

*Доказательство.* Пусть дан взаимно-однозначный оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$  и линейно-независимый набор  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Построим набор образов  $\{\mathcal{A}x_1, \dots, \mathcal{A}x_n\}$ . Составим его нулевую линейную комбинацию, после чего воспользуемся линейностью оператора:

$$\begin{aligned}\lambda_1 \mathcal{A}x_1 + \dots + \lambda_n \mathcal{A}x_n &= 0 \\ \mathcal{A}(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) &= 0\end{aligned}$$

По 1.6.4 получаем, что  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ . Т.к. набор  $\{x_1, \dots, x_n\}$  линейно независим, то  $\forall \lambda_i = 0$  ■

*Следствие 1.6.6.* Взаимно-однозначный оператор переводит базис в базис.

**Теорема 1.6.7.** Оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$  взаимно-однозначный  $\iff \exists \mathcal{A}^{-1}$ .

*Доказательство.*  $\implies$  Пусть  $x \xrightarrow{\mathcal{A}} y$ . Рассмотрим оператор  $\mathcal{B}$  такой, что  $y \xrightarrow{\mathcal{B}} x$ . Т.к.  $\mathcal{A}$  взаимно-однозначный, то  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = I$ .

$\Leftarrow$  От противного

$$\begin{aligned}\square x_1 \neq x_2, \mathcal{A}x_1 &= \mathcal{A}x_2 = x \\ x_1 &= \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}^{-1}x \\ x_2 &= \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x_2 = \mathcal{A}^{-1}x \\ x_1 \neq x_2 &\implies \mathcal{A}^{-1}x \neq \mathcal{A}^{-1}x\end{aligned}$$

Получили противоречие. ■

**Def 1.6.8.** Пусть дан линейный оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow W^m$ . Множество  $\text{Ker } \mathcal{A} = \{x \in V^n \mid \mathcal{A}x = 0\}$  называется ядром оператора  $\mathcal{A}$ .

**Lm 1.6.9.** Оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$  взаимно-однозначный  $\implies \text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$ .

*Доказательство.* От противного, пусть  $x \neq 0 \in \text{Ker } \mathcal{A}$ . Тогда по 1.6.4  $\mathcal{A}0 = 0$ , но в то же время  $\mathcal{A}x = 0, x \neq 0$ . Нарушается взаимно-однозначность. ■

**Def 1.6.10.** Пусть дан линейный оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow W^m$ . Множество  $\text{Im } \mathcal{A} = \{y \in W^m \mid \exists x \in V^n: y = \mathcal{A}x\}$  называется образом оператора  $\mathcal{A}$ .

**Теорема 1.6.11.** Пусть дан оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$ . Тогда

$$\dim \text{Ker } \mathcal{A} + \dim \text{Im } \mathcal{A} = n$$

*Доказательство.* Т.к.  $\text{Ker } \mathcal{A}$  и  $\text{Im } \mathcal{A}$  это подпространства  $V^n$ , то  $\exists W \subset V^n \mid W \oplus \text{Ker } \mathcal{A} = V^n$ . Тогда  $\dim W + \dim \text{Ker } \mathcal{A} = n$ . Требуется доказать, что  $\dim W = \dim \text{Im } \mathcal{A}$ .

Сначала покажем, что  $\mathcal{A}: W \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}$  взаимно-однозначный. От противного:

$$\begin{aligned}\square x_1 \neq x_2 \in W: \mathcal{A}x_1 &= \mathcal{A}x_2 \\ \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 &\implies \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \implies (x_1 - x_2) \in \text{Ker } \mathcal{A} \\ x_1, x_2 \in W &\implies (x_1 - x_2) \in W\end{aligned}$$

Но это невозможно, т.к.  $W \oplus \text{Ker } \mathcal{A} = V^n \implies W \cap \text{Ker } \mathcal{A} = \emptyset$ .

В  $\text{Im } \mathcal{A}$  выделим базис  $\{y_1, \dots, y_k\}$ . Т.к.  $\mathcal{A}$  взаимно-однозначный, то выделенный базис порождается линейно-независимым набором (см. 1.6.5)  $\{x_1, \dots, x_k\}, x_i \in W$ . Значит  $\dim W \geq \dim \text{Im } \mathcal{A}$ .

Предположим, что  $\dim W > \dim \text{Im } \mathcal{A}$ . Обозначим  $\dim W = p$ , дополним систему  $\{x_1, \dots, x_k\}$  до  $p$  линейно-независимых векторов. Т.к. оператор  $\mathcal{A}: W \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}$  взаимно-однозначный, то он должен перевести полученную линейно-независимую систему в линейно-независимую. Однако это невозможно, т.к.  $\text{Im } \mathcal{A}$  имеет базис меньшей размерности. ■

*Замечание 1.6.12.* Можно доказать, что

$$\begin{cases} V_1 \subset V^n \\ V_2 \subset V^n \\ \dim V_1 + \dim V_2 = n \end{cases} \implies \exists \mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n, \text{Ker } \mathcal{A} = V_1, \text{Im } \mathcal{A} = V_2$$

**Def 1.6.13.** Рангом оператора  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$  называется размерность его образа:

$$\text{rang } \mathcal{A} = \dim \text{Im } \mathcal{A}$$

Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}: V^n \rightarrow V^n$ . Рассмотрим некоторые свойства ранга линейного оператора:

1. Если оператор  $\mathcal{A}$  взаимно-однозначный, то  $\text{rang } \mathcal{A} = n$  (это следствие из 1.6.11).
2.  $\text{rang}(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \leq \text{rang } \mathcal{A}, \text{rang}(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \leq \text{rang } \mathcal{B}$
3.  $\text{rang}(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = \text{rang } \mathcal{A} + \text{rang } \mathcal{B} - \dim V$

### 1.7. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы при переходе к новому базису.

Пусть дан оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$  и  $x, y \in V^n, \mathcal{A}x = y$ .

Выделим в  $V^n$  базис, разложим  $x$  по этому базису. После чего применим к нему оператор  $\mathcal{A}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \{e_1, \dots, e_n\} \\ x &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\ y &= x_1 \mathcal{A}e_1 + \dots + x_n \mathcal{A}e_n\end{aligned}$$

Далее применим оператор к каждому из базисных векторов:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}e_i &= a_{1,i}e_1 + \dots + a_{n,i}e_n \\ y &= x_1(a_{1,1}e_1 + \dots + a_{n,1}e_n) + \dots + x_n(a_{1,n}e_1 + \dots + a_{n,n}e_n) \\ y &= e_1(x_1 a_{1,1} + \dots + x_n a_{1,n}) + \dots + e_n(x_1 a_{n,1} + \dots + x_n a_{n,n})\end{aligned}$$

Заметим, что  $y$  также можно разложить по базису. Составим СЛАУ и запишем её в матричном виде:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 a_{1,1} & + \dots + & x_n a_{1,n} & = & y_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_n a_{n,1} & + \dots + & x_n a_{n,n} & = & y_n \end{array} \right\} \iff AX = Y$$

**Def 1.7.1.** Матрицей оператора  $\mathcal{A}$  в данном базисе называется матрица составленная из столбцов-коэффициентов разложения образов базисных векторов по этому же базису.

*Замечание 1.7.2.* Если  $A^{-1} = A^T$ , то матрица оператора называется ортогональной.

**TODO:** Переход к новому базису

### 1.8. Собственные числа и собственные векторы оператора. Теоремы о диагональной матрице оператора.

**Def 1.8.1.** Пусть дан оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$  с матрицей  $A$  в некотором базисе  $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i=1}^n$ . Тогда многочлен

$$\det(A - \lambda E)$$

относительно  $\lambda \in \mathbb{R}$  называется характеристическим многочленом.

**Def 1.8.2.** Пусть дан оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$ . Подпространство  $U \subseteq V^n$  называется *инвариантным*, если

$$\forall x \in U: \mathcal{A}x \in U$$

**Def 1.8.3.** Пусть дан оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$  с матрицей  $A$  в некотором базисе  $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i=1}^n$ .

$x \neq 0 \in V^n$  называется собственным вектором для оператора  $\mathcal{A}$ , если

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}: \mathcal{A}x = \lambda x$$

Тогда  $\lambda$  называется собственным числом (собственным значением) оператора  $\mathcal{A}$ .

**Теорема 1.8.4.** Собственные числа оператора являются корнями характеристического многочлена  $\det(A - \lambda E)$ .

*Доказательство.*  $\implies$  Пусть  $\lambda$  – собственное число, тогда

$$\begin{aligned}\exists x \neq 0 \in V^n \mid \mathcal{A}x &= \lambda x \\ \mathcal{A}x = \lambda x &\implies Ax = (\lambda E)x \implies (A - \lambda E)x = 0\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим оператор  $\mathcal{B}: V^n \rightarrow V^n, \mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda I$ :



$$(A - \lambda E)x = 0 \implies \mathcal{B}x = 0$$

$$x \neq 0 \in \text{Ker } \mathcal{B} \implies \dim \text{Ker } \mathcal{B} > 0$$

$$\begin{cases} \dim \text{Ker } \mathcal{B} + \dim \text{Im } \mathcal{B} = n \text{ (1.6.11)} \\ \dim \text{Ker } \mathcal{B} > 0 \end{cases} \implies \dim \text{Im } \mathcal{B} < n$$

$$\dim \text{Im } \mathcal{B} < n \implies \text{rang } \mathcal{B} < n \implies \text{rang } B < n$$

$$\text{rang } B < n \implies \text{rang}(A - \lambda E) < n \implies \det(A - \lambda E) = 0$$

$\Leftarrow$  Аналогичные рассуждения, но в обратную сторону

$$\det(A - \lambda E) = 0 \implies \text{rang}(A - \lambda E) < n \implies \text{rang } B < n$$

$$\text{rang } B < n \implies \text{rang } \mathcal{B} < n \implies \dim \text{Im } \mathcal{B} < n$$

$$\begin{cases} \dim \text{Ker } \mathcal{B} + \dim \text{Im } \mathcal{B} = n \text{ (1.6.11)} \\ \dim \text{Im } \mathcal{B} < n \end{cases} \implies \dim \text{Ker } \mathcal{B} > 0$$

$$\dim \text{Ker } \mathcal{B} > 0 \implies \exists x \neq 0: \mathcal{B}x = 0$$

$$\mathcal{B}x = 0 \implies (A - \lambda E)x = 0 \implies \mathcal{A}x = \lambda x$$

■

**Def 1.8.5.** Полученное в процессе доказательства 1.8.4 уравнение

$$(A - \lambda E)x = 0$$

называют характеристическим (вековым) уравнением.

**Def 1.8.6.** Базис, составленный из собственных векторов, называют собственным базисом.

**Теорема 1.8.7.** Матрица оператора в собственном базисе диагональна.

*Доказательство.* Матрица оператора в некотором базисе это коэффициенты разложения образов базисных векторов по этому же базису. Рассмотрим первый базисный вектор:

$$\begin{cases} \mathcal{A}e_1 = a_{1,1}e_1 + \dots + a_{n,1}e_n \\ \mathcal{A}e_1 = \lambda_1 e_1 \end{cases} \implies \begin{cases} a_{1,1} = \lambda_1, \\ a_{i,1} = 0 \ \forall i \neq 1 \end{cases}$$

Аналогично можно рассмотреть все оставшиеся базисные векторы. Таким образом матрица оператора в базисе из собственных векторов будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

■

*Следствие 1.8.8.* Если у оператора  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$  есть  $n$  различных собственных чисел, то существует базис, в котором матрица этого оператора диагональна.

*Доказательство.* Т.к. все собственные числа различны, то соответствующие им  $n$  собственных векторов будут линейно независимы (см. 1.8.9). Составим из них базис, по только что доказанной теореме 1.8.7 матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе будет диагональной.

■

**Теорема 1.8.9.** Пусть дан оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$ , у которого  $m$  различных собственных чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Тогда система из собственных векторов  $e_1, \dots, e_m$ , соответствующих этим собственным числам, линейно-независима.

*Доказательство.* По индукции.

**База:**  $m = 1$ ,  $\{e_1\}$  линейно-независима, т.к.  $e_1$  ненулевой по определению.

**Переход:** Пусть  $\{e_1, \dots, e_k\}$  линейно-независима, покажем, что система  $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$  также линейно-независима. Составим её нулевую линейную комбинацию, а потом применим к ней оператор:



$$\begin{aligned}\mathcal{A}(c_1 e_1 + \dots + c_{k+1} e_{k+1}) &= 0 \\ c_1 \mathcal{A}e_1 + \dots + c_{k+1} \mathcal{A}e_{k+1} &= 0 \\ c_1 \lambda_1 + \dots + c_{k+1} \lambda_{k+1} &= 0\end{aligned}$$

**TODO:** В конспекте что-то непонятное дальше

### 1.9. Сопряженный и самосопряженный операторы в вещественном евклидовом пространстве: определения, основные свойства. Свойства собственных чисел и собственных векторов самосопряженного оператора.

**Def 1.9.1.** Рассмотрим оператор  $\mathcal{A}: E_{\mathbb{R}}^n \rightarrow E_{\mathbb{R}}^n$ . Оператор  $\mathcal{A}^*$  называется сопряженным оператором для  $\mathcal{A}$ , если

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$$

**Def 1.9.2.** Альтернативное определение: оператор  $\mathcal{A}^*$  называется сопряженным оператором для  $\mathcal{A}$ , если в любом ортонормированном базисе  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^T$ .

**Теорема 1.9.3.** Равносильность определений 1.9.1 и 1.9.2 сопряженного оператора.

*Доказательство.* Выберем произвольный ортонормированный базис  $\mathcal{E}$ . В нем векторам  $x$  и  $y$  соответствуют координатные столбцы  $X$  и  $Y$ .

Скалярное произведение  $\mathcal{A}x, y$  можно записать в виде  $(AX)^T Y$ , т.к. мы работаем в ортонормированном базисе. Преобразуем это выражение:

$$(AX)^T Y = X^T A^T Y = X^T A^* Y \implies (x, \mathcal{A}^* y)$$

Некоторые базовые свойства сопряженного оператора:

1.  $I^* = I: (Ix, y) = (x, y) = (x, Iy)$
2.  $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$
3.  $(\lambda \mathcal{A})^* = \bar{\lambda} \mathcal{A}^*$
4.  $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$
5.  $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \cdot \mathcal{A}^*$
6. Для любого оператора существует единственный сопряженный оператор.

**Def 1.9.4.** Самосопряженный оператор это оператор, который равен своему сопряженному.

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$$

*Следствие 1.9.5.* Матрица самосопряженного оператора симметрическая:  $A = A^T = A^*$

Далее рассмотрим некоторые свойства самосопряженного оператора.

**Lm 1.9.6.** Собственные числа самосопряженного оператора всегда вещественные.

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{A}$  — самосопряженный оператор. Рассмотрим собственное число  $\lambda$  и собственный вектор  $x$ , соответствующий ему:

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}x, x) &\in \mathbb{R} \\ (\mathcal{A}x, x) &= (\lambda x, x) = \lambda \|x\|^2 \\ \begin{cases} \lambda \|x\|^2 \in \mathbb{R} \\ \|x\|^2 \in \mathbb{R} \end{cases} &\implies \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

**Lm 1.9.7.** Собственные векторы самосопряженного оператора, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{A}$  — самосопряженный оператор. Рассмотрим два собственных числа  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  и собственные векторы  $x_1, x_2$ , соответствующий им:

$$\begin{cases} (\mathcal{A}x_1, x_2) = (x_1, \mathcal{A}x_2) \\ (\mathcal{A}x_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2) \\ (x_1, \mathcal{A}x_2) = \lambda_2(x_1, x_2) \end{cases} \implies \lambda_1(x_1, x_2) = \lambda_2(x_1, x_2) \implies (\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0$$

Т.к.  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то первая скобка не может равняться нулю, значит  $(x_1, x_2) = 0 \implies x_1 \perp x_2$ . ■

**Lm 1.9.8.** У самосопряженного оператора  $n$  собственных векторов, образующих ортонормированный базис.

*Замечание 1.9.9.* Если  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  это самосопряженные операторы, то  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$  не обязательно самосопряженный оператор. Чтобы  $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})^*$  необходимо, чтобы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  коммутировали.

**Lm 1.9.10.** Пусть дан самосопряженный оператор  $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$ , а  $e_f$  — его собственный вектор. Тогда подпространство  $V_1 = \{x \in V^n \mid x \perp e_f\}$  инвариантно относительно оператора  $\mathcal{A}$  и его размерность равна  $n - 1$ .

*Доказательство.* Собственный вектор  $e$  это линейная оболочка некоторого  $e_f$ , т.е. это подпространство  $V_n$ . Если  $x \in V_1$ , то  $x \perp e_f \implies x \perp e$ , таким образом  $V_1$  это ортогональное дополнение  $e$ .

$\dim e = 1$ , т.к. это линейная оболочка одного вектора  $e_f$ . Значит  $\dim V_1 = n - 1$ .

Теперь докажем, что это пространство инвариантно:

$$\begin{aligned} x \perp e &\implies (x, e) = 0 \\ (\mathcal{A}x, e) &= (x, \mathcal{A}e) = (x, \lambda e) = \lambda(x, e) = 0 \implies \mathcal{A}x \perp e \end{aligned}$$

Таким образом  $\mathcal{A}x \in V_1$  по определению  $V_1$ . ■

**Теорема 1.9.11.** У любого самосопряженного оператора есть ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов.

*Доказательство.* Возьмем одно произвольное собственное число  $\lambda$ , ему будет соответствовать собственный вектор  $e_1$ , который мы и возьмем в базис. Далее пользуясь 1.9.10 рассмотрим подпространство  $V_1$ , причем  $e_1$  будет ему ортогонален. Прделаем с этим подпространством аналогичную операцию.

Повторим это  $n$  раз, после чего нормируем все полученные векторы  $\implies$  получим ортонормированный базис. ■

**TODO:** Теорема выше немного отдает бредом, возможно стоило лучше вести конспект

## 1.10. Структура образа самосопряженного оператора. Проектор. Спектральное разложение оператора.

**Теорема 1.10.1.** Образ самосопряженного оператора  $\mathcal{A}$  имеет вид

$$\text{Im } \mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i(x, e_i) e_i \right\}$$

где  $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i=1}^n$  это ортонормированный базис,  $\lambda_i$  — собственные числа оператора  $\mathcal{A}$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x &= y = \\ y_1 e_1 + \dots + y_n e_n &= \\ (y, e_1) e_1 + \dots + (y, e_n) e_n &= \\ (\mathcal{A}x, e_1) e_1 + \dots + (\mathcal{A}x, e_n) e_n &= \\ (x, \mathcal{A}e_1) e_1 + \dots + (x, \mathcal{A}e_n) e_n &= \\ (x, \lambda_1 e_1) e_1 + \dots + (x, \lambda_n e_n) e_n &= \\ \lambda_1 (x, e_1) e_1 + \dots + \lambda_n (x, e_n) e_n &= \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i (x, e_i) e_i & \end{aligned}$$

**TODO:** Конспект не очень в этом моменте

*Замечание 1.10.2.*  $(x, e_i)$  это проекция вектора  $x$  на собственный вектор.

**Def 1.10.3.** Оператор вида

$$P_i(x) = (x, e_i)e_i$$

называется проектором на одномерное пространство, порожденное собственным вектором.

*Замечание 1.10.4.* Проектор является самосопряженным оператором.

**Def 1.10.5.** Спектральным разложением оператора называется представление его в виде линейной комбинации проекторов

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$$

Корректность такого представления следует из 1.10.1 и 1.10.3.

### 1.11. Ортогональная матрица и ортогональный оператор. Поворот плоскости и пространства как ортогональное преобразование.

### 1.12. Билинейные формы: определения, свойства. Матрица билинейной формы.

**Def 1.12.1.** Функция  $\mathcal{B}: V^n \rightarrow \mathbb{R}$  обозначаемая  $\mathcal{B}(u, v)$  ( $u, v \in V^n$ ) называется билинейной формой, если выполняются следующие требования:  $\forall u, w, v \in V^n, \lambda \in \mathbb{R}$ :

1.  $\mathcal{B}(u + w, v) = \mathcal{B}(u, v) + \mathcal{B}(w, v)$
2.  $\mathcal{B}(u, v + w) = \mathcal{B}(u, v) + \mathcal{B}(u, w)$
3.  $\mathcal{B}(\lambda u, v) = \lambda \mathcal{B}(u, v)$
4.  $\mathcal{B}(u, \lambda v) = \lambda \mathcal{B}(u, v)$

**Def 1.12.2.** Если к каждой паре базисных векторов применить билинейную форму, то полученные числа можно использовать как коэффициенты матрицы. Эта матрица будет называться матрицей билинейной формы **в данном базисе**.

Таким образом матрица  $B$  билинейной формы  $\mathcal{B}$  в базисе  $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i=1}^n$  имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}(e_1, e_1) & \dots & \mathcal{B}(e_1, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{B}(e_n, e_1) & \dots & \mathcal{B}(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

**Def 1.12.3.** Билинейная форма  $\mathcal{B}$  называется симметричной, если  $\mathcal{B}(u, v) = \mathcal{B}(v, u)$ .

**Def 1.12.4.** Билинейная форма  $\mathcal{B}$  называется кососимметричной (антисимметричной), если  $\mathcal{B}(u, v) = -\mathcal{B}(v, u)$ .

*Замечание 1.12.5.* Применение билинейной формы  $\mathcal{B}$  к элементам  $u$  и  $v$  можно отождествлять с умножением матриц в виде  $u^T B v$ .

Тогда можно говорить о ранге билинейной формы и о её преобразовании при смене базиса.

**Lm 1.12.6.** Ранг билинейной формы это инвариант относительно смены базиса  $T$ .

*Доказательство.*  $B_{e'} = T_{e' \rightarrow e} B_e T_{e \rightarrow e'}$

Т.к. матрица  $T_{e' \rightarrow e}$  невырождена, то  $\text{rang } B_{e'} = \text{rang } B_e$  ■

**Def 1.12.7.** Если ранг билинейной формы  $\mathcal{B}: V^n \rightarrow \mathbb{R}$  равен  $n$ , то такая билинейная форма называется невырожденной.

### 1.13. Квадратичная форма: определения, приведение к каноническому виду.

### 1.14. Знакоопределенность квадратичной формы: необходимые и достаточные условия. Критерий Сильвестра.

## 2. Дифференциальные уравнения

**2.1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ДУ):** задача о радиоактивном распаде и задача о падении тела. Определение ДУ, решения ДУ и их геометрический смысл. Задача Коши.

**2.2. Уравнение с разделяющимися переменными.**

**Def 2.2.1.** Уравнение вида

$$m(x)N(y)dx + M(x)n(y)dy = 0$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

Для решения таких уравнений необходимо разделить обе части на  $M(x)N(y)$ , перенести одно из слагаемых в правую часть, после чего проинтегрировать обе части.

$$\begin{aligned} m(x)N(y)dx + M(x)n(y)dy &= 0 \\ \frac{m(x)}{M(x)}dx + \frac{n(y)}{N(y)}dy &= 0 \\ \int \frac{m(x)}{M(x)}dx &= - \int \frac{n(y)}{N(y)}dy \end{aligned}$$

*Замечание 2.2.2.* В случае, если  $M(x) = 0$  или  $N(y) = 0$ , то уравнение решается непосредственным интегрированием.

*Замечание 2.2.3.* Решения вида  $x = const, y = const$  не всегда получаемы из общего решения.

**2.3. Однородное уравнение.**

**Def 2.3.1.** Функция  $f(x, y)$  называется *однородной  $m$ -ого измерения* ( $m \geq 0$ ), если  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$ .

**Def 2.3.2.** Дифференциальное уравнение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  называется *однородным*, если  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  однородные функции одного измерения  $m$ .

Однородные уравнения решаются заменой  $t = \frac{y}{x}$ . Покажем, откуда появляется подобная замена. Преобразуем функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ :

$$\begin{aligned} P(x, y) &= P\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^m P\left(1, \frac{y}{x}\right) \\ Q(x, y) &= Q\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^m Q\left(1, \frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Вернемся к исходному уравнению:

$$\begin{aligned} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= 0 \mid : dx \\ y' &= -\frac{P(1, y/x)}{Q(1, y/x)} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \\ \frac{y}{x} = t &\implies \begin{cases} f(1, y/x) = \tilde{f}(t) \\ y = xt, \quad y'_x = t + xt' \\ t + xt' = \tilde{f}(t) \\ x \cdot \frac{dt}{dx} = \tilde{f}(t) - t \\ \frac{dt}{\tilde{f}(t) - t} = \frac{dx}{x} \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом исходное однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

*Замечание 2.3.3.* Случай  $\tilde{f}(t) - t = 0$  нужно рассмотреть отдельно.

**2.4. Уравнение в полных дифференциалах.**

**Def 2.4.1.** Дифференциальное уравнение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  называется уравнением в полных дифференциалах, если

$$\exists z(x, y): dz = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Критерием того, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах может служить равенство

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Решение уравнений в полных дифференциалах сводится к поиску функции  $z(x, y)$ , удовлетворяющей условиям. Про то, как найти такую функцию можно прочесть в конспекте по математическому анализу в разделе про интегралы, независимые от пути. После того, как такая функция будет найдена, решить ДУ не составит проблем:

$$\begin{aligned} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= 0 \\ dz &= 0 \\ z &= C \end{aligned}$$

**TODO:** Интегрирующий множитель

## 2.5. Линейное уравнение первого порядка. Метод Лагранжа.

**Def 2.5.1.** Линейным однородным уравнением первого порядка (ЛОДУ<sub>1</sub>) называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = 0$$

ЛОДУ<sub>1</sub> является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому оно решается следующим образом:

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -p(x)y \\ \frac{dy}{y} &= -p(x)dx \\ \bar{y} &= C \cdot \underbrace{e^{-\int p(x)dx}}_{y_1} \end{aligned}$$

*Замечание 2.5.2.* При решении данного уравнения мы поделили на  $y \neq 0$ . Заметим, что  $y = 0$  также является решением ЛОДУ<sub>1</sub>, однако оно получено из общего решения при  $C = 0$ .

**Def 2.5.3.** Линейным неоднородным уравнением первого порядка (ЛНДУ<sub>1</sub>) называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \quad q(x) \neq 0$$

**Метод Лагранжа** (метод вариации произвольной постоянной) для решения ЛНДУ<sub>1</sub>:

1. Найдем частное решение  $y_1$  соответствующего однородного уравнения.
2. Будем искать решение ЛНДУ<sub>1</sub> в виде  $y(x) = y_1(x) \cdot C(x)$ . Преобразуем ДУ в соответствии с этой заменой

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= q(x) \\ y_1'(x)C(x) + y_1(x)C'(x) + p(x)y_1(x)C(x) &= q(x) \\ y_1(x)C'(x) + C(x) \underbrace{\left( y_1'(x) + p(x)y_1(x) \right)}_{=0} &= q(x) \\ y_1(x)C'(x) &= q(x) \\ C(x) &= \int \frac{q(x)}{y_1(x)} dx + C \end{aligned}$$

3. Подставим найденную функцию  $C(x)$  в  $y(x) = y_1(x) \cdot C(x)$ .

**TODO:** Уравнение Бернулли, Клеро, Риккати и пр.

## 2.6. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения.

**Теорема 2.6.1.** О существовании и единственности решения задачи Коши.

Пусть дана задача Коши

$$\begin{cases} y' = g(x, y) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

и  $u(M_0)$  – окрестность точки  $M_0(x_0, y_0)$ . Тогда, если  $g$  непрерывна в  $u(M_0)$ , а  $g'_y$  – ограничена, то существует единственное решение задачи Коши.

**Def 2.6.2.** Особым решением ДУ называется решение, в каждой точке которого нарушается единственность.

*Замечание 2.6.3.* Геометрически особое решение это интегральная кривая, через каждую точку которой проходит другая интегральная кривая.

**Def 2.6.4.** Точка  $M(x, y) \in D$  (где  $D$  - область заполненная интегральными кривыми) называется обыкновенной, если через неё проходит ровно одна интегральная кривая.

**Def 2.6.5.** Точка, не являющаяся обыкновенной, называется особой. Через неё может проходить несколько интегральных кривых, либо не проходить ни одной.

**Lm 2.6.6.** Если ДУ задано в дифференциалах  $Pdx + Qdy = 0$ , то условие особой точки имеет вид  $P = 0$  или  $Q = 0$ .

*Доказательство.* ДУ в дифференциалах можно разрешить относительно каждой из переменных:

$$y' = -\frac{P}{Q} = g_1(x, y)$$
$$x' = -\frac{Q}{P} = g_2(x, y)$$

Далее можно применить теорему 2.6.1 о единственности к каждому из полученных уравнений. Непрерывность  $g_1, g_2$  нарушается при  $Q = 0$  и  $P = 0$  соответственно. Это и будет условием особой точки. ■

**TODO:** Перечитать неплохо было бы... а то мутновато как-то

## 2.7. Уравнения $n$ -ого порядка, допускающие понижение порядка.

К уравнениям, допускающим понижение порядка относятся:

1. Непосредственно интегрируемые уравнения вида  $y^{(n)}(x) = f(x)$ .  
Они решаются интегрированием обеих частей  $n$  раз.
2. Уравнения не содержащие  $y(x)$  в явном виде.  
Они решаются заменой  $z(x) = y'(x)$ ,  $z'(x) = y''(x)$ .  
*Замечание 2.7.1.* В общем случае производится замена самой младшей из присутствующих производных.
3. Уравнения не содержащие  $x$  в явном виде.  
Они решаются заменой  $z(y) = y'(x)$ , тогда  $y''(x) = z'_y y'_x = z'(y) \cdot z(y)$

## 2.8. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) : определения, решение ЛОДУ<sub>2</sub> с постоянными коэффициентами для случая различных вещественных корней характеристического уравнения.

**Def 2.8.1.** Линейным дифференциальным уравнением  $n$ -ого порядка (ЛДУ <sub>$n$</sub> ) называется

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = f(x), \quad a_0(x) \neq 0$$

**Def 2.8.2.** Разрешенным ЛДУ <sub>$n$</sub>  называется

$$y^{(n)}(x) + b_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + b_n(x)y(x) = f(x)$$

**Def 2.8.3.** Если в ЛДУ <sub>$n$</sub>   $\forall i: a_i(x) = p_i \in \mathbb{R}$ , то такое ЛДУ <sub>$n$</sub>  называется ЛДУ <sub>$n$</sub>  с постоянными коэффициентами. Оно имеет вид

$$y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + p_n y(x) = f(x)$$

**Def 2.8.4.** Линейным однородным дифференциальным уравнением  $n$ -ого порядка называется ЛДУ <sub>$n$</sub>  вида

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = 0,$$

**Def 2.8.5.** Линейным неоднородным дифференциальным уравнением  $n$ -ого порядка называется ЛДУ <sub>$n$</sub>  вида

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = f(x), \quad f(x) \neq 0$$

Рассмотрим ЛОДУ<sub>2</sub> вида  $y'' + py' + qy = 0$ . Любой паре  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$  можно поставить в соответствие квадратное уравнение  $k^2 + pk + q = 0$ . По т. Виета  $p = -(k_1 + k_2)$ ,  $q = k_1 k_2$ , где  $k_1, k_2$  это корни уравнения. Подставим полученные выражения в исходное ДУ:

$$\begin{aligned}
y'' - (k_1 + k_2)y' + k_1k_2 &= 0 \\
y'' - k_1y' - k_2y' + k_1k_2 &= 0 \\
(y'' - k_2y') - k_1(y' - k_2) &= 0 \\
\sqsubset u(x) &= y' - k_2y \\
u' - k_1u = 0 &\implies u(x) = c_1e^{k_1x} \implies y' - k_2y = c_1e^{k_1x}
\end{aligned}$$

Сначала найдем частное решение соответствующего ЛОДУ<sub>1</sub>:  $\bar{y} = c_2e^{k_2x}, y_1 = e^{k_2x}$ . Далее будем варьировать постоянную  $c_2$ , тогда  $y(x) = C_2(x)e^{k_2x}$ . Подставим это в исходное ДУ:

$$\begin{aligned}
C_2'(x)e^{k_2x} + C_2(x) \cdot k_2 \cdot e^{k_2x} - k_2 \cdot C_2(x)e^{k_2x} &= c_1e^{k_1x} \\
C_2'(x)e^{k_2x} &= c_1e^{k_1x}
\end{aligned}$$

В итоге получаем уравнение

$$\boxed{C_2'(x) = c_1e^{(k_1-k_2)x}} \quad (\star)$$

Проанализируем это уравнение. Всего будет рассмотрено 3 случая: один в этом параграфе, остальные — в двух последующих.

(★) **случай I:**  $k_1 \neq k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

В заданных ограничениях имеем

$$\begin{aligned}
C_2'(x) &= c_1e^{(k_1-k_2)x} \\
C_2(x) &= \frac{c_1}{k_1 - k_2} e^{(k_1-k_2)x} + \tilde{c}_2 \\
y(x) = C_2(x)y_1(x) &= \underbrace{\frac{c_1}{k_1 - k_2}}_{\tilde{c}_1} e^{k_1x} + \tilde{c}_2e^{k_2x} \\
y(x) &= \tilde{c}_1e^{k_1x} + \tilde{c}_2e^{k_2x}
\end{aligned}$$

## 2.9. Решение ЛОДУ<sub>2</sub> с постоянными коэффициентами для случая вещественных кратных корней характеристического уравнения.

(★) **случай II:**  $k_1 = k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Пусть  $k_1 = k_2 = k$ , тогда получаем:

$$\begin{aligned}
C_2'(x) &= c_1e^{(k_1-k_2)x} \\
C_2(x) &= c_1x + c_2 \\
y(x) = C_2(x)y_1(x) &= (c_1x + c_2)e^{kx} \\
y(x) &= c_1x \cdot e^{kx} + c_2e^{kx}
\end{aligned}$$

## 2.10. Решение ЛОДУ<sub>2</sub> с постоянными коэффициентами для случая комплексных корней характеристического уравнения.

(★) **случай III:**  $k_{1,2} = \alpha + \beta i, k_{1,2} \in \mathbb{C}$

В заданных ограничениях получаем

$$\begin{aligned}
C_2'(x) &= c_1e^{(k_1-k_2)x} \\
C_2(x) &= \frac{c_1}{k_1 - k_2} e^{(k_1-k_2)x} + \tilde{c}_2 \\
y(x) = C_2(x)y_1(x) &= \underbrace{\frac{c_1}{k_1 - k_2}}_{\tilde{c}_1} e^{k_1x} + \tilde{c}_2e^{k_2x} \\
y(x) &= \tilde{c}_1e^{k_1x} + \tilde{c}_2e^{k_2x} \\
y(x) &= \tilde{c}_1e^{\alpha x}e^{\beta ix} + \tilde{c}_2e^{\alpha x}e^{-\beta ix}
\end{aligned}$$

Далее используем формулу  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ :



$$\begin{aligned}
y(x) &= e^{\alpha x} \left( \tilde{c}_1 \left( \cos(\beta x) + i \sin(\beta x) \right) + \tilde{c}_2 \left( \cos(\beta x) - i \sin(\beta x) \right) \right) \\
y(x) &= e^{\alpha x} \left( \cos(\beta x) \underbrace{(\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2)}_{\hat{c}_1} + i \sin(\beta x) \underbrace{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2)}_{\hat{c}_2} \right) \\
y(x) &= e^{\alpha x} \left( \hat{c}_1 \cos(\beta x) + \hat{c}_2 i \sin(\beta x) \right)
\end{aligned}$$

**TODO:** Конспект не очень хороший в этом моменте, возможно что-то неправильно

**Lm 2.10.1.** Если  $y(x) = u(x) + iv(x)$  это решение ЛОДУ<sub>2</sub>, то  $y(x) = u(x) + v(x)$  также являются решением ЛОДУ<sub>2</sub>.

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $y(x) = u(x) + v(x)$ :

$$\begin{cases} y(x) = u(x) + v(x) \\ y'(x) = u'(x) + v'(x) \\ y''(x) = u''(x) + v''(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
y''(x) + py'(x) + qy(x) &= u''(x) + v''(x) + pu'(x) + pv'(x) + u(x) + qu(x) + qv(x) = 0 \\
&= (u''(x) + pu'(x) + qu(x)) + (v''(x) + pv'(x) + qv(x)) = 0
\end{aligned}$$

Это равенство верно, т.к.  $u(x)$  и  $v(x)$  решения ЛОДУ<sub>2</sub>. ■

Значит, по 2.10.1 общее решение (★) в третьем случае будет иметь вид

$$y(x) = e^{\alpha x} \left( \hat{c}_1 \cos(\beta x) + \hat{c}_2 \sin(\beta x) \right)$$

## 2.11. Свойства решений ЛОДУ<sub>2</sub>: линейная независимость решений, определитель Вронского. Теоремы 1, 2.

Рассмотрим множество  $\Omega$  непрерывных функций с непрерывными производными 2ого порядка. Определим линейный дифференциальный оператор  $\mathcal{L}[y] = y'' + py' + q \rightarrow f(x)$ .

**Def 2.11.1.** Будем называть функции  $y_1, \dots, y_n$  линейно-независимыми на отрезке  $[a; b]$ , если

$$\sum_{i=1}^n c_i y_i = 0 \implies \forall c_i = 0$$

**Def 2.11.2.** Определитель Вронского (вронскиан)  $\mathcal{W}$  это определитель, составленный из  $n$  функций и всех их производных вплоть до  $(n-1)$ -ого порядка. Он имеет вид:

$$\mathcal{W} = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

**Lm 2.11.3.** Если два решения ЛОДУ<sub>2</sub> линейно-зависимы на  $[a; b]$ , то их вронскиан на  $[a; b]$  равен нулю.

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}[y_1] &= 0 \\ \mathcal{L}[y_2] &= 0 \\ y_1 &= \lambda y_2 \end{aligned} \right\} \implies \mathcal{W} = 0$$

*Доказательство.*

$$\mathcal{W} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda y_2' & y_2' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_2 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0$$

**Lm 2.11.4.** Если два решения ЛОДУ<sub>2</sub> линейно-независимы на  $[a; b]$ , то их вронскиан на  $[a; b]$  не равен нулю. ■

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}[y_1] &= 0 \\ \mathcal{L}[y_2] &= 0 \\ y_1 &\neq \lambda y_2 \end{aligned} \right\} \implies \mathcal{W} \neq 0$$

*Доказательство.* От противного

$$\begin{aligned}\square \mathcal{W} = 0 &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \mid : y_1^2 \neq 0 \\ &\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = 0 \\ &\left( \frac{y_2}{y_1} \right)' = 0 \\ &\frac{y_2}{y_1} = \text{const} \\ &y_1 = \lambda y_2\end{aligned}$$

Получили противоречие. ■

**Теорема 2.11.5.** Линейная зависимость/независимость функций определяется равенством их вронскиана нулю.

*Доказательство.* Следствие из 2.11.3 и 2.11.4. ■

*Замечание 2.11.6.* Для проверки набора функций на линейную зависимость/независимость лучше использовать именно вронскиан, а не непосредственное определение линейной зависимости функций на отрезке.

**Теорема 2.11.7.** Рассмотрим функции на отрезке  $[a; b]$ . Если на этом отрезке найдется точка, в которой вронскиан равен нулю, вронскиан будет равен нулю на всем отрезке. Дуально, если найдется точка, в которой вронскиан не равен нулю, то он будет не равен нулю на всем отрезке.

$$\begin{aligned}\exists x_0 \in [a; b] \mid W(x_0) = W_0 \neq 0 &\implies \forall x \in [a; b]: W(x) \neq 0 \\ \exists x_0 \in [a; b] \mid W(x_0) = W_0 = 0 &\implies \forall x \in [a; b]: W(x) = 0\end{aligned}$$

*Доказательство.* Пусть  $y_1$  и  $y_2$  это решения ДУ, тогда

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{aligned} y_2'' + p y_2' + q y_2 &= 0 \cdot y_1 y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0 \mid \cdot y_2 &- \\ (y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + p(y_1 y_2' - y_1' y_2) &= 0 \end{aligned} \right.\end{aligned}$$

Заметим, что выражение в левой скобке это  $\mathcal{W}'$ , а в правой —  $\mathcal{W}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= y_1 y_2' - y_1' y_2 \\ \mathcal{W}' &= (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2\end{aligned}$$

Подставим это в полученное ранее уравнение:

$$\begin{aligned}(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + p(y_1 y_2' - y_1' y_2) &= 0 \\ \mathcal{W}' + p\mathcal{W} &= 0 \\ \mathcal{W} &= c_1 e^{-\int p dx} \\ \mathcal{W}(x_0) &= c_1 e^{-\int_{x_0}^{x_0} p dx} = c_1 = \mathcal{W}_0 \\ \mathcal{W}(x) &= c_1 e^{-\int_{x_0}^x p dx} = \mathcal{W}_0 e^{-\int_{x_0}^x p dx}\end{aligned}$$

Таким образом, если  $\mathcal{W}_0 = 0$ , то  $\mathcal{W}(x) = 0$  на всем отрезке  $[a; b]$ . Дуально, если  $\mathcal{W}_0 \neq 0$ , то т.к. второй множитель всегда больше нуля (это экспонента)  $\mathcal{W}(x) \neq 0$ .

**TODO:** Откуда такие границы в интегралах? ■

*Замечание 2.11.8.* Таким образом, чтобы узнать равен ли вронскиан нулю на отрезке, достаточно узнать его значение в одной произвольной точке этого отрезка.

## 2.12. Свойства решений ЛОДУ<sub>2</sub>: линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Определитель Вронского. Теоремы о вронскиане.

**Lm 2.12.1.** Линейная комбинация решений ЛОДУ<sub>2</sub> также является решением.

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{L}[y_1] &= 0 \\ \mathcal{L}[y_2] &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \left\{ \begin{aligned} \mathcal{L}[y_1 + y_2] &= 0 \\ \mathcal{L}[\lambda y_1] &= 0 \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}) \end{aligned} \right.$$

*Доказательство.* Рассмотрим на примере  $y = y_1 + y_2$ . Подставим в исходное ДУ, раскроем и сгруппируем

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= 0 \\ (y_1 + y_2)'' + p(y_1 + y_2)' + q(y_1 + y_2) &= 0 \\ (y_1'' + py_1' + qy_1) + (y_2'' + py_2' + qy_2) &= 0 \end{aligned}$$

Это верно, т.к.  $y_1$  и  $y_2$  это решения исходного ДУ. Случай  $y = \lambda y_1$  рассматривает аналогично. ■

*Следствие 2.12.2.* Множество решений ЛОДУ образует линейное пространство.

**Теорема 2.12.3.** О существовании и единственности решения ЛОДУ<sub>2</sub>.

$$y'' = g(x, y, y') = f(x) - py' - qy$$

Если  $g, g'_y, g'_{y'}$  непрерывны в области  $D \ni (x_0, y_0)$ , то задача Коши

$$\begin{cases} \mathcal{L}[y] = f(x) \\ y_0 = y(x_0) \\ y'_0 = y'(x_0) \end{cases}$$

имеет единственное решение.

*Доказательство.* (Без доказательства) ■

## 2.13. Свойства решений ЛОДУ<sub>2</sub> : линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ<sub>2</sub>. Фундаментальная система решений (определение).

**Теорема 2.13.1.** О структуре общего решения ЛОДУ<sub>2</sub>.

Если  $\mathcal{L}[y_1] = 0$ ,  $\mathcal{L}[y_2] = 0$  и  $y_1, y_2$  линейно независимы, то  $\bar{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2$  – общее решение ЛОДУ<sub>2</sub>.

*Доказательство.* Начнем с того, что  $\bar{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2$  это решение как линейная комбинация решений (см. 2.12.1).

Рассмотрим точку  $(x_0, y_0)$  в рамках задачи Коши:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[y] = 0 \\ y_0 = y(x_0) \\ y'_0 = y'(x_0) \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0 \\ c_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0) = y'_0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

**TODO:** Глянуть переходы выше, в конспекте противоречиво написано

По т. Крамера решение полученной СЛАУ будет единственным только в том случае, если определитель главной матрицы не равен нулю. Это выполняется, т.к. этот определитель это вронскиан, который не равен нулю, т.к. решения линейно-независимы. ■

**Def 2.13.2.** Фундаментальная система решений (ФСР) ЛОДУ<sub>n</sub> это максимальный (по включению) набор линейно независимых решений ДУ.

## 2.14. Свойства решений ЛНДУ<sub>2</sub> : теоремы о структуре общего решения и решении ДУ с суммой правых частей.

**Теорема 2.14.1.** Общее решение ЛНДУ<sub>2</sub> представимо в виде суммы общего решения соответствующего ЛОДУ<sub>2</sub> и некоторого частного решения ЛНДУ<sub>2</sub>.

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= f(x) \\ y &= \bar{y} + y^* \\ \mathcal{L}[\bar{y}] &= 0, \mathcal{L}[y^*] = f(x) \end{aligned}$$

*Доказательство.* Сначала покажем, что  $y$  будет являться решением ДУ:

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\bar{y}] + \mathcal{L}[y^*] = 0 + f(x) = f(x)$$

Показать, что это решение будет являться общим можно аналогично 2.13.1. ■

**Lm 2.14.2.** Если правая часть ЛНДУ<sub>2</sub> представлена суммой  $f_1(x) + f_2(x)$ , то частное решение этого ЛНДУ<sub>2</sub> будет суммой двух частных решений ЛНДУ<sub>2</sub>, в которых правая часть является каждым из слагаемых.

$$\begin{aligned}y'' + py' + qy &= f_1(x) + f_2(x) \\ \mathcal{L}[y_1^*] &= f_1(x), \mathcal{L}[y_2^*] = f_2(x) \\ y^* &= y_1^* + y_2^*\end{aligned}$$

*Доказательство.*

$$\mathcal{L}[y^*] = \mathcal{L}[y_1^*] + \mathcal{L}[y_2^*] = f_1(x) + f_2(x)$$

■

## 2.15. Структура решения ЛОДУ<sub>n</sub>: линейная независимость решений, нахождение фундаментальной системы решений по корням характеристического уравнения.

*Замечание 2.15.1.* О существовании и единственности решения задачи Коши.

Пусть

$$y^{(n)} = g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

при этом  $y, y', g$  непрерывны и ограничены в области

$$\begin{aligned}|x - x_0| &< h_0, \\ |y - y_0| &< h_1, \\ &\dots \\ |y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| &< h_n,\end{aligned}$$

где  $(x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)})$  это начальные условия. Тогда существует единственное решение задачи Коши.

**TODO:** Разве не все частные производные по  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  должны бы непрерывны?

По аналогии с ЛОДУ<sub>2</sub> для ЛОДУ<sub>n</sub> можно составить характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y] &= y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \quad p_i \in \mathbb{R} \\ \mathcal{L}[e^{kx}] &= k^n e^{kx} + p_1 \cdot k^{n-1} e^{kx} + \dots + p_n e^{kx} = 0 \quad | : e^{kx} \neq 0 \\ k^n &+ p_1 k^{n-1} + \dots + p_n = 0\end{aligned}$$

Далее аналогично рассмотрим некоторые случаи:

1. Набору  $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{R}$  различных вещественных корней соответствует набор частных линейно-независимых решений однородного уравнения  $y_1 = e^{k_1 x}, \dots, y_m = e^{k_m x}$ .
2. Набору  $k_1 = k_2 = \dots = k_m = k \in \mathbb{R}$  повторяющихся вещественных корней соответствует набор частных линейно-независимых решений однородного уравнения  $y_1 = e^{kx}, y_2 = x e^{kx}, \dots, y_m = x^{m-1} e^{kx}$ .
3. Каждой уникальной паре вида  $k = \alpha + i\beta$  соответствует пара частных линейно-независимых решений однородного уравнения  $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$  и  $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ .
4. Каждой паре кратности  $m$  вида  $k = \alpha + i\beta$  соответствует  $m$  пар частных линейно-независимых решений однородного уравнения вида

$$\begin{array}{llll}y_1 &= & e^{\alpha x} \cos \beta x, & y_2 &= & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ y_3 &= & x e^{\alpha x} \cos \beta x, & y_4 &= & x e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_{2m-1} &= & x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, & y_{2m} &= & x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x\end{array}$$

*Замечание 2.15.2.* Общим решением ЛОДУ<sub>n</sub> будет линейная оболочка набора частных решений, соответствующих корням характеристического уравнения.

**Def 2.15.3.** Вронскианом ДУ называется вронскиан его ФСР.

*Замечание 2.15.4.* Все доказанные свойства вронскиана распространяются и на БОльшую размерность.

**TODO:** Ударение меня победило

## 2.16. Решение ЛНУ<sub>2</sub> с постоянными коэффициентами: специальная правая часть, поиск частного решения методом неопределенных коэффициентов.

**Def 2.16.1.** Специальной правой частью называется (СПЧ)

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$$

где  $\alpha, \beta, n, m$  некоторые коэффициенты.

### Поиск частного решения методом неопределенных коэффициентов

Идея: пусть в ЛНДУ<sub>n</sub> правая часть является специальной. Можно предположить, что она была получена дифференцированием функции со схожей структурой, поэтому будем искать частное решение ЛНДУ<sub>n</sub> в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(U_l(x) \cos \beta x + W_l(x) \sin \beta x), \quad l = \max(n, m)$$

Алгоритм:

1. Составляем и решаем характеристическое уравнение.
2. Извлекаем из СПЧ коэффициенты  $\alpha, \beta, n, m$ .
3. Считаем  $r$  — количество совпадений корней характеристического уравнения с  $\alpha \pm i\beta$ . Совпадение комплексной пары считаем один раз.
4. Составляем  $y^*$  с неопределенными коэффициентами: полиномы  $U, W$  степени  $l = \max(n, m)$ .
5. Подставляем  $y^*$  в уравнение, находим неопределенные коэффициенты.

Пример #01:

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= 2e^{3x} \\ k^2 - 3k + 2 &= 0 \\ k_1 &= 1, k_2 = 2 \\ 2e^{3x} &\implies \alpha = 3, \beta = 0, n = 0, m = 0 \end{aligned}$$

Число  $\alpha + i\beta$  не совпадает с корнями характеристического уравнения, поэтому будем искать частное решение в виде  $y^* = Ae^{3x}$ :

$$\begin{aligned} (Ae^{3x})'' - 3(Ae^{3x})' + 2(Ae^{3x}) &= 2e^{3x} \\ 9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} &= 2e^{3x} \mid : e^{3x} \\ 9A - 9A + 2A &= 2 \\ A &= 1 \end{aligned}$$

Итого: частное решение будет равно  $y^* = e^{3x}$

Пример #02:

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= e^x \\ k^2 - 3k + 2 &= 0 \\ k_1 &= 1, k_2 = 2 \\ e^x &\implies \alpha = 1, \beta = 0, n = 0, m = 0 \end{aligned}$$

Корень характеристического уравнения  $k_1$  совпал с числом  $\alpha + i\beta$ , поэтому будем искать частное решение в виде  $y^* = Axe^x$ :

$$\begin{aligned} (Axe^x)'' - 3(Axe^x)' + 2(Axe^x) &= e^x \\ e^x(2A + Ax) - 3e^x(A + Ax) + 2Axe^x &= 2e^{3x} \mid : e^x \\ 2A + Ax - 3A - 3Ax + 2Ax &= 2 \\ A &= -2 \end{aligned}$$

Итого: частное решение будет равно  $y^* = -2e^x$

*Замечание 2.16.2.* Почему необходимо умножать на  $x^r$ ? Если этого не делать, то полученное уравнение с неопределенными коэффициентами не будет иметь решений. Это происходит в тех случаях, когда выбранное частное решение совпадает с общим решением (именно поэтому мы смотрим на корни характеристического уравнения, потому что общее решение формируется на их основе). В этих случаях нарушается структура общего решения ЛНДУ<sub>n</sub>.

## 2.17. Решение ЛНУ<sub>2</sub> : метод вариации произвольных постоянных (Лагранжа).

Метод универсален для правой части любого вида и даже для  $\mathcal{L}[y] = f(x)$  с непостоянными коэффициентами.

Рассмотрим на примере:

$$\begin{aligned}y'' - 3y' + 2y &= 2e^{3x} \\k^2 - 3k + 2 &= 0 \\k_1 = 1, k_2 &= 2 \\\bar{y} &= c_1 \underbrace{e^x}_{y_1} + c_2 \underbrace{e^{2x}}_{y_2}\end{aligned}$$

Будем искать  $y(x)$  в виде  $y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2(x)$ . Пусть  $C_1(x) = g(x) + c_1, C_2(x) = h(x) + c_2$ , тогда:

$$\begin{aligned}y(x) &= (g(x) + c_1)y_1 + (h(x) + c_2)y_2 \\y(x) &= \underbrace{c_1y_1 + c_2y_2}_{\bar{y}} + \underbrace{g(x)y_1 + h(x)y_2}_{y^*}\end{aligned}$$

В нашем примере получаем, что  $y^* = g(x)e^x + h(x)e^{2x}$ . Заметим, что функции  $g(x)$  и  $h(x)$  можно представить по-разному. Подберем их так, чтобы выполнялось равенство

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \quad (\blacktriangle)$$

Вычислим производные  $y'(x)$  и  $y''(x)$ :

$$\begin{aligned}y(x) &= y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2(x) \\y'(x) &= \underbrace{C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2}_{\blacktriangle \rightarrow 0} + C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' \\y''(x) &= C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2''\end{aligned}$$

Вернемся к исходному ДУ и подставим в него все полученные равенства:

$$\begin{array}{rcll}y''(x) & = & C_1'(x)y_1' & + & C_1(x)y_1'' & + & C_2'(x)y_2' & + & C_2(x)y_2'' \\py'(x) & = & & & pC_1(x)y_1' & & & + & pC_2(x)y_2' \\qy(x) & = & & & qC_1(x)y_1 & & & + & qC_2(x)y_2 \\f(x) & = & C_1'(x)y_1' & + & 0 & + & C_2'(x)y_2' & + & 0\end{array}$$

Суммы во втором и четвертом столбцах обнуляются, т.к. если вынести из них  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  соответственно, то в скобках останется ЛОДУ<sub>2</sub>, а  $y_1, y_2$  — его корни.

Таким образом мы получили второе условие для системы (первое условие это  $(\blacktriangle)$ ) для нахождения  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$ . Искомая система будет иметь вид:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Подведем итог и обобщим алгоритм решения ЛНДУ<sub>n</sub>:

1. Решаем соответствующее ЛОДУ<sub>n</sub>, получаем набор корней  $y_1, \dots, y_n$ .
2. Составляем СЛАУ следующего вида:

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}$$

3. Решаем её и находим производные варьируемых функций. Интегрируем их (не забывая про константу).
4. Общее решение ЛНДУ<sub>n</sub> будет иметь вид  $y = C_1(x)y_1 + \dots + C_n(x)y_n$

## 2.18. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение методом исключения.

**Def 2.18.1.** Пусть  $y_1, \dots, y_n$  — функции от  $x$ , дифференцируемые  $m$  раз. Тогда система

$$\begin{cases} f_1(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(m-1)}, \dots, y_n^{(m-1)}) = 0 \\ \dots \\ f_n(\dots) = 0 \end{cases}$$

называется системой дифференциальных уравнений (СДУ).

**Def 2.18.2.** СДУ называется *нормальной*, если все её уравнения разрешены относительно старшей производной и при этом правые части не содержат производных.

**Def 2.18.3.** Нормальная СДУ называется автономной, если функции в правой части каждого из её уравнений не зависят явно от  $x$ .

*Замечание 2.18.4.* С помощью введения новых переменных ДУ  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  можно свести к системе ДУ следующего вида

$$\begin{cases} y = y_1 \\ y' = y_2 \\ \dots \\ y^{(n-1)} = y_n \\ y^{(n)} = f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

где  $y_1, \dots, y_n$  — новые переменные.

**Def 2.18.5.** Порядком системы называется сумма порядков старших производных каждого из уравнений системы. Порядок системы равен порядку ДУ, соответствующего ей.

**Решение СДУ методом исключения:**

Пусть дана следующая СДУ:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots, \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Обозначим  $f_1(x, y_1, \dots, y_n) = F_1(x, y_1, \dots, y_n)$ . Дифференцируем первое уравнение по  $x$ , получим:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \underbrace{\frac{dy_1}{dx}}_{f_1} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \underbrace{\frac{dy_n}{dx}}_{f_n} = F_2(x, y_1, \dots, y_n)$$

Полученное выражение можно продифференцировать еще раз. Подставляя производные из изначального СДУ можно получить аналогичные функции вплоть до  $F_n(x, y_1, \dots, y_n)$ . Итого получится следующая система:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = F_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots, \\ \frac{d^n y_n}{dx^n} = F_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Как видно из 2.18.4 полученный вид системы свидетельствует о том, что её можно свести к равносильному ДУ  $\varphi(x, y_1, \dots, y_1^{(n)})$ .

Пример:

$$\begin{cases} y' = y + 5x \\ x' = -y - 3x \end{cases} \iff \begin{cases} y'' = y' + 5x' \\ x' = -y - 3x \end{cases} \iff \begin{cases} y'' = y' + 5(-y - 3x) \\ x' = -y - 3x \end{cases} \iff \begin{cases} y'' = y' - 5y + 15x \\ x' = -y - 3x \end{cases}$$

Выразим  $x$  из первого уравнения изначальной системы и подставим его в первое уравнение полученной системы:

$$\begin{cases} y' = y + 5x \implies x = \frac{1}{5}(y' - y) \\ y'' = y' - 5y + 15x \end{cases} \implies y'' = y' - 5y + 3y' - 3y \implies y'' - 4y' + 8y = 0$$

Из полученного ЛОДУ<sub>2</sub> можно найти  $y$ , после чего подставить его в СДУ и найти  $x$ .



*Замечание 2.18.6.* Линейная СДУ сводится к ЛОДУ, т.к. дифференцирование и исключение линейны. Аналогично СДУ с постоянными коэффициентами сводится к ДУ с постоянными коэффициентами.

## 2.19. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение матричным методом в случае различных вещественных собственных чисел.

Обозначим  $(y_1, \dots, y_n) = Y$  — вектор неизвестных,  $\{a_{i,j}\} = A$  — коэффициенты,  $(y'_1, \dots, y'_n) = Y'$  — вектор производных.

Тогда СДУ можно записать в матричном виде как  $Y' = AY$ . Пусть  $A$  это матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$ . Для этого оператора можно найти собственные числа и соответствующие им собственные векторы.

Обозначим собственные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , а  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  — соответствующие им собственные векторы.

Можно убедиться, что  $Y_i = \Gamma_i e^{\lambda_i x}$  будет являться решением СДУ:

$$\begin{cases} Y'_i = \Gamma_i \lambda_i e^{\lambda_i x} = \lambda_i (\Gamma_i e^{\lambda_i x}) \\ \mathcal{A}Y_i = \mathcal{A}(\Gamma_i e^{\lambda_i x}) = \lambda_i (\Gamma_i e^{\lambda_i x}) \end{cases} \implies Y'_i = \mathcal{A}Y_i$$

Пусть все собственные числа различные и вещественные, тогда  $\forall \lambda_i: Y_i = \Gamma_i e^{\lambda_i x}$  это решение, причем  $\forall i \neq j: Y_i$  и  $Y_j$  линейно-независимы. Общее решение СДУ можно записать в виде:

$$\bar{Y} = c_1 Y_1 + \dots + c_n Y_n$$

Пример:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x' = x + y \\ y' = 8x + 3y \end{cases} &\iff Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} Y \iff \begin{cases} \lambda_1 = -1 \implies \Gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 5 \implies \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{cases} \\ \begin{cases} Y_1 = \Gamma_1 e^{\lambda_1 t} \\ Y_2 = \Gamma_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} &\iff \begin{cases} \bar{x}(t) = c_1 \cdot (-1) \cdot e^{-t} + c_2 \cdot 1 \cdot e^{5t} \\ \bar{y}(t) = c_1 \cdot 2 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot 4 \cdot e^{5t} \end{cases} \end{aligned}$$

## 2.20. Теория устойчивости: определение устойчивости по Ляпунову, фазовая плоскость, траектории ДУ. Примеры устойчивого и неустойчивого решения