система законов сохранения

$$\vec{u}_t + \vec{f}(\vec{u})_x + \vec{g}(\vec{u})_y = 0 \qquad (1)$$

в общем. случае: $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1(\vec{u}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{u}) \end{pmatrix} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} g_1(\vec{u}) \\ \vdots \\ g_n(\vec{u}) \end{pmatrix}$

сист. у-й газовой динамики.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ E \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ u(E+p) \end{pmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ v(E+p) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$E = \rho\left(\varepsilon + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)\right), \quad \varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}, \quad \text{для воздуха}$$
$$\gamma = 1.4$$

интегральные соотн.

для у-й г.д. для $i = 1, \ldots 4$

$$u_{it} + f_{ix} + g_{iy} = 0 \; ;$$

обознач. $\quad \vec{a}_i = (f_i, g_i)$

$$u_{it} + \operatorname{div} \vec{a}_i = 0 \qquad (3)$$

$R^2 \supset D$ — огранич. область

пусть $\vec{u}(x, y, t)$ — р-е (1)

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_D u_i \, dV + \int_D \operatorname{div}\vec{a}_i = \frac{\partial}{\partial t}\int_D u_i \, dV + \oint_{\partial D}(\vec{a}_i \cdot \vec{n}) \, ds$$

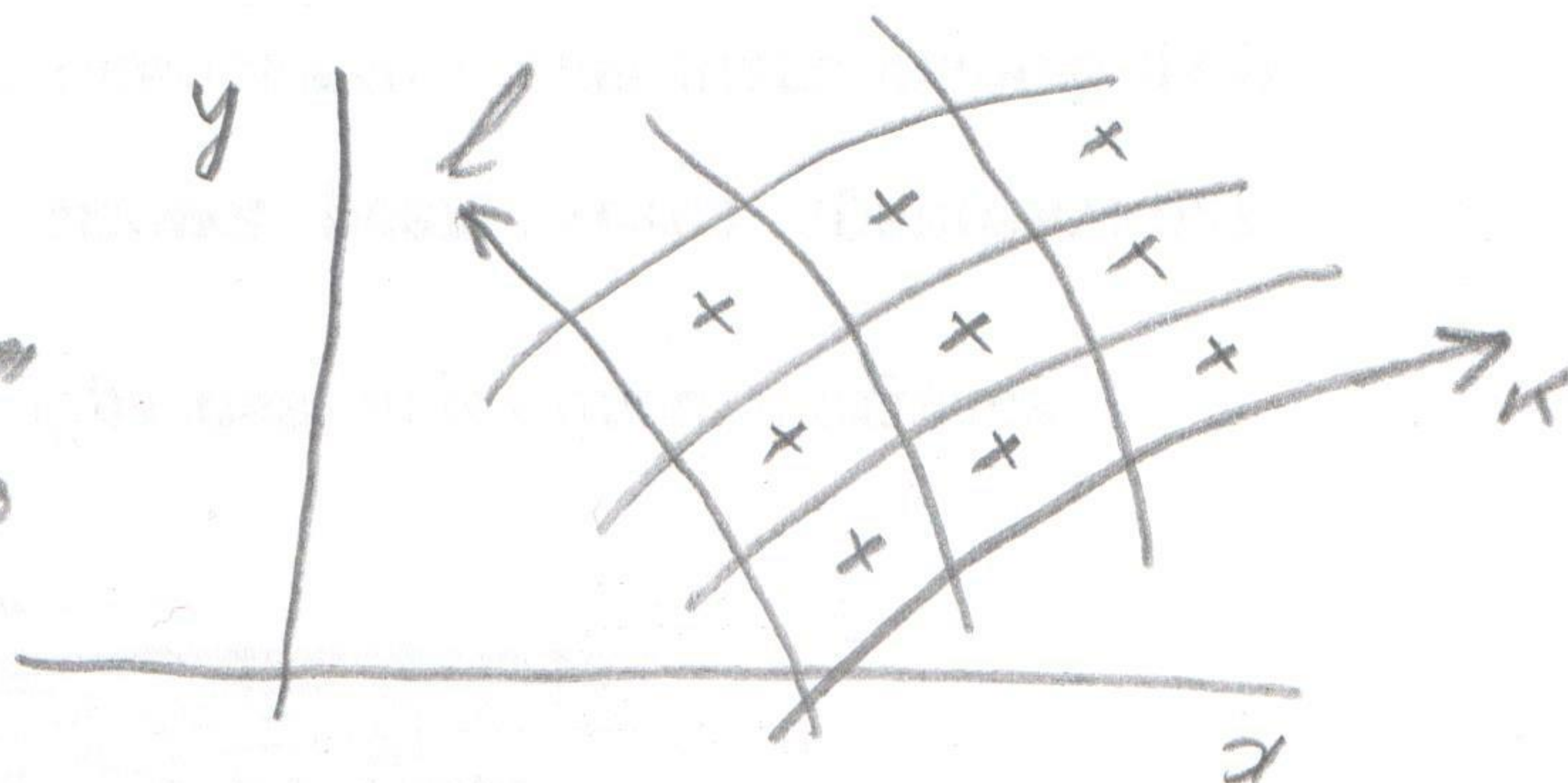обознач. $\quad \hat{u}_i = \frac{1}{|D|}\int_D u_i \, dV$

$$|D| \, \hat{u}_{i\,t} + \oint (\vec{a}_i \cdot \vec{n}) \, dS = 0 \qquad (4)$$
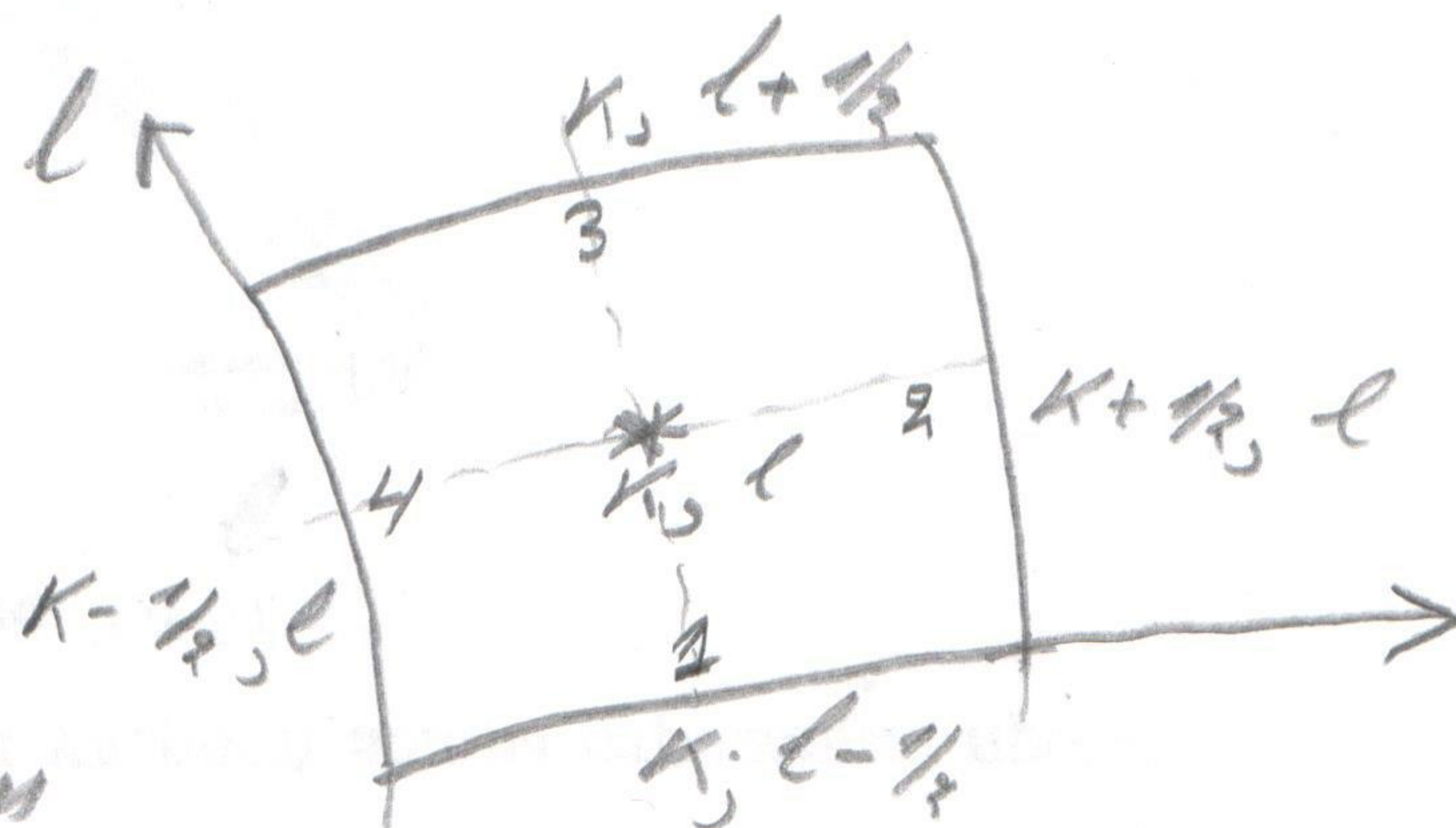
(4) – точное интегральное соот.

Аппроксимация.

$\vec{D}_{K,l}$ – аппроксимация интегрального среднего

$$|D|_{K,l} \frac{\vec{D}_{K,l}^{n+1} - \vec{D}_{K,l}^{n}}{\Delta t} + \qquad (5)$$

$$+ \sum_{m=1}^{4} (\vec{F} n_x + \vec{G} n_y) \, S_m = 0$$

Внутри ячейки (K, l) грани (рёбра) нумеруем $m = 1, \ldots 4.$

S_m – площадь грани (длина ребра)

$S_m (\vec{F} n_x + \vec{G} n_y)_m$ – поток через грань m –

– вычисляются через значения в ячейках:

$(\vec{F}, \vec{G})_{K+\frac{1}{2}, l}$ выч. через $\vec{D}_{K,l}^{n}, \, \vec{D}_{K+1, l}^{n}$

$(\vec{F}, \vec{G})_{K-\frac{1}{2}, l}$ – через $\vec{D}_{K-1, l}^{n}, \, \vec{D}_{K, l}^{n}$

$(\vec{F}, \vec{G})_{K, l-\frac{1}{2}}$ – через $\vec{D}_{K, l-1}^{n}, \, \vec{D}_{K, l}^{n}$

$(\vec{F}, \vec{G})_{K, l+\frac{1}{2}}$ – через $\vec{D}_{K, l}^{n}, \, \vec{D}_{K, l+1}^{n}$

структура алгоритма

1) ввод узлов сетки $(x, y)_{K, l}$ $\quad K = 0, \ldots K$
$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad l = 0, \ldots L$
вычисление площадей ячеек,
вычисление нормалей и длин ребер
ячеек.

2) ввод начальных значений в ячейках
$\vec{U}^n_{K, l}$ $\quad K = 0, \ldots K-1,$
$\qquad \qquad l = 0, \ldots L-1$

3) Цикл по шагам по времени
расчет шага:
расчет потоков $[S(\vec{F} n_x + \vec{G} n_y)]_{K+\frac{1}{2}, l}$
$K = 0, \ldots, K-1, \quad l = 0, \ldots L$
расчет потоков $[S(\vec{F} n_x + \vec{G} n_y)]_{K, l+\frac{1}{2}}$
$K = 0, \ldots K, \quad l = 0, \ldots L-1$
расчет новых значений $\vec{U}^{n+1}_{K, l}$
в ячейках по формулам (5)

4) Запись
величин $\vec{U}^n_{K, l}$ для продолжения
расчета
величин $(x, y)_{K, l}; \vec{U}^n_{K, l}$ для
графической обработки (Tecplot,
или Visit)