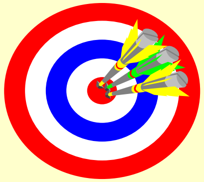
第七章 非线性方程数值解法

/* Solutions of Nonlinear Equations */



求 $f(x) = 0$ 的根

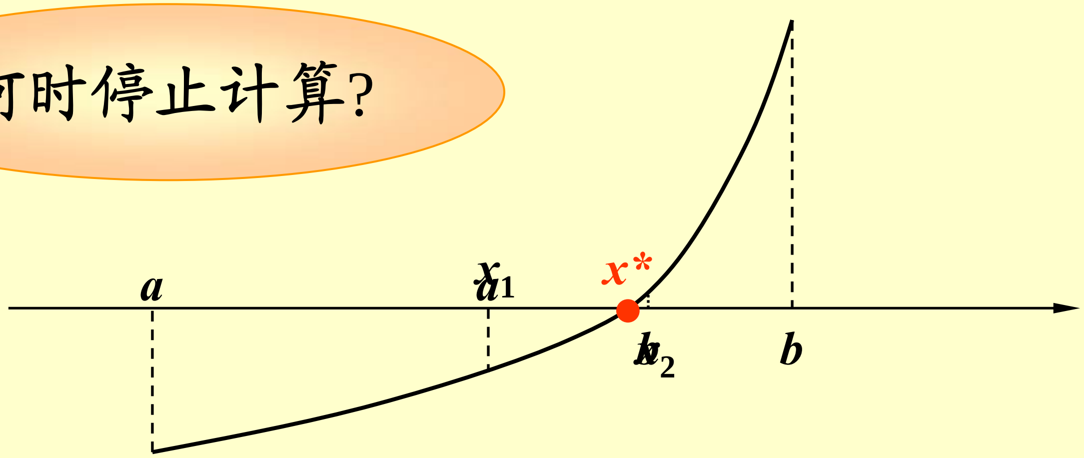
若f(x*)=0,称x*为f(x)=0的根（零点）。

若 $f(x) = (x - x^*)^m g(x)$ 称x*为方程的m重根。

§1 二分法 /* Bisection Method */

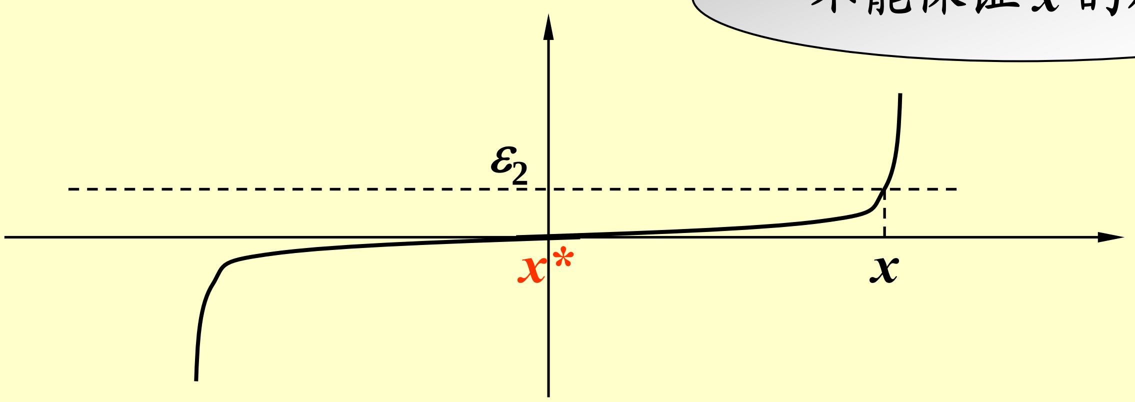
原理: 若 $f \in C[a, b]$，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则 f 在 (a, b) 上必有一根。

何时停止计算?



$$\left|x_{k+1}-x_k\right|<\varepsilon_1 \quad \text{或} \quad \left|f(x)\right|<\varepsilon_2$$

不能保证 x 的精度



误差分析:

第1步产生的 $x_1=\dfrac{a+b}{2}$ 有误差 $|x_1-x^*|\le\dfrac{b-a}{2}$

第 k 步产生的 x_k 有误差 $|x_k-x^*|\le\dfrac{b-a}{2^k}$

对于给定的精度 ε,可估计二分法所需的步数 k:

$$\frac{b-a}{2^k}<\varepsilon \quad\Rightarrow\quad k>\frac{[\ln(b-a)-\ln\varepsilon]}{\ln 2}$$

①简单;
② 对$f(x)$要求不高(只要连续即可).

①无法求复根及偶重根
② 收敛慢

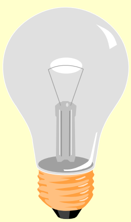
注：用二分法求根，最好先给出 $f(x)$ 草图以确定根的大概位置。或用搜索程序，将$[a, b]$分为若干小区间，对每一个满足 $f(a_k)\cdot f(b_k)<0$ 的区间调用二分法程序，可找出区间$[a, b]$内的多个根，且不必要求 $f(a)\cdot f(b)<0$ 。

§2 简单迭代法 /* Fixed-Point Iteration */

$x_{k+1}=g(x_k)$是迭代函数

$$f(x)=0 \;\xleftrightarrow{\text{等价变换}}\; x=g(x)$$

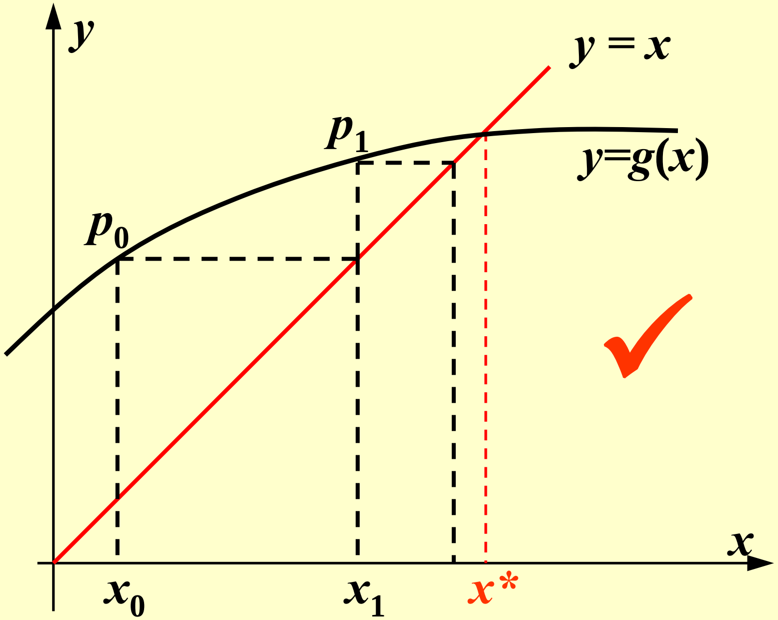
$f(x)$ 的根 $\longleftrightarrow$ $g(x)$ 的不动点

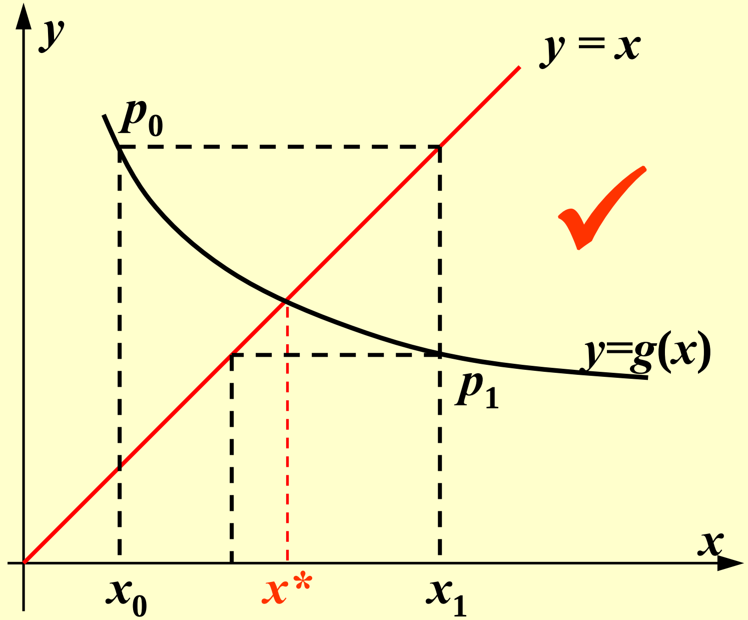


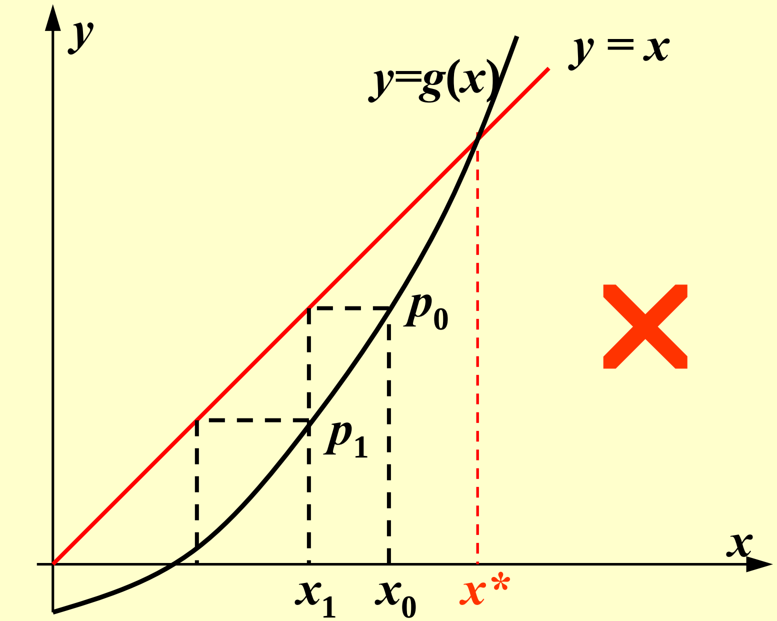
思路

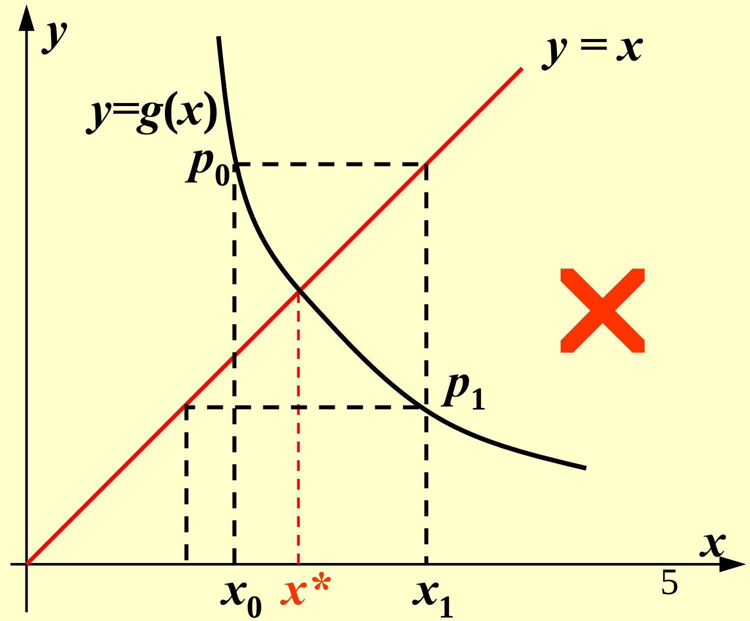
从一个初值 x_0 出发，计算 $x_1=g(x_0),\ x_2=g(x_1),\ \dots,\ x_{k+1}=g(x_k),\ \dots$ 若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即存在 x^* 使得 $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$，且 g 连续，则由 $\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} g(x_k)$可知 $x^*=g(x^*)$，即x^*是g的不动点，也就是f的根。

迭代法收敛


y
y = x
p1
y=g(x)
p0
x
x0
x1
x*


y
y = x
p0
y=g(x)
p1
x
x0
x*
x1


y
y = x
y=g(x)
p0
p1
x
x1
x0
x*


y
y = x
y=g(x)
p0
p1
x
x0
x*
x1

定理1 设 $\phi(x) \in C[a,b]$ 满足以下两个条件

1. 对任意x∈[a, b]有a≤φ(x)≤b

$|\phi'(x)| \le L < 1$

2. 存在L<1,使对任意x,y ∈[a,b]都有

$$|\phi(x)-\phi(y)| \le L\,|x-y|$$

则φ(x)在[a,b]上存在唯一的不动点x*

3. $x_k \rightarrow x^*$,且有误差估计 $|x_k - x_k^*| \le \dfrac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$

证明：1) 若φ(a)=a或 φ(b)=b, 显然存在不动点。

若a<φ(x)<b,令f(x)= φ(x)-x

满足f(a)= φ(a)-a>0，f(b)= φ(b)-b<0

由连续函数性质 ⟶ 存在x*∈(a,b)使f(x*)=0,即x*= φ(x*)

2）证明唯一性 设$x_1^*, x_2^* \in [a, b]$都是$\phi(x)$的不动点，

$$|x_1^* - x_2^*| = |\phi(x_1^*) - \phi(x_2^*)| \le L|x_1^* - x_2^*| < |x_1^* - x_2^*|$$

0<L<1

3) $|x_k - x^*| = |\phi(x_{k-1}) - \phi(x^*)| \le L|x_{k-1} - x^*| \le \cdots \le L^k |x_{k-1} - x^*| \longrightarrow \mathbf{0}$

$p \to \infty \longrightarrow x_{k+p} \to x^*$

$$|x_{k+p} - x_k| \le |x_{k+p} - x_{k+p-1}| + |x_{k+p-1} - x_{k+p-2}| + \ldots + |x_{k+1} - x_k|$$

$$\le (L^{k+p-1} + L^{k+p-2} + \cdots + L^k)|x_1 - x_0| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

$$|x^* - x_k| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1} - x_k|$$

***L* 越小收敛越快**

$$|x_{k+p} - x_k| \le |x_{k+p} - x_{k+p-1}| + \cdots + |x_{k+1} - x_k|$$

可用$|x_{k+1} - x_k|$来控制收敛精度

$$\le (L^{p-1} + L^{p-2} + \cdots + 1) \ldots |x_{k+1} - x_k|$$

例：求方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 的解，迭代公式为 $x=\sqrt[3]{x+1}$

例：用不同的方法求方程 $x^2-3=0$ 的解。

1) $x_{k+1}=x_k^2+x_k-3$

2) $x_{k+1}=\dfrac{3}{x_k}$

3) $x_{k+1}=x_k-\dfrac{1}{4}(x_k^2-3)$

4) $x_{k+1}=\dfrac{1}{2}(x_k+\dfrac{3}{x_k})$

■局部收敛与收敛阶

定义1 设 $\phi(x)$有不动点x^*,若存在x^*的某个邻域 $R:|x-x^*|\le\delta$

对任意$x_0\in R$, $x_{k+1}=\phi(x_k)$产生的序列$x_k\rightarrow x^*$,则称迭代法局部收敛。

定理3 设$x^*=\phi(x^*)$, $\phi'(x)$在x^*的邻域内连续，且 $|\phi'(x^*)|<1$

则迭代法局部收敛。

证明：由 $\phi'(x)$在x^*的邻域内连续 $\longrightarrow$ $|\phi'(x)|\le L<1$

$$|\phi(x)-x^*|=|\phi(x)-\phi(x^*)|\le L|x-x^*|\le|x-x^*|$$

迭代法的收敛阶 /* Order of Convergence */

定义 设迭代 $x_{k+1} = \phi(x_k)$ 收敛到 $\phi(x)$ 的不动点 x^*。设 $e_k = x_k - x^*$，若 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C > 0$，则称该迭代为 p 阶收敛，其中 C 称为渐近误差常数。

p=1，线性收敛

p>1,超线性收敛

p=2,平方收敛

定理4 对于迭代过程 $x_{k+1}=\phi(x_k)$，若 $\phi^{(p-1)}(x)$ 在所求根 x^* 的邻域连续，并且

$$\phi'(x^*) = \phi''(x^*) = \cdots = \phi^{(p-1)}(x^*) = 0 \qquad \phi^{(p)}(x^*) \neq 0$$

则该迭代过程在 x^* 邻近是 p 阶收敛。

证明： $\phi'(x^*) = 0 \Rightarrow x_k \to x^*$

$$\Rightarrow \phi(x_k) = \phi(x^*) + \frac{\phi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k - x^*)^p$$

$$\Rightarrow x_{k+1} - x^* = \frac{\phi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k - x$$

收敛速度依赖于迭代函数的选取

$$\Rightarrow \frac{e_{k+1}}{e_k^p} \to \frac{\phi^{(p)}(x^*)}{p!}$$

■迭代收敛的加速方法

设x_0是根x^*的某个近似值，用迭代公式矫正一次得

$$x_1 = \phi(x_0) \qquad x_1 - x^* = \phi(x_0) - \phi(x^*) = \phi'(\xi)(x_0 - x^*)$$

$$x_2 = \phi(x_1) \qquad x_2 - x^* = \phi(x_1) - \phi(x^*) = \phi'(\eta)(x_1 - x^*)$$

$$\frac{x_1 - x^*}{x_2 - x^*} \approx \frac{x_0 - x^*}{x_1 - x^*} \Longrightarrow x^* \approx x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0}$$

$$\Longrightarrow \bar{x}_{k+1} \approx x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_k - 2x_{k+}}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\bar{x}_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} = 0$$

收敛速度
加快

➢ **Aitken 加速:**

一般地，有：$\hat{x}_K = x_K - \dfrac{(x_{K+1} - x_K)^2}{x_K - 2x_{K+1} + x_{K+2}}$

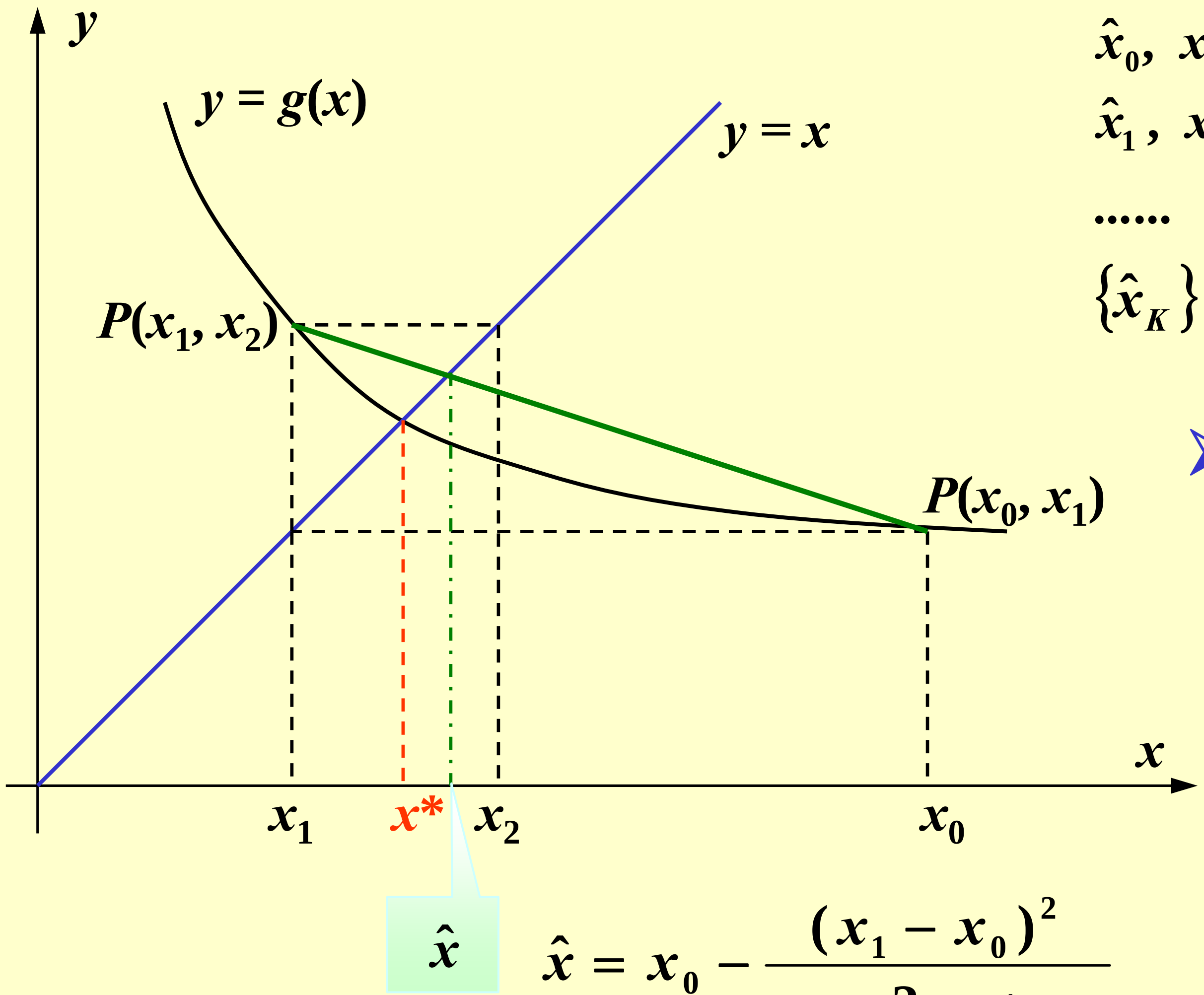
x_0, $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$,

$\hat{x}_0$, $x_3 = g(x_2)$,

$\hat{x}_1$, $x_4 = g(x_3)$,

......

$\{\hat{x}_K\}$比$\{x_K\}$收敛得略快。



$$\hat{x} = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_0 - 2x_1 + x_2}$$

➢ **Steffensen 加速:**

x_0, $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$,

$\hat{x}_0$, $\bar{x}_1 = g(\hat{x}_0)$, $\bar{x}_2 = g(\bar{x}_1)$,

$\hat{\hat{x}}_0$, ...

Steffensen迭代法实际上是把不动点迭代法两步合成一步得到，

$$x_{k+1} = \psi(x_k)$$

$$\psi(x) = x - \frac{[\phi(x) - x]^2}{\phi(\phi(x)) - 2\phi(x) + x}$$

定理5 若x*为φ(x)的不动点，则x*为φ(x)的不动点，反之，若x*为φ(x)的不动点，设$\phi''(x)$存在,$\phi'(x) \neq 1$ 则x*是φ(x)的不动点,且Steffensen迭代2阶收敛。

§4 牛顿法 /* Newton - Raphson Method */

原理：将非线性方程线性化

—— Taylor 展开 /* Taylor's expansion */

取 $x_0 \approx x^*$，将 $f(x)$ 在 x_0 做一阶Taylor展开：

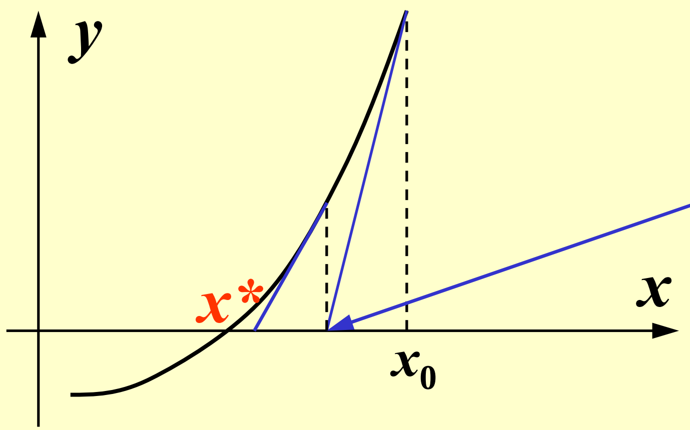
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2,$$ ξ 在 x_0 和 x 之间。

将 $(x^* - x_0)^2$ 看成高阶小量，则有：

$$0 = f(x^*) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) \quad \Rightarrow \quad x^* \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

线性 /* linear */



只要 $f \in C^1$，每一步迭代都有 $f'(x_k) \neq 0$，而且 $\lim_{k \to \infty} x_k = x^*$，则 x^* 就是 f 的根。

定理5 设 $f(x^*)=0$， $f'(x^*)\neq 0$，且 $f(x)$ 在x^* 的邻域上具有二阶连续导数，则由Newton法产生的序列

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n)$$

局部 收敛到x^* ，且为平方收敛。

证明: **Newton's Method** 迭代函数是 $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ ，则

$$g'(x) = f(x)\cdot f''(x)/[f'(x)]^2$$

因此 $g'(x^*)=0$ ， 一般 $g''(x^*)\neq 0$

由定理3可知Newton Method局部收敛。
由定理4可知Newton Method平方收敛。

见局部收敛性的证明

Newton应用举例

x^2-C=0 $\Longrightarrow$ $$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{C}{x_k}\right)$$

该迭代对任意初值$x_0>0$都收敛。

$$\begin{cases} x_{k+1}-\sqrt{C}=\dfrac{1}{2x_k}(x_k-\sqrt{C})^2 \\ x_{k+1}+\sqrt{C}=\dfrac{1}{2x_k}(x_k+\sqrt{C})^2 \end{cases}$$

$$\frac{x_{k+1}-\sqrt{C}}{x_{k+1}+\sqrt{C}}=\frac{(x_k-\sqrt{C})^2}{(x_k+\sqrt{C})^2}=\left[\frac{x_0-\sqrt{C}}{x_0+\sqrt{C}}\right]^{2^k}=q^{2^k}$$

|q|<1

$$x_{k+1}-\sqrt{C}=2\sqrt{C}\,\frac{q^{2^k}}{1-q^{2^k}}\longrightarrow 0$$

简化Newton法（平行弦法

$$C = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$x_{k+1} = x_k - Cf(x_k)$$

$$\varphi(x) = x - Cf(x) \qquad |\varphi'(x)| < 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < Cf'(x) < 2$$

Newton下山法

Newton's Method 收敛性依赖于x_0 的选取。

为防止发散，对迭代过程附加一项

满足该要求的算法称为下山法。

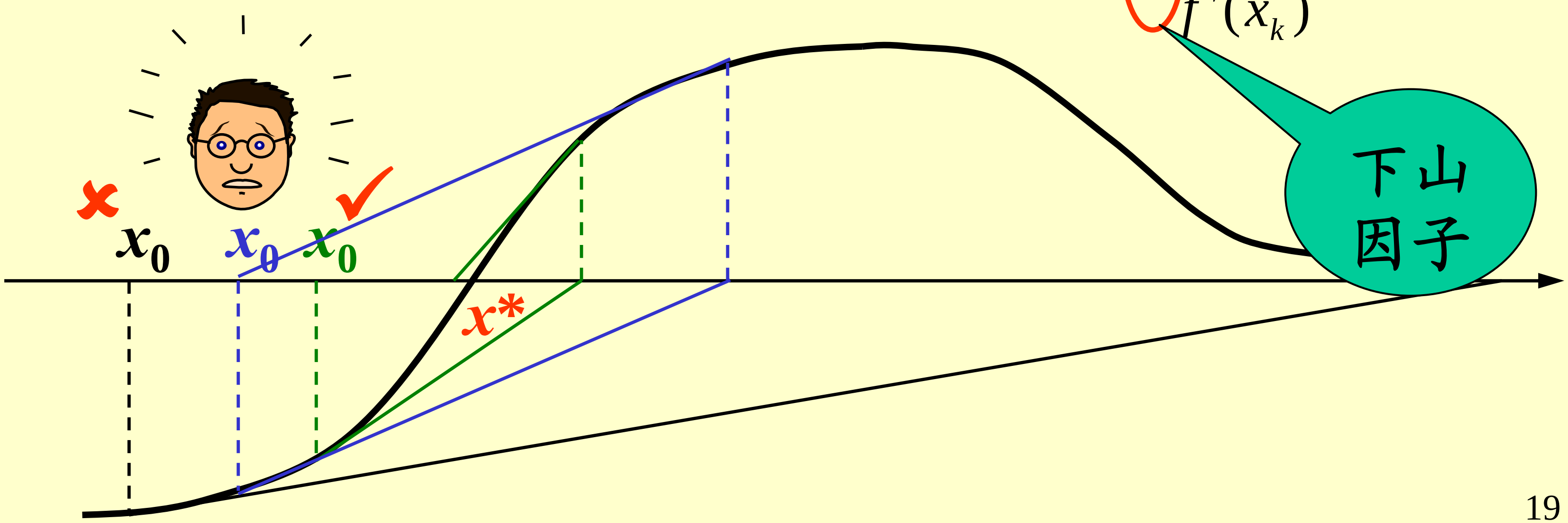
$$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$$

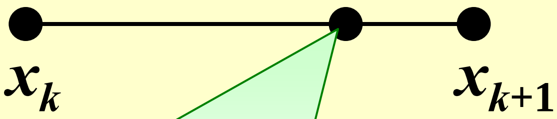
$$\bar{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Longrightarrow x_{k+1} = \lambda \bar{x}_{k+1} + (1-\lambda)x_k$$

Newton下山法

$$\Longrightarrow x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

下山因子





$$\lambda x_{k+1} + (1-\lambda) x_k \ , \ \lambda \in [0, 1]$$

注：$\lambda = 1$ 时就是**Newton's Method** 公式。

当 $\lambda = 1$ 代入效果不好时，将 λ 减半计算。

重根情形

➢ 重根 **/* multiple root */** 加速收敛法:

Q1: 若 $f'(x^*)=0$，**Newton's Method** 是否仍收敛?

设 x^* 是 f 的 n 重根，则: $f(x)=(x-x^*)^n\cdot q(x)$ 且 $q(x^*)\neq 0$。

因为 **Newton's Method** 事实上是一种特殊的不动点迭代，

其中 $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，则

$$|g'(x^*)|=\left|1-\frac{f'(x^*)^2-f'(x^*)f''(x^*)}{f'(x^*)^2}\right| = 1-\frac{1}{n} < 1$$

线性收敛

$$g(x)=x-n\frac{f(x)}{f'(x)} \Longrightarrow g'(x^*)=0$$

二阶收敛

Q2: 如何加速重根的收敛？

A2: 将求 f 的重根转化为求另一函数的单根。

令 $\mu(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，则 f 的重根 = μ 的单根。

二阶收敛

弦截法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$$

Newton 法只用到前一步的值，弦截法用到前面两步的值。

导数f'(x)用差商 $\dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$ 取代。

定理6 假设f(x)在x*的邻域内有二阶连续导数，且对邻域内任意x，有f'(x)≠0，设初值x0,x1属于该邻域，弦截法的收敛阶为

$$p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$$ **p为方程$\lambda^2-\lambda-1=0$ 的根**

抛物线法

$$p_2(x)=f(x_k)+f[x_k,x_{k-1}](x-x_k)+f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}](x-x_k)(x-x_{k-1})$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{2f(x_k)}{w\pm\sqrt{w^2-4f(x_k)f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}]}}$$

$$w=f[x_k,x_{k-1}]+f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}](x_k-x_{k-1})$$

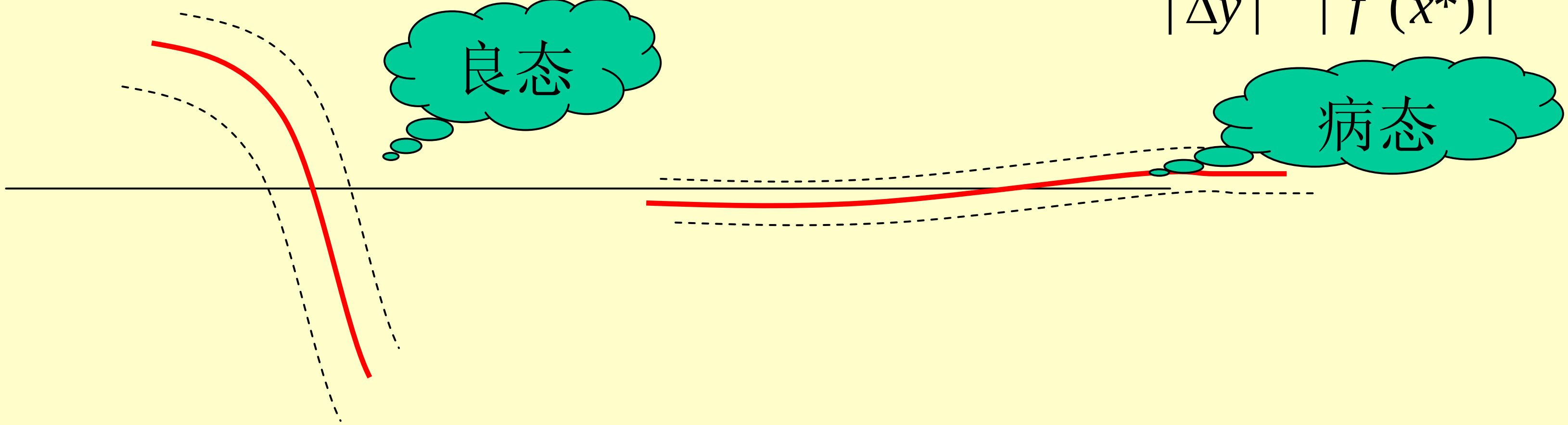
抛物线法的收敛阶为p=1.840，收敛速度接近于Newton法。

求根问题的敏感性与多项式的零点

方程求根的敏感性与函数求值是相反的。

y=f (x)， 由x求y, 函数的误差与自变量的误差之比为$\dfrac{|\Delta y|}{|\Delta x|} \approx |f'(x^*)|$

反之，由y求x，则解的误差与y的误差之比为$\dfrac{|\Delta x|}{|\Delta y|} \approx \dfrac{1}{|f'(x^*)|}$



对多项式方程若系数有微小的扰动其根变化较大，这种根对系数变化的敏感性称为病态的代数方程。

若多项式p(x)有微小的变化，$p_\varepsilon(x)=p(x)+\varepsilon q(x)=0$

$$p'(x)\frac{dx}{d\varepsilon}+q(x)+\varepsilon q'(x)\frac{dx}{d\varepsilon}=0$$

$$\frac{dx}{d\varepsilon}=\frac{-q(x)}{p'(x)+\varepsilon q'(x)}$$

p(x)的根

$$\frac{\boxed{dx(0)}}{d\varepsilon}=\frac{-q(x(0))}{p'(x(0))}$$

$p_\varepsilon(x)$ 的根

$$\boxed{x_k(\varepsilon)}\approx\boxed{x_k}-\frac{q(x_k)}{p'(x_k)}\varepsilon$$

例12 给多项式 $p(x)=\prod_{i=1}^{7}(x-i)$ 一个扰动，$p_{\varepsilon}(x)=p(x)+\varepsilon q(x)$

$\varepsilon=-0.002 \qquad q(x)=x^{6}$

则 $$x_k(\varepsilon)=k-\frac{k^{6}\varepsilon}{\prod_{j\neq k}(k-j)}$$

而方程 $p(x)+\varepsilon x^{6}=0$ 的根为

1.0000028, 1.9989382, 3.0331253, 3.8195692,

$\boxed{5.4586758 \pm 0.54012578i}$, 7.2330128

严重病态

■ 多项式的零点

求多项式 $x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_{n-1}x + p_n = 0$的全部根

对第一个根x_1，利用Newton法求解 $x_1^{k+1} = x_1^k - \dfrac{\boxed{p(x_1^k)}}{\boxed{p'(x_1^k)}}$

利用秦九韶算法计算

将p(x)降低一阶，得到 $q_1(x) = \dfrac{p(x)}{x - x_1}$

求q_1(x)=0的根，得到x_2，如此反复求出所有的根。

$$q_{i-1}(x) = (x - x_i)q_i(x) \quad q_0(x) = p(x)$$

随着i的增加，根的不精确性增加，通过Newton法改进这些根。

对复根情况，利用抛物线法求解 $x_1 = a + ib \quad \overline{x}_1 = a - ib$

$$(x - x_1)(x - \overline{x}_1) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

$$q_2(x) = \frac{p(x)}{x^2 - 2ax + a^2 + b^2}$$

降低二阶

例 求方程的根 $p(x) = 16x^4 - 40x^3 + 5x^2 + 20x + 6$

解：利用抛物线法求根, 得到x=-0.356062 ± 0.162758i

$$p(x) = 16(x^2 + 0.712124x + 0.153270)\boxed{(x^2 - 3.212124x + 2.446662)}$$

$$x^2 - 3.212124x + 2.446662 = 0$$

X3=1.2416815 x4=1.970443

利用Newton法迭代一次，得到更精确的解。

X3=1.24167745 x4=1.97044608

非线性方程组的数值解法

比单个方程求解要复杂和困难，可能无解也可能有一个或多个解。

考虑方程组
$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_4(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases}$$

至少有一个方程是自变量x_i的非线性函数时，称之为**非线性方程组**

F(x)连续 $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$

F的Jacobi矩阵：向量函数F(x)的导数F'(x)

$$F'(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

多变量方程的不动点迭代

F(x)=0 ⟺ $x=\boxed{\Phi(x)}$ 在D上连续

若x*属于D，且x*=Φ (x*)，称X*为函数 Φ的不动点。

不动点迭代法： $x^{k+1}=\boxed{\Phi}(x^k)$ k=0,1 迭代函数

$\lim\limits_{x\to x_0} x^k = x^*$ x*是不动点，也是方程的一个解。

定理7 函数Φ定义在区域D，设 压缩条件

1）存在闭集D0属于D，且0<L<1

2）对任意$x\in D_0$ $\Phi(x)\in\Phi(D_0)$ 有 $\|\phi(x)-\phi(y)\|\le L\|x-y\|$

则Φ在D上有唯一不动点x*，且对任意 $x^0\in D_0$ $\lim\limits_{x\to x_0} x^k = x^*$

$$\|x^*-x^k\|\le\frac{L^k}{1-L}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$$

压缩定理

定理8 设Φ在定义域内有不动点x*，Φ的分量函数有连续偏导数且

$$\boxed{\rho(\Phi'(x^*))} < 1$$

Jacobi矩阵的谱半径

则存在x*的一个邻域S，对任意 $x^0 \in S$ 迭代法收敛到x*

局部收敛定理

收敛阶 $$\lim_{k\to\infty}\frac{\left\|x^{k+1}-x^*\right\|}{\left\|x^k-x^*\right\|^p}=\alpha$$ 称为p阶收敛。

例15 解方程组 $$\begin{cases} x_1^2-10x_1+x_2^2+8=0 \\ x_1x_2^2+x_1-10x_2+8=0 \end{cases}$$

解：$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{10}(x_1^2+x_2^2+8)=\varphi_1(x) \\ x_2=\dfrac{1}{10}(x_1x_2^2+x_1+8)=\varphi_2(x) \end{cases}$$

$$D=\{(x_1,x_2)\,|\,0\le x_1,x_2\le 1.5\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.8\le\varphi_1(x)\le 1.25 \\ 0.8\le\varphi_2(x)\le 1.2875 \end{cases}$$

$$|\varphi_1(y)-\varphi_1(x)|=\frac{1}{10}|y_1^2-x_1^2+y_2^2-x_2^2|\le\frac{3}{10}(|y_1-x_1|+|y_2-x_2|)$$

$$|\varphi_2(y)-\varphi_2(x)|=\frac{1}{10}|y_1y_2^2-x_1x_2^2+y_1-y_2|\le\frac{4.5}{10}(|y_1-x_1|+|y_2-x_2|)$$

$$\left\|\Phi(x)-\Phi(y)\right\|_1\le 0.75\left\|y-x\right\|_1$$

⇨ 由定理7，收敛。

考察局部收敛性

$$\Phi'(x)=\begin{bmatrix}\frac{x_1}{5} & \frac{x_2}{5}\\ \frac{x_2^2+1}{10} & \frac{x_1x_2}{5}\end{bmatrix}$$

$$\left\|\Phi'(x)\right\|_1\le 0.9$$

满足定理7

$$\left\|\Phi'(x^*)\right\|_1=0.4<1 \Longrightarrow \rho(\Phi'(x^*))<1$$

满足定理**8**

解非线性方程组的Newton迭代法

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ F(X)=0

$F=(f_1,\ldots,f_n)^T$

$X=(x_1,\ldots,x_n)^T$

$$0 \approx F(X) \approx F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x - x^{(k)})$$

$$-F(x^{(k)}) = F'(x^{(k)})(x - x^{(k)})$$

Jacobi矩阵

$$F'(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

定理9 设F(x)， $x \in D$ ，若F(x*)=0， $x^* \in D$

在x*的开邻域S0上，F’(x)存在且连续，F’(x*)非奇异，

则Newton法生成的序列 $\{x^k\}$

在闭域 $S \subset S_0$ 上超线性收敛于x*,若还存在常数L>0,有

$$\|F'(x)-F'(x^*)\| \le L\|x-x^*\|$$

则 $\{x^k\}$ 平方收敛。

解线性方程组的Newton迭代法

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)})$$

例12 求解方程组 $\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - 3 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2^2 - 5 = 0 \end{cases}$

$$F'(X) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \qquad F'(X)^{-1} = \frac{1}{2x_2 - 8x_1} \begin{bmatrix} 2x_2 & -2 \\ -4x_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \frac{1}{2x_2^{(k)} - 8x_1^{(k)}} \begin{bmatrix} 2x_2^{(k)} & -2 \\ -4x_1^{(k)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)} - 3 \\ 2(x_1^{(k)})^2 + (x_2^{(k)})^2 - 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \dfrac{(x_2^{(k)})^2 - 2(x_1^{(k)})^2 + x_1^{(k)} x_2^{(k)} - 3x_2^{(k)} + 5}{x_2^{(k)} - 4x_1^{(k)}} \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \dfrac{(x_2^{(k)})^2 - 2(x_1^{(k)})^2 - 8x_1^{(k)} x_2^{(k)} + 12x_2^{(k)} - 5}{2(x_2^{(k)} - 4x_1^{(k)})} \end{cases}$$

§6 劈因子法 /* 林士谔-Bairstow Method */

求多项式的根

从 $f(x)$中分离出一个2 次因子。即:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

$$= (x^2 + u^* x + v^*)(b_0^* x^{n-2} + b_1^* x^{n-3} + \cdots + b_{n-3}^* x + b_{n-2}^*)$$

通过 $x^2 + u^* x + v^* = 0$可解出一对共轭复根。

思路 从一对初值 (u, v) 出发，则有

$$f(x) = (x^2 + u x + v) P(x) + (r x + s)$$

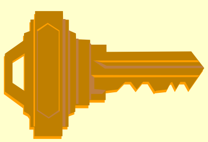
其中(r, s)取决于u 和 v，可以看作是(u, v)的函数，即 $r = r(u, v)$，$s = s(u, v)$。

目 标: $r = r(u^*, v^*) = 0$，$s = s(u^*, v^*) = 0$。

将 r 和 s 在初值点(u, v)做一阶Taylor展开，并代入(u^*, v^*):

$$\begin{cases} 0 = r(u^*, v^*) \approx r(u,v) + \dfrac{\partial r}{\partial u}\underline{(u^* - u)} + \dfrac{\partial r}{\partial v}\underline{(v^* - v)} \\ 0 = s(u^*, v^*) \approx s(u,v) + \dfrac{\partial s}{\partial u}\underline{(u^* - u)} + \dfrac{\partial s}{\partial v}\underline{(v^* - v)} \end{cases}$$

从中解出 $\Delta u = u^* - u$，$\Delta v = v^* - v$，以 $u + \Delta u$，$v + \Delta v$ 更新 u 和 v 再迭代，直到 r 和 s 充分接近0。


每步迭代须计算 r，s，$\dfrac{\partial r}{\partial u}$，$\dfrac{\partial r}{\partial v}$，$\dfrac{\partial s}{\partial u}$，$\dfrac{\partial s}{\partial v}$.

➢ 计算 r 和 s：

$$f(x)=\underline{a_0}x^n+\underline{a_1}x^{n-1}+\underline{a_2}x^{n-2}+\dots+\underline{a_{n-2}}x^2+\underline{a_{n-1}}x+\underline{a_n}$$

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2+ux+v)(b_0x^{n-2}+\dots+b_{n-2})+rx+s\\&=\underline{b_0}x^n+\underline{(b_1+ub_0)}x^{n-1}+\underline{(b_2+ub_1+vb_0)}x^{n-2}+\dots+\underline{(b_{n-2}+ub_{n-3}+vb_{n-4})}x^2\\&\quad+\underline{(ub_{n-2}+vb_{n-3}+r)}x+\underline{(vb_{n-2}+s)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b_0=a_0\\ b_1=a_1-ub_0\\ b_i=a_i-ub_{i-1}-vb_{i-2} & (i=2,3,\dots,n-2)\\ r=a_{n-1}-ub_{n-2}-vb_{n-3}\\ s=a_n-vb_{n-2}\end{cases}$$

可记为 b_{n-1}

若令 $b_n=a_n-ub_{n-1}-vb_{n-2}$，则 $s=b_n+ub_{n-1}$.

➢ 计算 $\frac{\partial r}{\partial v}, \frac{\partial s}{\partial v}$：

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \\ &= (x^2 + ux + v)P(x) + rx + s \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial v} = 0 = P(x) + (x^2 + ux + v) \cdot \frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\partial r}{\partial v} x + \frac{\partial s}{\partial v}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{-P(x)}_{n-2\text{ 阶多项式}} = (x^2 + ux + v)\underbrace{\frac{\partial P}{\partial v}}_{n-4\text{ 阶多项式}} + \frac{\partial r}{\partial v} x + \frac{\partial s}{\partial v}$$

与前一步同理，可导出 $\frac{\partial r}{\partial v}, \frac{\partial s}{\partial v}$ 和 $\frac{\partial P}{\partial v}$ 的公式。

令 $\frac{\partial P}{\partial v} = c_0 x^{n-4} + c_1 x^{n-5} + \cdots + c_{n-5} x + c_{n-4}$

$$left\ \ side\ := -p(x) = -(b_0 x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \cdots + b_{n-3} x + b_{n-2})$$

$$right\ \ side\ := (x^2 + ux + v)(c_0 x^{n-4} + c_1 x^{n-5} + \cdots + c_{n-5} x + c_{n-4}) + \frac{\partial r}{\partial v} x + \frac{\partial s}{\partial v}$$

与前一步同理，可导出 $\frac{\partial r}{\partial v}, \frac{\partial s}{\partial v}$ 的计算公式。

$$\Rightarrow \begin{cases} -b_0 = c_0 \\ -b_1 = c_1 + uc_0 \\ -b_i = c_i + uc_{i-1} + vc_{i-2} \qquad (i = 2, 3, ..., n-2) \\ -b_{n-3} = \dfrac{\partial r}{\partial v} + uc_{n-4} + vc_{n-5} \\ -b_{n-2} = \dfrac{\partial s}{\partial v} + vc_{n-4} \end{cases}$$

➢ 计算 $\dfrac{\partial r}{\partial u}, \dfrac{\partial s}{\partial u}$：

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = (x^2 + ux + v)P(x) + rx + s$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 0 = xP(x) + (x^2 + ux + v)\cdot\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial u}x + \frac{\partial s}{\partial u}$$

$$\Rightarrow \quad -xP(x) = (x^2 + ux + v)\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial u}x + \frac{\partial s}{\partial u}$$

而前一步得到 $-P(x) = (x^2 + ux + v)\dfrac{\partial P}{\partial v} + \dfrac{\partial r}{\partial v}x + \dfrac{\partial s}{\partial v}$

$$-xP(x) = x(x^2 + ux + v)\frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\partial r}{\partial v}x^2 + \frac{\partial s}{\partial v}x$$

$$= (x^2 + ux + v)\left(x\frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\partial r}{\partial v}\right) + \left[\left(\frac{\partial s}{\partial v} - u\frac{\partial r}{\partial v}\right)x - v\frac{\partial r}{\partial v}\right]$$

可见 $\dfrac{\partial r}{\partial u} = \dfrac{\partial s}{\partial v} - u\dfrac{\partial r}{\partial v}, \quad \dfrac{\partial s}{\partial u} = -v\dfrac{\partial r}{\partial v}$ ■