

LA E_χ 02

isagila

Собрано 10.06.2023 в 09:08



Содержание

1. Линейная алгебра	3
1.1. Евклидово пространство: определение, неравенство Коши-Буняковского. Нормированное евклидово пространство.	3
1.2. Ортонормированный базис, ортогонализация базиса. Матрица Грама.	3
1.3. Ортогональность вектора подпространству. Ортогональное дополнение. Теорема Пифагора.	4
1.4. Задача о перпендикуляре.	5
1.5. Линейный оператор: определение, основные свойства.	5
1.6. Обратный оператор. Взаимно-однозначный оператор. Ядро и образ оператора. Теорема о размерностях.	5
1.7. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы при переходе к новому базису.	7
1.8. Собственные числа и собственные векторы оператора. Теоремы о диагональной матрице оператора.	7
1.9. Сопряженный и самосопряженный операторы в вещественном евклидовом пространстве: определения, основные свойства. Свойства собственных чисел и собственных векторов самосопряженного оператора.	7
1.10. Структура образа самосопряженного оператора. Проектор. Спектральное разложение оператора.	7
1.11. Ортогональная матрица и ортогональный оператор. Поворот плоскости и пространства как ортогональное преобразование.	7
1.12. Билинейные формы: определения, свойства. Матрица билинейной формы.	7
1.13. Квадратичная форма: определения, приведение к каноническому виду.	7
1.14. Знакоопределенность квадратичной формы: необходимые и достаточные условия. Критерий Сильвестра.	7
2. Дифференциальные уравнения	8
2.1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ДУ): задача о радиоактивном распаде и задача о падении тела. Определение ДУ, решения ДУ и их геометрический смысл. Задача Коши.	8
2.2. Уравнение с разделяющимися переменными.	8
2.3. Однородное уравнение.	8
2.4. Уравнение в полных дифференциалах.	8
2.5. Линейное уравнение первого порядка. Метод Лагранжа.	9
2.6. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения.	9
2.7. Уравнения n -ого порядка, допускающие понижение порядка.	9
2.8. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) : определения, решение ЛОДУ ₂ с постоянными коэффициентами для случая различных вещественных корней характеристического уравнения.	10
2.9. Решение ЛОДУ ₂ с постоянными коэффициентами для случая вещественных кратных корней характеристического уравнения.	11
2.10. Решение ЛОДУ ₂ с постоянными коэффициентами для случая комплексных корней характеристического уравнения.	11
2.11. Свойства решений ЛОДУ ₂ : линейная независимость решений, определитель Вронского. Теоремы 1,2.	11
2.12. Свойства решений ЛОДУ ₂ : линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Определитель Вронского. Теоремы о вронскиане.	13
2.13. Свойства решений ЛОДУ ₂ : линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ ₂ . Фундаментальная система решений (определение).	13
2.14. Свойства решений ЛНДУ ₂ : теоремы о структуре общего решения и решении ДУ с суммой правых частей.	14
2.15. Структура решения ЛОДУ _n : линейная независимость решений, нахождение фундаментальной системы решений по корням характеристического уравнения.	14
2.16. Решение ЛНУ ₂ с постоянными коэффициентами: специальная правая часть, поиск частного решения методом неопределенных коэффициентов.	15
2.17. Решение ЛНУ ₂ : метод вариации произвольных постоянных (Лагранжа).	16
2.18. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение методом исключения.	16
2.19. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение матричным методом в случае различных вещественных собственных чисел.	16
2.20. Теория устойчивости: определение устойчивости по Ляпунову, фазовая плоскость, траектории ДУ. Примеры устойчивого и неустойчивого решения	16

1. Линейная алгебра

1.1. Евклидово пространство: определение, неравенство Коши-Буняковского. Нормированное евклидово пространство.

Def 1.1.1. Скалярным произведением называется функция двух элементов линейного пространства $x, y \in L^n$ обозначаемая $(x, y) \rightarrow \mathbb{R}$, для которой выполнены аксиомы: $\forall x, y \in L^n, \lambda \in \mathbb{C}$

1. $(x, y) = (y, x)$
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
3. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
4. $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \implies x = 0$

Def 1.1.2. Линейное пространство с введенным скалярным произведением называется евклидовым пространством E^n .

Замечание 1.1.3. Если $L = C_{[a;b]}$, то скалярное произведение обычно определяется как $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$

Теорема 1.1.4. Неравенство Коши-Буняковского

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$$

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение:

$$\begin{aligned}(\lambda x - y, \lambda x - y) &\geq 0 \\(\lambda x - y, \lambda x - y) &= \lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) \geq 0\end{aligned}$$

Полученное выражение можно рассмотреть как квадратное уравнение относительно λ . Т.к. оно неотрицательно $\forall \lambda$, то его дискриминант будет ≤ 0 . Таким образом

$$\begin{aligned}4\lambda^2(x, y)^2 - 4\lambda^2(x, x)(y, y) &\leq 0 \\(x, y)^2 - (x, x)(y, y) &\leq 0 \\(x, y)^2 &\leq (x, x)(y, y)\end{aligned}$$

■

Def 1.1.5. Нормой называется функция одного элемента линейного пространства $x \in L^n$, обозначаемая $\|x\|$ и определяемая аксиомами: $\forall x, y \in L^n, \lambda \in \mathbb{C}$:

1. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \implies x = 0$

Def 1.1.6. Евклидово пространство называется *нормированным*, если в нем определена норма.

Замечание 1.1.7. Чаще всего норма определяется как $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

1.2. Ортонормированный базис, ортогонализация базиса. Матрица Грама.

Def 1.2.8. Углом между двумя элементами Евклидова пространства называется

$$\cos \angle(x, y) = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Def 1.2.9. Для элемента Евклидова пространства ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю.

$$x \perp y \iff (x, y) = 0$$

Теорема 1.2.10. Во всяком E^n можно выделить ортонормированный базис размера n .

Доказательство. Пусть у нас есть базис $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$. Ортогонализируем его, полученный базис обозначим $\mathcal{E}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$. Этот базис можно нормировать и получить искомый ортонормированный базис $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$.

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

Будем добавлять векторы в базис \mathcal{E} из базиса B по-одному:

База: начнем с одного произвольного вектора β_1 . Тогда $e'_1 = \beta_1$.

Переход: пусть у нас уже выделен набор из $k - 1$ ортогональных векторов $\{e'_1, \dots, e'_{k-1}\}$ и в него требуется добавить вектор β_k .

Будем искать e'_k в виде

$$e'_k = \beta_k + \lambda_1 e'_{k-1} + \lambda_2 e'_{k-2} + \dots + \lambda_{k-1} e'_1$$

Чтобы e'_k был ортогонален остальным векторам уже построенной системы, необходимо, чтобы скалярные произведения e'_k с остальными векторами системы равнялись нулю. Рассмотрим на примере e'_1 :

$$(e'_k, e'_1) = (\beta_k, e'_1) + \lambda_1 (e'_{k-1}, e'_1) + \dots + \lambda_{k-1} (e'_1, e'_1) = 0$$

Учитывая то, что построенная система ортогональна, то $(e'_i, e'_j) = 0$ ($i, j < k$). Значит выражение выше упрощается и остается:

$$\begin{aligned} (\beta_k, e'_1) + \lambda_{k-1} (e'_1, e'_1) &= 0 \\ \lambda_{k-1} &= -\frac{(\beta_k, e'_1)}{(e'_1, e'_1)} \end{aligned}$$

Аналогично можно получить оставшиеся коэффициенты λ_i . Тогда добавляемый в систему вектор e'_k будет иметь вид:

$$e'_k = \beta_k - \frac{(\beta_k, e'_{k-1})}{(e'_{k-1}, e'_{k-1})} \cdot e'_{k-1} - \dots - \frac{(\beta_k, e'_1)}{(e'_1, e'_1)} \cdot e'_1$$

■

Def 1.2.11. Матрицей Грама называется матрица составленная из скалярных произведений

$$\begin{pmatrix} (e_1, e_1) & \dots & (e_k, e_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_1, e_k) & \dots & (e_k, e_k) \end{pmatrix}$$

Замечание 1.2.12. В ортогональном базисе матрица Грама диагональная, а в ортонормированном — единичная.

1.3. Ортогональность вектора подпространству. Ортогональное дополнение. Теорема Пифагора.

Def 1.3.13. Пусть дано Евклидово пространство E^n . Элемент $h \in E^n$ называется ортогональным (перпендикулярным) подпространству $G \subset E^n$, если $\forall x \in G: h \perp x$.

Следствие 1.3.14. Выделим в подпространстве G базис $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_k\}$. Если $h \perp e_i \forall e_i \in \mathcal{E}$, то $h \perp G$.

Доказательство. Любой элемент $x \in G$ можно представить в виде $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i$. Рассмотрим скалярное произведение (h, x) . По свойствам линейности разложим его на $\sum_{i=1}^k \lambda_i (h, e_i)$. Т.к. h ортогонален каждому из базисных векторов, то полученная сумма будет равна нулю, значит h ортогонален любому $x \in G$. ■

Def 1.3.15. Пусть дано Евклидово пространство E^n . Ортогональным дополнением F к подпространству $G \subset E^n$ называется совокупность векторов $h \perp G$.

Замечание 1.3.16. Из определения 1.3.13 следует, что F также является подпространством E^n .

Теорема 1.3.17. Евклидово пространство E^n является прямой суммой подпространства $F \subset E^n$ и его ортогонального $G = F^\perp$.

$$E^n = F \oplus F^\perp$$

Доказательство. В Евклидовом пространстве E^n выделим базис, после чего разложим произвольный элемент пространства $x \in E^n$ по этому базису:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \underbrace{\{e_1, \dots, e_k\}}_{\text{Базис } G} \cup \{e_{k+1}, \dots, e_n\} \\ x &= \underbrace{x_1 e_1 + \dots + x_k e_k}_{\bar{x}} + \underbrace{x_{k+1} e_{k+1} + \dots + x_n e_n}_{\hat{x}} = \bar{x} + \hat{x} \end{aligned}$$

TODO: Дальше в конспекте что-то непонятное

■

TODO: Теорема Пифагора?

1.4. Задача о перпендикуляре.

1.5. Линейный оператор: определение, основные свойства.

Def 1.5.18. Пусть V^n, W^m линейные пространства. Отображение $\mathcal{A}: V^n \rightarrow W^m$, которое $\forall x \in V^n$ сопоставляет $y \in W^m$ называется линейным оператором при выполнении следующих условий: $\forall x_1, x_2 \in V^n, \lambda \in \mathbb{C}$:

1. $\mathcal{A}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}x_1 + \mathcal{A}x_2$
2. $\mathcal{A}(\lambda x_1) = \lambda(\mathcal{A}x_1)$

Замечание 1.5.19. $y = \mathcal{A}x$ означает, что y порождается применением оператора \mathcal{A}

Обозначим некоторые базовые свойства линейных операторов. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}: V^n \rightarrow W^m$ это линейные операторы, тогда определены:

1. Сумма $(\mathcal{A} + \mathcal{B})x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$
2. Умножение на число $(\lambda \mathcal{A})x = \lambda(\mathcal{A}x)$
3. Нулевой оператор $\Theta x = 0, \forall x \in V^n$
4. Противоположный оператор $-\mathcal{A} = (-1) \cdot \mathcal{A}$

Далее рассмотрим операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}: V^n \rightarrow V^n$ действующие в одном линейном пространстве. Для таких операторов определена композиция (произведение) $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x)$. В общем случае она не коммутативна $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$.

Свойства композиции операторов:

1. $\lambda(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = (\lambda \mathcal{A}) \cdot \mathcal{B}$
2. $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{C} + \mathcal{B} \cdot \mathcal{C}$
3. $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C}$
4. $\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}$

Def 1.5.20. Композиция оператора самим с собой n раз называется n -ой степенью оператора: $\mathcal{A}^n = \underbrace{\mathcal{A} \cdot \dots \cdot \mathcal{A}}_n$

Для степени оператора справедливо равенство $\mathcal{A}^{n+m} = \mathcal{A}^n \cdot \mathcal{A}^m$

1.6. Обратный оператор. Взаимно-однозначный оператор. Ядро и образ оператора. Теорема о размерностях.

Def 1.6.21. Оператор $I: V^n \rightarrow V^n$ называется тождественным оператором, если $Ix = x, \forall x \in V^n$.

Def 1.6.22. Пусть даны операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B}: V^n \rightarrow V^n$. Оператор \mathcal{B} называется обратным для оператора \mathcal{A} , если их композиция равна тождественному оператору.

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1} \iff \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = I$$

Def 1.6.23. Оператор $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$ называется взаимно-однозначным, если разным $x \in V^n$ сопоставляются разные $y \in V^n$.

$$x \neq y \implies \mathcal{A}x \neq \mathcal{A}y \quad \forall x, y \in V^n$$

Lm 1.6.24. Если оператор $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$ взаимно-однозначный, то $\mathcal{A}x = 0 \implies x = 0$.

Доказательство. От противного

$$\begin{aligned} \square x = x_1 - x_2 \neq 0 &\implies x_1 \neq x_2 \\ \mathcal{A}x = \mathcal{A}(x_1 - x_2) &= \mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2 = 0 \implies \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \end{aligned}$$

Это невозможно, т.к. \mathcal{A} взаимно-однозначный. ■

Теорема 1.6.25. Взаимно-однозначный оператор переводит линейно-независимый набор в линейно-независимый набор.

Доказательство. Пусть дан взаимно-однозначный оператор $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$ и линейно-независимый набор $\{x_1, \dots, x_n\}$. Построим набор образов $\{\mathcal{A}x_1, \dots, \mathcal{A}x_n\}$. Составим его нулевую линейную комбинацию, после чего воспользуемся линейностью оператора:

$$\begin{aligned}\lambda_1 \mathcal{A}x_1 + \dots + \lambda_n \mathcal{A}x_n &= 0 \\ \mathcal{A}(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) &= 0\end{aligned}$$

По 1.6.24 получаем, что $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$. Т.к. набор $\{x_1, \dots, x_n\}$ линейно независим, то $\forall \lambda_i = 0$ ■

Следствие 1.6.26. Взаимно-однозначный оператор переводит базис в базис.

Теорема 1.6.27. Оператор $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$ взаимно-однозначный $\iff \exists \mathcal{A}^{-1}$.

Доказательство. \implies Пусть $x \xrightarrow{\mathcal{A}} y$. Рассмотрим оператор \mathcal{B} такой, что $y \xrightarrow{\mathcal{B}} x$. Т.к. \mathcal{A} взаимно-однозначный, то $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = I$.

\Leftarrow От противного

$$\begin{aligned}\square \quad x_1 \neq x_2, \mathcal{A}x_1 &= \mathcal{A}x_2 = x \\ x_1 &= \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}^{-1}x \\ x_2 &= \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x_2 = \mathcal{A}^{-1}x \\ x_1 \neq x_2 &\implies \mathcal{A}^{-1}x \neq \mathcal{A}^{-1}x\end{aligned}$$

Получили противоречие. ■

Def 1.6.28. Пусть дан линейный оператор $\mathcal{A}: V^n \rightarrow W^m$. Множество $\text{Ker}\mathcal{A} = \{x \in V^n \mid \mathcal{A}x = 0\}$ называется ядром оператора \mathcal{A} .

Lm 1.6.29. Оператор $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$ взаимно-однозначный $\implies \text{Ker}\mathcal{A} = \{0\}$.

Доказательство. От противного, пусть $x \neq 0 \in \text{Ker}\mathcal{A}$. Тогда по 1.6.24 $\mathcal{A}0 = 0$, но в то же время $\mathcal{A}x = 0, x \neq 0$. Нарушается взаимно-однозначность. ■

Def 1.6.30. Пусть дан линейный оператор $\mathcal{A}: V^n \rightarrow W^m$. Множество $\text{Im}\mathcal{A} = \{y \in W^m \mid \exists x \in V^n: y = \mathcal{A}x\}$ называется образом оператора \mathcal{A} .

Теорема 1.6.31. Пусть дан оператор $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$. Тогда

$$\dim \text{Ker}\mathcal{A} + \dim \text{Im}\mathcal{A} = n$$

Доказательство. Т.к. $\text{Ker}\mathcal{A}$ и $\text{Im}\mathcal{A}$ это подпространства V^n , то $\exists W \subset V^n \mid W \oplus \text{Ker}\mathcal{A} = V^n$. Тогда $\dim W + \dim \text{Ker}\mathcal{A} = n$. Требуется доказать, что $\dim W = \dim \text{Im}\mathcal{A}$.

Сначала покажем, что $\mathcal{A}: W \rightarrow \text{Im}\mathcal{A}$ взаимно-однозначный. От противного:

$$\begin{aligned}\square \quad x_1 \neq x_2 \in W: \mathcal{A}x_1 &= \mathcal{A}x_2 \\ \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 &\implies \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \implies (x_1 - x_2) \in \text{Ker}\mathcal{A} \\ x_1, x_2 \in W &\implies (x_1 - x_2) \in W\end{aligned}$$

Но это невозможно, т.к. $W \oplus \text{Ker}\mathcal{A} = V^n \implies W \cap \text{Ker}\mathcal{A} = \emptyset$.

В $\text{Im}\mathcal{A}$ выделим базис $\{y_1, \dots, y_k\}$. Т.к. \mathcal{A} взаимно-однозначный, то выделенный базис порождается линейно-независимым набором (см. 1.6.25) $\{x_1, \dots, x_k\}, x_i \in W$. Значит $\dim W \geq \dim \text{Im}\mathcal{A}$.

Предположим, что $\dim W > \dim \text{Im}\mathcal{A}$. Обозначим $\dim W = p$, дополним систему $\{x_1, \dots, x_k\}$ до p линейно-независимых векторов. Т.к. оператор $\mathcal{A}: W \rightarrow \text{Im}\mathcal{A}$ взаимно-однозначный, то он должен перевести полученную линейно-независимую систему в линейно-независимую. Однако это невозможно, т.к. $\text{Im}\mathcal{A}$ имеет базис меньшей размерности. ■

Замечание 1.6.32. Можно доказать, что

$$\begin{cases} V_1 \subset V^n \\ V_2 \subset V^n \\ \dim V_1 + \dim V_2 = n \end{cases} \implies \exists \mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n, \text{Ker}\mathcal{A} = V_1, \text{Im}\mathcal{A} = V_2$$

Def 1.6.33. Рангом оператора $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$ называется размерность его образа:

$$\text{rang}\mathcal{A} = \dim \text{Im}\mathcal{A}$$

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}: V^n \rightarrow V^n$. Рассмотрим некоторые свойства ранга линейного оператора:

1. Если оператор \mathcal{A} взаимно-однозначный, то $\text{rang} \mathcal{A} = n$ (это следствие из 1.6.31).
2. $\text{rang}(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \leq \text{rang} \mathcal{A}$, $\text{rang}(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \leq \text{rang} \mathcal{B}$
3. $\text{rang}(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = \text{rang} \mathcal{A} + \text{rang} \mathcal{B} - \dim V$

1.7. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы при переходе к новому базису.

Пусть дан оператор $\mathcal{A}: V^n \rightarrow V^n$ и $x, y \in V^n$, $\mathcal{A}x = y$.

Выделим в V^n базис, разложим x по этому базису. После чего применим к нему оператор \mathcal{A} :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \{e_1, \dots, e_n\} \\ x &= x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\ y &= x_1 \mathcal{A}e_1 + \dots + x_n \mathcal{A}e_n\end{aligned}$$

Далее применим оператор к каждому из базисных векторов:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}e_i &= a_{1,i}e_1 + \dots + a_{n,i}e_n \\ y &= x_1(a_{1,1}e_1 + \dots + a_{n,1}e_n) + \dots + x_n(a_{1,n}e_1 + \dots + a_{n,n}e_n) \\ y &= e_1(x_1 a_{1,1} + \dots + x_n a_{1,n}) + \dots + e_n(x_1 a_{n,1} + \dots + x_n a_{n,n})\end{aligned}$$

Заметим, что y также можно разложить по базису. Составим СЛАУ и запишем её в матричном виде:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 a_{1,1} & + \dots + & x_n a_{1,n} & = & y_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_n a_{n,1} & + \dots + & x_n a_{n,n} & = & y_n \end{array} \right\} \iff AX = Y$$

Def 1.7.34. Матрицей оператора \mathcal{A} в данном базисе называется матрица составленная из столбцов-коэффициентов разложения образов базисных векторов по этому же базису.

Замечание 1.7.35. Если $A^{-1} = A^T$, то матрица оператора называется ортогональной.

1.8. Собственные числа и собственные векторы оператора. Теоремы о диагональной матрице оператора.

1.9. Сопряженный и самосопряженный операторы в вещественном евклидовом пространстве: определения, основные свойства. Свойства собственных чисел и собственных векторов самосопряженного оператора.

1.10. Структура образа самосопряженного оператора. Проектор. Спектральное разложение оператора.

1.11. Ортогональная матрица и ортогональный оператор. Поворот плоскости и пространства как ортогональное преобразование.

1.12. Билинейные формы: определения, свойства. Матрица билинейной формы.

1.13. Квадратичная форма: определения, приведение к каноническому виду.

1.14. Знакоопределенность квадратичной формы: необходимые и достаточные. условия. Критерий Сильвестра.

2. Дифференциальные уравнения

2.1. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ДУ): задача о радиоактивном распаде и задача о падении тела. Определение ДУ, решения ДУ и их геометрический смысл. Задача Коши.

2.2. Уравнение с разделяющимися переменными.

Def 2.2.1. Уравнение вида

$$m(x)N(y)dx + M(x)n(y)dy = 0$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

Для решения таких уравнений необходимо разделить обе части на $M(x)N(y)$, перенести одно из слагаемых в правую часть, после чего проинтегрировать обе части.

$$\begin{aligned} m(x)N(y)dx + M(x)n(y)dy &= 0 \\ \frac{m(x)}{M(x)}dx + \frac{n(y)}{N(y)}dy &= 0 \\ \int \frac{m(x)}{M(x)}dx &= - \int \frac{n(y)}{N(y)}dy \end{aligned}$$

Замечание 2.2.2. В случае, если $M(x) = 0$ или $N(y) = 0$, то уравнение решается непосредственным интегрированием.

Замечание 2.2.3. Решения вида $x = const, y = const$ не всегда получаемы из общего решения.

2.3. Однородное уравнение.

Def 2.3.4. Функция $f(x, y)$ называется *однородной m -ого измерения* ($m \geq 0$), если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$.

Def 2.3.5. Дифференциальное уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется *однородным*, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ однородные функции одного измерения m .

Однородные уравнения решаются заменой $t = \frac{y}{x}$. Покажем, откуда появляется подобная замена. Преобразуем функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= P\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^m P\left(1, \frac{y}{x}\right) \\ Q(x, y) &= Q\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^m Q\left(1, \frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Вернемся к исходному уравнению:

$$\begin{aligned} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= 0 \mid : dx \\ y' &= -\frac{P(1, y/x)}{Q(1, y/x)} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \\ \frac{y}{x} = t &\implies \begin{cases} f(1, y/x) = \tilde{f}(t) \\ y = xt, y'_x = t + xt' \\ t + xt' = \tilde{f}(t) \\ x \cdot \frac{dt}{dx} = \tilde{f}(t) - t \\ \frac{dt}{\tilde{f}(t) - t} = \frac{dx}{x} \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом исходное однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Замечание 2.3.6. Случай $\tilde{f}(t) - t = 0$ нужно рассмотреть отдельно.

2.4. Уравнение в полных дифференциалах.

Def 2.4.7. Дифференциальное уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если

$$\exists z(x, y): dz = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Критерием того, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах может служить равенство

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Решение уравнений в полных дифференциалах сводится к поиску функции $z(x, y)$, удовлетворяющей условиям. Про то, как найти такую функцию можно прочитать в конспекте по матанализу в разделе про интегралы, независимые от пути. После того, как такая функция будет найдена, решить ДУ не составит проблем:

$$\begin{aligned} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= 0 \\ dz &= 0 \\ z &= C \end{aligned}$$

TODO: Интегрирующий множитель

2.5. Линейное уравнение первого порядка. Метод Лагранжа.

Def 2.5.8. Линейным однородным уравнением первого порядка (ЛОДУ₁) называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = 0$$

ЛОДУ₁ является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому оно решается следующим образом:

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -p(x)y \\ \frac{dy}{y} &= -p(x)dx \\ \bar{y} &= C \cdot \underbrace{e^{-\int p(x)dx}}_{y_1} \end{aligned}$$

Замечание 2.5.9. При решении данного уравнения мы поделили на $y \neq 0$. Заметим, что $y = 0$ также является решением ЛОДУ₁, однако оно получаемо из общего решения при $C = 0$.

Def 2.5.10. Линейным неоднородным уравнением первого порядка (ЛНДУ₁) называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \quad q(x) \neq 0$$

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной) для решения ЛНДУ₁:

1. Найдем частное решение y_1 соответствующего однородного уравнения.
2. Будем искать решение ЛНДУ₁ в виде $y(x) = y_1(x) \cdot C(x)$. Преобразуем ДУ в соответствии с этой заменой

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= q(x) \\ y_1'(x)C(x) + y_1(x)C'(x) + p(x)y_1(x)C(x) &= q(x) \\ y_1(x)C'(x) + C(x) \underbrace{\left(y_1'(x) + p(x)y_1(x) \right)}_{=0} &= q(x) \\ y_1(x)C'(x) &= q(x) \\ C(x) &= \int \frac{q(x)}{y_1(x)} dx + C \end{aligned}$$

3. Подставим найденную функцию $C(x)$ в $y(x) = y_1(x) \cdot C(x)$.

TODO: Уравнение Бернулли, Клеро, Риккати и пр.

2.6. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения.

2.7. Уравнения n -ого порядка, допускающие понижение порядка.

К уравнениям, допускающим понижение порядка относятся:

1. Непосредственно интегрируемые уравнения вида $y^{(n)}(x) = f(x)$.
Они решаются интегрированием обеих частей n раз.

2. Уравнения не содержащие $y(x)$ в явном виде.

Они решаются заменой $z(x) = y'(x)$, $z'(x) = y''(x)$.

Замечание 2.7.11. В общем случае производится замена самой младшей из присутствующих производных.

3. Уравнения не содержащие x в явном виде.

Они решаются заменой $z(y) = y'(x)$, тогда $y''(x) = z'_y y'_x = z'(y) \cdot z(y)$

2.8. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) : определения, решение ЛОДУ₂ с постоянными коэффициентами для случая различных вещественных корней характеристического уравнения.

Def 2.8.12. Линейным дифференциальным уравнением n -ого порядка (ЛДУ _{n}) называется

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = f(x), \quad a_0(x) \neq 0$$

Def 2.8.13. Разрешенным ЛДУ _{n} называется

$$y^{(n)}(x) + b_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + b_n(x)y(x) = f(x)$$

Def 2.8.14. Если в ЛДУ _{n} $\forall i: a_i(x) = p_i \in \mathbb{R}$, то такое ЛДУ _{n} называется ЛДУ _{n} с постоянными коэффициентами. Оно имеет вид

$$y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + p_n y(x) = f(x)$$

Def 2.8.15. Линейным однородным дифференциальным уравнением n -ого порядка называется ЛДУ _{n} вида

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = 0,$$

Def 2.8.16. Линейным неоднородным дифференциальным уравнением n -ого порядка называется ЛДУ _{n} вида

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = f(x), \quad f(x) \neq 0$$

Рассмотрим ЛОДУ₂ вида $y'' + py' + qy = 0$. Любой паре $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ можно поставить в соответствие квадратное уравнение $k^2 + pk + q = 0$. По т. Виета $p = -(k_1 + k_2)$, $q = k_1 k_2$, где k_1, k_2 это корни уравнения. Подставим полученные выражения в исходное ДУ:

$$\begin{aligned} y'' - (k_1 + k_2)y' + k_1 k_2 &= 0 \\ y'' - k_1 y' - k_2 y' + k_1 k_2 &= 0 \\ (y'' - k_2 y') - k_1(y' - k_2 y) &= 0 \\ \square u(x) = y' - k_2 y \\ u' - k_1 u = 0 &\implies u(x) = c_1 e^{k_1 x} \implies y' - k_2 y = c_1 e^{k_1 x} \end{aligned}$$

Сначала найдем частное решение соответствующего ЛОДУ₁: $\bar{y} = c_2 e^{k_2 x}$, $y_1 = e^{k_2 x}$. Далее будем варьировать постоянную c_2 , тогда $y(x) = C_2(x)e^{k_2 x}$. Подставим это в исходное ДУ:

$$\begin{aligned} C_2'(x)e^{k_2 x} + C_2(x) \cdot k_2 \cdot e^{k_2 x} - k_2 \cdot C_2(x)e^{k_2 x} &= c_1 e^{k_1 x} \\ C_2'(x)e^{k_2 x} &= c_1 e^{k_1 x} \end{aligned}$$

В итоге получаем уравнение

$$\boxed{C_2'(x) = c_1 e^{(k_1 - k_2)x}} \quad (\star)$$

Проанализируем это уравнение. Всего будет рассмотрено 3 случая: один в этом параграфе, остальные — в двух последующих.

(★) **случай I:** $k_1 \neq k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

В заданных ограничениях имеем

$$\begin{aligned} C_2'(x) &= c_1 e^{(k_1 - k_2)x} \\ C_2(x) &= \frac{c_1}{k_1 - k_2} e^{(k_1 - k_2)x} + \tilde{c}_2 \\ y(x) = C_2(x)y_1(x) &= \underbrace{\frac{c_1}{k_1 - k_2}}_{\tilde{c}_1} e^{k_1 x} + \tilde{c}_2 e^{k_2 x} \\ y(x) &= \tilde{c}_1 e^{k_1 x} + \tilde{c}_2 e^{k_2 x} \end{aligned}$$

2.9. Решение ЛОДУ₂ с постоянными коэффициентами для случая вещественных кратных корней характеристического уравнения.

(★) случай II: $k_1 = k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Пусть $k_1 = k_2 = k$, тогда получаем:

$$\begin{aligned}C_2'(x) &= c_1 e^{(k_1 - k_2)x} \\C_2(x) &= c_1 x + c_2 \\y(x) &= C_2(x)y_1(x) = (c_1 x + c_2)e^{kx} \\y(x) &= c_1 x \cdot e^{kx} + c_2 e^{kx}\end{aligned}$$

2.10. Решение ЛОДУ₂ с постоянными коэффициентами для случая комплексных корней характеристического уравнения.

(★) случай III: $k_{1,2} = \alpha + \beta i, k_{1,2} \in \mathbb{C}$

В заданных ограничениях получаем

$$\begin{aligned}C_2'(x) &= c_1 e^{(k_1 - k_2)x} \\C_2(x) &= \frac{c_1}{k_1 - k_2} e^{(k_1 - k_2)x} + \tilde{c}_2 \\y(x) &= C_2(x)y_1(x) = \underbrace{\frac{c_1}{k_1 - k_2}}_{\tilde{c}_1} e^{k_1 x} + \tilde{c}_2 e^{k_2 x} \\y(x) &= \tilde{c}_1 e^{k_1 x} + \tilde{c}_2 e^{k_2 x} \\y(x) &= \tilde{c}_1 e^{\alpha x} e^{\beta i x} + \tilde{c}_2 e^{\alpha x} e^{-\beta i x}\end{aligned}$$

Далее используем формулу $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$:

$$\begin{aligned}y(x) &= e^{\alpha x} \left(\tilde{c}_1 \left(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x) \right) + \tilde{c}_2 \left(\cos(\beta x) - i \sin(\beta x) \right) \right) \\y(x) &= e^{\alpha x} \left(\cos(\beta x) \underbrace{(\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2)}_{\hat{c}_1} + i \sin(\beta x) \underbrace{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2)}_{\hat{c}_2} \right) \\y(x) &= e^{\alpha x} \left(\hat{c}_1 \cos(\beta x) + \hat{c}_2 i \sin(\beta x) \right)\end{aligned}$$

TODO: Конспект не очень хороший в этом моменте, возможно что-то неправильно

Lm 2.10.17. Если $y(x) = u(x) + iv(x)$ это решение ЛОДУ₂, то $y(x) = u(x) + v(x)$ также являются решением ЛОДУ₂.

Доказательство. Рассмотрим функцию $y(x) = u(x) + v(x)$:

$$\begin{aligned}\begin{cases} y(x) = u(x) + v(x) \\ y'(x) = u'(x) + v'(x) \\ y''(x) = u''(x) + v''(x) \end{cases} \\y''(x) + py'(x) + qy(x) = u''(x) + v''(x) + pu'(x) + pv'(x) + u(x) + qu(x) + qv(x) = 0 \\(u''(x) + pu'(x) + qu(x)) + (v''(x) + pv'(x) + qv(x)) = 0\end{aligned}$$

Это равенство верно, т.к. $u(x)$ и $v(x)$ решения ЛОДУ₂. ■

Значит, по 2.10.17 общее решение (★) в третьем случае будет иметь вид

$$y(x) = e^{\alpha x} \left(\hat{c}_1 \cos(\beta x) + \hat{c}_2 \sin(\beta x) \right)$$

2.11. Свойства решений ЛОДУ₂: линейная независимость решений, определитель Вронского. Теоремы 1,2.

Рассмотрим множество Ω непрерывных функций с непрерывными производными 2ого порядка. Определим линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}[y] = y'' + py' + q \rightarrow f(x)$.

Def 2.11.18. Будем называть функции y_1, \dots, y_n линейно-независимыми на отрезке $[a; b]$, если

$$\sum_{i=1}^n c_i y_i = 0 \implies \forall c_i = 0$$

Def 2.11.19. Определитель Вронского (вронскиан) \mathcal{W} это определитель, составленный из n функций и всех их производных вплоть до $(n-1)$ -ого порядка. Он имеет вид:

$$\mathcal{W} = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Lm 2.11.20. Если два решения ЛОДУ₂ линейно-зависимы на $[a; b]$, то их вронскиан на $[a; b]$ равен нулю.

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{L}[y_1] = 0 \\ \mathcal{L}[y_2] = 0 \\ y_1 = \lambda y_2 \end{array} \right\} \implies \mathcal{W} = 0$$

Доказательство.

$$\mathcal{W} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda y_2' & y_2' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_2 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0$$

■

Lm 2.11.21. Если два решения ЛОДУ₂ линейно-независимы на $[a; b]$, то их вронскиан на $[a; b]$ не равен нулю.

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{L}[y_1] = 0 \\ \mathcal{L}[y_2] = 0 \\ y_1 \neq \lambda y_2 \end{array} \right\} \implies \mathcal{W} \neq 0$$

Доказательство. От противного

$$\begin{aligned} \square \mathcal{W} = 0 &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0 \\ &\implies \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = 0 \\ &\implies \left(\frac{y_2}{y_1} \right)' = 0 \\ &\implies \frac{y_2}{y_1} = \text{const} \\ &\implies y_1 = \lambda y_2 \end{aligned}$$

■

Получили противоречие.

Теорема 2.11.22. Линейная зависимость/независимость функций определяется равенством их вронскиана нулю.

Доказательство. Следствие из 2.11.20 и 2.11.21. ■

Замечание 2.11.23. Для проверки набора функций на линейную зависимость/независимость лучше использовать именно вронскиан, а не непосредственное определение линейной зависимости функций на отрезке.

Теорема 2.11.24. Рассмотрим функции на отрезке $[a; b]$. Если на этом отрезке найдется точка, в которой вронскиан равен нулю, вронскиан будет равен нулю на всем отрезке. Дуально, если найдется точка, в которой вронскиан не равен нулю, то он будет не равен нулю на всем отрезке.

$$\begin{aligned} \exists x_0 \in [a; b] \mid \mathcal{W}(x_0) = \mathcal{W}_0 \neq 0 &\implies \forall x \in [a; b]: \mathcal{W}(x) \neq 0 \\ \exists x_0 \in [a; b] \mid \mathcal{W}(x_0) = \mathcal{W}_0 = 0 &\implies \forall x \in [a; b]: \mathcal{W}(x) = 0 \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть y_1 и y_2 это решения ДУ, тогда

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0 \\ y_1 y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0 \end{array} \right. \cdot y_2 - \\ (y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + p(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0 \end{aligned}$$

Заметим, что выражение в левой скобке это \mathcal{W}' , а в правой — \mathcal{W} :

$$\mathcal{W} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

$$\mathcal{W}' = (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$

Подставим это в полученное ранее уравнение:

$$(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + p(y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0$$

$$\mathcal{W}' + p\mathcal{W} = 0$$

$$\mathcal{W} = c_1 e^{-\int p dx}$$

$$\mathcal{W}(x_0) = c_1 e^{-\int_{x_0}^{x_0} p dx} = c_1 = \mathcal{W}_0$$

$$\mathcal{W}(x) = c_1 e^{-\int_{x_0}^x p dx} = \mathcal{W}_0 e^{-\int_{x_0}^x p dx}$$

Таким образом, если $\mathcal{W}_0 = 0$, то $\mathcal{W}(x) = 0$ на всем отрезке $[a; b]$. Дуально, если $\mathcal{W}_0 \neq 0$, то т.к. второй множитель всегда больше нуля (это экспонента) $\mathcal{W}(x) \neq 0$.

TODO: Откуда такие границы в интегралах? ■

Замечание 2.11.25. Таким образом, чтобы узнать равен ли вронскиан нулю на отрезке, достаточно узнать его значение в одной произвольной точке этого отрезка.

2.12. Свойства решений ЛОДУ₂: линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Определитель Вронского. Теоремы о вронскиане.

Lm 2.12.26. Линейная комбинация решений ЛОДУ₂ также является решением.

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{L}[y_1] = 0 \\ \mathcal{L}[y_2] = 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}[y_1 + y_2] = 0 \\ \mathcal{L}[\lambda y_1] = 0 \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}) \end{array} \right.$$

Доказательство. Рассмотрим на примере $y = y_1 + y_2$. Подставим в исходное ДУ, раскроем и сгруппируем

$$y'' + py' + qy = 0$$

$$(y_1 + y_2)'' + p(y_1 + y_2)' + q(y_1 + y_2) = 0$$

$$(y_1'' + py_1' + qy_1) + (y_2'' + py_2' + qy_2) = 0$$

Это верно, т.к. y_1 и y_2 это решения исходного ДУ. Случай $y = \lambda y_1$ рассматривает аналогично. ■

Следствие 2.12.27. Множество решений ЛОДУ образует линейное пространство.

Теорема 2.12.28. О существовании и единственности решения ЛОДУ₂.

$$y'' = g(x, y, y') = f(x) - py' - qy$$

Если $g, g_y', g_{y'}'$ непрерывны в области $D \ni (x_0, y_0)$, то задача Коши

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}[y] = f(x) \\ y_0 = y(x_0) \\ y_0' = y'(x_0) \end{array} \right.$$

имеет единственное решение.

Доказательство. (Без доказательства) ■

2.13. Свойства решений ЛОДУ₂ : линейная комбинация решений, линейная зависимость решений. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ₂. Фундаментальная система решений (определение).

Теорема 2.13.29. О структуре общего решения ЛОДУ₂.

Если $\mathcal{L}[y_1] = 0$, $\mathcal{L}[y_2] = 0$ и y_1, y_2 линейно независимы, то $\bar{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2$ — общее решение ЛОДУ₂.

Доказательство. Начнем с того, что $\bar{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2$ это решение как линейная комбинация решений (см. 2.12.26).

Рассмотрим точку (x_0, y_0) в рамках задачи Коши:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[y] = 0 \\ y_0 = y(x_0) \\ y'_0 = y'(x_0) \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0 \\ c_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0) = y'_0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$$

TODO: Глянуть переходы выше, в конспекте противоречиво написано

По т. Крамера решение полученной СЛАУ будет единственным только в том случае, если определитель главной матрицы не равен нулю. Это выполняется, т.к. этот определитель это вронскиан, который не равен нулю, т.к. решения линейно-независимы. ■

Def 2.13.30. Фундаментальная система решений (ФСР) ЛОДУ_n это максимальный (по включению) набор линейно независимых решений ДУ.

2.14. Свойства решений ЛНДУ₂ : теоремы о структуре общего решения и решении ДУ с суммой правых частей.

Теорема 2.14.31. Общее решение ЛНДУ₂ представимо в виде суммы общего решения соответствующего ЛОДУ₂ и некоторого частного решения ЛНДУ₂.

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= f(x) \\ y &= \bar{y} + y^* \\ \mathcal{L}[\bar{y}] &= 0, \mathcal{L}[y^*] = f(x) \end{aligned}$$

Доказательство. Сначала покажем, что y будет являться решением ДУ:

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\bar{y}] + \mathcal{L}[y^*] = 0 + f(x) = f(x)$$

Показать, что это решение будет являться общим можно аналогично 2.13.29. ■

Lm 2.14.32. Если правая часть ЛНДУ₂ представлена суммой $f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение этого ЛНДУ₂ будет суммой двух частных решений ЛНДУ₂, в которых правая часть является каждым из слагаемых.

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= f_1(x) + f_2(x) \\ \mathcal{L}[y_1^*] &= f_1(x), \mathcal{L}[y_2^*] = f_2(x) \\ y^* &= y_1^* + y_2^* \end{aligned}$$

Доказательство.

$$\mathcal{L}[y^*] = \mathcal{L}[y_1^*] + \mathcal{L}[y_2^*] = f_1(x) + f_2(x)$$

2.15. Структура решения ЛОДУ_n: линейная независимость решений, нахождение фундаментальной системы решений по корням характеристического уравнения.

Замечание 2.15.33. О существовании и единственности решения задачи Коши.

Пусть

$$y^{(n)} = g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

при этом y, y', g непрерывны и ограничены в области

$$\begin{aligned} |x - x_0| &< h_0, \\ |y - y_0| &< h_1, \\ &\dots \\ |y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| &< h_n, \end{aligned}$$

где $(x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ это начальные условия. Тогда существует единственное решение задачи Коши.

TODO: Разве не все частные производные по $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ должны бы непрерывны?

По аналогии с ЛОДУ₂ для ЛОДУ_n можно составить характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y] &= y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \quad p_i \in \mathbb{R} \\ \mathcal{L}[e^{kx}] &= k^n e^{kx} + p_1 \cdot k^{n-1} e^{kx} + \dots + p_n e^{kx} = 0 \mid e^{kx} \neq 0 \\ k^n + p_1 k^{n-1} + \dots + p_n &= 0\end{aligned}$$

Далее аналогично рассмотрим некоторые случаи:

1. Набору $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{R}$ различных вещественных корней соответствует набор частных линейно-независимых решений однородного уравнения $y_1 = e^{k_1 x}, \dots, y_m = e^{k_m x}$.
2. Набору $k_1 = k_2 = \dots = k_m = k \in \mathbb{R}$ повторяющихся вещественных корней соответствует набор частных линейно-независимых решений однородного уравнения $y_1 = e^{kx}, y_2 = x e^{kx}, \dots, y_m = x^{m-1} e^{kx}$.
3. Каждой уникальной паре вида $k = \alpha + i\beta$ соответствует пара частных линейно-независимых решений однородного уравнения $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$.
4. Каждой паре кратности m вида $k = \alpha + i\beta$ соответствует m пар частных линейно-независимых решений однородного уравнения вида

$$\begin{array}{llll} y_1 & = & e^{\alpha x} \cos \beta x, & y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x \\ y_3 & = & x e^{\alpha x} \cos \beta x, & y_4 = x e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_{2m-1} & = & x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, & y_{2m} = x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \end{array}$$

Замечание 2.15.34. Общим решением ЛОДУ_n будет линейная оболочка набора частных решений, соответствующих корням характеристического уравнения.

Def 2.15.35. Вронскианом ДУ называется вронскиан его ФСР.

Замечание 2.15.36. Все доказанные свойства вронскиана распространяются и на большую размерность.

TODO: Ударение меня победило

2.16. Решение ЛНДУ₂ с постоянными коэффициентами: специальная правая часть, поиск частного решения методом неопределенных коэффициентов.

Def 2.16.37. Специальной правой частью называется (СПЧ)

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$$

где α, β, n, m некоторые коэффициенты.

Поиск частного решения методом неопределенных коэффициентов

Идея: пусть в ЛНДУ_n правая часть является специальной. Можно предположить, что она была получена дифференцированием функции со схожей структурой, поэтому будем искать частное решение ЛНДУ_n в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x} (U_l(x) \cos \beta x + W_l(x) \sin \beta x), \quad l = \max(n, m)$$

Алгоритм:

1. Составляем и решаем характеристическое уравнение.
2. Извлекаем из СПЧ коэффициенты α, β, n, m .
3. Считаем r — количество совпадений корней характеристического уравнения с $\alpha \pm i\beta$. Совпадение комплексной пары считаем один раз.
4. Составляем y^* с неопределенными коэффициентами: полиномы U, W степени $l = \max(n, m)$.
5. Подставляем y^* в уравнение, находим неопределенные коэффициенты.

Пример #01:

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= 2e^{3x} \\ k^2 - 3k + 2 &= 0 \\ k_1 = 1, k_2 &= 2 \\ 2e^{3x} &\implies \alpha = 3, \beta = 0, n = 0, m = 0 \end{aligned}$$

Число $\alpha + i\beta$ не совпадает с корнями характеристического уравнения, поэтому будем искать частное решение в виде $y^* = A e^{3x}$:

$$\begin{aligned}
(Ae^{3x})'' - 3(Ae^{3x})' + 2(Ae^{3x}) &= 2e^{3x} \\
9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} &= 2e^{3x} \mid : e^{3x} \\
9A - 9A + 2A &= 2 \\
A &= 1
\end{aligned}$$

Итого: частное решение будет равно $y^* = e^{3x}$

Пример #02:

$$\begin{aligned}
y'' - 3y' + 2y &= e^x \\
k^2 - 3k + 2 &= 0 \\
k_1 = 1, k_2 &= 2 \\
e^x \implies \alpha = 1, \beta = 0, n = 0, m &= 0
\end{aligned}$$

Корень характеристического уравнения k_1 совпал с числом $\alpha + i\beta$, поэтому будем искать частное решение в виде $y^* = Axe^x$:

$$\begin{aligned}
(Axe^x)'' - 3(Axe^x)' + 2(Axe^x) &= e^x \\
e^x(2A + Ax) - 3e^x(A + Ax) + 2Axe^x &= 2e^{3x} \mid : e^x \\
2A + Ax - 3A - 3Ax + 2Ax &= 2 \\
A &= -2
\end{aligned}$$

Итого: частное решение будет равно $y^* = -2e^x$

Замечание 2.16.38. Почему необходимо умножать на x^r ? Если этого не делать, то полученное уравнение с неопределенными коэффициентами не будет иметь решений. Это происходит в тех случаях, когда выбранное частное решение совпадает с общим решением (именно поэтому мы смотрим на корни характеристического уравнения, потому что общее решение формируется на их основе). В этих случаях нарушается структура общего решения ЛНДУ_n.

2.17. Решение ЛНУ₂ : метод вариации произвольных постоянных (Лагранжа).

2.18. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение методом исключения.

2.19. Системы дифференциальных уравнений: определения, решение матричным методом в случае различных вещественных собственных чисел.

2.20. Теория устойчивости: определение устойчивости по Ляпунову, фазовая плоскость, траектории ДУ. Примеры устойчивого и неустойчивого решения