MA Eχ 02

isagila

Собрано 18.06.2023 в 13:52

Содержание

1. Интегрирование функции одной переменной

1.1. Определение и свойства неопределенного интеграла.

Def 1.1.1. Кусочная дифференцируемая функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Теорема 1.1.2. Разность двух первообразных для одной и той же функции — константа.

Доказательство. Пусть дана функция $f(x)$ и две её первообразные $F_1(x)$, $F_2(x)$. Обозначим их разность как $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Производная этой функции будет равна $\varphi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Из множества дифференцируемости $F_1(x)$ и $F_2(x)$ выберем наименьшее и выделим в нем отрезок $[a; x]$. По т. Лагранжа:

$$\exists \xi \in (a; x) \colon \varphi'(\xi) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}$$

Т.к. $\forall \xi \colon \varphi'(\xi) = 0$, то $\varphi(x) - \varphi(a) = 0$, т.е. $\varphi(x) = \varphi(a)$. Т.к. отрезок произвольный, то значения функции $\varphi(x)$ равны во всех точках, т.е. она константа. ■

Следствие 1.1.3. Первообразные для $f(x)$ составляют множество функций вида $\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$, где $F(x)$ это какая-либо первообразная.

Def 1.1.4. Семейство первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ по аргументу x.

Замечание 1.1.5. О существовании первообразной

Не для каждой функции существует первообразная, но для каждой непрерывной на отрезке. Даже если первообразная существует, то она не всегда выражается в элементарных функциях, например, $\int e^{-x^2} \mathrm{d}x$.

Далее рассмотрим некоторые свойства неопределенного интеграла.

Lm 1.1.6.

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$$

Доказательство.

$$\mathrm{d}F(x) = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x \Longrightarrow \int \mathrm{d}F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

■

Lm 1.1.7.

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$$

Доказательство.

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

■

Lm 1.1.8. Линейность

$$\int \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$$

Доказательство.

$$\int \alpha f(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}(\alpha F(x)) = \alpha F(x) + C$$

При первым переходе используется свойство линейности дифференциала, а при втором — 1.1.6. Доказательство для суммы функций аналогично. ■

1.2. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям.

Замечание 1.2.1. Интеграл сохраняет инвариантность своей формы, т.е.

$$\int f(\clubsuit)\mathrm{d}\clubsuit = F(\clubsuit) + C$$

Теорема 1.2.2. О замене производной в неопределенном интеграле
Если $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ обратимая и дифференцируемая функция, то

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Доказательство. Возьмем производные от обоих частей:

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'_x = f(x)$$

$$\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\right)'_x = \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\right)'_t \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \overset{1.1.7}{=\!=} f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x)$$

■

Замечание 1.2.3. Формула работает в обе стороны:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \overset{\sqrt{x}=t}{=\!=\!=} \int \frac{e^t}{t}2t\mathrm{d}t = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$$\int e^{x^2}\underbrace{2x\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}x^2} \overset{x^2=t}{=\!=\!=} \int e^t\mathrm{d}t = e^t + C = e^{x^2} + C$$

Теорема 1.2.4. Интегрирование по частям

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

Доказательство. Рассмотрим равенство $(uv)' = u'v + uv'$ и проинтегрируем обе его части:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\int (uv)'\mathrm{d}x = \int (u'v + uv')\mathrm{d}x$$

$$uv = \int u'v\mathrm{d}x + \int uv'\mathrm{d}x \qquad \text{Линейность интеграла (1.1.8)}$$

$$uv = \int v\mathrm{d}u + \int u\mathrm{d}v \qquad \text{Внесение под дифференциал (1.2.2)}$$

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

■

Замечание 1.2.5. Интегрирование по частям используется если $\int v\mathrm{d}u$ вычисляется проще, чем интеграл $\int u\mathrm{d}v$. В качестве функции u выбирают ту, которая упрощается при дифференцировании.

1.3. Интегрирование рациональных функций (общая схема). Разложение дроби на простейшие.

Выделим 4 типа простейших дробей:

$$(I):\ \frac{A}{x-a} \qquad (II):\ \frac{A}{(x-a)^k} \qquad (III):\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \qquad (IV):\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$

где (x^2+px+q) неразложимый на множители многочлен, а A, M, N — неопределенные коэффициенты.

Метод неопределенных коэффициентов:

Пусть дана дробь $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(n)}$, в которой $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ это многочлены с вещественными коэффициентами. Требуется разложить её на простейшие.

1. Если $m \geqslant n$, то необходимо выделить целую часть. Далее будем считать, что $m < n$.
2. Раскладываем знаменатель на множители, т.е. приводим его к виду

$$P_n = a_0(x-x_1)^{b_1}\dots(x-x_t)^{b_t}(x^2+p_1x+q_1)^{c_1}\dots(x^2+p_rx+q_r)^{c_r}$$

3. Для каждой скобки в знаменателе записываем некоторую дробь по следующему правилу:

$$(x-x_i) \to \frac{A}{x-x_i}$$
$$(x-x_i)^k \to \frac{A}{x-x_i}+\ldots+\frac{A}{(x-x_i)^k}$$
$$(x^2+p_ix+q_i) \to \frac{Ax+B}{x^2+p_ix+q_i}$$
$$(x^2+p_ix+q_i)^k \to \frac{Ax+B}{x^2+p_ix+q_i}+\ldots+\frac{Ax+B}{(x^2+p_ix+q_i)^k}$$

У каждой скобки будет свой набор констант.

4. Получаем уравнение относительно коэффициентов $A, B\ldots$, которые находятся в числителе полученных дробей.
5. Приводим полученную дробь к общему знаменателю и приравниваем её к исходной дроби.
6. Т.к. знаменатели полученных дробей равны, то должны быть равны и числители. Пользуемся тем, что два полинома равны когда равны все коэффициенты перед одинаковыми степенями. Получаем систему уравнений (по количеству коэффициентов).
7. Решаем систему, находим коэффициенты. Подставляем их в разложение исходной дроби на сумму простейших дробей.

Теперь интегрирование рациональных дробей свелось к тому, чтобы разложить их на простейшие, а потом, пользуясь линейностью интеграла (1.1.8), проинтегрировать каждую из дробей по-отдельности. Подробнее об интегрировании простейших дробей написано в вопросе **1.4.**

1.4. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование простейших дробей 1,2,3.

- Интегрирование простейших дробей I-ого типа
$$\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\int\frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a} = \ln|x-a|+C$$
- Интегрирование простейших дробей II-ого типа
$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x = A\int (x-a)^{-k}\,\mathrm{d}(x-a) = \frac{A}{1-k}\cdot(x-a)^{1-k} = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}$$
- Интегрирование простейших дробей III-его типа
$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x \tag{1}$$
Попытаемся внести числитель под дифференциал:
$$\mathrm{d}\big(x^2+px+q\big) = (2x+p)\mathrm{d}x$$
$$(Mx+N) = \frac{M}{2}\left(2x+\frac{2N}{M}\right) = \frac{M}{2}\left(2x+p+\frac{2N}{M}-p\right) = \frac{M}{2}(2x+p)+\underbrace{\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}_{h}$$
Подставим это в (1):
$$\int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+h}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \frac{M}{2}\cdot\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x+\int\frac{h}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$
Далее вычислим каждый из интегралов по-отдельности:
$$\frac{M}{2}\cdot\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \frac{M}{2}\cdot\int\frac{\mathrm{d}\big(x^2+px+q\big)}{x^2+px+q} = \frac{M}{2}\cdot\ln\left|x^2+px+q\right|+C$$
$$\int\frac{h}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = h\cdot\int\frac{1}{(x+{}^{p}/_{2})^2+\underbrace{q-({}^{p}/_{2})^2}_{g^2}}\mathrm{d}x = \frac{h}{g}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x+{}^{p}/_{2}}{g}\right)+C$$
Подставим полученные выражения в исходный интеграл (1):
$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \frac{M}{2}\cdot\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{h}{g}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x+{}^{p}/_{2}}{g}\right)+C$$
$$h=\left(N-\frac{Mp}{2}\right), g^2 = q-\left(\frac{p}{2}\right)^2$$
- Интегрирование простейших дробей IV-его типа

Пример 1.4.1.
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x \tag{1}$$
Первый из полученных интегралов мы уже вычислить, это простейшая дробь III-ого типа. Таким образом этот интеграл будет равен $\operatorname{arctg} x + C$. Далее работаем со вторым интегралом:
$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{x\,\mathrm{d}\big(x^2+1\big)}{(x^2+1)^2} = \left[\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)\right] = -\frac{1}{2}\cdot\int x\cdot\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \tag{2}$$
Полученный интеграл возьмем по частям:
$$\int \underbrace{x}_{u}\,\mathrm{d}\underbrace{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)}_{v} = \frac{x}{x^2+1} - \int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x + C \tag{3}$$
Подставим (3) в (2), а полученное выражение в исходный интеграл (1):
$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} &= \int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \\ &\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x\right) + C = \\ &\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C\end{aligned}$$
Замечание 1.4.2. В случаях с более высокой степенью каждая подобная итерация будет приводить к уменьшению степени знаменателя на единицу. Обычно подобные интегралы раскладываются с помощью подведения под дифференциал и линейности, после чего используется следующая рекуррентная формула:
$$I_n = \int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\cdot I_{n-1}$$

1.5. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Замечание 1.5.1. Всякая рациональная дробь интегрируемая, поэтому можно попытаться с помощью замены свести функции другого вида к рациональным дробям.

Если требуется вычислить интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, где R это некоторая *рациональная* функция, то можно применить универсальную тригонометрическую подстановку:
$$x = 2\operatorname{arctg} t \iff t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$
Тогда составляющие интеграла преобразуется следующим образом:
$$\begin{aligned}\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} &= \frac{2\sin{}^x\!/_2\cos{}^x\!/_2}{\sin^2{}^x\!/_2+\cos^2{}^x\!/_2} = \frac{2\operatorname{tg}{}^x\!/_2}{\operatorname{tg}^2{}^x\!/_2+1} = \frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} &= \frac{\cos^2{}^x\!/_2-\sin^2{}^x\!/_2}{\sin^2{}^x\!/_2+\cos^2{}^x\!/_2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2{}^x\!/_2}{\operatorname{tg}^2{}^x\!/_2+1} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\\ \mathrm{d}x &= \mathrm{d}(2\operatorname{arctg} t) = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$
Подставляя полученные выражения в исходный интеграл, получаем:
$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{УТП}} \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

1.6. Интегрирование тригонометрических функций вида $R(\sin^m x, \cos^n x)$, $R(\sin mx, \cos nx)$.

Рассмотрим интегралы вида $\int \sin^m x\cos^m x\mathrm{d}x$

1. n или m нечетное
   Пусть m нечетное, тогда $m = 2k+1$. Подставим это в исходный интеграл:
   $$\int \sin^m x\cos^m \mathrm{d}x = \int\sin^m x\cos^{2k}\cos x\mathrm{d}x = \int\sin^m x(1-\sin^2 x)^k\,\mathrm{d}(\sin x) \xlongequal{t\,=\,\sin x} \int t^m(1-t^2)^k\mathrm{d}t$$
   Получили интеграл от полинома $\Longrightarrow$ умеем его решать.
2. n и m четные
   Обозначим $n = 2p$, $m = 2q$, тогда:
   $$\int\sin^m x\cos^m \mathrm{d}x = \int(\sin^2 x)^p(\cos^2 x)^q\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^p\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^q\mathrm{d}x$$
   Далее раскрываем скобки и упрощаем. Получится либо первый случай (с нечетной степенью), либо второй, но с меньшей степенью.

Интегралы видов

- $\int \sin mx \sin nx \mathrm{d}x$
- $\int \sin mx \cos nx \mathrm{d}x$
- $\int \cos mx \cos nx \mathrm{d}x$

решаются при помощи использования тригонометрических формул, которые сводят произведение к сумме/разности:

$$\begin{aligned}
\sin mx \sin nx &= \frac{1}{2}\Big(\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)\Big)\\
\sin mx \cos nx &= \frac{1}{2}\Big(\sin((m-n)x) + \sin((m+n)x)\Big)\\
\cos mx \cos nx &= \frac{1}{2}\Big(\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)\Big)
\end{aligned}$$

TODO: На лекции были интегралы вида $\int \sin^m x \cos^m \mathrm{d}x$, а не $R(\sin^m x, \cos^n x)$.

1.7. Интегрирование некоторых иррациональных функций, метод тригонометрической подстановки.

- Интегралы вида $\int R(\sqrt{x^2 \pm 1}, x)\mathrm{d}x$ решаются с помощью замены x на гиперболическую функцию:

$$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \qquad \cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

Данные функции называются гиперболическим синусом и гиперболическим косинусом соответственно.

Lm 1.7.1. Основное гиперболическое тождество

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$$

Доказательство.

$$\cosh^2 - \sinh^2 = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2u} + 2 + e^{-2u} - e^{2u} + 2 - e^{-2u}\right) = 1$$

∎

Замечание 1.7.2. Заметим, что

$$\ln|\sinh + \cosh| = \ln\left|\frac{e^u - e^{-u}}{2} + \frac{e^u + e^{-u}}{2}\right| = \ln e^u = u$$

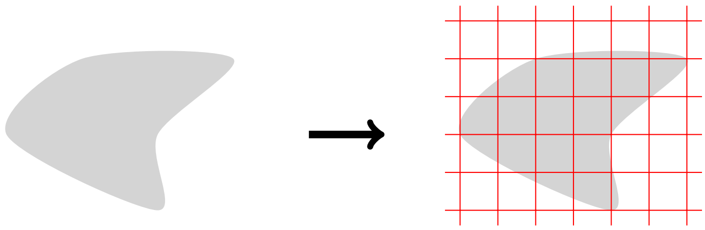
Пример 1.7.3. Вычислим 'длинный' логарифм:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \begin{bmatrix} x = \sinh u \implies 1 + x^2 = \cosh^2 u \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sinh u) = \cosh u \mathrm{d}u \\ u = \ln\left|\underbrace{x}_{\sinh u} + \underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{\cosh u}\right| \quad (1.7.2) \end{bmatrix} = \int \frac{\cosh u}{\cosh u}\mathrm{d}u = u + C = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C$$

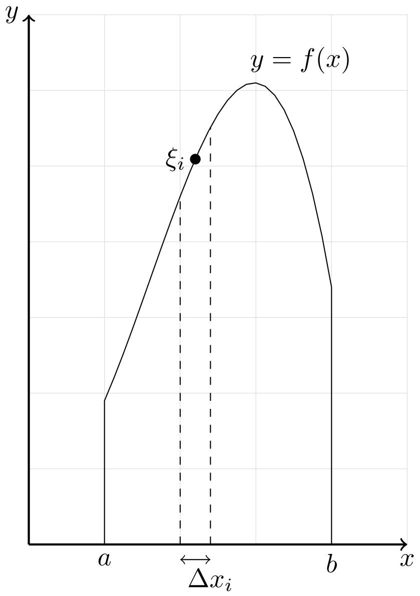
- Интегралы вида $\int R(\sqrt{1-x^2}, x)\mathrm{d}x$ решаются с помощью замены x на синус или косинус.
- Интегралы вида $\int R(\sqrt[k_1]{x}, \ldots, \sqrt[k_n]{x})\mathrm{d}x$ решаются с помощью замены $t = \sqrt[K]{x}$, где K это НОД для $k_1, \ldots, k_n$.
- Интегралы вида $\int R(\sqrt{ax+b}, x)\mathrm{d}x$ решаются с помощью замены $t = \sqrt{ax+b}$. При этом $x = \frac{t^2-b}{a}$, $\mathrm{d}x = \frac{2t}{a}\mathrm{d}t$.

1.8. Определенный интеграл. Определение, свойства линейности и аддитивности.

Постановка задачи: требуется найти площадь криволинейной фигуры. Разобьем фигуру на квадраты и найдем площадь каждого из них. После это сложим полученные площади.



Упростим задачу: пусть нужно посчитать площадь криволинейной трапеции.



1. Разбиение области $[a;b]$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ назовем частичным, если длину обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Разбиение (дробление) обозначим $T = \{x_i\}_{i=0}^n$. Введем понятие *ранга* дробления τ: $\tau = \max \Delta x_i$.

2. Выберем среднюю точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Тогда $f(\xi_i)$ это высота элементарного прямоугольника. Значит площадь элементарного прямоугольника будет равна $S_e = f(\xi_i)\Delta x_i$.

3. Просуммируем площади всех элементарных прямоугольников: $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$. Данная сумма называется интегральной суммой Римана.

4. Возьмем предел при $n \to \infty$ и $\tau \to 0$:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{1}$$

Def 1.8.1. Если полученный предел интегральных сумм (1) существует, конечен, **не зависит от дробления и выбора средней точки**,то он называется определенным интегралом.

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

a, b называются пределами интегрирования, $f(x)$ — подынтегральной функцией, а $\mathrm{d}x$ — дифференциалом переменной (или элементом длины).

Замечание 1.8.2. В определении выше $a < b$. Доопределим для случаев $a = b$ и $a > b$:

$$\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

Замечание 1.8.3. Интеграл Римана определен для кусочно-непрерывных (т.е. имеющих конечное число разрывов) функций.

Т.к. интеграл является пределом сумм, то его свойства вытекают из свойств пределов:

1. Линейность

$$\int\limits_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{d}x = \lambda \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

2. Аддитивность

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Замечание 1.8.4. Свойство аддитивности выполняется даже в случае, если $c \notin [a;b]$. Это легко проверить пользуясь свойством 1.8.2.

1.9. Геометрический смысл определенного интеграла. Оценка определенного интеграла. Теорема о среднем.

Геометрический смысл определенного интеграла следует из его построения: определенный интеграл по модулю равен площади криволинейной трапеции.

Lm 1.9.1. Пусть $f \in C_{[a;b]}$ и определен $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. m, M — наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Тогда

$$(b-a)m \leqslant \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)M$$

Доказательство.

$$\forall x \in [a;b]\colon m \leqslant f(x) \leqslant M \Longrightarrow \forall \xi_i \in [a;b]\colon m \leqslant f(\xi_i) \leqslant M$$
$$m\Delta x_i \leqslant f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant M\Delta x_i$$
$$m\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant M\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$$
$$m\lim_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \leqslant \lim_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant M\lim_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$$
$$(b-a)m \leqslant \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)M$$

■

Теорема 1.9.2. Теорема Лагранжа о среднем (в интегральной форме)

Пусть $f \in C_{[a;b]}$ и определен $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Тогда

$$\exists \xi \in (a;b)\colon \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 1.9.1:

$$(b-a)m \leqslant \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)M \Longrightarrow m \leqslant \frac{1}{b-a}\cdot\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M$$

По т. Больцано-Коши функция $f(x)$ принимает все значения от минимального m до максимального M. Значит $\exists \xi \in (a;b)$, что

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\cdot\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \Longrightarrow \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

■

Замечание 1.9.3. Геометрический смысл теоремы Лагранжа заключается в том, что на промежутке $(a;b)$ всегда найдется такая точка ξ, что площадь криволинейной трапеции будет в точности равна площади прямоугольника со сторонами $(b-a)$ и $(f(\xi)-f(m))$.

Lm 1.9.4. Если $f(x), g(x) \in C_{[a;b]}$, определены $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ и при этом $\forall x \in [a;b]\colon f(x) \geqslant g(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Доказательство. Рассмотрим $h(x) = f(x) - g(x)$. Она будет неотрицательная на отрезке $[a;b]$, значит $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$. Далее пользуемся аддитивностью и получаем искомое неравенство. ■

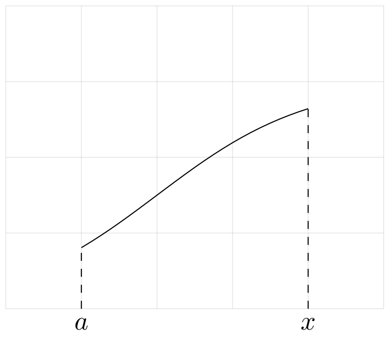
Lm 1.9.5. Пусть $f \in C_{[a;b]}$ и определен $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Тогда

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

Доказательство. Т.к. определенный интеграл это предел интегральных сумм, то можно воспользоваться предельных переходом, а затем свойством о том, что модуль суммы не превосходит сумму модулей. ■

Замечание 1.9.6. Выкалывание из отрезка $[a;b]$ конечного числа точек не меняет значение интеграла.

1.10. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Барроу.



Def 1.10.1. Интегралом с переменных верхним пределом называется

$$\int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

где x — переменный верхний предел.

Замечание 1.10.2. $\forall x \in [a;+\infty]$ соответствует определенное значение $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, т.е. определена функция верхнего предела, которая геометрически является площадью криволинейной трапеции с подвижным правым краем.

Теорема 1.10.3. Теорема Барроу

Пусть $f \in C_{[a;b]}$ и определен $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. Тогда $\Phi'(x) = f(x)$.

Доказательство. Раскроем производную $\Phi'(x)$ по определению, после чего воспользуемся линейностью интеграла:

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}$$

Далее по т. Лагранжа (1.9.2) $\exists \xi \in (x; x+\Delta x)$ такая, что:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \left[\left.\begin{matrix} \Delta x \to 0 \\ \xi \in (x, x+\Delta x) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \xi \to x \right] = f(x)$$

■

1.11. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.

Теорема 1.11.1. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть $f(x) \in C_{[a;b]}$, определен $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ и $F(x)$ это некоторая первообразная для $f(x)$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, где $x \in [a;b]$. Тогда по т. Барроу (1.10.3) $\Phi(x) = F(x) + C$.

Найдем значение функции $\Phi(x)$ в точке a:

$$\left.\begin{matrix} \Phi(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0 \\ \Phi(a) = F(a) + C \end{matrix}\right\} \Longrightarrow C = -F(a)$$

Теперь найдем значение функции $\Phi(x)$ в точке b:

$$\left.\begin{matrix} \Phi(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \\ \Phi(b) = F(b) + C = F(b) - F(a) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

■

Замечание 1.11.2. Формула Ньютона-Лейбница работает в тех случаях, когда можно найти $F(x)$ или хотя бы её значения на концах отрезка $[a;b]$.

Замечание 1.11.3. Если функция $f(x)$ кусочно заданная, то используем свойство аддитивности и разбиваем отрезок на части.

1.12. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям.

Замена в определенном интеграле выполняется также, как и в неопределенном за исключением смены пределов интегрирования. Более формально:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

$$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$$

Интегрирование по частям для определенных интегралов выполняется также, как и для неопределенных:

$$\int\limits_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\mathrm{d}u$$

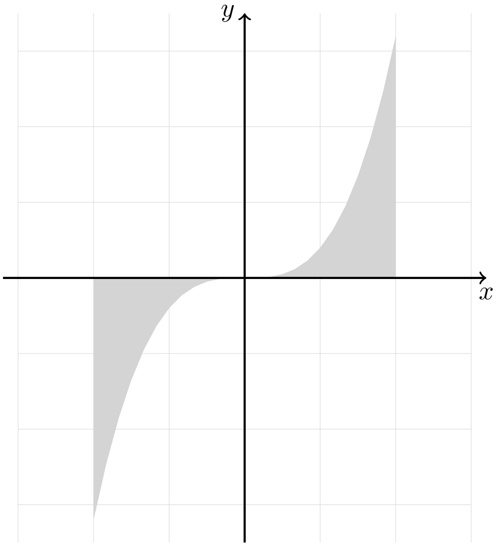
Стоит отметить несколько свойств определенных интегралов для четных и нечетных функций на симметричном промежутке:

<u>Lm</u> 1.12.1. Если $f(x)$ нечетная функция, то

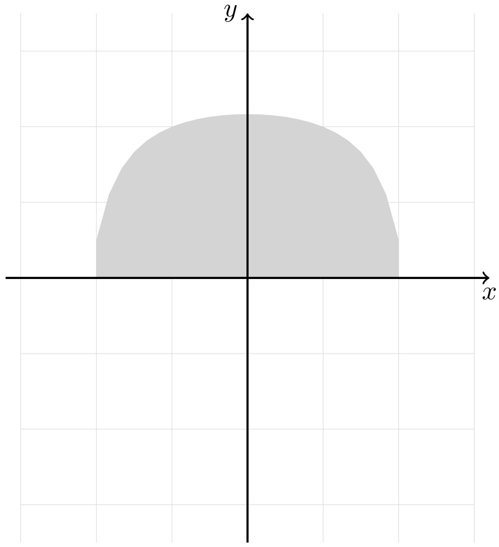
$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

<u>Lm</u> 1.12.2. Если $f(x)$ четная функция, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

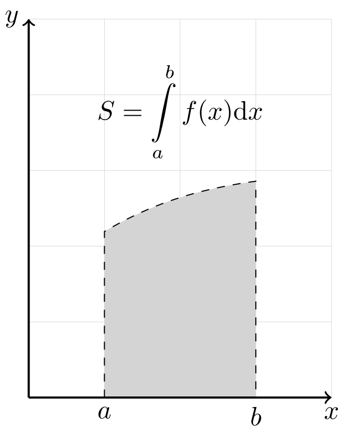


(a) $f(-x) = -f(x)$

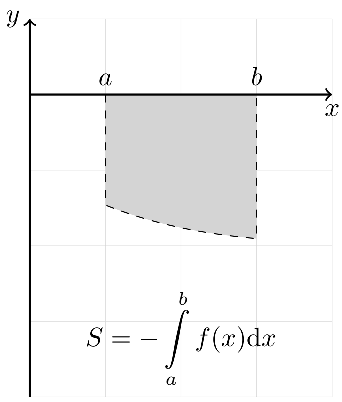


(b) $f(-x) = f(x)$

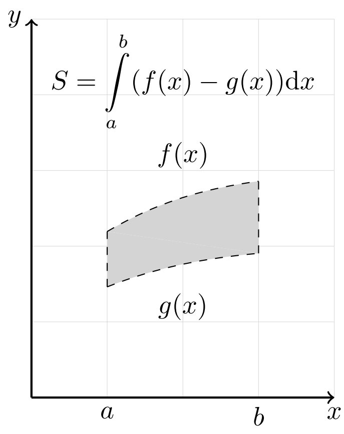
1.13. Приложения определенного интеграла: вычисление площадей в декартовых координатах.



(a) $f(x) \geqslant 0$



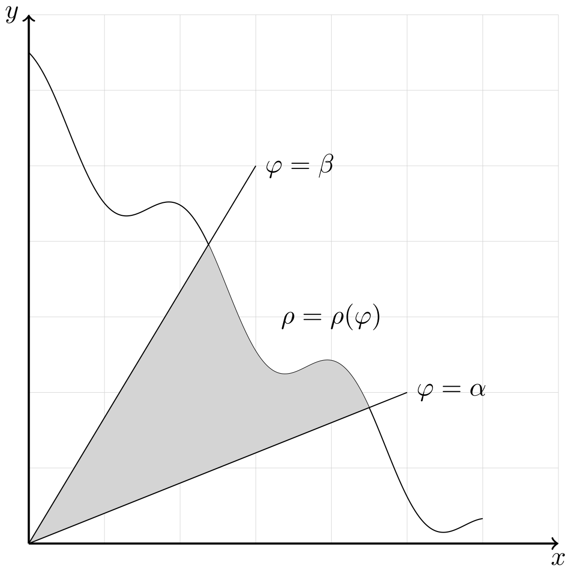
(b) $f(x) \leqslant 0$



(c) $f(x) \geqslant g(x)$

Замечание 1.13.1. Для случая (c) расположение функций $f(x)$, $g(x)$ относительно нуля не важно. Важно лишь, чтобы $\forall x \in [a; b]\colon f(x) \geqslant g(x)$.

1.14. Приложения определенного интеграла: вычисление площади криволинейного сектора в полярных координатах.



Построим интеграл:

1. Дробление отрезка $[\alpha,\beta]$ на подотрезки $[\varphi_{i-1},\varphi_i]$, $\tau=\max\Delta\varphi_i$.
2. В каждом отрезке выбираем среднюю точку ξ_i. Ищем $\rho(\xi_i)$, приближаем площадь элементарного сектора площадью кругового.
$$S_{sec}=\frac{\pi\rho^2(\xi_i)}{2\pi}\cdot\Delta\varphi_i=\frac{1}{2}\rho^2(\xi_i)\Delta\varphi_i$$
3. Площадь это предел интегральных сумм
$$S=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\rho^2(\xi_i)\Delta\varphi_i$$
4. Переход к интегралу
$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

Замечание 1.14.1. Если кривая задана параметрически $x=\varphi(t), y=\psi(t)$, то площадь можно вычислить по формуле:
$$S=\int\limits_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$$
$$a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta)$$

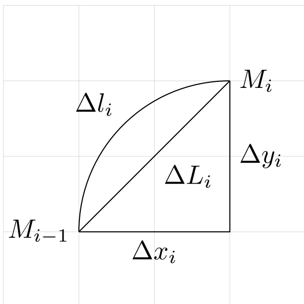
1.15. Приложения определенного интеграла: вычисление длины дуги кривой (вывод формулы).

Пусть дана гладкая (без самопересечений, разрывов и циклов) дуга $\breve{AB}$ задаваемая уравнением $y=y(x)$, где $y(x)$ функция, дифференцируемая на $[a;b]$. Найдем её длину.

Построим интеграл:

1. Дробление $\breve{AB}$ такими M_i, что $AM_0\dots M_nB\approx\breve{AB}$.
2. Стянем точки M_{i-1} и M_i хордой и получим координатный треугольник.

$$\Delta l_i\approx\Delta L_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i$$



3. Заметим, что $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$ это отношение конечных приращений, поэтому можно применить т. Лагранжа:
$$\exists\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\colon\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=f'(\xi_i)$$
$$\Delta L_i=\sqrt{1+y'(\xi_i)^2}\Delta x_i$$
4. Составим предел интегральных сумм и перейдем к интегралу:
$$L=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+y'(\xi_i)^2}\Delta x_i\Longrightarrow L=\int\limits_{a}^{b}\sqrt{1+y'(x)^2}\mathrm{d}x$$

Замечание 1.15.1. Выражение $\mathrm{d}l=\sqrt{1+y'(x)^2}\mathrm{d}x$ называется дифференциалом дуги.

1.16. Приложения определенного интеграла: вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически.

Рассмотрим формулу $L=\int_a^b\sqrt{1+y'(x)^2}\mathrm{d}x$ при условии, что кривая задана параметрически. Получим:

$$x = \varphi(t), y = \psi(t)$$
$$\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$$
$$a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta), t \in [\alpha; \beta]$$
$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Подставим это в исходную формулу:

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\mathrm{d}t$$
$$a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$$

Замечание 1.16.1. Таким образом, дифференциал дуги в при параметрическом задании будет равен

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\mathrm{d}t$$
$$x = \varphi(t), y = \psi(t)$$

1.17. Приложения определенного интеграла: вычисление объемов тел с известными площадями сечений и тел вращения.

Пусть дано некоторое тело и известны площади его сечений в плоскости $\perp Ox$, т.е. известна функция $S(x)$, определяющая площадь сечения в зависимости от x. Построим интеграл:

1. Дробление: отрезок $[a; b]$, где a и b это крайние точки тела, делится на подотрезки $[x_{i-1}, x_i]$. Через x_i проводится плоскость $\perp Ox$ и выделяется элементарный слой.
2. Приближаем объем этого слоя объемом цилиндра с основанием $S(\xi_i)$, где ξ_i это некоторая средняя точка из отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.
3. Составляем предел интегральных сумм и переходим к интегралу.

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^n S(\xi_i)\Delta x_i \Longrightarrow V = \int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x \tag{RV}$$

Замечание 1.17.1. Сечения обязательно должны быть $\perp Ox$, в противном случае получится объем, умноженный на коэффициент наклона сечения по отношению к оси Ox.

Рассмотрим нахождение объема тел вращения.

Подставим в полученную выше формулу $S_{sec} = S_\circ = \pi f(x)^2$. Получим, что объем тела вращения равен:

$$V = \pi \int\limits_a^b f(x)^2\mathrm{d}x$$

1.18. Несобственные интегралы 1-го рода (на неограниченном промежутке). Определение и свойства.

Def 1.18.1. Интеграл от функции на неограниченном промежутке называет несобственным интегралом 1-ого рода.

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{\iff} \lim_{\beta\to+\infty} \int\limits_a^\beta f(x)\mathrm{d}x$$
$$\int\limits_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{\iff} \lim_{\beta\to-\infty} \int\limits_\beta^a f(x)\mathrm{d}x$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{\iff} \int\limits_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,\ c \in \mathbb{R}$$

Def 1.18.2. Если предел в определении 1.18.1 существует и конечен, то говорят, что интеграл *сходится* ($\succ$), в противном случае говорят, что интеграл *расходится* ($\prec$).

Несобственные интегралы 1-ого рода обладают теми же свойствами, что и рассмотренные ранее интегралы:

1. Линейность

$$\int\limits_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{d}x = \lambda \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

2. Аддитивность

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

3. Сравнение

$$\forall x \in [a; +\infty] \colon f(x) \geqslant g(x) \Longrightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int\limits_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$$

Замечание 1.18.3. Если

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

и при этом один из двух полученных интегралов расходится, то расходится и изначальный интеграл.

1.19. Вычисление несобственного интеграла 1-го рода: формула Ньютона-Лейбница, интегрирование по частям, замена переменной.

Т.к. несобственный интеграл первого рода это по сути предел, то его можно вычислить с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \left(\lim_{\beta\to+\infty} F(\beta)\right) - F(a) = \lim_{\beta\to+\infty} F(x)\Big|_a^\beta$$

Интегрирование по частями и замена переменной выполняются также, как и в определенном интеграле (аккуратнее с пределами интегрирования при замене).

Замечание 1.19.1. Иногда после замены несобственный интеграл может превратиться в собственный.

1.20. Несобственные интегралы 2-го рода (от неограниченной функции). Определение, вычисление и свойства.

Def 1.20.1. Пусть $f(x) \in C_{[a;b]}$ и b это точка бесконечного разрыва ($\lim_{x\to b} f(x) = \infty$), тогда интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{\beta\to b-} \int\limits_a^\beta f(x)\mathrm{d}x$$

называется несобственным интегралом 2-ого рода.

Замечание 1.20.2. Существуют также другие формы несобственных интегралов 2-ого рода:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{\alpha\to a+} \int\limits_\alpha^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

В первом случае точкой бесконечного разрыва является точка a, а во втором — $c \in (a; b)$.

Несобственные интегралы второго рода обладают теми же свойствами (линейность, аддитивность, сравнение) и вычисляются так же, как и несобственные интегралы 1-ого рода:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to b} F(x)\Big|_a^\beta$$

1.21. Признаки сходимости несобственных интегралов: первый признак сравнения (в неравенствах).

Теорема 1.21.1. Пусть $f(x), g(x) \colon [a, +\infty] \to \mathbb{R}$ и на этом отрезке выполняется неравенство $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$. Тогда:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \succ \Longrightarrow \int\limits_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x \succ \tag{a}$$

$$\int\limits_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x \prec \Longrightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \prec \tag{b}$$

Доказательство. (a) Сначала докажем первое утверждение. Т.к. $f(x) \geqslant 0$, то $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0 \in \mathbb{R}$, при этом т.к. этот интеграл сходится, то $I \in \mathbb{R}$. Далее рассмотрим второй интеграл, по определению имеем:

$$\int\limits_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \lim_{\beta \to +\infty} \underbrace{\int\limits_a^{\beta} g(x)\mathrm{d}x}_{h(\beta)}$$

Заметим, т.к. $g(x) \geqslant 0$, то функция $h(\beta)$ монотонно возрастает при $\beta \to +\infty$. При этом значение этой функции ограничено сверху числом $I \in \mathbb{R}$. Значит по свойствам пределов данный предел конечен, из чего следует, что интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ сходится.

(b) Доказательство второго утверждения вытекает из первого. От противного: пусть $\int_a^{+\infty} f(x)$ сходится. Тогда по пункту a интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)$ тоже должен сходится. Противоречие. ■

1.22. Признаки сходимости несобственных интегралов: второй признак сравнения (предельный).

Теорема 1.22.1. Пусть $f(x), g(x) \colon [a; +\infty] \to \mathbb{R}$ и $f(x) > 0, g(x) > 0$. Тогда если предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

существует, конечен и не равен нулю, то функции оба интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ ведут себя одинаково в плане сходимости (т.е. либо оба сходятся, либо оба расходятся).

Доказательство. По определению предела получаем:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = r \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \forall x \in [a; +\infty], x > \delta \colon \left| \frac{f(x)}{g(x)} - r \right| < \varepsilon$$

$$r - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < r + \varepsilon \mid \cdot\, g(x) > 0$$

$$(r - \varepsilon) g(x) < f(x) < (r + \varepsilon) g(x)$$

Далее используем признак сравнения в неравенствах (1.21.1). Рассмотрим два случая:

$$\sqsupset \int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \succ \Longrightarrow \int\limits_a^{+\infty} (r - \varepsilon) g(x)\mathrm{d}x \succ$$

Т.к. $r \in \mathbb{R}$, а $\varepsilon > 0$ произвольное положительное число, то интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ также будет сходится. Второй случай рассматривается аналогично:

$$\sqsupset \int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \prec \Longrightarrow \int\limits_a^{+\infty} (r + \varepsilon) g(x)\mathrm{d}x \prec \Longrightarrow \int\limits_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x \prec$$

■

1.23. Признаки сходимости несобственных интегралов: теорема об абсолютной сходимости. Понятие условной сходимости.

Теорема 1.23.1. Пусть $f(x) \colon [a; +\infty] \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x \succ \Longrightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \succ$$

Доказательство. Раскроем интегралы $\left| \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \right|$ и $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ по определению:

$$\left|\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_a^{\beta} f(x)\mathrm{d}x\right| = \lim_{\beta\to+\infty}\left|\int\limits_a^{\beta} f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_a^{\beta} |f(x)|\mathrm{d}x$$

Далее воспользуемся свойством определенных интегралов (1.9.5) $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ и предельным переходом:

$$\lim_{\beta\to+\infty}\left|\int\limits_a^{\beta} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_a^{\beta} |f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\left|\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$$

Т.к. интеграл в правой части сходится, то обозначим его значение $r \in \mathbb{R}$. Раскрывая модуль по определению получаем:

$$-r \leqslant \int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \leqslant r$$

Другими словами значение интеграла ограничено, а значит интеграл сходится. ∎

Def 1.23.2. Если $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x \succ$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ называется абсолютного сходящимся.

Def 1.23.3. Если $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x \prec$, а $I = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \succ$ интеграл I называется условно сходящимся.

1.24. Сходимость интегралов 1-го и 2-го рода от степенных функций.

Def 1.24.1. Интегралы, про сходимость которых известна, называются *эталонными*. Обычно они используются в признаках сравнения.

Исследуем на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$. Рассмотрим три случая:

$$\alpha = 1 \qquad \int\limits_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|\Big|_1^{+\infty} \qquad \Longrightarrow \int\limits_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x} \prec$$

$$\alpha > 1 \qquad \int\limits_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{x\to\infty} x^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \qquad \Longrightarrow \int\limits_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \succ$$

$$\alpha < 1 \qquad \int\limits_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{x\to\infty} x^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \qquad \Longrightarrow \int\limits_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \prec$$

Исследуем на сходимость интеграл $\int\limits_a^{b}\dfrac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha}$. Также рассмотрим три случая:

$$\alpha = 1 \qquad \int\limits_a^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)} = \ln|x-a|\Big|_a^{b} \qquad \Longrightarrow \int\limits_a^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x-a} \prec$$

$$\alpha > 1 \qquad \int\limits_a^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha} = \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_a^{b} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \lim_{x\to a+}\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \qquad \Longrightarrow \int\limits_a^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha} \prec$$

$$\alpha < 1 \qquad \int\limits_a^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha} = \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_a^{b} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \lim_{x\to a+}\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \qquad \Longrightarrow \int\limits_a^{b}\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha} \succ$$

Аналогично можно исследовать сходимость интеграла $\int\limits_a^{b}\dfrac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha}$. Таким образом получаем:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \succ \ \alpha > 1 \qquad \int\limits_1^{b} \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha} \succ \ \alpha < 1 \qquad \int\limits_1^{b} \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha} \succ \ \alpha < 1$$

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \prec \ \alpha \leqslant 1 \qquad \int\limits_a^{b} \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha} \prec \ \alpha \geqslant 1 \qquad \int\limits_a^{b} \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha} \prec \ \alpha \geqslant 1$$

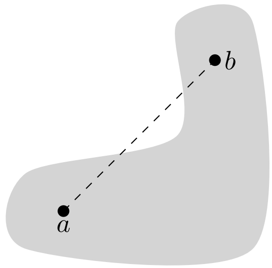
Замечание 1.24.2. Как правило для проверки на сходимость интегралов разного вида используют разные эталонные интегралы:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \longrightarrow \int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

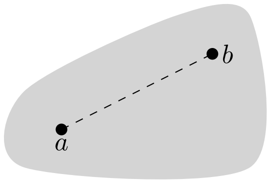
$$\int\limits_a^{b} f(x)\mathrm{d}x \longrightarrow \int\limits_a^{b} \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha}$$

2. Интегрирование функции нескольких переменных

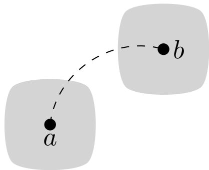
2.1. Двойной интеграл. Определение и свойства.



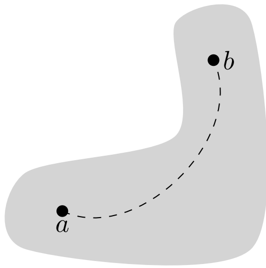
(a) Невыпуклая область



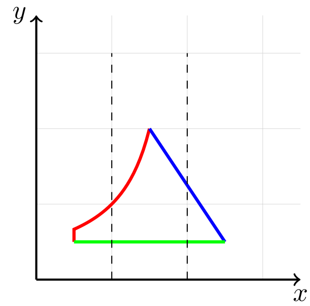
(b) Выпуклая область



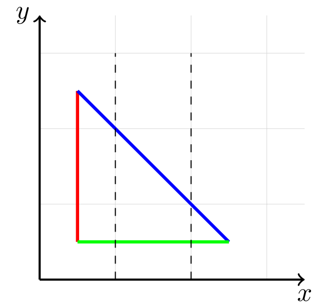
(a) Несвязная область



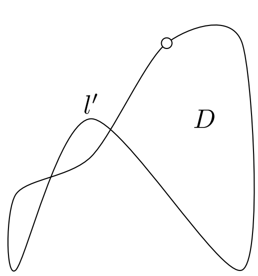
(b) Связная область



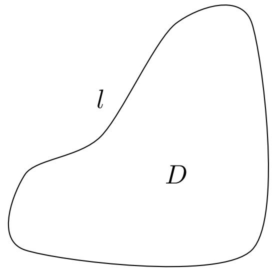
(a) Неправильная в направлении Oy область



(b) Правильная в направлении Oy область



(a) l' - не простая граница



(b) l - простая граница

Замечание 2.1.1. Об области D

Область D должна быть:

1. Выпуклой (3b), т.е. любые две точки можно стянуть отрезком, который полностью содержится в области D.
2. Правильной в координатном направлений. На рисунке 4a отрезки, параллельные Oy, при 'выходе' из области пересекают красную и синюю границы, которые имеют разное аналитическое задание. В то время как на рисунке 4b отрезки 'входят' в область через зеленую границу, а 'выходят' **только** через синюю.
3. Связной (5b), т.е любые две точки можно стянуть дугой, которая полностью содержится в области D.
4. Ограничена простой кривой (6b), т.е. граница области должна задаваться непрерывной дифференцируемой функцией и не иметь разрывов, изломов, самопересечений.

Замечание 2.1.2. Если область D обладает всеми вышеперечисленными свойствами, т.е. D выпуклая, правильная в координатном направлении, связная и имеет простую кривую в качестве границы, то будем называть такую область *хорошей*.

Построим двойной интеграл:

1. Разбиваем область D на прямоугольники размера $\Delta x_i \times \Delta y_i = \Delta S_i$.
2. Выбираем средние точки M_i, вычисляем $f(M_i)$.
3. Составляем предел интегральных сумм, переходим к двойному интегралу.

$$\iint\limits_D f(x)\,\underbrace{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}_{\mathrm{d}S}$$

Замечание 2.1.3. Геометрический смысл двойного интеграла заключается в том, что он равен объему криволинейного цилиндра (если $f(x, y) > 0$).

Т.к. двойной интеграл можно свести к двум обычным определенным интегралам (см. 2.2.1), то он обладает такими же свойствами:

1. Линейность
2. Аддитивность
3. Оценка (через минимальное/максимальное значение в области)
4. Применима т. Лагранжа ($\exists \xi \in D$ такая, что объем криволинейного цилиндра будет равен объему обычного цилиндра с высотой $f(\xi)$)

5. Сравнение (в т.ч. по модулю):

$$\forall x, y \in D\colon 0 \leqslant f(x,y) \leqslant g(x,y) \Longrightarrow 0 \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d} \leqslant \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\left| \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| \leqslant \iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2.2. Вычисление двойного интеграла. Кратный интеграл.

Теорема 2.2.1. Сведение двойного интеграла к повторным

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

Доказательство. Пусть область D правильная в направлении Oy. Найдем x_1 и x_2 — границы области для переменной x. Далее будем 'идти' по оси x от x_1 к x_2.

Рассмотрим момент, в котором $x = const$. В этот момент y может меняться в диапазоне от $y_1(x)$ до $y_2(x)$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$ это функции от x, задающие 'верхнюю' и 'нижнюю' границы текущего отрезка в области D (для этого и требовалась правильность в направлении Oy). Значит мы можем вычислить площадь сечения как

$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x = const, y)\mathrm{d}y = F(x = const, y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = \breve{F}(x)$$

Далее применим формулу для вычисления объема тела с известными площадями сечений (RV):

$$V = \int\limits_{x_1}^{x_2} \breve{F}\mathrm{d}x = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

■

Замечание 2.2.2. Полученный интеграл называется кратным (повторным).

Замечание 2.2.3. Порядок интегрирования можно изменить, если область правильная в обоих направлениях.

Если область правильная только в одном из направлений, то внутренний интеграл должен браться по переменной, соответствующей этому направлению.

Если область неправильная ни в одном из направлений, то её необходимо разбить на части (пользуясь аддитивностью интегралов), каждая из которых должна быть правильной хотя бы в одном из направлений.

2.3. Определение и вычисление тройного интеграла.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ есть область, в которой определена скалярная величина и 'плотность' её распределения $\rho(x,y,z)$. Тогда содержание этой величины в данной области будет равно:

$$\iiint\limits_T \rho(x,y,z) \underbrace{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}_{\mathrm{d}V}$$

Замечание 2.3.1. В определении выше рассматривается область, правильная в направлении Oz.

Замечание 2.3.2. Свойства тройного интеграла, а также способ его вычисления полностью аналогичен двойному интегралу:

1. Определяем границы для одной из переменных (область должна быть правильной в направлении оси этой переменной).
2. Выражаем границы для второй переменной через первую, а для третьей — через первые две.
3. Сводим все к повторным интегралам.

Формула для вычисления тройного интеграла будет выглядеть следующим образом:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

2.4. Криволинейные координаты.

Полярные координаты определяются как:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \quad \rho \geqslant 0, \varphi \in [0; 2\pi)$$

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y \longrightarrow \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

Цилиндрические координаты определяются как:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \rho \geqslant 0, \varphi \in [0; 2\pi), z \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \longrightarrow \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

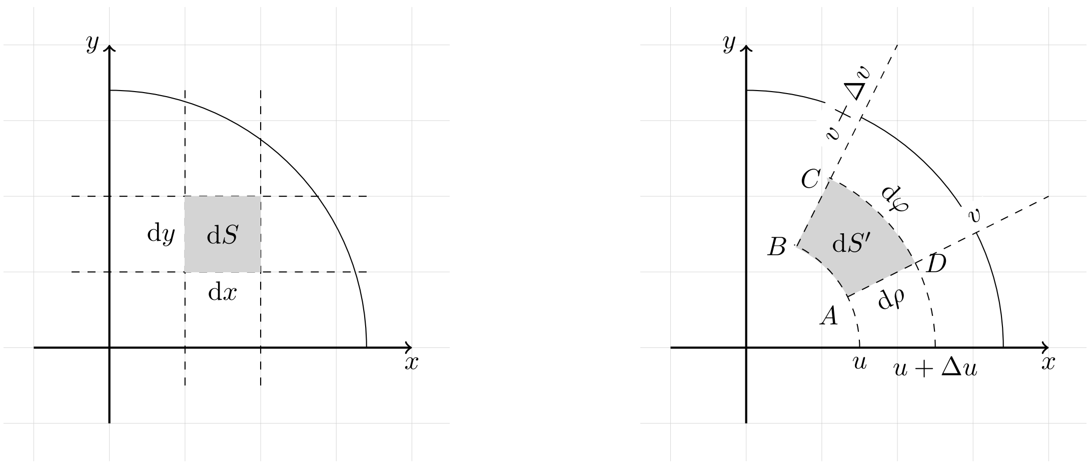
Сферические координаты определяются как:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = z\cos\theta \end{cases} \quad \rho \geqslant 0, \varphi \in [0; 2\pi), \theta \in [0, \pi]$$

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \longrightarrow \rho^2\sin\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

Замечание 2.4.1. О том, почему элементы объема имеют именно такое задание можно прочитать в следующем вопросе.

2.5. Замена переменных в двойном и тройном интегралах. Якобиан.



(a) $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(b) $\mathrm{d}S' \neq \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$

Дробление в выбранной СК проводится соответствующими координатными линиями/поверхностями. Потребуем малости $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$. Тогда площадь криволинейного прямоугольника будет мало отличать от площади обычного прямоугольника $ABCD$, значит:

$$\mathrm{d}S' = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ B_x - A_x & B_y - A_y & 0 \\ D_x - A_x & D_y - A_y & 0 \end{matrix}\right\| \tag{1}$$

Рассмотрим полученные разницы координат точек:

$$B_x - A_x = \varphi(u, v + \Delta v) - \varphi(u, v) = \Delta_v\varphi \approx \frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}v$$
$$B_y - A_y = \psi(u, v + \Delta v) - \psi(u, v) = \Delta_v\psi \approx \frac{\partial\psi}{\partial v}\mathrm{d}v$$
$$D_x - A_x = \varphi(u + \Delta u, v) - \varphi(u, v) = \Delta_u\varphi \approx \frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}u$$
$$D_y - A_y = \psi(u + \Delta u, v) - \psi(u, v) = \Delta_u\psi \approx \frac{\partial\psi}{\partial u}\mathrm{d}u$$

Подставим это в (1). Имеем:

$$\mathrm{d}S' \approx \left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}v\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}\mathrm{d}u - \frac{\partial\psi}{\partial v}\mathrm{d}v\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}u\right)\right| = \underbrace{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right|}_{|J|}\cdot\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$|J|$ можно записать в виде определителя:

$$|J| = \left|\begin{vmatrix}\varphi'_v & \varphi'_u\\ \psi'_v & \psi'_u\end{vmatrix}\right|$$

Def 2.5.1. Определитель J составленный из частных производных исходных переменных по каждой из новых переменных называется определителем Якоби (якобианом).

Его геометрический смысл заключается в том, что он является коэффициентом искажения при переходе от одной СК к другой.

В итоге получаем, что $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = |J|\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$, причем $|J| = \lim\limits_{\Delta S, \Delta S'\to 0}\dfrac{\Delta S'}{\Delta S}$. Итоговая формула замены при смене СК имеет вид:

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Замечание 2.5.2. Якобиан при стандартном переходе в полярные координаты ($x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$) равен ρ.

В тройном интеграле замены проводятся аналогично (только якобиан будет третьей размерности). Некоторые стандартные замены можно найти в предыдущем вопросе.

2.6. Криволинейный интеграл 1-го рода: определение, свойства, вычисление, геометрический и физический смысл.

Задача: найти массу m, распределенную с плотностью f по участку плоской кривой (простая дуга $\breve{AB}$).

Замечание 2.6.1. Постановка задачи определяет физический смысл криволинейного интеграла первого рода.

Составим интеграл: разобьем дугу $\breve{AB}$ на элементарные дуги $\mathrm{d}l$. Масса таких дуг будет равна $f(x,y)\mathrm{d}l$, значит масса всей дуги будет равна

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\mathrm{d}l$$

Полученный интеграл называется криволинейным интегралом 1-ого рода.

Замечание 2.6.2. О математическом определении

1. Введем ДПСК $\breve{AB} \to y = y(x), x \in [a;b]$.
2. Разобьем дугу на элементарные дуги l_i, тогда элементарная масса будет равна $m_i = f(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i$.
3. Составим предел интегральных сумм

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i$$

4. Перейдем к интегралу и получим такое же выражение, что и выше.

Замечание 2.6.3. О вычислении

$\mathrm{d}l$ это дифференциал дуги (см. 1.15.1), значит получаем, что

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\mathrm{d}l = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,y(x))\sqrt{1+y'(x)^2}|\mathrm{d}x|$$

или в параметрическом виде (см. 1.16.1):

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\mathrm{d}l = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}|\mathrm{d}t|$$

Дифференциалы $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}t$ находятся под модулем, т.к. если дуга проходится в обратном направлении (т.е. $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}t < 0$), то получится отрицательное число. Однако $\mathrm{d}l$ здесь имеет смысл длины и не может быть отрицательным.

Замечание 2.6.4. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления прохода дуги:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\mathrm{d}l = \int\limits_{BA} f(x,y)\mathrm{d}l$$

Остальные его свойства совпадают со свойствами определенного интеграла.

TODO: У него есть геометрический смысл? Или там что-то мега очевидное?

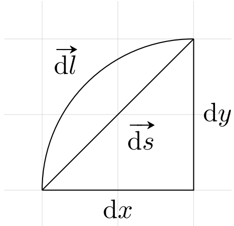
2.7. Криволинейный интеграл 2-го рода как работа силы вдоль пути. Определение, вычисление и свойства.

Пусть дана простая дуга $\breve{AB}$ и некоторая сила $\vec{F}(P,Q)$, где $P = P(x,y)$, $Q = Q(x,y)$ это некоторые функции, зависящие от координат.

Построим интеграл:

1. Введем ДПСК
2. Вычислим среднюю элементарную работу $\mathrm{d}A$ вдоль элемента дуги $\mathrm{d}l$, а потом просуммируем все полученные элементарные работы:

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\vec{\mathrm{d}s} = (P,Q)\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$$
$$A = \int\limits_{AB} \mathrm{d}A = \int\limits_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$



3. Получили криволинейный интеграл 2-ого рода.

Замечание 2.7.1. Можно рассматривать действие силы в каждом координатном направлении (в проекциях):

$$A_x = \int\limits_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x \qquad A_y = \int\limits_{AB} Q(x,y)\mathrm{d}y$$

поэтому криволинейный интеграл 2-ого рода иногда называют криволинейным интегралов в проекциях.

Замечание 2.7.2. О математическом определении

Криволинейный интеграл можно определить математически (дробление, составление интегральных сумм, переход к пределу, а затем и к интегралу), для этого нужно рассмотреть проекции на оси координат. В каждой из проекций получится криволинейный интеграл первого рода.

Замечание 2.7.3. О вычислении

Параметризуем дугу и сведем все к определенному интегралу:

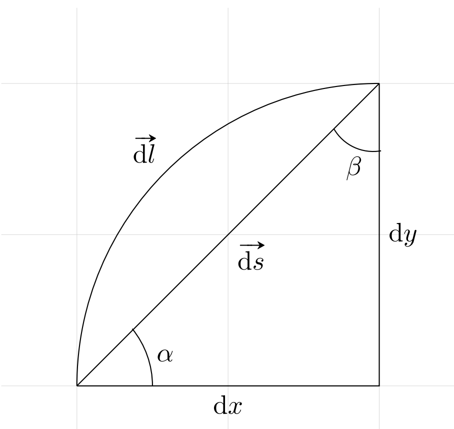
$$\int\limits_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \implies \mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t \\ y = \psi(t) \implies \mathrm{d}y = \psi'(t)\mathrm{d}t \\ t \in [t_1, t_2] \iff A \to B \end{cases}$$
$$\int\limits_{t_1}^{t_2} P\Big(\varphi(t),\psi(t)\Big)\varphi'(t)\mathrm{d}t + Q\Big(\varphi(t),\psi(t)\Big)\psi'(t)\mathrm{d}t$$

Замечание 2.7.4. Криволинейный интеграл 2-ого рода (в отличие от криволинейного интеграла 1-ого рода) зависит от направления обхода:

$$\int\limits_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\int\limits_{BA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

Остальные его свойства совпадают со свойствами определенного интеграла.

2.8. Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода: формула связи.



$$\int\limits_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y =$$
$$\int\limits_{AB} (P,Q)\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) =$$
$$\int\limits_{AB} (P,Q)\cdot(\cos\alpha\mathrm{d}l, \sin\alpha\mathrm{d}l) =$$
$$\int\limits_{AB} \Big(P\cos\alpha + Q\sin\alpha\Big)\mathrm{d}l$$

Таким образом получили формулу связи криволинейных интегралов 1-ого и 2-ого рода.

Замечание 2.8.1. При достаточно малых $\overrightarrow{\mathrm{d}s}$ можно обозначить $\vec{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta)$, тогда получим криволинейный интеграл 2-ого рода в векторной форме:

$$\int\limits_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int\limits_{AB} \vec{F}\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)\mathrm{d}l = \int\limits_{AB} \vec{F}\cdot\vec{\tau}\mathrm{d}l$$

2.9. Теорема (формула) Грина.

Теорема 2.9.1. Теорема Грина

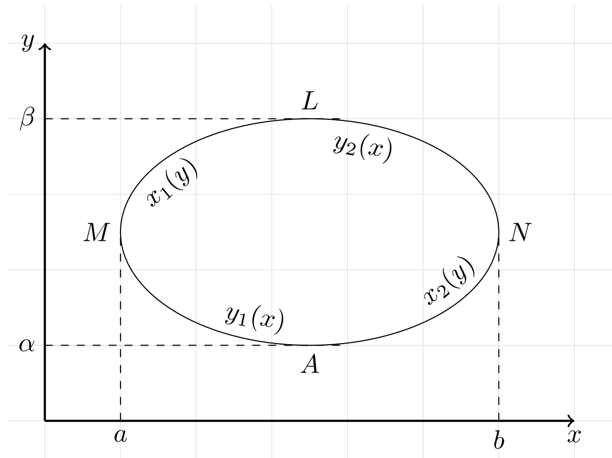
Пусть D правильная $\uparrow Ox, \uparrow Oy$, $\Gamma_D = K$

Даны функции $P(x,y), Q(x,y)\colon K, D \to \mathbb{R}$

Определен $\oint\limits_{K+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

Тогда

$$\boxed{\oint\limits_{K+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$



Доказательство. Рассмотрим двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ и сведем его к повторному:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b P(x,y_2(x))\mathrm{d}x - \int\limits_a^b P(x,y_1(x))\mathrm{d}x$$

Используя формулу вычисления криволинейного интеграла 2-ого рода (2.7.3) в обратную сторону получаем:

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b P(x,y_2(x))\mathrm{d}x - \int\limits_a^b P(x,y_1(x))\mathrm{d}x &= \\ \int\limits_{MLN} P(x,y)\mathrm{d}x - \int\limits_{MAN} P(x,y)\mathrm{d}x &= \\ -\int\limits_{NLM} P(x,y)\mathrm{d}x - \int\limits_{MAN} P(x,y)\mathrm{d}x &= \\ -\oint\limits_{K+} P(x,y)\mathrm{d}x &\end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что $\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint\limits_{K+} Q(x,y)\mathrm{d}y$. Объединяя эти равенства получаем, что

$$\oint\limits_{K+} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \oint\limits_{K+} Q(x,y)\mathrm{d}y - \left(-\oint\limits_{K+} P(x,y)\mathrm{d}x\right) = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

■

Замечание 2.9.2. Формула Грина работает в обе стороны. Вычисляется тот интеграл, который проще.

Следствие 2.9.3. С помощью формулы Грина можно получить формулу для площади фигуры через криволинейный интеграл 2-ого рода:

$$S = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left[\begin{matrix} P = -y/2 \\ Q = x/2 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow Q'_x - P'_y = 1\bigg] = \oint\limits_{K+} -\frac{y}{2}\mathrm{d}x + \frac{x}{2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\oint\limits_{K+} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

2.10. Интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Теорема о независимости интеграла от пути, равносильность I,II,III утверждений.

Пусть на $\breve{AB} \in D$ определен $I = \int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, тогда

Def 2.10.1. Интеграл I называется независящим от пути интегрирования (далее НЗП), если

$$\forall M, N \in D\colon \int\limits_{AMB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int\limits_{ANB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

Теорема 2.10.2. Следующие утверждения равносильны:

I. $\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ не зависит от пути.
II. $\oint_K P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$.
III. $P'_y = Q'_x$ (везде в области D).
IV. $\exists \Phi(x, y)\colon \mathrm{d}\Phi = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$.

Доказательство. $I \implies II$ (НЗП $\implies \oint = 0$)

Если интеграл не зависит от пути, то по определению:

$$\int\limits_{AMB} = \int\limits_{ANB} \implies \int\limits_{AMB} - \int\limits_{ANB} = 0 \implies \int\limits_{AMB} + \int\limits_{BNA} = 0 \implies \oint\limits_{K} = 0$$

■

Доказательство. $I \impliedby II$ (НЗП $\impliedby \oint = 0$)

Пусть в области D есть некоторые точки M и N, тогда интеграл по контуру можно представить в виде:

$$\oint\limits_{K} = 0 \implies \int\limits_{AMB} + \int\limits_{BNA} = 0 \implies \int\limits_{AMB} - \int\limits_{ANB} = 0 \implies \int\limits_{AMB} = \int\limits_{ANB}$$

Т.к. точки M и N выбраны произвольно $\in D$, то это выполняется для любых точек M, $N \implies$ интеграл не зависит от пути по определению. ■

Доказательство. $II \implies III$ ($\oint = 0 \implies P'_y = Q'_x$)

От противного: пусть

$$\exists M(x_0, y_0) \in D\colon P'_y \neq Q'_x \implies Q'_x - P'_y > 0$$

Знак больше выбран для определенности, можно и рассмотреть и с минусом: доказательство будет аналогичным.

Окружим точку $M(x_0, y_0)$ окрестностью $u_\varepsilon(M_0)$. Применим формулу Грина для $K = \Gamma_u$:

$$\oint\limits_{K} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint\limits_{u(M_0)} (Q'_x - P'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$Q'_x - P'_y > 0 \implies \exists \delta \in \mathbb{R}^+\colon Q'_x - P'_y > \delta > 0$$

$$\iint\limits_{u(M_0)} (Q'_x - P'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > \iint\limits_{u(M_0)} \delta \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \delta S(u(M_0)) > 0$$

Получаем, что $\oint_K P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y > 0$. Противоречие. ■

Доказательство. $II \impliedby III$ ($\oint = 0 \impliedby P'_y = Q'_x$)

Применяем формулу Грина:

$$P'_y = Q'_x \implies Q'_x - P'_y = 0$$

$$\int\limits_{D} (Q'_x - P'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 = \oint\limits_{K=\Gamma_D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

■

Доказательство. $I \implies IV$ (НЗП $\implies \exists \Phi(x, y)$)

Рассмотрим интеграл $\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$. Заменим точку B на 'плавающую' (по дуге $\breve{AB}$) точку $M(x, y)$. Получим:

$$\Phi(x, y) = \int\limits_{AM} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{1}$$

Покажем, что $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = P(x,y)$. Рассмотрим частное приращение функции $\Phi(x,y)$ по x:

$$\Delta_x\Phi = \Phi(x+\Delta,y) - \Phi(x,y) = \int\limits_{AM_1} - \int\limits_{AM} = \int\limits_{MM_1} = \int\limits_{MM_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

где точка M_1 имеет координаты $(x+\Delta x, y)$. Т.к. интеграл не зависит от пути, то выберем удобный путь интегрирования $y = const \Longrightarrow \mathrm{d}y = 0$:

$$\int\limits_{MM_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int\limits_{MM_1} P\mathrm{d}x$$

Воспользуемся т. Лагранжа о среднем(1.9.2):

$$\exists \xi \in (x, x+\Delta x)\colon \int\limits_{MM_1} P\mathrm{d}x = P(\xi,y)\Delta x$$

В итого получаем, что

$$\Phi(x+\Delta,y) - \Phi(x,y) = P(\xi,y)\Delta x$$

Подставим это в определение частной производной для $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x,y)-\Phi(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} P(\xi,y) = \left[\begin{matrix}\Delta x\to 0\\ \xi\in(x,x+\Delta x)\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \xi\to x\right] = P(x,y)$$

Аналогично можно показать, что $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = Q(x,y)$. Подставляя полученные выражения в (1) получаем искомое равенство. ■

Доказательство. III $\Longleftarrow$ *IV* $(P'_y = Q'_x \Longleftarrow \exists\Phi(x,y))$

Раскроем дифференциал функции $\Phi(x,y)$ по определению:

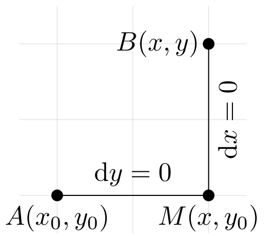
$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \mathrm{d}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Далее возьмем частные производные P'_y и Q'_x:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

■

Замечание 2.10.3. Функция $\Phi(x,y)$ называется потенциалом, либо первообразной для подынтегрального выражения.



Замечание 2.10.4. Если интеграл не зависит от пути, то часто бывает удобно рассмотреть путь $A(x_0,y_0) \to M(x,y_0) \to B(x,y)$. При таким подходе интеграл разбивается на два, причем в каждом из них половина обнуляется (т.к. $\mathrm{d}x = 0$ либо $\mathrm{d}y = 0$).

2.11. Интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Теорема о независимости интеграла от пути, равносильность III, IV утверждений.

Замечание 2.11.1. Теорема 2.10.2 полностью доказана в предыдущем вопросе.

2.12. Следствие теоремы о независимости от пути (формула Ньютона-Лейбница).

Теорема 2.12.1. Формула Ньютона-Лейбница для интегралов, не зависящих от пути интегрирования

Пусть выполнены условия теоремы 2.10.2, тогда

$$\int\limits_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \Phi(B) - \Phi(A)$$

Доказательство. Параметризуем дугу $\breve{AB}$:

$$x = \varphi(t) \Longrightarrow \mathrm{d}x = x'_t \mathrm{d}t$$
$$y = \psi(t) \Longrightarrow \mathrm{d}y = y'_t \mathrm{d}t$$
$$t \in [t_1; t_2] \iff A \to B$$

Подставим это в исходный интеграл:

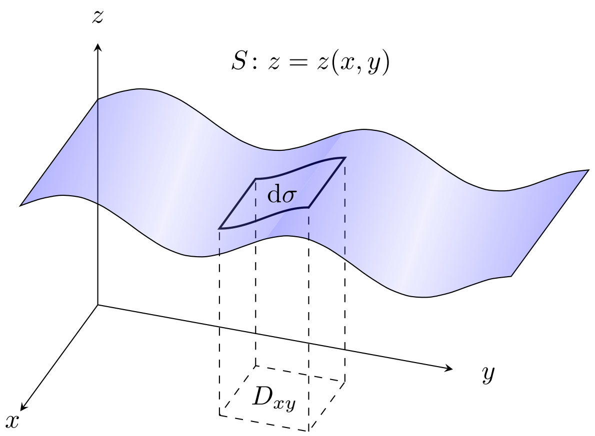
$$\int\limits_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int\limits_{AB} \frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathrm{d}y = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t$$

Заметим, что то, что стоит в скобках, это полная производная Φ по t. Тогда имеем:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}\Phi(x(t), y(t))}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \Phi\Big(x(t), y(t)\Big)\Big|_{t_1}^{t_2} = \Phi(B) - \Phi(A)$$

■

2.13. Поверхностный интеграл 1-го рода: определение, свойства, вычисление, геометрический и физический смысл.



Пусть $f(x, y, z)$ это плотность распределения некоторой скалярной величины. Введена ДПСК, поверхность простая $z = z(x, y)$.

Элемент поверхности $\mathrm{d}\sigma$ вырезается координатными плоскостями $x = const, y = const$. Выделим элементарную массу $\mathrm{d}m$. Умножая среднюю плотность на размер элементарного участка получаем $\mathrm{d}m = f(x, y, z)\mathrm{d}\sigma$. Полную массу получим 'суммированием':

$$m = \iint\limits_S \mathrm{d}m = \iint\limits_S f(x, y, z)\mathrm{d}\sigma$$

Получили поверхностный интеграл 1-ого рода (по участку поверхности).

Замечание 2.13.1. Физический смысл поверхностного интеграла 1-ого рода вытекает из его построения: он равен массе участка неоднородной поверхности.

Замечание 2.13.2. О математическом определении

Поверхностный интеграл 1-ого рода можно определить математически аналогично уже рассмотренным интегралам:

1. Дробим S плоскостями$x = const, y = const$ на элементарные участки $\Delta\sigma_i$.
2. В каждом участке выбираем среднюю точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и вычисляем $f(M_i)$.
3. Составляем предел интегральных сумм и переходим к интегралу:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta\sigma_i$$

Замечание 2.13.3. О вычислении

Введем параметризацию $z = z(x, y)$ и спроецируем поверхность на плоскость Oxy, т.е. $D_{xy} = S_{\text{пр. } xy}$. Получим

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

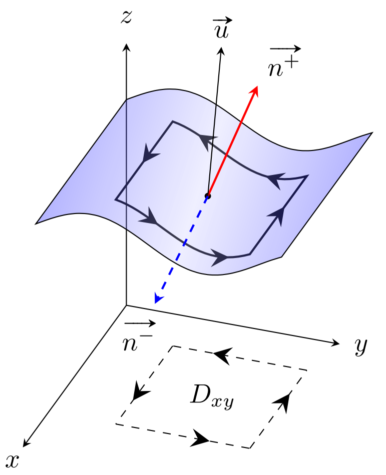
При необходимости можно вводить другую параметризацию и проектировать поверхность на другую координатную плоскость.

Замечание 2.13.4. С помощью поверхностного интеграла 1-ого рода можно найти площадь поверхности следующим образом:

$$S_{\text{пов.}} = \iint\limits_S \mathrm{d}\sigma$$

2.14. Поверхностный интеграл 2-го рода как поток жидкости через поверхность.

Замечание 2.14.1. О поверхности, обходе участка и направлении нормали. Постановка задачи



Будем рассматривать только двусторонние поверхности. Положительной нормалью $\overrightarrow{n^+}$ будет называть ту нормаль, у которой угол с осью Oz меньше 90 градусов. Сторону S с положительной нормалью будет называть *верхней*. Дуально определим отрицательную нормаль и *нижнюю* сторону поверхности. Согласуем обходы S и $D_{xy} = S_{\text{пр. } xy}$

Пусть через данный участок поверхности течет жидкость со скоростью $\vec{v}$ и плотностью ρ. Вычислим количество жидкости, проходящей через t за единицу времени t. Будем считать поток положительным, если он течет в направлении положительной нормали и отрицательным если в направлении отрицательной.

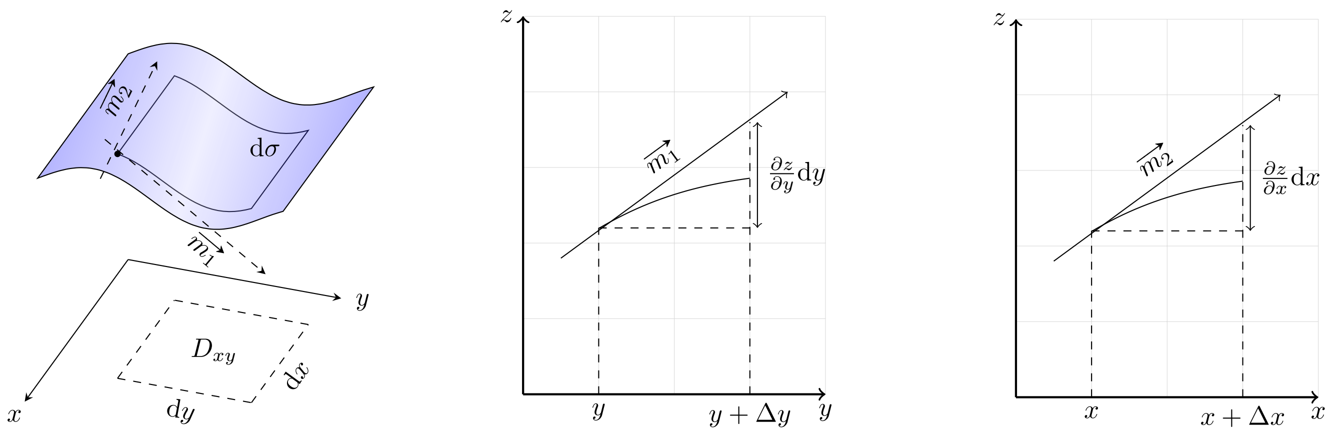
Рассмотрим более простую задачу: пусть поверхность S плоская, а $v = const$. Тогда жидкость, которая протечет через участок поверхности, может рассматриваться как наклонный цилиндр. Найдем его объем по известной формуле $V = h \cdot S_{\text{осн.}}$, причем высота будет равна проекции скорости на нормаль, умноженной на время. Таким образом поток Π будет равен $\Pi = V = (\vec{v}, \vec{n_0})\Delta t S$.

Теперь вернемся к исходной задаче: поверхность S криволинейная и через неё действует некоторая векторная величина $\vec{F} = (P, Q, R)$. Тогда полученную ранее формулу можно использовать для вычисления элементарного потока $\mathrm{d}\Pi = (\vec{F} \cdot \vec{n_0})\mathrm{d}\sigma$. Переход к вычислению всего потока осуществляется с помощью двойного интеграла:

$$\Pi = \iint\limits_S \mathrm{d}\Pi = \iint\limits_S \left(\vec{F} \cdot \vec{n_0}\right) \mathrm{d}\sigma \tag{SIV}$$

Полученный интеграл называется поверхностным интегралом 2-ого рода в векторной форме.

Замечание 2.14.2. Найдем связь между $\mathrm{d}\sigma$ и $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$



(a) В пространстве (b) $x = const$ (c) $y = const$

Проведем касательные $\overrightarrow{m_1}$ и $\overrightarrow{m_2}$ в плоскостях $x = const$ и $y = const$. Их векторное произведение будет задавать нормаль к поверхности в этой точке: $\vec{n} = \overrightarrow{m_1} \times \overrightarrow{m_2}$. Значит площадь элементарного параллелограмма,построенного на m_1 и m_2, будет $\approx \mathrm{d}\sigma$ с точностью до б.м. более высокого порядка.

Вычислим полученное векторное произведение:

$$\overrightarrow{m_1} = (0, \mathrm{d}y, \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y) \qquad \overrightarrow{m_2} = (\mathrm{d}x, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x)$$

$$\vec{n} = m_1 \times m_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \mathrm{d}y & \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}x & 0 & \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right)}_{\vec{p}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Нормируем и домножим на -1 полученный вектор $\vec{p}$, чтобы получить единичный вектор в направлении положительной нормали n_0^+:

$$n_0^+ = \frac{(-z'_x, -z'_y, 1)}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \Longrightarrow \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}$$

Итак, площадь элементарного параллелограмма будет равна:

$$\mathrm{d}\sigma = |\vec{n}| \approx \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}|\mathrm{d}x\mathrm{d}y| = \frac{1}{|\cos\gamma|}|\mathrm{d}x\mathrm{d}y| \Longrightarrow \mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \pm\cos\gamma\mathrm{d}\sigma$$

Аналогично $\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \pm\cos\beta\mathrm{d}\sigma$, $\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\cos\alpha\mathrm{d}\sigma$.

Замечание 2.14.3. $\mathrm{d}\sigma > 0$ как площадь элементарного участка. $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ это проекции $\mathrm{d}\sigma$ и их знак зависит от обхода $\mathrm{d}\sigma$, т.е. от знака нормали $\vec{n}$. Далее опустим $\pm$, т.к. косинус учитывает знак, т.е. при $\mathrm{d}x\mathrm{d}y < 0$ будет $\cos\gamma < 0$.

Переведем полученную ранее формулу для поверхностного интеграла 2-ого рода в координатную форму:

$$\iint\limits_S (\vec{F}\cdot\vec{n_0})\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_S (P, Q, R)\cdot(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}\sigma \tag{SIC}$$

Подставим в это выражение полученные формулы связи $\mathrm{d}\sigma$ с $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ и $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Получим формулу для поверхностного интеграла 2-ого рода в проекциях:

$$\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{SIP}$$

2.15. Связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода.

Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода была получена при нахождении формулы для поверхностного интеграла 2-ого рода в проекциях (SIC):

$$\underbrace{\iint\limits_S (\vec{F}\cdot\vec{n_0})\mathrm{d}\sigma}_{II\ \text{род}} = \underbrace{\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}\sigma}_{I\ \text{род}}$$

Формулы для нахождения направляющих косинусов также же были получены в предыдущем вопросе:

$$\cos\alpha = \frac{\mp z'_x}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \qquad \cos\beta = \frac{\mp z'_y}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \qquad \cos\gamma = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \tag{ANG}$$

2.16. Поверхностный интеграл 2-го рода: математическое определение, вычисление, свойства.

Замечание 2.16.1. О математическом определении

Чтобы математически определить поверхностный интеграл 2-ого рода, сначала отдельно определяются интегралы в проекциях на координатные плоскости, после чего вычисляется из сумма. При построении поверхностного интеграла 2-ого в проекциях была получена соответствующая формула связи (SIC $\to$ SIP):

$$\underbrace{\iint\limits_S \Big(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\Big)\mathrm{d}\sigma}_{I\ \text{род}} = \underbrace{\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\mathrm{d}y\mathrm{d}z}_{II\ \text{род}}$$

Замечание 2.16.2. О вычислении

Рассмотрим криволинейный интеграл 2-ого рода в проекциях (SIP):

$$\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

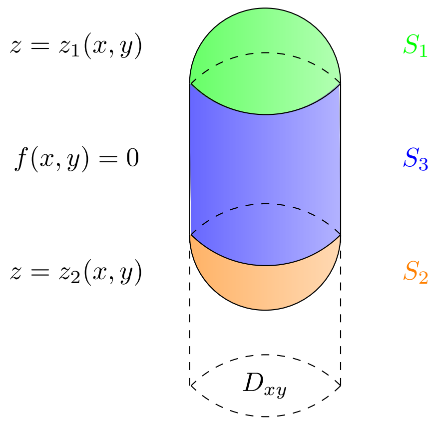
Спроецируем поверхность S на координатную плоскость Oxy, получим некоторую область D_{xy}:

$$\iint\limits_S R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{$\bigstar$}$$

Знак $\pm$ ставится потому, что в поверхностном интеграле $\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \cos\gamma\mathrm{d}\sigma$ это проекция и косинус учитывает знак (т.е. направление обхода $\mathrm{d}\sigma$). А в двойном интеграле $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ это площадь элементарного участка $\Longrightarrow \mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$.

Таким образом вычисление поверхностного интеграла 2-ого рода в проекциях сводится к вычислению трех двойных интегралов в проекции на каждую из координатных плоскостей (но нужно не забывать про знаки).

2.17. Теорема Гаусса-Остроградского.



Пусть дано правильное в направлении Oz замкнутое тело T, образованное поверхностями S_1, S_2 и S_3.
В области, содержащей тело, определена тройка скалярных функций $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, каждая из которых дифференцируема и имеет непрерывные частные производные.

Теорема 2.17.1. Теорема Гаусса-Остроградского.
При выполнении условий, описанных выше, справедливо равенство

$$\iiint\limits_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint\limits_{S_T} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}\sigma$$

Доказательство. Рассмотрим одну из частей тройного интеграла и перейдем к повторному:

$$\iiint\limits_T \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int\limits_{z_2(x,y)}^{z_1(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z = \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z_1(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Теперь, используя формулу вычисления ($\bigstar$) в обратную сторону, перейдем к поверхностному интегралу:

$$\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z_1(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{S_1^+} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{S_2^-} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Заметим, что

$$\gamma_3 = 90^\circ \Longrightarrow \cos\gamma\mathrm{d}\sigma = 0 = \mathrm{d}x\mathrm{d}y \Longrightarrow \iint\limits_{S_3^+} R(x,y,z) = 0$$

поэтому этот интеграл можно добавить к полученному ранее выражению и собрать три полученных поверхностных интеграла в один интеграл по поверхности тела:

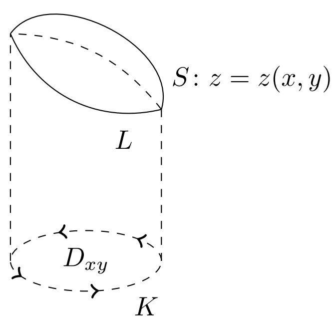
$$\iint\limits_{S_1^+} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{S_2^-} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{S_3^+} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oiint\limits_{S_T} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oiint\limits_{S_T} R\cos\gamma\mathrm{d}\sigma$$

Таким образом мы получили первое слагаемое в поверхностном интеграле в правой части формулы. Аналогично можно показать, что

$$\iiint\limits_T \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint\limits_{S_T} P\cos\alpha\mathrm{d}\sigma \qquad \iiint\limits_T \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint\limits_{S_T} Q\cos\beta\mathrm{d}\sigma$$

■

2.18. Теорема Стокса.



Пусть поверхность S опирается на замкнутый контур L.
$D_{xy} = S_{\text{пр. } Oxy}$, $K = L_{\text{пр. } Oxy}$
В области, содержащей S, определена тройка скалярных функций $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, каждая из которых дифференцируема и имеет непрерывные частные производные.

Теорема 2.18.1. Теорема Стокса.

При выполнении условий, описанных выше, справедливо равенство

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right) + \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right) \mathrm{d}\sigma = \oint\limits_{L^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

Доказательство. Рассмотрим слагаемое $\oint\limits_{L^+} P\mathrm{d}x$ в интеграле в правой части. Применяя формулу вычисления в обратную сторону, получаем, что

$$\oint\limits_{L^+} P\mathrm{d}x = \oint\limits_{K^+} P(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x + 0\,\mathrm{d}y \overset{2.9.1}{=\!=} \iint\limits_{D_{xy}} \left(0 - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{D_{xy}} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

Возьмем производную в подынтегральном выражении, учитывая то, что x и y это независимые переменные, а P — сложная функция:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

Первое слагаемое будет равно нулю, т.к x и y это независимые переменные. Подставим это в (1), а также заменим $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ на $\cos\gamma\mathrm{d}\sigma$:

$$-\iint\limits_{D_{xy}} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cos\gamma\mathrm{d}\sigma = -\iint\limits_{D_{xy}} \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cos\gamma\right)\mathrm{d}\sigma \tag{2}$$

Упростим второе слагаемое, используя полученные ранее формулы для косинусов (ANG):

$$\frac{\partial z}{\partial y}\cos\gamma = \frac{z'_y}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} = -\cos\beta \tag{3}$$

Подставим (3) в (2) и получим:

$$-\iint\limits_{D_{xy}} \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)\mathrm{d}\sigma$$

Таким образом мы получили первое слагаемое в поверхностном интеграле в левой части формулы. Аналогично можно рассмотреть $\oint\limits_{L^+} Q\mathrm{d}y$, $\oint\limits_{L^+} R\mathrm{d}z$ получить и оставшиеся два слагаемых. ■

Замечание 2.18.2. Формулу Стокса можно записать в другом виде, если собрать коэффициенты при косинусах:

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha\mathrm{d}\sigma + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\mathrm{d}\sigma + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\mathrm{d}\sigma = \oint\limits_{L^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

Также можно представить интеграл в левой части в виде поверхностного интеграла 2-ого рода:

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oint\limits_{L^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

2.19. Скалярное и векторное поля: определения, геометрические характеристики. Дифференциальные и интегральные характеристики полей (определения).

Def 2.19.1. Скалярная функция $u = u(x,y,z)\colon \mathbb{R}^3 \to R$ называется скалярным полем.

Def 2.19.2. Тройка скалярных функций $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, действующих из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}$ определяют векторное поле, т.е. векторную величину $\vec{F} = (P,Q,R)$, действующую в каждой точке пространства.

	Скалярное поле	Векторное поле
Геометрические характеристики	Линии (поверхности) уровня $u(x,y) = const$.	Векторные линии и векторные трубки
Дифференциальные характеристики	Производная по направлению и градиент $$\frac{\partial u}{\partial s} = \vec{\nabla} u \cdot \vec{s}_0$$ $$\overrightarrow{\text{grad}} u = \vec{\nabla} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$	Дивергенция и ротор(вихрь) $$\text{div}\,\vec{F} \overset{\text{def}}{\iff} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \overset{\text{def}}{\iff} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$ $$\text{rot}\,\vec{F} \overset{\text{def}}{\iff} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{\nabla}_x & \vec{\nabla}_y & \vec{\nabla}_z \\ \vec{F}_x & \vec{F}_y & \vec{F}_z \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{\iff} \vec{\nabla} \times \vec{F}$$
Интегральные характеристики	**TODO:** Кажется их нет	Поток и циркуляция $$\Pi \overset{\text{def}}{\iff} \iint\limits_S \vec{F}\vec{n}_0 \mathrm{d}\sigma \overset{\text{def}}{\iff} \iint\limits_S \vec{F}_n \mathrm{d}\sigma$$ $$\Gamma = \oint\limits_L \vec{F}\vec{\mathrm{d}l}$$

Def 2.19.3. Векторная линия векторного поля это кривая, в каждой точке которой вектор поля $\vec{F}$ является касательным к ней.

Def 2.19.4. Объединении непересекающихся векторных линий называется векторной трубкой.

Замечание 2.19.5. Отыскание векторных линий сводится к нахождению интегральных кривых из условия

$$\frac{\mathrm{d}x}{P} = \frac{\mathrm{d}y}{Q} = \frac{\mathrm{d}z}{R}$$

Пример 2.19.6. Дано векторное поле $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$. Требуется найти векторную линию, проходящую через $M_0(1,0)$.

В данном примере $P(x,y) = y$, а $Q(x,y) = -x$. Составим ДУ и решим его:

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{-x} \implies x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0 \implies \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

Подставим начальные условия $y(1) = 0$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2C \\ 1 + 0 = 2C \end{cases} \implies x^2 + y^2 = 1$$

Def 2.19.7. Оператор Гамильтона/Набла

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

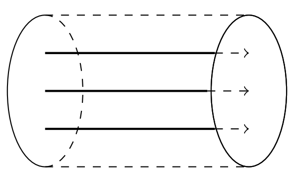
Def 2.19.8. Оператор Лапласа (лапласиан)

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}; \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

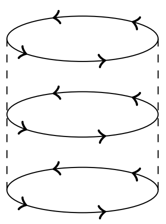
2.20. Виды векторных полей и их свойства (теоремы о поле градиента и поле вихря).

Def 2.20.1. Если $\text{rot}\,\vec{F} = 0$, то поле $\vec{F}$ называется безвихревым.

Def 2.20.2. Если $\text{div}\,\vec{F} = 0$, то поле $\vec{F}$ называется соленоидальным.



(a) $\text{rot}\,\vec{F} = 0$



(b) $\text{div}\,\vec{F} = 0$

Замечание 2.20.3. Безвихревому полю соответствуют незамкнутые векторные линии, а соленоидальному — замкнутые.

Замечание 2.20.4. В действительности поле может быть сложнее, но можно показать, что всякое поле является композицией этих двух типов.

Def 2.20.5. Векторное поле $\vec{F}$ называется потенциальным, если

$$\exists u(x,y,z)\colon \vec{F} = \vec{\nabla} u$$

Функция $u(x,y,z)$ в этом случае называется скалярным потенциалом поля $\vec{F}$.

Теорема 2.20.6. Всякое безвихревое потенциально. Другими словами

$$\operatorname{rot}\vec{F} = 0 \iff \exists u(x,y,z)\colon \vec{F} = \vec{\nabla} u$$

Доказательство. $\Longrightarrow$ По определению ротора (в координатной форме):

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Подберем $u(x,y,z)$ так, чтобы $u'_x = P$, $u'_y = Q$ и $u'_z = R$. Тогда:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

$\Longleftarrow$ Пусть $\exists u(x,y,z)\colon \vec{F} = \vec{\nabla} u$. Тогда по определению ротора (в векторной форме):

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{\nabla} u = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \cdot u = \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})}_{=0} \cdot u = 0$$

■

Следствие 2.20.7.

$$\operatorname{rot}\vec{\nabla} u = 0$$

Теорема 2.20.8.

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F} = 0$$

Доказательство. По определению дивергенции и ротора (в векторной форме)

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})}_{=0} \cdot \vec{F} = 0$$

■

2.21. Механический смысл потока и дивергенции.

Теорема 2.21.1. О механическом смысле потока

Поток это количество жидкости, протекающей за единицу времени через площадку S в заданном направлении.

Доказательство. Механический смыл потока был выяснен при построении поверхностного интеграла 2ого рода. ■

Теорема 2.21.2. О механическом смысле дивергенции

Дивергенция $\operatorname{div}\vec{F}(M_0)$ это мощность мощность точечного источника поля $\vec{F}$.

Доказательство. Рассмотрим равенство в т. Гаусса-Остроградского (2.17.1):

$$\iiint\limits_T \operatorname{div}\vec{F}\mathrm{d}v = \oiint\limits_{S_T} \vec{F}\mathrm{d}\vec{\sigma} = \Pi$$

Выберем в пространстве, где действует $\vec{F}$, точку M_0 и окружим её объемом в границей S. К тройному интегралу в левой части равенства применима т. Лагранжа о среднем:

$$\exists M \in V\colon \iiint\limits_T \operatorname{div}\vec{F}\mathrm{d}v = \operatorname{div}\vec{F}(M) \cdot V$$

Будем стягивать выделенный ранее объем в точку M_0, получим

$$\lim_{\substack{M \to M_0 \\ V \to 0}} \operatorname{div}\vec{F}(M) \cdot V = \lim_{\substack{M \to M_0 \\ V \to 0}} \Pi \qquad |: V$$

$$\operatorname{div}\vec{F}(M_0) = \frac{\Pi}{V}$$

Выражение в правой части это и есть мощность точечного источника. ■

Следствие 2.21.3. Таким образом т. Гаусса-Остроградского (2.17.1) утверждает, что поток равен сумме мощностей точечных источников.

2.22. Механический смысл вихря и циркуляции.

Теорема 2.22.1. О механическом смысле ротора (вихря)

Ротор равен отношению циркуляции к площадке, т.е. работе силы вдоль бесконечно малого контура.

Доказательство. Рассмотрим равенство в т. Стокса (2.18.1):

$$\iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{F}\mathrm{d}\vec{\sigma} = \oint\limits_{L^+} \vec{F}\mathrm{d}\vec{l} \overset{\text{def}}{=\!=} \Gamma$$

Выделим в пространстве, где действует $\vec{F}$, поверхность S, окруженную контуром L. К двойному интегралу в левой части равенства применима т. Лагранжа о среднем:

$$\exists M \in S\colon \iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{F}\mathrm{d}\vec{\sigma} = \operatorname{rot}\vec{F}(M)\cdot S$$

Будем стягивать выделенную ранее поверхность в точку M_0, получим

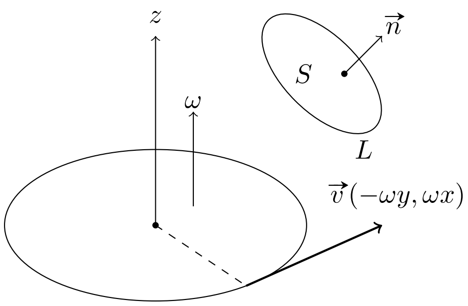
$$\lim_{\substack{M\to M_0\\ S\to 0}} \operatorname{rot}\vec{F}(M)\cdot S \lim_{\substack{M\to M_0\\ S\to 0}} \Gamma \qquad |: S$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}(M_0) = \frac{\Gamma}{S}$$

∎

Теорема 2.22.2. О механическом смысле циркуляции

Циркуляция это работа поля по вращению бесконечно малого колеса.



Рассмотрим поле линейных скоростей плоско вращающегося тела

$$\vec{v} = \underbrace{-\omega y}_{P}\,\vec{i} + \underbrace{\omega x}_{Q}\,\vec{j}$$

где $\omega = const$ — угловая скорость, которая перпендикулярна плоскости вращения.

Доказательство. Рассмотрим плоскую площадку S, расположенную под углом γ к Oz и ограниченную контуром L. Найдем циркуляцию по этому контуру:

$$\Gamma_L = \oint\limits_{L^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \overset{2.9.1}{=\!=} \iint\limits_{D_{xy}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\Gamma_L = \oint\limits_{L^+} -\omega y\mathrm{d}x + \omega x\mathrm{d}y \overset{2.9.1}{=\!=} \iint\limits_{D_{xy}} 2\omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Т.к. D_{xy} это проекция S на плоскость Oxy, то $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \cos\gamma\mathrm{d}\sigma$ (пусть $\cos\gamma > 0$). Получаем

$$\Gamma_L = \iint\limits_{D_{xy}} 2\omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_S 2\omega\cos\gamma\mathrm{d}\sigma = 2\omega_n\iint\limits_S \mathrm{d}\sigma = 2\omega_n S_{\text{площадь}}$$

Где ω_n это проекция угловой скорости на нормаль к поверхности S. ∎

Следствие 2.22.3. Таким образом, если $\vec{n}_S \perp \vec{\omega}$, то работа равна нулю.

При этом, если учесть механический смысл ротора (2.22.1), то

$$\operatorname{rot}\vec{F}(M_0) = \frac{\Gamma}{S} = 2\omega_n$$

2.23. Векторная запись теорем теории поля и их механический смысл.

Теорема 2.23.1. О потенциале

$$\int\limits_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \text{ НЗП} \iff \oint\limits_K = 0 \iff \begin{Bmatrix} R'_y = Q'_z \\ P'_z = R'_x \\ Q'_x = P_y \end{Bmatrix} \iff \exists u(x,y,z)\colon \vec{\nabla} u = \vec{F}$$

Доказательство. Как было показано ранее (2.20.6) последнее равенство равносильно тому, что $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$. Таким образом

$$\operatorname{rot}\vec{F} = 0 = \oint\limits_K = \Gamma$$

■

Теорема 2.23.2. Теорема Стокса.

$$\iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \vec{n_0} \cdot \mathrm{d}\sigma = \int\limits_L \vec{F}\mathrm{d}l = \Gamma$$

Доказательство. Теорема Стока в координатной форме уже доказана (2.18.1). Запишем её:

$$\iint\limits_S \underbrace{\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)}_{\operatorname{rot}\vec{F}_x} \cos\alpha \mathrm{d}\sigma + \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial z}\right)}_{\operatorname{rot}\vec{F}_y} \cos\beta \mathrm{d}\sigma + \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{\operatorname{rot}\vec{F}_z} \cos\gamma \mathrm{d}\sigma = \oint\limits_{L^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

Заметим, что в скобках перед косинусами находятся соответствующие проекции ротора на координатные оси. Учитывая то, что $\vec{n_0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, получаем:

$$\iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \vec{n_0}\mathrm{d}\sigma = \int\limits_{L^+} \vec{F}\mathrm{d}\,\vec{l}$$

■

Теорема 2.23.3. Теорема Гаусса-Остроградского.

$$\iiint\limits_T \operatorname{div}\vec{F}\mathrm{d}V = \oiint\limits_{S_T} \vec{F} \cdot \vec{n_0}\mathrm{d}\sigma$$

Доказательство. Теорема Гаусса-Остроградского в координатной форме уже доказана (2.17.1). Запишем её:

$$\iiint\limits_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint\limits_{S_T} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) \mathrm{d}\sigma$$

Заметим, что под тройным интегралом в левой части выражения находится дивергенция поля $\vec{F}$. Тогда

$$\iiint\limits_T \operatorname{div}\vec{F}\mathrm{d}v = \oiint\limits_{S_T} \vec{F} \cdot \vec{n_0}\mathrm{d}\sigma$$

■

Замечание 2.23.4. Эти три теоремы устанавливают связь между содержанием величин внутри области и их расходом на границе области. Таким образом они все являются вариациями формулы Ньютона-Лейбница.