# 函数逼近的基本概念

➢知识背景:对函数类A中给定的函数f(x)∈A,要求在另一类简单的便于计算的函数类B中求函数P(x)∈B，使P(x)与f(x)的误差在某种度量下最小.

空间　　$R^n$　　N维向量空间

$H_n$　　多项式空间

C[a,b]　　[a,b]区间上的连续函数空间

$C^p[a,b]$　　[a,b]区间上具有p阶连续导数的函数空间

线性相关与线性无关

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

空间S上的任何向量可由该空间中的确一组基线性表示。

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

不超过n次的多项式集合$H_n$,1,x,$x^2$,…,$x^n$构成一组基，$H_n = span\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$

$(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ 是**p(x)**的坐标向量，**$H_n$**是**n+1**维的。

连续函数**f(x)**∈C[a, b], 不能用有限个线性无关的函数表示，所以C[a, b]是无限维的，但f(x)可用有限维的p(x)∈$H_n$逼近，使误差 $\max_{a \le x \le b} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$

**定理1** 设**f(x)**∈**C[a,b]**，则对任何ε**>0**，总存在一个是代数多项式**p(x)**，使$\|f(x) - p(x)\|_\infty < \varepsilon$在**[a,b]**上成立。

伯恩斯坦多项式是整体逼近函数的一种构造方法

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P_k(x)$$

$$P_k(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\lim_{n\to\infty} B_n^{(m)}(f, x) = f^{(m)}(x)$$

**$B_n$(f,x)**收敛速度太慢，在实际中很少被使用。

一般方法：用一组在**C[a,b]**上线性无关的函数集合 $\{\phi_i(x)\}_{i=0}^{n}$ 逼近 **f(x)** ∈ C[a, b], 表示为

$$\phi(x)=a_0\phi_0(x)+a_1\phi_1(x)+\cdots+a_n\phi_n(x)$$

使**f(x)-** ϕ ***(x)**在某种意义下最小。

## 范数与赋范线性空间

设**S**为线性空间**, x**∈**S,** 若存在唯一实数**||·||**满足条件**:**

**(1) || x ||≥0,** 当且仅当**x=0**时**|| x ||=0;** **(**正定性**)**

**(2) ||αx|| = |α| || x ||,** α∈ℝ**;** **(**齐次性**)**

**(3) || x + y ||≤|| x ||+|| y ||,** ∀**x, y**∈**S.** **(**三角不等式**)**

则称**||·||**为线性空间**S**上范数**, S**与**||·||**一起称为赋范线性空间，记为**X.**

## ■常用范数

**在 $\mathbf{R}^n$上的向量范数** **连续函数空间C[a, b]上的范数**

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|, \qquad \|f\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |f(x)|, \qquad \infty\text{-范数}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx, \qquad 1\text{-范数}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}, \qquad 2\text{-范数}$$

## ■内积与内积空间

设**X**为数域**K**($\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$)上的线性空间, 对$\forall$**u, v**$\in$**X**, 有**K**中一个数与之对应，记为**(u, v)**, 它满足以下条件:

(1) $(u,v)=\overline{(v,u)}, \forall u,v\in \mathrm{X}$

(2) $(\alpha u,v)=\alpha(u,v)=(u,\alpha v), \forall\alpha\in K, \forall u,v\in \mathrm{X}$

(3) $(u+v,w)=(u,w)+(v,w), \forall u,v,w\in \mathrm{X}$

(4) $(u,u)\geq 0$, and $(u,u)=0$ iff $u=0$.

则称**(u, v)**为**X**上**u**与**v**的内积. 定义了内积的线性空间称为内积空间. 若**(u, v)=0**, 则称**u**与**v**正交. 特别地, **(u, 0)=0**, $\forall$**u**$\in$**X.**

**定理2** 设**X**为一个内积空间，对∀**u, v**∈**X**，有

$$|(u,v)|^2 \le (u,u)(v,v)$$

称为**Cauchy-Schwarz**不等式

证明见P54.

**定理3** 设**X**为一个内积空间， $\mathbf{u_1, u_2, \ldots, u_n} \in \mathbf{X}$, 矩阵

$$G = \begin{pmatrix} (u_1,u_1) & (u_2,u_1) & \cdots & (u_n,u_1) \\ (u_1,u_2) & (u_2,u_2) & \cdots & (u_n,u_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (u_1,u_n) & (u_2,u_n) & \cdots & (u_n,u_n) \end{pmatrix}$$

证明见
P54

称为格拉姆**(Gram)**矩阵. 则**G**非奇异当且仅当$\mathbf{u_1, u_2, \ldots, u_n}$线性无关.

在内积空间**X**上可由内积导出一种范数，即对**u**∈X,

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)}$$

满足范数定义的三条性质，其中三角不等式

$$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$$

可由定理**2**直接得出，

$$(\|u\| + \|v\|)^2 = \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$$

$$\ge (u,u) + 2(u,v) + (v,v)$$

$$= (u+v, u+v) = \|u+v\|^2$$

例1 $R^n$与$C^n$的内积。 $x, y \in R^n, x=(x_1,\cdots,x_n)^T, y=(y_1,\cdots,y_n)^T$

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \|x\|=(x,x)^{\frac{1}{2}}=(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

$w_i>0$

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i \qquad \|x\|=(x,x)^{\frac{1}{2}}=(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$x, y \in C^n$$

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \overline{y}_i$$

**定义4** 设**[a,b]**是有限或无限区间，在**[a,b]**上的非负函数ρ(x)满足条件:

1) $\int_a^b x^n \rho(x)dx$ 存在且为有限值（**k=0,1,…**），

**2)**对**[a,b]**上的非负连续函数**g(x),**如果$\int_a^b g(x)\rho(x)dx = 0$则**g(x)=0**

则称 **ρ(x)为[a,b]上的一个权函数。**

f(x),g(x)∈C[a, b]

例**2 C[a,b]**上的内积。

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx$$

$$\|f(x)\|_2 = (f(x), f(x))^{1/2} = [\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx]^{1/2}$$

# 正交多项式

**定义5** 若**f(x),g(x)**∈C[a, b]， ρ **(x)**为[a, b]上的权函数且满足

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx = 0$$

则称**f(x)和g(x)在[a,b]上带权ρ (x)正交.**若函数族

$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots$ 满足关系

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ A_k > 0 & j = k \end{cases}$$

则称**{ϕ$_k$(x)}是[a,b]上带权ρ (x)的正交函数族**；若**A=1,**则称之为标准正交函数族。

三角函数族**1,cosx,sinx,cos2x,sin2x,…**是区间**[-π, π]**上的正交函数族。

■**定义6** 设 $\varphi_n(x)$ 是**[a,b]**上首项系数$a_n \neq 0$的**n**次多项式，ρ (x) 为[a, b]上权函数，若多项式序列$\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$满足关系式

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx=\begin{cases}0 & j\neq k\\ A_k>0 & j=k\end{cases}$$

则称多项式序列$\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 为**[a,b]**上带权ρ **(x)**正交，称 $\varphi_n(x)$ 为**[a,b]**上带权 ρ **(x)**的**n次正交多项式**。

■构造正交多项式递推关系

$\{1,x,x^2,\ldots,x^n,\ldots\}$ ⟹ $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$

$$\varphi_0(x)=1 \qquad \varphi_n(x)=x^n-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x^n,\varphi_j(x))}{(\varphi_j(x),\varphi_j(x))}\varphi_j(x)$$

■所构造的正交多项式的性质:

**1)** $\varphi_n(x)$ 是具有最高次项系数为**1**的**n**次多项式。

**2)** 任何**n**次多项式**P$_n$(x)** $\in H_n$均可表示为$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$线性组合

**3)** 当**k**$\neq$**j**时，$(\varphi_j(x),\varphi_k(x))=0$，且 $\varphi_n(x)$ 与任一小于**k**的多项式正交。

**4)** 成立递推关系 $\varphi_{n+1}(x)=(x-\alpha_n)\varphi_n(x)-\beta_n\varphi_{n-1}(x)$

其中 $\varphi_0(x)=1$

$$(x\varphi_n(x),\varphi_n(x))=\int_a^b x\varphi_n^2(x)\rho(x)dx$$

$$\alpha_n=\frac{(x\varphi_n(x),\varphi_n(x))}{(\varphi_n(x),\varphi_n(x))}\qquad \beta_n=\frac{(\varphi_n(x),\varphi_n(x))}{(\varphi_{n-1}(x),\varphi_{n-1}(x))}$$

证明见
P58

**5)** $\varphi_n(x)$ 的**n**个根都是**[a,b]**内的单重实根。

# ■Legendre多项式

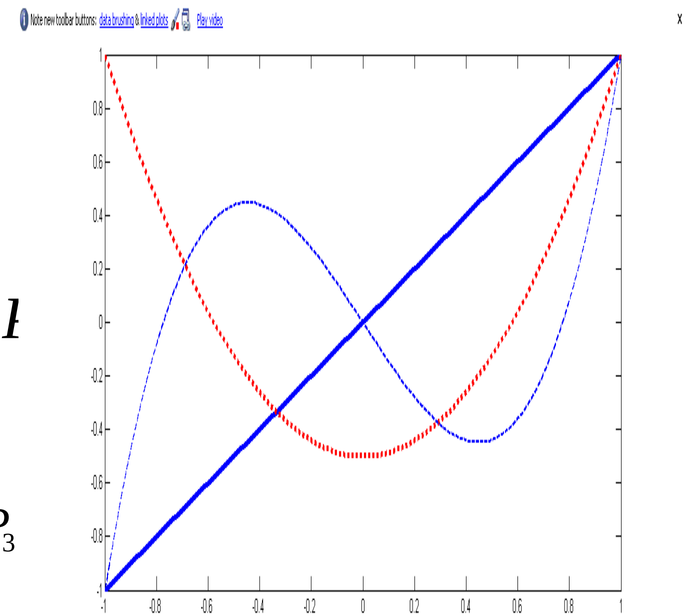
首项系数为 $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$

$$P_0(x) = 1 \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\} \quad \text{n=1,2,….,} \qquad \rho\text{ (x)=1}$$

**最高系数为1的Legendre多项式** $\tilde{P}_n(x) = \dfrac{n!}{(2n)!}\dfrac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}$

## 性质:

**1)正交性** $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$




**2)奇偶性** $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

**3)递推关系** $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP$

**低次Legendre多项式** $P_0(x) = 1$

$P_2(x) = (3x^2-1)/2 \qquad P_3$

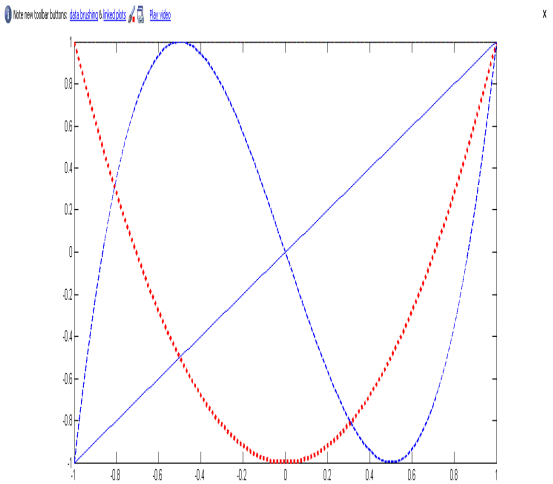
$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8 \qquad P_5(x) =$

**4) $P_n$(x)在区间[-1,1]内有n个不同的实零点。**

## ■切比雪夫多项式

权函数 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x) \qquad |x|\le 1$$



## ■性质

**1)**递推关系 $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$

$$T_0(x)=1 \qquad T_1(x)=x$$

低次**Chebyshev**多项式 $T_2(x)=2x^2-1 \quad T_3(x)=4x^3-3x$

$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1 \quad T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$$

**2)Chebyshev**多项式在**[-1,1]**上带权$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 正交，且

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \dfrac{\pi}{2} & n=m\neq 0\\ \pi & n=m=0\end{cases}$$

**3) $T_{2k}(x)$只含x的偶次幂，$T_{2k+1}(x)$只含x的奇次幂**

**4) $T_n(x)$在[-1,1]上有n个零点** $x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi$ K=1,…,n

**1,x,$x^2$,…,$x^n$用Chebyshev多项式表示**

$$x_k = 2^{1-n}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^k T_{n-2k}(x)$$

$$1 = T_0(x) \qquad x = T_1(x)$$

$$x^2 = \frac{1}{2}(T_0(x) + T_2(x)) \qquad x^3 = \frac{1}{4}(3T_1(x) + T_3(x))$$

$$x^4 = \frac{1}{8}(3T_0(x) + 4T_2(x) + T_4(x)) \qquad x^5 = \frac{1}{16}(10T_0(x) + 5T_2(x) + T_5(x))$$

性质5　$T_n(x)$ 的首项 $x^n$ 的系数为 $2^{n-1}$ (n=1, 2, ...)

性质6　设 $\tilde{T}_n(x)$ 是首项系数为1的Chebyshev多项式，则

$$\max_{-1\le x\le 1}|\tilde{T}_n(x)|\le \max_{-1\le x\le 1}|P(x)| \qquad \forall P(x)\in \tilde{H}_n$$

且

$$\max_{-1\le x\le 1}|\tilde{T}_n(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}$$

注：　所有首项系数为一的n次多项式集合中

$$\left\|\tilde{T}_n\right\|_\infty=\min_{P\in\tilde{H}_n}\left\|P(x)\right\|_\infty$$

$$\max_{-1\le x\le 1}|\tilde{T}_n(x)|=\min_{P\in\tilde{H}_n}\max_{-1\le x\le 1}|P(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}$$

例3：求 $f(x)=2x^3+x^2+2x-1$ 在 $[-1, 1]$ 上的最佳二次逼近多项式

在$[-1, 1]$上求$\{x_1, \ldots, x_n\}$使得$w_n(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$的$\|w_n\|_\infty$最小。

$\|P_{n-1}(x)-x^n\|_\infty$ 取最小值 ➡ $\min_{w_n \in \Pi_n} \|w_n\|_\infty = \left\| \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \right\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$

$\Pi_n = \{$首项系数为1的 $n$ 阶多项式 /*monic polynomials of degree *n* */ $\}$

❖ $\{x_1, \ldots, x_n\}$即为 $T_n(x)$ 的 $n$ 个零点。

如何确定插值节点$\{x_0, \ldots, x_n\}$的位置，使得$P_n(x)$刚好是$y$的*OUAP*？即，使插值余项$|R_n(x)| = \left| \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \right|$达到极小？

❖ 取$\{x_0, \ldots, x_n\}$为$T_{n+1}(x)$的$n+1$个零点，做$y$的插值多项式$P_n(x)$，则插值余项的上界可达极小$\frac{M}{2^n(n+1)!}$。

注:

☞ 上界最小不表示$|R_n(x)|$最小，故$P_n(x)$严格意义上只是$y(x)$的近似最佳逼近多项式;

☞ 对于一般区间 $x\in[a,b]$，可作变量替换 $x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$，则 $t\in[-1,1]$，这时

$$w_{n+1}(x)=w_{n+1}\left(\tfrac{a+b}{2}+\tfrac{b-a}{2}t\right)=\left(\tfrac{a+b}{2}+\tfrac{b-a}{2}t-x_0\right)\ldots\left(\tfrac{a+b}{2}+\tfrac{b-a}{2}t-x_n\right)$$

$$=\left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{n+1}(t-t_0)\ldots(t-t_n)$$

$$=\left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{n+1}\frac{1}{2^n}T_{n+1}(t)=\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}T_{n+1}(t)$$

即以 $x_k=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b-a}{2}\cos\left(\dfrac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$ 为插值节点 $(k=0,\ldots,n)$，

得$P_n(x)$，余项 $R_n(x)=\dfrac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\dfrac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}T_{n+1}(t)$有最小上界。

例: 求 $f(x) = e^x$ 在[0, 1]上的近似最佳逼近多项式，使其误差不超过 $0.5\times10^{-4}$。

解: ① 根据误差上界确定 $n$ :

$$|R_n| \le \frac{e}{(n+1)!}\times\frac{1}{2^{2n+1}} < \frac{1}{2}\times10^{-4} \quad \Rightarrow \quad n = 4$$

② 计算 $T_5(t)$的根:

$$t_0 = \cos\frac{\pi}{10},\ t_1 = \cos\frac{3\pi}{10},\ t_2 = \cos\frac{5\pi}{10},\ t_3 = \cos\frac{7\pi}{10},\ t_4 = \cos\frac{9\pi}{10}$$

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t = \frac{1}{2}(t+1)$$

$$x_0 = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{10}+1) \approx 0.98,\ \ x_1 = \frac{1}{2}(\cos\frac{3\pi}{10}+1) \approx 0.79$$

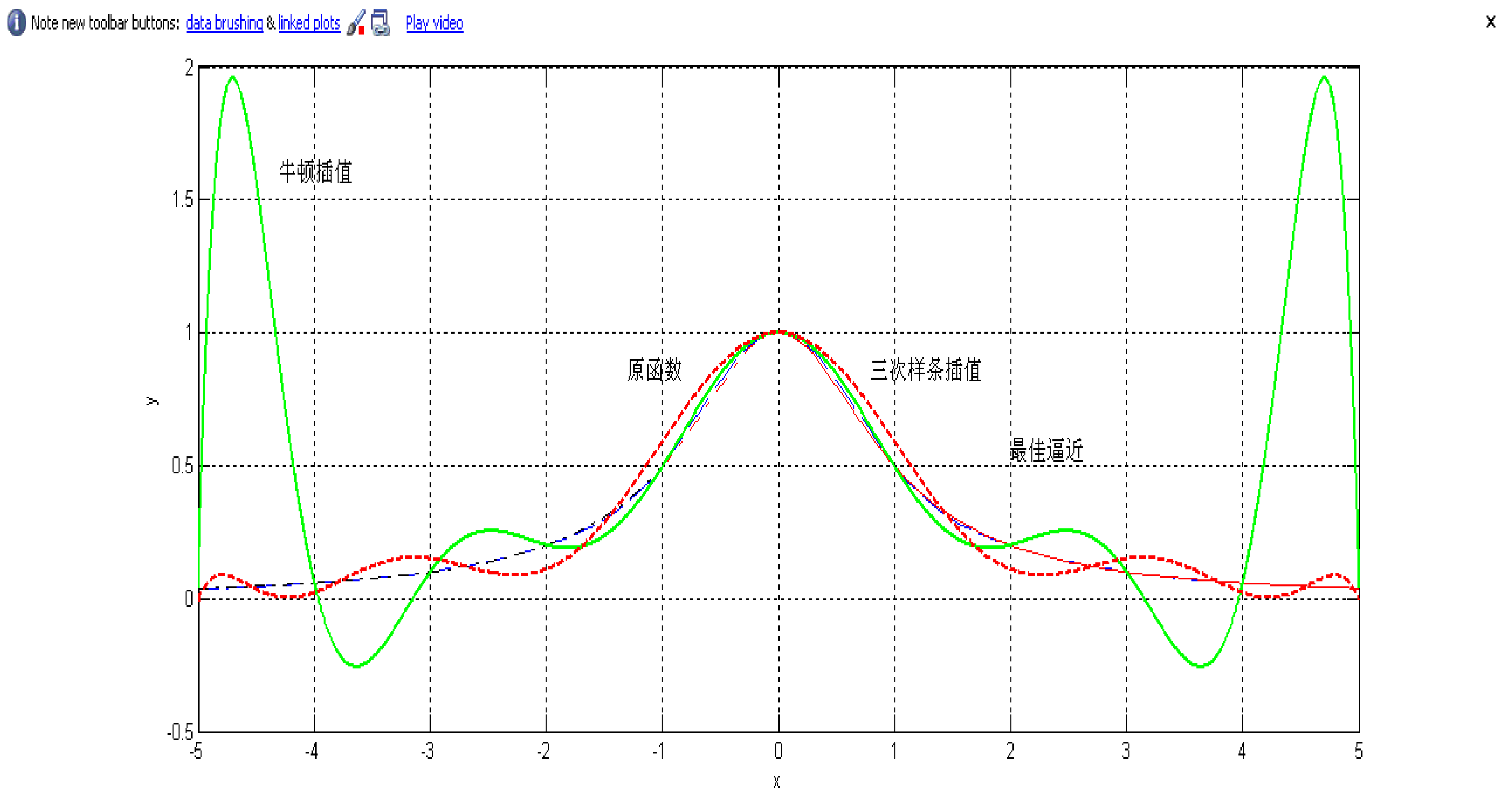
$$x_2 = \frac{1}{2}(\cos\frac{5\pi}{10}+1) \approx 0.50,\ \ x_3 = \frac{1}{2}(\cos\frac{7\pi}{10}+1) \approx 0.21$$

$$x_4 = \frac{1}{2}(\cos\frac{9\pi}{10}+1) \approx 0.02$$

③ 以 $x_0, \ldots, x_4$ 为节点作 $L_4(x)$

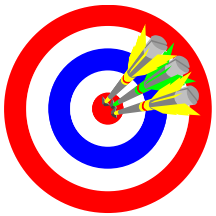
$$L_4(x) = 1.000 + 0.998x + 0.509x^2 + 0.141x^3 + 0.068x^4$$

例5 设f(x)=1/(1+x*x),在[-5,5]上构造10次拉格朗日插值多项式，使得阶段误差极小化。

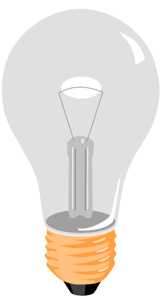


## ➢ Chebyshev 多项式的其它应用

—— 多项式降次 /* reduce the degree of polynomial with a minimal loss of accuracy */



设 $f(x) \approx P_n(x)$。在降低 $P_n(x)$ 次数的同时，使因此增加的误差尽可能小，也叫 **economization of power series**。



从 $P_n$ 中去掉一个含有其最高次项的 $\overline{P}_n$，结果降次为 $\tilde{P}_{n-1}$，则：

$$\max_{[-1,1]} |f(x) - \tilde{P}_{n-1}(x)| \le \max_{[-1,1]} |f(x) - P_n(x)| + \max_{[-1,1]} |\overline{P}_n(x)|$$

因降次而增的误差

设 $P_n$ 的首项系数为 $a_n$，则取 $\overline{P}_n(x) = a_n \times \dfrac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ 可使精度尽可能少损失。（定理6的利用）

## ■其他常用的正交多项式

**1.第二类Chebyshev多项式** $U_n(x)=\dfrac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ $\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$

正交性 $\int_{-1}^{1}U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \dfrac{\pi}{2} & m=n\end{cases}$

递推关系 $U_0(x)=1$ $U_1(x)=2x$

$$U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x)\qquad \text{n=1,2,…}$$

**2.Laguerre多项式** $L_n(x)=e^x\dfrac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})$ $\rho(x)=e^{-x}$ $x\in[0,\infty)$

正交性 $\int_0^{\infty}e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ (n!)^2 & m=n\end{cases}$

递推关系 $L_0(x)=1$ $L_1(x)=1-x$

$$L_{n+1}(x)=(1+2n-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x)$$

## 3.埃尔米特多项式

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \qquad \rho(x)=e^{-x^2} \qquad x\in(-\infty,\infty)$$

正交性

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ 2^n n!\sqrt{\pi} & m=n\end{cases}$$

递推关系 $H_0(x)=1 \qquad H_1(x)=2x$

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$$