MA LEC 03

isagila @pochtineploho @DUBSTEPHAVEGUN

Собрано 15.09.2023 в 18:18

https://github.com/isagila/tesc

Содержание

1. Лекции

1.1. Лекция 23.09.01.

Def 1.1.1. Числовым рядом называется выражение $u_1+u_2+\ldots+u_n$, где $\{u_n\}$ это некоторая числовая последовательность. Обозначается $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Замечание 1.1.2. Нумерация может вестись с любого целого числа.

Def 1.1.3. u_n называется общим членом ряда.

Def 1.1.4. $S_n = u_1 + \ldots + u_k$ называется частичной суммой ряда.

Замечание 1.1.5. S_n также образуют последовательность.

Def 1.1.6. Если последовательность частичных сумм сходится, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, то говорят, что ряд сходится к сумме S (S называется суммой ряда). Если предел равен бесконечности или не существует, то ряд расходится.

Иногда сумму ряда можно найти простой арифметикой.

Пример 1.1.7 (Непосредственное вычисление суммы ряда).

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \underbrace{\left(1 - \tfrac{1}{2}\right)}_{k=1} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right)}_{k=2} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right)}_{k=3} + \ldots + + \underbrace{\left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n}\right)}_{k=n-1} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\right)}_{k=n} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 = S$$

Пример 1.1.8 (Геометрический ряд (эталонный)). Пусть $b \neq 0, b \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} bq^n = b + bq + bq^2 + bq^3 + \ldots + bq^n = b(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n) = b\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = S_n$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-q^{n+1})$$

Далее значение предела зависит от q.

1. $|q| < 1 \implies q^n \to 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{b}{1-q} = S$
2. $|q| > 1 \implies q^n \to \infty \implies$ ряд расходится.
3. $q = 1 \implies S_n = b(n+1) \to \infty \implies$ ряд расходится.
4. $q = -1 \implies S_n = \dfrac{b}{2}(1+1-1+\ldots+1-1) = \begin{cases} b \\ 0 \end{cases} \implies$ две подпоследовательность сходятся к разным числам, значит предела нет и ряд расходится.

Замечание 1.1.9. Чаще требуется только определить сходимость ряда не вычисляя его сумму.

Свойства числовых рядов

Теорема 1.1.10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \succ \iff \sum_{n=k>1}^{\infty} u_n \succ$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \prec \iff \sum_{n=k>1}^{\infty} u_n \prec$$

□

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \succ \iff \exists \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{u_1 + u_2 + \ldots + u_k}_{v} + u_{k+1} + \ldots + u_n\right) = \underbrace{\lim\nolimits_{n\to\infty} v}_{v\in\mathbb{R}} + \lim_{n\to\infty}(u_{k+1} + \ldots + u_n)$$

Для расходящихся доказательство аналогично. ■

Замечание 1.1.11. Теорему 1.1.10 можно сформулировать по-другому (не формально): ряд и его «хвост» одновременно сходятся и расходятся.

Теорема 1.1.12.

$$\left.\begin{matrix}\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R} \\ \alpha \in \mathbb{R}\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha S$$

□

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n > \Longleftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha u_1 + \ldots + \alpha u_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} (u_1 + \ldots + u_n) = \alpha S$$

■

Замечание 1.1.13. Если ряд расходится, то умножение на $\alpha \neq 0$ не меняет его расходимости.

Теорема 1.1.14.

$$\left.\begin{matrix}\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R} \\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma \in \mathbb{R}\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = S \pm \sigma$$

□

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} S_n}_{S} \pm \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sigma_n}_{\sigma} = \lim_{n\to\infty} (S_n \pm \sigma_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$$

■

Замечание 1.1.15. Ряды складываются и вычитаются почленно.

Замечание 1.1.16. Из сходимости разности рядов **не следует** сходимость самих рядов. Например,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \neq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}}_{\text{расходятся}}$$

Гармонический ряд (эталонный)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Рассмотрим вспомогательный ряд и вычислим его частичные суммы

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}} + \ldots$$

$$\sigma_1 = 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} \qquad \sigma_2 = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} \qquad \sigma_n = 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2}$$

Последовательность частичных сумм σ_n расходится при $n \to \infty$. Последовательность частичных сумм исходного ряда почленно не меньше σ_n, значит $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Теорема 1.1.17. Члены сходящегося ряда можно группировать произвольным образом **не переставляя**.

□ Группируя члены ряда получаем подпоследовательность последовательности частичных сумм. Если существует предел исходной последовательности, то существует и предел любой ее подпоследовательности. ■

Замечание 1.1.18. Перестановка членов ряда может изменить сумму. Например, рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. Он сходится (без доказательства). Далее имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \ldots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{16} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{32} + \ldots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{16} + \frac{1}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{32} + \ldots \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots\right) - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} - \ldots \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}$$

Получили, что сумма ряда равна своей половине.

1.2. Лекция 23.09.08.

Замечание 1.2.1. Можно доказать, что определенной перестановкой членов ряда в качестве суммы можно получить любое заданное число.

Замечание 1.2.2. Также возможно перемножение рядов. Произведение сходящихся рядов — сходящийся ряд. Формулы для произведения можно найти в литературе.

Далее для краткости ряды будут записываться в виде $\sum u_n$. Нижней границей по умолчанию будем считать единицу. В рядах с другой нижней границей и в местах, где необходимо сделать акцент на границе, будет использоваться запись вида $\sum\limits_{n=0} v_n$.

Далее рассмотрим некоторые условия сходимости рядов.

Теорема 1.2.3. (Необходимое условие сходимости ряда)

$$\sum u_n \succ \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

□

$$\sum u_n \succ \Longleftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$$

$$u_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{n+1} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$$

■

Замечание 1.2.4. Обратное в общем случае неверно. Например

$$\sum \frac{1}{n} \prec, \text{ но } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Замечание 1.2.5. Необходимым условием сходимости удобно пользоваться в обратную сторону, т.е. с его помощью проще показать, что ряд расходится.

Пример 1.2.6.

$$\sum \underbrace{(2n+3)\cdot \sin\tfrac{1}{n}}_{u_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 1 \Longrightarrow \sum (2n+3)\cdot \sin\frac{1}{n} \prec$$

Пример 1.2.7.

$$\sum \frac{1}{2n+3} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$$

Рассмотрим вспомогательный ряд $\sum \frac{1}{3n}$. Можно убедиться, что начиная с $n = 4$ члены вспомогательного ряда меньше соответствующих членов исследуемого ряда. Заметим, что

$$\sum \frac{1}{3n} = \frac{1}{3}\sum \frac{1}{n} \Longrightarrow \prec$$

Значит, исходный ряд также расходится.

Теорема 1.2.8. (Критерий Коши для сходимости рядов)

$$\sum u_n \succ \Longleftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R} \boxed{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \,\Big|\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,\Big|\, n \geqslant p \geqslant n_0 \colon |S_n - S_p| < \varepsilon$$

Стоит отметить, что $|S_n - S_p| = |u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n|$. Такая форма записи иногда будет полезна в дальнейшем.

Замечание 1.2.9. Смысл критерия Коши в том, что у сходящегося ряда при заданном ε начиная с n_0 весь хвост попадает в ε-трубу.

Замечание 1.2.10. Критерий не удобен для исследования на сходимость, поэтому обычно используют признаки сходимости.

Достаточные условия (признаки) сходимости знакоположительных рядов

Замечание 1.2.11. Будем рассматривать только ряды, в которых $u_n > 0$, но описанные далее признаки можно применять для любых рядов, предварительно навесив модуль.

Теорема 1.2.12. (Признак сравнения в неравенствах) Пусть $\sum u_n$ — исследуемый ряд, а $\sum v_n$ — вспомогательный ряд и $u_n, v_n \geqslant 0$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N} \Big| u_n < v_n \\ &\sum v_n \succ \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \sum u_n \succ \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N} \Big| u_n > v_n \\ &\sum v_n \prec \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \sum u_n \prec \tag{2}$$

□ Сначала докажем (1). Пусть $S_n = u_1 + u_2 + \ldots$ и $\sigma_n = v_1 + v_2 + \ldots$, т.к. $\forall n \in \mathbb{N} \Big| u_n < v_n$, то $S_n \leqslant \sigma_n$. Причем эти последовательности возрастают, т.к. ряды знакоположительные. Далее

$$\sum v_n \succ \Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma \in \mathbb{R}$$

Таким образом последовательность $\{\sigma_n\}$ ограничена числом σ. Последовательность $\{S_n\}$ возрастает и также ограничена числом σ. Значит по т. Вейерштрасса $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, причем $S \leqslant \sigma$.
Теперь от противного докажем (2). Пусть $\sum u_n$ сходится, тогда согласно (1) $\sum v_n$ тоже должен сходится. Противоречие. ■

Замечание 1.2.13. Для установления расходимости ряда в качестве вспомогательного не следует брать ряды с несуществующей как предел суммой.

Пример 1.2.14.

$$\sum \frac{1}{n^2} \qquad u_n = \frac{1}{n^2}$$
$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1 \in \mathbb{R} \qquad v_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

Неравенство $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n(n+1)}$ неверно, однако заметим, что

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} > \frac{1}{n^2+2n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Таким образом по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=0} \dfrac{1}{(n+1)^2}$ сходится. Если перенумеровать, то получим, что и ряд $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{n^2}$ сходится.

Теорема 1.2.15. (Предельный признак) Пусть $\sum u_n$ — исследуемый ряд, а $\sum v_n$ — вспомогательный ряд и $u_n, v_n \geqslant 0$. Тогда, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

то ряды имеют одинаковую сходимость.

□ Распишем предел по определению, после чего раскроем получившийся модуль (учитывая то, что ряды знакоположительные).

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = q \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \Big| \exists n_0 \in \mathbb{N} \Big| \forall n > n_0 \colon \left| \frac{u_n}{v_n} - q \right| < \varepsilon \\ q - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < q + \varepsilon \\ (q-\varepsilon) v_n < u_n < (q+\varepsilon) v_n \end{aligned} \tag{1}$$

При достаточно малом ε ряды $\sum (q+\varepsilon) v_n$, $\sum (q-\varepsilon) v_n$ и $\sum v_n$ имеют одинаковую сходимость, т.к. домножение на ненулевую константу не влияет на сходимость. Применим признак сравнения.

$$\sum v_n \prec \Longrightarrow \sum u_n \prec \qquad \sum v_n \succ \Longrightarrow \sum u_n \succ \tag{2}$$

В первом случае u_n расходится, т.к. он больше расходящегося ряда (левая часть неравенства (1)), во втором случае u_n сходится, т.к. он меньше сходящего ряда (правая часть неравенства (1)). ■

Замечание 1.2.16. Т.к. u_n и v_n являются бесконечно малыми (иначе вопрос о расходимости ряда u_n решен, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости 1.2.3), то в предельном признаке устанавливается порядок u_n по отношению к v_n. Ряды имеют одинаковый характер сходимости при одном порядке малости.

<u>Lm</u> 1.2.17. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0 \Longleftrightarrow u_n = o(v_k)$. Тогда $\sum v_n \succ \Longrightarrow \sum u_n \succ$.

□ Распишем предел по определению.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0 \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\Big|\,\exists n_0\in\mathbb{N}\,\Big|\,\forall n>n_0\colon \left|\frac{u_n}{v_n}\right|<\varepsilon \Longrightarrow u_n<\varepsilon v_n \tag{1}$$

Т.к. ряд $\sum v_n$ сходится, то выполнен критерий Коши (1.2.8), имеем

$$\forall\varepsilon'>0\,\Big|\,\exists m_0\in\mathbb{N}\,\Big|\,\forall n\geqslant p\geqslant m_0\colon |v_p+\ldots+v_n|<\varepsilon' \tag{2}$$

Домножим последнее неравенство на ε и объединив его с неравенством в (1) получим, что

$$|u_p+\ldots+u_n|<\varepsilon\,|v_p+\ldots+v_n|<\underbrace{\varepsilon\varepsilon'}_{\tilde\varepsilon} \tag{3}$$

Подставим это в (2), получим

$$\forall\tilde\varepsilon>0\,\Big|\,\exists m_0\in\mathbb{N}\,\Big|\,\forall n\geqslant p\geqslant m_0\colon |u_p+\ldots+u_n|<\tilde\varepsilon$$

Значит ряд $\sum u_n$ сходится по критерию Коши. ■

Замечание 1.2.18. Если в отношении общих членов ряда получилась бесконечность, то лучше использовать другие признаки.

Теорема 1.2.19. (Признак Даламбера)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=D\in\mathbb{R}=\begin{cases}0\leqslant D<1 & \Longrightarrow >\\ D=1 & \Longrightarrow \text{необходимо дополнительное исследование}\\ D>1 & \Longrightarrow <\end{cases}$$

□ Распишем предел по определению.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=D \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\Big|\,\exists n_0\in\mathbb{N}\,\Big|\,\forall n>n_0\colon \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-D\right|<\varepsilon \Longrightarrow (D+\varepsilon)u_n<u_{n+1}<(D+\varepsilon)u_n \tag{1}$$

Рассмотрим правую часть полученного неравенства. Положим $D+\varepsilon=r<1$. Тогда $u_{n+1}<r\cdot u_n$ начиная с n_0. Имеем

$$\left.\begin{aligned}&u_{n_0+1}<ru_{n_0}\\&u_{n_0+2}<ru_{n_0+1}<r^2u_{n_0}\\&\ldots\\&u_{n_0+k}<r^ku_{n_0}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{aligned}&\textstyle\sum u_n=u_1+u_2+\ldots+u_{n_0}+u_{n_0+1}+\ldots+u_{n_0+k}+\ldots\\&\textstyle\sum v_n=\underbrace{u_1+u_2+\ldots+u_{n_0}}_{\text{отбросим}}+ru_{n_0}+\ldots+r^ku_{n_0}+\ldots\\&u_n\leqslant v_n\end{aligned}\right. \tag{2}$$

Отбросим «голову» полученных рядов до члена u_{n_0} включительно. Тогда из ряда $\sum v_n$ получим ряд

$$\sum v'_n=\sum_{k=1}^{\infty}r^k\underbrace{u_{n_0}}_{const}=u_{n_0}\sum_{k=1}^{\infty}r^k \tag{3}$$

Получаем эталонный геометрический ряд, т.к. $r<1$ то он сходится. Значит по признаку сравнения сходится и ряд $\sum u'_n$, полученный отбрасыванием «головы» ряда $\sum u_n$. Отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость, а значит ряд $\sum u_n$ также сходится.
Аналогично рассмотрим левую часть неравенства (1) и положим $D-\varepsilon=r>1$. Оценим члены ряда снизу вспомогательным рядом $\sum v'_{n_0+k}=r^ku_{n_0}$. При $r>1$ исходный ряд почленно больше расходящегося, значит тоже расходится. ■

1.3. Лекция 23.09.15.

Теорема 1.3.1. (Радикальный признак Коши)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=K\in\mathbb{R}=\begin{cases}0\leqslant K<1 & \Longrightarrow >\\ K=1 & \Longrightarrow \text{необходимо дополнительное исследование}\\ K>1 & \Longrightarrow <\end{cases}$$

□ Распишем предел по определению.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=K \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\Big|\,\exists n_0\in\mathbb{N}\,\Big|\,\forall n>n_0\colon |\sqrt[n]{u_n}-K|<\varepsilon \Longrightarrow K-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<K+\varepsilon$$

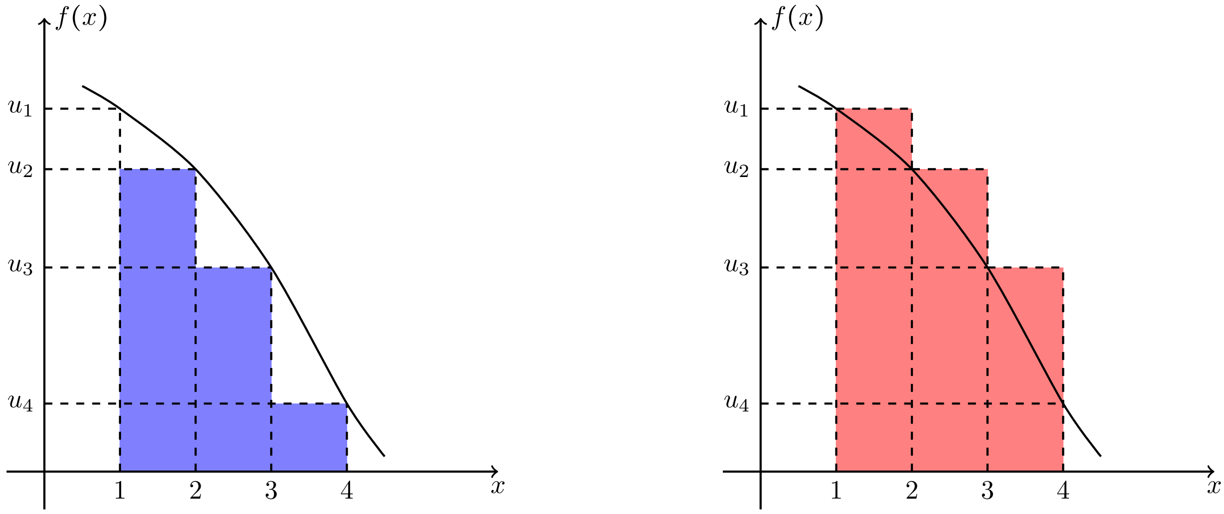
Рассмотрим случай $0\leqslant K<1$. Тогда из правой части неравенства получаем

$$\exists r\,\Big|\,K<r<1\ (\varepsilon=r-K)\Longrightarrow \sqrt[n]{u_n}<r\Longrightarrow u_n<r^n$$

Таким образом ряд $\sum u_n$ почленно меньше ряда $\sum r^n (0 < r < 1)$, который сходится. Значит по признаку сравнения он тоже сходится. Аналогично рассмотрим случай $K > 1$. Тогда из левой части неравенства получаем

$$\exists r \,\Big|\, K > r > 1 \ (\varepsilon = K - r) \Longrightarrow r < \sqrt[n]{u_n} \Longrightarrow u_n > r^n$$

Таким образом ряд $\sum u_n$ почленно больше расходящегося ряда $\sum r^n$ $(r > 1)$, значит он тоже расходится. ■



(a) Нижние столбцы (b) Верхние столбцы

Рис. 1.3.2: Иллюстрация к 1.3.3

Теорема 1.3.3. (Интегральный признак Коши) Пусть есть ряд $\sum_{n=a}^{\infty} u_n$ и интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$. Тогда если $f(x) \geqslant 0$, $f(x)$ монотонно убывает и $\forall n \in \mathbb{N} \,\Big|\, f(n) = u_n$, то ряд и интеграл имеют одинаковую сходимость.

□ Пользуясь иллюстрацией рис. 1.3.2 составим неравенство и воспользуемся предельным переходом.

$$\underbrace{\textstyle\sum_{k=2}^{n} u_k}_{\text{Нижние столбцы}} \leqslant \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant \underbrace{\textstyle\sum_{k=1}^{n-1} u_k}_{\text{Верхние столбцы}}$$

$$S_n - u_1 \leqslant \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant S_{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - u_1) \leqslant \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \lim_{n\to\infty} (S_{n-1})$$

1. $\sum u_n = S \in \mathbb{R}$

Интеграл сходится, т.к. ограничен снизу и сверху числами $S - u_1$ и S соответственно.

2. $\sum u_n \prec$

Интеграл расходится, т.к. он не менее бесконечности (левая часть неравенства).

3. $\int \succ, \int = I$

$\lim_{n\to\infty} (S_n - u_1) < I \in \mathbb{R} \Longrightarrow \sum u_n \succ$

4. $\int \prec$

Ряд расходится, т.к. предел его частичных сумм не менее бесконечности (правая часть неравенства). ■

Пример 1.3.4. Рассмотрим обобщенный гармонический ряд $\sum \dfrac{1}{n^p}$ и исследуем его сходимость с помощью интегрального признака Коши. Введем функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$, $f(x)\colon [1; +\infty] \to R^+$. Если $p = 1$, то получаем

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty$$

Если $p \neq 1$, то

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^{\infty} = \frac{1}{1-p} \cdot \lim_{x\to\infty} \left(x^{-p+1} - 1\right)$$

Значит, если $-p+1<0$, т.е. $p>1$, то интеграл (а значит и ряд) сходится. Если же $p<1$, то ряд расходится. В итоге

$$\sum \frac{1}{n^p} \qquad \begin{cases} p>1 \Longrightarrow > \\ p\leqslant 1 \Longrightarrow < \end{cases}$$

Знако*чередующиеся* ряды

Def 1.3.5. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1-u_2+u_3-\ldots\pm u_n\mp$$

где $u_n>0$ называют знакочередующимся рядом.

Замечание 1.3.6. Следует различать знакочередующиеся и знакопеременные ряды. В знакочередующихся рядах знак чередуется с каждым следующим членом ряда. В знакопеременных знак члена ряда не обязательно чередуется — он может меняться и по более сложным правилам. Примером знакопеременного ряда может быть

$$\sum u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\ldots$$

Теорема 1.3.7. (Признак Лейбница о сходимости ряда) Пусть дан знакочередующийся ряд $\sum(-1)^{n-1}u_n$. Тогда если u_i монотонно убывают и $\lim_{n\to\infty}u_n=0$, то данный ряд сходится.

□ Рассмотрим частичную сумму ряда S_{2n}

$$S_{2n}=u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+u_{2n-1}-u_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\ldots+(u_{2n-1}-u_{2n})$$

Т.к. $\{u_i\}$ монотонно убывает, то $u_i>u_{i+1}$, значит все полученные скобки положительные, причем при увеличении n сумма S_{2n} накапливается. Таким образом последовательность $\{S_{2n}\}$ возрастает. Сгруппируем члены ряда в частичной суммой по другому.

$$S_{2n}=u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+u_{2n-1}-u_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\ldots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n}$$

Опять же, в силу монотонности $\{u_i\}$ все полученные скобки положительные, а u_{2n} положителен по условию. Значит $S_{2n}<u_1$. Итого последовательность $\{S_{2n}\}$ ограничена сверху и монотонно возрастает, значит

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n}=S\in\mathbb{R}$$

S_{2n+1} отличается от S_{2n} одним слагаемым u_{2n+1}, которое не влияет на сходимость.

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}=\underbrace{\lim_{n\to\infty}S_{2n}}_{S}+\underbrace{\lim_{n\to\infty}u_{2n+1}}_{0}=S$$

■

Замечание 1.3.8 (Об оценке остатка ряда). В доказательстве теоремы 1.3.7 установили, что $S_{2n}<u_1$ (для S_{2n+1} это также верно). Рассмотрим следующий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots\underbrace{\pm u_{k+1}\mp u_{k+2}\pm\ldots}_{R_{k+1}}$$

$$R_{k+1}=\sum_{n=k+1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=\pm\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}u_n$$

Если исходный ряд сходится, то и его остаток R_{k+1} также сходится. При этом остаток можно оценить (по модулю) старшим членом, т.е. $|R_{k+1}|<|u_{k+1}|$. Это позволяет определить, какая погрешность получится, если в приближенных вычислениях использовать частичную сумму ряда.

Пример 1.3.9. Пусть дан ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}$$

Вычислим его остаток R_4.

$$R_4=\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\right)+\left(\frac{1}{64}-\frac{1}{128}\right)+\ldots=\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{512}+\ldots=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^{2k+1}}$$

Преобразуем полученное выражение перенумеровав ряд.

$$R_5=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{4^k}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^{k+2}}=\frac{1}{32}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^k}=\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{24}<\frac{1}{16}=u_4$$

Замечание 1.3.10. Заметим, что оценка 1.3.8 не работает для знакоположительных рядов. Приведем пример.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \underbrace{\tfrac{1}{16} + \ldots}_{R_4}$$

$$R_4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\right) = \frac{1}{8} > \frac{1}{16} = u_4$$

Теорема 1.3.11. (Абсолютная сходимость)

$$\sum |u_n| \succ \Longrightarrow \sum u_n \succ$$

□ Применим критерий Коши для ряда $\sum |u_n|$.

$$\sum |u_n| \succ \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \,\Big|\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,\Big|\, \forall n > p > n_0 \colon |S_n - S_p| < \varepsilon \tag{1}$$

Раскроем и преобразуем последнее неравенство. Воспользуемся тем, что модуль суммы не превышает суммы модулей.

$$\begin{aligned} |S_n - S_p| = \Big| |u_p| + \ldots + |u_n| \Big| &< \varepsilon \\ |u_p + \ldots + u_n| \leqslant |u_p| + \ldots + |u_n| &< \varepsilon \\ |u_p + \ldots + u_n| &< \varepsilon \end{aligned} \tag{2}$$

Если вернуться к 1 и подставить полученное неравенство, то получим критерий Коши для ряда $\sum u_n$. ■

Def 1.3.12. Ряд называется абсолютно сходящимся, если ряд из модулей сходится. Ряд называется условно сходящимся, если он сходится, но ряд из модулей расходится.

Пример 1.3.13. Примером условно сходящегося ряда может быть ряд $\sum (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$.

Замечание 1.3.14. Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда не меняет его суммы.

Замечание 1.3.15. Ряд из модулей знакоположителен, значит для него можно применять все признаки для знакоположительных рядов рассмотренные ранее.