MA LEC 03

isagila @pochtineploho @DUBSTEPHAVEGUN

Собрано 02.09.2023 в 12:37

https://github.com/isagila/tesc

Содержание

1. Лекции

1.1. Лекция 23.09.01.

Def 1.1.1. Числовым рядом называется выражение $u_1+u_2+\ldots+u_n$, где $\{u_n\}$ это некоторая числовая последовательность. Обозначается $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Замечание 1.1.2. Нумерация может вестись с любого целого числа.

Def 1.1.3. u_n называется общим членом ряда.

Def 1.1.4. $S_n = u_1 + \ldots + u_k$ называется частичной суммой ряда.

Замечание 1.1.5. S_n также образуют последовательность.

Def 1.1.6. Если последовательность частичных сумм сходится, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, то говорят, что ряд сходится к сумме S (S называется суммой ряда). Если предел равен бесконечности или не существует, то ряд расходится.

Иногда сумму ряда можно найти простой арифметикой.

Пример 1.1.7 (Непосредственное вычисление суммы ряда).

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \underbrace{\left(1-\tfrac{1}{2}\right)}_{k=1} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\right)}_{k=2} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}\right)}_{k=3} + \ldots + + \underbrace{\left(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n}\right)}_{k=n-1} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n+1}\right)}_{k=n} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 = S$$

Пример 1.1.8 (Геометрический ряд (эталонный)). Пусть $b \neq 0, b \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} bq^n = b + bq + bq^2 + bq^3 + \ldots + bq^n = b(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n) = b\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = S_n$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-q^{n+1})$$

Далее значение предела зависит от q.

1. $|q| < 1 \Longrightarrow q^n \to 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{b}{1-q} = S$
2. $|q| > 1 \Longrightarrow q^n \to \infty \Longrightarrow$ ряд расходится.
3. $q = 1 \Longrightarrow S_n = b(n+1) \to \infty \Longrightarrow$ ряд расходится.
4. $q = -1 \Longrightarrow S_n = \dfrac{b}{2}(1+1-1+\ldots+1-1) = \begin{cases} b \\ 0 \end{cases} \Longrightarrow$ две подпоследовательность сходятся к разным числам, значит предела нет и ряд расходится.

Замечание 1.1.9. Чаще требуется только определить сходимость ряда не вычисляя его сумму.

Свойства числовых рядов

Теорема 1.1.10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \succ \Longleftrightarrow \sum_{n=k>1}^{\infty} u_n \succ$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \prec \Longleftrightarrow \sum_{n=k>1}^{\infty} u_n \prec$$

□

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \succ \Longleftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{u_1 + u_2 + \ldots + u_k}_{v} + u_{k+1} + \ldots + u_n\right) = \underbrace{\lim\nolimits_{n\to\infty} v}_{v\in\mathbb{R}} + \lim_{n\to\infty}(u_{k+1} + \ldots + u_n)$$

Для расходящихся доказательство аналогично. ■

Замечание 1.1.11. Теорему 1.1.10 можно сформулировать по-другому (не формально): ряд и его «хвост» одновременно сходятся и расходятся.

Теорема 1.1.12.

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R} \\ \alpha \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha S$$

□

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \succ\!\!\iff \exists \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha u_1 + \ldots + \alpha u_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} (u_1 + \ldots + u_n) = \alpha S$$

■

Замечание 1.1.13. Если ряд расходится, то умножение на $\alpha \neq 0$ не меняет его расходимости.

Теорема 1.1.14.

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R} \\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \implies \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = S \pm \sigma$$

□

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} S_n}_{S} \pm \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sigma_n}_{\sigma} = \lim_{n\to\infty} (S_n \pm \sigma_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$$

■

Замечание 1.1.15. Ряды складываются и вычитаются почленно.

Замечание 1.1.16. Из сходимости разности рядов **не следует** сходимость самих рядов. Например,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \neq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n+1}}_{\text{расходятся}}$$

Гармонический ряд (эталонный)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Рассмотрим вспомогательный ряд и вычислим его частичные суммы

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \underbrace{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16}}_{\frac{1}{2}} + \ldots$$

$$\sigma_1 = 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} \qquad \sigma_2 = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} \qquad \sigma_n = 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2}$$

Последовательность частичных сумм σ_n расходится при $n \to \infty$. Последовательность частичных сумм исходного ряда почленно не меньше σ_n, значит $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Теорема 1.1.17. Члены сходящегося ряда можно группировать произвольным образом **не переставляя**.

□ Группируя члены ряда получаем подпоследовательность последовательности частичных сумм. Если существует предел исходной последовательности, то существует и предел любой ее подпоследовательности. ■

Замечание 1.1.18. Перестановка членов ряда может изменить сумму. Например, рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Он сходится (**TODO:** доказательство потом?).

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \ldots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{16} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{32} + \ldots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{16} + \frac{1}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{32} + \ldots \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots\right) - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} - \ldots
\end{aligned}$$

TODO: Что-то получили, но я так и не понял, что не так :sad: