曲线拟合的最小二乘法

仍然是已知 $x_1 \ldots x_m$; $y_1 \ldots y_m$，求一个简单易算的近似函数 $S^*(x) \approx f(x)$。

但是 ① m 很大;

② y_i 本身是测量值，不准确，即 $y_i \neq f(x_i)$

这时没必要取 $P(x_i) = y_i$, 而要使 $P(x_i) - y_i$ 总体上尽可能小。

常见做法:

➢ 使 $\sum_{i=1}^{m} |P(x_i) - y_i|^2$ 最小 /* Least-Squares method */

已知 $x_1 \ldots x_m$; $y_1 \ldots y_m$，求一个简单易算的近似函数 $P(x) \approx f(x)$ 使得 $\sum_{i=1}^{m} |P(x_i) - y_i|^2$ 最小。

首先确定**P(x)**的形式:

$$P(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$$

考虑数据误差的加权平方和

$$\|\delta\|_2^2 = \sum_{i=0}^{m} w(x_i)[P(x_i) - f(x_i)]^2$$

转化为多元函数 $I(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=0}^{m} w(x_i)[\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x_i) - f(x_i)]^2$

根据多元函数求极值的必要条件

法方程

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=0}^{n} (\varphi_k, \varphi_j) a_j = d_k$$

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{i=0}^{m} w(x_i)\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) \qquad (f, \varphi_k) = \sum_{i=0}^{m} w(x_i) f(x_i)\varphi(x_i) = d_k$$

■**定义10** 设 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\in C[a,b]$ 的任意线性组合的在点集{x_i,i=0,1,…,m}上至多只有n个不同的零点，则称 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 在点集{x_i}上满足Haar条件

例 1,x,x^2,…,x^n在任意m个点上满足Haar条件

注 若 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\in C[a,b]$在{$x_i$}上满足Haar条件，则法方程存在唯一解。

例: 用 $y=a_0+a_1x+a_2x^2$ 来拟合

x	1	2	3	4
y	4	10	18	26

, $w\equiv 1$

解: $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=x$, $\varphi_2(x)=x^2$

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=1}^{4}1\cdot 1=4 \qquad (\varphi_1,\varphi_2)=\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot x_i^2=100$$

$$(\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{4}1\cdot x_i=10 \qquad (\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2=30$$

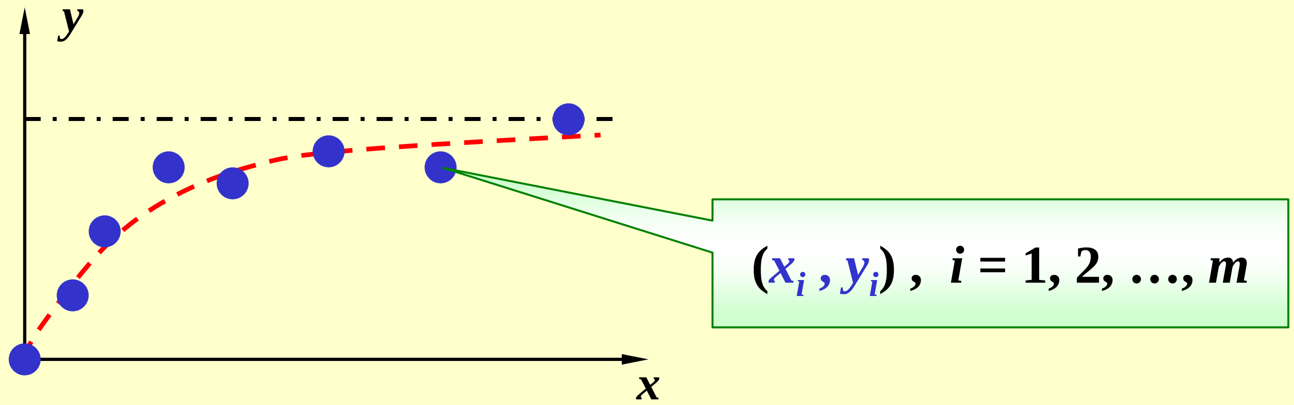
$$(\varphi_0,\varphi_2)=\sum_{i=1}^{4}1\cdot x_i^2=30 \qquad (\varphi_2,\varphi_2)=\sum_{i=1}^{4}x_i^4=354$$

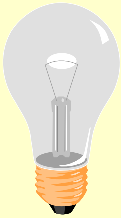
$$(\varphi_0,y)=\sum_{i=1}^{4}1\cdot y_i=58 \qquad (\varphi_1,y)=182 \qquad (\varphi_2,y)=622$$

$$\begin{pmatrix}4 & 10 & 30\\ 10 & 30 & 100\\ 30 & 100 & 354\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}58\\ 182\\ 622\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a_0=-\dfrac{3}{2},\ a_1=\dfrac{49}{10},\ a_2=\dfrac{1}{2} \\ y=P(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{49}{10}x-\dfrac{3}{2}\end{array}$$

$$\|B\|_\infty=484, \quad \|B^{-1}\|_\infty=\frac{63}{4} \Rightarrow cond\,(B)=7623$$

例:





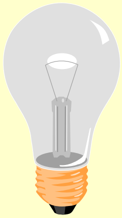
方案一: 设 $y \approx P(x) = \dfrac{x}{ax+b}$

求 a 和 b 使得 $\varphi(a,b) = \sum_{i=1}^{m} \left(\dfrac{x_i}{ax_i+b} - y_i\right)^2$ 最小。

线性化 /* linearization */: 令 $Y = \dfrac{1}{y}$, $X = \dfrac{1}{x}$ ，则

$Y \approx a + bX$ 就是个线性问题

将 (x_i, y_i) 化为 (X_i, Y_i) 后易解 a 和 b。



方案二：设 $y \approx P(x) = a\,e^{-b/x}$ $\quad (\,a > 0,\ b > 0\,)$

线性化：由 $\ln y \approx \ln a - \dfrac{b}{x}$ 可做变换

$$Y = \ln y\,,\quad X = \frac{1}{x}\,,\quad A = \ln a\,,\quad B = -b$$

$Y \approx A + BX$ 就是个线性问题

将(x_i, y_i)化为(X_i, Y_i)后易解 A 和B

$$\Rightarrow\quad a = e^{A}\,,\ b = -B\,,\ P(x) = a\,e^{-b/x}$$

例8 设数据(x_i,y_i)，用数学模型$y=ae^{bx}$拟合，确定a,b.

i	0	1	2	3	4
x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46
$\ln y_i$	1.629	1.756	1.876	2.008	2.135

解 $y=ae^{bx} \longrightarrow \ln y=\ln a+bx=A+bx \longrightarrow Z=A+bx$

取 $\varphi_0(x)=1 \quad \varphi_1(x)=x \quad w(x)=1$

$$(\varphi_0,\varphi_0)=5 \quad (\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{4}x_i=7.5 \quad (\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{4}x_i^2=11.875$$

$$(\varphi_0,z)=\sum_{i=0}^{4}z_i=9.404 \quad (\varphi_1,z)=\sum_{i=0}^{4}x_iz_i=14.422$$

$$\begin{cases}5A+7.50b=9.404\\7.50A+11.875b=14.422\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}A=1.122\\b=0.505\end{cases} \longrightarrow$$

A=3.071

$$y=3.071e^{0.505x}$$

用正交多项式做最小二乘拟合

- 若 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\in C[a,b]$ 是关于点集 $\{x_i\}$ 带权 $w(x_i)$ 正交的函数族，即

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{m}w(x_i)\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)=\begin{cases}0 & j\neq k\\ A_k>0 & j=k\end{cases}$$

则法方程的解为

$$a_k^*=\frac{(f,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}=\frac{\sum_{i=0}^{m}w(x_i)f(x_i)\varphi_k(x_i)}{\sum_{i=0}^{m}w(x_i)\varphi_k^2(x_i)}$$

平方误差

$$\|\delta\|_2^2=\|f\|_2^2-\sum_{k=0}^{n}A_k(a_k^*)^2$$

- 正交多项式递推公式

$$\begin{cases}P_0(x)=1\\ P_1(x)=(x-a_1)P_0(x)\\ P_{k+1}(x)=(x-a_{k+1})P_k(x)-\beta_kP_{k-1}(x)\end{cases}$$

$$\alpha_{k+1}=\frac{(xP_k,P_k)}{(P_k,P_k)}\qquad \beta_k=\frac{(P_k,P_k)}{(P_{k-1},P_{k-1})}$$

例：用 $y=c_0+c_1x+c_2x^2$ 来拟合

x	1	2	3	4
y	4	10	18	26

，$w\equiv 1$

$$a_k=\frac{(\varphi_k, y)}{(\varphi_k,\varphi_k)}$$

解：通过正交多项式 $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 求解

设 $y=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)$

$$\varphi_0(x)=1 \qquad a_0=\frac{(\varphi_0, y)}{(\varphi_0,\varphi_0)}=\frac{29}{2}$$

$$\alpha_1=\frac{(x\varphi_0,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}=\frac{5}{2} \qquad \varphi_1(x)=(x-\alpha_1)\varphi_0(x)=x-\frac{5}{2} \qquad a_1=\frac{(\varphi_1, y)}{(\varphi_1,\varphi_1)}=\frac{37}{5}$$

$$\alpha_2=\frac{(x\varphi_1,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}=\frac{5}{2} \qquad \beta_1=\frac{(\varphi_1,\varphi_1)}{(\varphi_0,\varphi_0)}=\frac{5}{4}$$

$$\varphi_2(x)=(x-\frac{5}{2})\varphi_1(x)-\frac{5}{4}\varphi_0(x)=x^2-5x+5 \qquad a_2=\frac{(\varphi_2, y)}{(\varphi_2,\varphi_2)}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y=\frac{29}{2}\times 1+\frac{37}{5}(x-\frac{5}{2})+\frac{1}{2}(x^2-5x+5)$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{49}{10}x-\frac{3}{2}$$

与前例结果一致。

注：手算时也可用待定系数法确定函数族。

有理逼近

- 对于$f(x)\in C[a,b]$，用有理函数

$$R_{nm}(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{\sum_{i=0}^{n}a_i x^i}{\sum_{k=0}^{m}b_k x^k}$$

有理逼近

逼近$f(x)$的问题.

- 如果$\|f(x)-R_{nm}(x)\|_\infty$ 最小就得到最佳一致逼近

- 如果$\|f(x)-R_{nm}(x)\|_2$ 最小则得到最佳有理平方逼近函数.

例1 ln(1+x)的有理逼近与多项式逼近的比较

ln(1+x)的泰勒展式的n次部分和:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{(k-1)} \frac{x^k}{k} \qquad \mathbf{x} \in [-1, 1]$$

它的有理逼近函数

$$\ln(1+x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{1 \cdot x}{2 + \cfrac{1 \cdot x}{3 + \cfrac{2^2 \cdot x}{4 + \cfrac{2^2 \cdot x}{5 + \dots}}}}}$$

$$= \frac{x}{1} + \frac{1 \cdot x}{2} + \frac{1 \cdot x}{3} + \frac{2^2 \cdot x}{4} + \frac{2^2 \cdot x}{5} + \dots$$

取有理逼近的**2,4,6,8**项，分别得到有理逼近

$$R_{11}(x)=\frac{2x}{2+x}\qquad R_{22}(x)=\frac{6x+3x^2}{6+6x+x^2}$$

$$R_{33}(x)=\frac{60x+60x^2+11x^3}{60+90x+36x^2+3x^3}$$

$$R_{44}(x)=\frac{420x+630x^2+260x^3+25x^4}{420+840x+540x^2+120x^3+6x^4}$$

n	$S_{2n}(1)$	ε_s	$R_{mn}(1)$	ε_R
1	0.5	0.19	0.667	0.026
2	0.58	0.11	0.69231	0.00084
3	0.617	0.076	0.693122	0.000025
4	0.634	0.058	0.69314642	0.00000076

辗转相除法

$$\frac{2x^4+45x^3+381x^2+1353x+1511}{x^3+21x^2+157x+409}$$

6次乘法，1次除法，7次加法

$$=2x+3+\frac{4x^2+64x+284}{x^3+21x^2+157x+409}$$

$$=2x+3+\frac{4}{\dfrac{x^3+21x^2+157x+409}{x^2+16x+71}}$$

$$=2x+3+\frac{4}{x+5+\dfrac{6x+54}{x^2+16x+71}}$$

$$=2x+3+\frac{4}{x+5+\dfrac{6}{\dfrac{x^2+16x+71}{x+9}}}$$

$$= 2x + 3 + \cfrac{4}{x + 5 + \cfrac{6}{x + 7 + \cfrac{8}{x + 9}}}$$

$$= 2x + 3 + \frac{4}{x+5} + \frac{6}{x+7} + \frac{8}{x+9}$$

3次除法，1次乘法，7次加法

■帕德逼近

设函数f(x)在的Taylor展式为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k+\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}x^{N+1}$$

它的部分和为

$$P(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k=\sum_{k=0}^{N}c_k x^k$$

定义11 设 $f\in C^{N+1}(-a,a), N=n+m$ 如果

$$R_{nm}(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+\dots+a_nx^n}{1+b_1x+\dots+b_mx^m}$$

$P_n(x),Q_n(x)$
无公因子

满足条件

$$R_{nm}^{(k)}(0)=f^{(k)}(0),\quad (k=0,1,\dots,N)$$

则**R_{nm}(x)**称为函数**f(x)**在**x=0**处的**(n, m)**阶帕德逼近，记作**R(n, m)**

构造函数 $h(x)=P(x)Q_m(x)-P_n(x)$

求 $h^{(k)}(0)=0,\quad (k=0,1,\dots,N)$

$$h^{(k)}(0)=(P(x)Q_m(x)-P_n(x))^{(k)}|_{x=0}=0$$

$$(P(x)Q_m(x)-P_n(x))^{(k)}|_{x=0}=\sum_{j=0}^{k}C_k^j(P(x))^{(j)}(Q_m(x))^{(k-j)}-(P_n(x))^{(k)}|_{x=0}$$

b_0=1;

b_j=0(j>m);

a_k=0(k>n)

$c_j=\frac{1}{j!}f^{(j)}(0)$

$$=k!\sum_{j=0}^{k}c_jb_{k-j}-k!a_k=0$$

$$a_k=\sum_{j=0}^{k-1}c_jb_{k-j}+c_k,\quad (k=0,1,\dots,n)$$

$$-\sum_{j=0}^{k-1}c_jb_{k-j}=c_k,\quad (k=n+1,\dots,n+m)$$

定理10 设$f(x)\in C^{N+1}(-a,a)$, $N=n+m$, 则有理函数 $R_{nm}(x)$是$f(x)$的(n, m)阶帕德逼近

$$R_{nm}(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{\sum_{i=0}^{n}a_i x^i}{\sum_{k=0}^{m}b_k x^k}$$

$$\Updownarrow$$

多项式$P_n(x)$及$Q_m(x)$的系数$a_0, a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_m$满足

$$a_k=\sum_{j=0}^{k-1}c_j b_{k-j}+c_k,\quad (k=0,1,\ldots,n)$$

$$-\sum_{j=0}^{k-1}c_j b_{k-j}=c_k,\quad (k=n+1,\ldots,n+m)$$

例10 求f(x)=ln(1+x)的帕德逼近R(2,2)

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$$

$$c_0=0,c_1=1,c_2=-\frac{1}{2},c_3=\frac{1}{3},c_4=-\frac{1}{4}$$

$$-\sum_{j=0}^{k-1}c_jb_{k-j}=c_k \Rightarrow \begin{cases} -b_2+\frac{1}{2}b_1=\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}b_2-\frac{1}{3}b_1=-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1=1 \\ b_2=\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$a_0=c_0=0 \qquad a_1=c_0b_1+c_1=1 \qquad a_2=c_0b_2+c_1b_1+c_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$R_{22}(x)=\frac{x+\frac{1}{2}x^2}{1+x+\frac{1}{6}x^2}=\frac{6x+3x^2}{6+6x+x^2}$$

误差估计

$$f(x)Q_m(x) - P_n(x) = x^{n+m+1}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} b_k c_{n+m+1+l-k}\right)x^l$$

$$f(x) - R_{mn}(x) = \frac{x^{n+m+1}\sum_{l=0}^{\infty} r_l x^l}{Q_m(x)}$$

$$r_l = \sum_{k=0}^{m} b_k c_{n+m+l+1-k}$$

当 **|x|<1** 时

$$r_0 = \sum_{k=0}^{m} b_k c_{n+m+1-k}$$

$$f(x) - R_{mn}(x) \approx r_0 x^{n+m+1}$$

最佳平方三角逼近与快速Fourier变换

■最佳平方三角逼近与三角插值

以2π为周期的平方可积函数f(x)，用三角多项式S(x)做最佳平方逼近函数

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + \cdots + a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx$$

Fourier系数

Fourier级数 $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

逼近误差为:

$$\|f(x)-S(x)\|_2^2=\|f(x)\|_2^2-\|S(x)\|_2^2$$

Bessel不等式

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(x)]^2dx$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}b_k=0$$

在给定的离散点集 $\{x_j = \frac{2\pi}{N} j, j = 0,1,\cdots,N-1\}$ 的情况

当N=2m+1时

$$\sum_{j=0}^{2m} \sin lx_j \sin kx_j = \begin{cases} 0 & l \neq k, l = k = 0 \\ \dfrac{2m+1}{2} & l = k \neq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{2m} \cos lx_j \cos kx_j = \begin{cases} 0 & l \neq k \\ \dfrac{2m+1}{2} & l = k \neq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{2m} \sin lx_j \cos kx_j = 0, 0 \leq k, j \leq m$$

函数族 $\{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos mx, \sin mx\}$在点集$\{x_j = \frac{2\pi j}{2m+1}\}$ 正交。

f(x)的最小二乘三角逼近为：（取N=2m+1）

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$ **n<m**

$$a_k=\frac{2}{2m+1}\sum_{j=0}^{2m}f_j\cos\frac{2\pi jk}{2m+1}$$

$$b_k=\frac{2}{2m+1}\sum_{j=0}^{2m}f_j\sin\frac{2\pi jk}{2m+1}$$

n=m时，为三角插值多项式

若n=m,有 $S_m(x_j)=f_j$ **(j=0,1,…,2m)**

假设f(x)是以2π为周期的复函数，给定N个等分点

$$x_j = \frac{2\pi}{N} j(j = 0,1,\ldots,N-1)$$

及其函数值 $f_j = f(\frac{2\pi}{N} j)$

[0,2 π]上的正交函数族 $\{1, e^{ix}, \ldots, e^{i(N-1)x}\}$

正交函数族各函数的采样值 $\phi_j = (1, e^{i(j\frac{2\pi}{N})}, \cdots, e^{i(j\frac{2\pi}{N}(N-1))})^T$

$$(\phi_l, \phi_s) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i(l\frac{2\pi}{N}k)} e^{-i(s\frac{2\pi}{N}k)} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i((l-s)\frac{2\pi}{N}k)} = \begin{cases} 0 & l \neq s \\ N & l = s \end{cases}$$

正交

f(x)在N个点x_j=2π j/N,(j=0,1,…,N-1)上的最小二乘Fourier逼近为

$$S(x)=\sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikx} \qquad \mathbf{n \leqslant N}$$

离散Fourier变换

其中

$$c_k=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-ikj\frac{2\pi}{N}}$$

当n=N时，S(x)为f(x)的插值函数，有

反Fourier变换

$$f_j=\sum_{j=0}^{N-1} c_k e^{-i(kj\frac{2\pi}{N})}$$

§ 8 快速傅立叶变换 /* Fast Fourier Transform */

➢ 问题的背景 /* background */

傅立叶变换 —— 函数展开为三角级数

设 $f(x)$ 周期为2π，在 $[0, 2\pi]$ 上展开为三角级数 $\sum_{j=0}^{\infty} C_j e^{i(jx)}$，

其中C_j 为复系…算时要取

级数的前 N…重合。

即：给定$[0, 2\pi$…$)$上的函

数值 $f_k = f(x_k)$，…满足插值条件 $S(x_k) = f_k$。

总之要进行形如 $C_j = \sum_{k=0}^{N-1} x_k W^{kj}$ 的计算，其中$\{x_k\}$已知，$W = e^{\pm i\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$

$$C_j = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k\, e^{-i\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)} \quad (j = 0, 1, \dots, N-1)$$

N个未知数

N个方程

Discrete Fourier Transform

$$f_k = \sum_{j=0}^{N-1} C_j\, e^{i\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

Inverse of DFT

➢ Fast Fourier Transform

快速计算 $C_j = \sum_{k=0}^{N-1} x_k W^{kj}$ $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$，其中 $W = e^{\pm i\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$

直接计算需复数乘法 N^2 次 ☜ 降到 $N \cdot \log N$

由于W的周期性$W^{qN+s} = W^s$，W^{kj}实际上只有$W^0 \ldots W^{N-1}$这 N 个不同的值。若 N 为偶数，则W^{kj}只有 $N/2$ 个不同值。

先合并同类项，再做乘法。

$$c_j = \sum_{k=0}^{N/2-1} x_k w_N^{jk} + \sum_{k=0}^{N/2-1} x_{N/2+k} w_N^{j(N/2+k)} = \sum_{k=0}^{N/2-1} [x_k + (-1)^j x_{N/2+k}] w_N^{jk}$$

将N点的DFT归结为两个N/2点的DFT

$$c_{2j} = \sum_{k=0}^{N/2-1} [x_k + x_{N/2+k}] w_{N/2}^{jk}$$

$$c_{2j+1} = \sum_{k=0}^{N/2-1} [x_k - x_{N/2+k}] w_N^k w_{N/2}^{jk}$$

如此反复施行二分操作，就得到FFT算法

例： $N = 2^3 = 8$，计算 $C_j = \sum_{k=0}^{7} x_k W^{jk}$， $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

技巧：将 k, j 先 … ary numbers */

一般地：取 $N = 2^p$，

每个 C_j 用 $2p$ 次乘法，共用

$2N\log_2 N$ 次乘法。

利用 $W^{j_0 2^{p-1}} = (-1)^{j_0}$，还可以进一步化简到 $N(p-1)/2$ 次乘法。

W^{jk} … $\times 2^1) + j_0(k_2\,k_1\,k_0)$

$= W$ …

$$C_{(j_2 j_1 j_0)} = \sum_{k_0=0}^{1}\left\{\sum_{k_1=0}^{1}\left[\sum_{k_2=0}\underbrace{x_{(k_2k_1k_0)}}_{A_0(k_2k_1k_0)} W^{j_0(k_2k_1k_0)}\right] W^{j_1(k_1k_0 0)}\right\} W^{j_2(k_0 00)}$$

$\|$

$A_3(j_2 j_1 j_0)$

$A_1(k_1 k_0 j_0)$

$A_2(k_0 j_1 j_0)$

2×3次乘法

全部计算需要2×3 ×8次乘法

二进制表示A_1 $A_1(k_1k_0 0) = A_0(0k_1k_0) + A_0(1k_1k_0)$

$A_1(k_1k_0 1) = [A_0(0k_1k_0) - A_0(1k_1k_0)]w^{(0k_1k_0)}$

十进制表示A_1 $A_1(2k) = A_0(k) + A_0(k+2^2)$

$A_1(2k+1) = [A_0(k) - A_0(k+2^2)]w^k$

$k=(0k_1k_0)$

二进制表示A_2 $A_2(k_0 0 j_0) = A_1(0k_0 j_0) + A_1(1k_0 j_0)$

$A_2(k_0 1 j_0) = [A_1(0k_0 j_0) - A_1(1k$

十进制表示A_2 $A_2(k2^2 + j) = A_1(2k+j) + A_1(2k+j$

$A_2(k2^2 + j + 2) = [A_1(2k+j) - A_1(2k+j+2^2)]w^{2k}$

k=0,1;j=0,1

二进制表示$\mathbf{A_3}$ $A_3(0j_1j_0)=A_2(0j_1j_0)+A_2(1j_1j_0)$

$$A_1(1j_1j_0)=A_2(0j_1j_0)-A_2(1j_1j_0)$$

j=0,1,2,3

十进制表示$\mathbf{A_3}$ $A_3(j)=A_2(j)+A_2(j+2^2)$

$$A_3(j+2^2)=A_2(j)-A_2(j+2^2)$$

设$a_0(k)=x(k)=x_k$，逐次计算到$A_3(j)=c_j$,见表3-2

一般情况下的FFT计算公式:

$$\begin{cases} A_q(k2^q+j)=A_{q-1}(k2^{q-1}+j)+A_{q-1}(k2^{q-1}+j+2^{p-1}) \\ A_q(k2^q+j+2^{q-1})=[A_{q-1}(k2^{q-1}+j)-A_{q-1}(k2^{q-1}+j+2^{p-1})]w^{k2^{q-1}} \end{cases}$$

$q=1,\cdots,p$ $\quad k=0,1,\cdots,2^{p-q}-1$ $\quad j=0,1,\cdots,2^{q-1}-1$

改进的FFT算法:

Step1 给出数组$A_1(N)$,$A_2(N)$及$w(N/2)$

Step2 将已知的记录复数数组$\{x_k\}$输入到单元$A_1(k)$中$k=0\ldots N-1$

Step3 计算$w^m=\exp(-i(2\pi m/N))$存放在单元$w(m)$中，$m=0\ldots.(N/2)-1$

Step4 q循环从1到p,若q为奇数,做step5，否则做step6.

Step5 $k=0\ldots2^{(p-q)}-1, j=0\ldots2^{q-1}-1$,计算

$$\begin{cases} A_2(k2^q+j)=A_1(k2^{q-1}+j)+A_1(k2^{q-1}+j+2^{p-1}) \\ A_2(k2^q+j+2^{q-1})=[A_1(k2^{q-1}+j)-A_1(k2^{q-1}+j+2^{p-1})]w(k2^{q-1}) \end{cases}$$

转step7

Step6 k=0…$2^{(p-q)}$-1,j=0…2^{q-1}-1,计算

$$\begin{cases} A_1(k2^q + j) = A_2(k2^{q-1} + j) + A_2(k2^{q-1} + j + 2^{p-1}) \\ A_1(k2^q + j + 2^{q-1}) = [A_2(k2^{q-1} + j) - A_2(k2^{q-1} + j + 2^{p-1})]w(k2^{q-1}) \end{cases}$$

Step7 若q=p转step8,otherwise,q=q+1转step4

Step8 q循环结束，若p=偶数，$A_1(j) \rightarrow A_2(j)$,则 $c_j=A_2(j)(j=0,1,\ldots N-1)$即为所求。

例13 设 $f(x)=x^4-3x^3+2x^2-\tan x(x-2)$

给定数据 $\{x_j, f(x_j)\}_{j=0}^{7}, x_j=j/4$

确定三角插值多项式