# 预备知识

- ▶特殊矩阵 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$
- 1) 对角阵: 当i≠j时, a<sub>ij</sub>=0
- 2) 三对角阵: 当|i-j|>1时, a<sub>ij</sub>=0
- 3) 上三角阵: 当i>j时, a<sub>i i</sub>=0
- 4) 上Hessenberg阵: 当i>j时, a<sub>ij</sub>=0
- 5) 对称阵: A=AT
- 6) 对称正定阵: A=A<sup>T</sup> and (Ax, x)>0
- 7) 正交阵: A-1=AT
- 8)初等置换阵:由单位阵I交换第i行(行)与第j行(列)
- 9) 置换阵: 由初等置换阵的成绩得到的矩阵

定理1:设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  下述命题等价

- 1) 对任何  $b \in R^n$  方程组Ax = b有唯一解
- 2) 齐次方程组Ax=0只有唯一解x=0
- $3)\det(A) \neq 0$
- 4)A-1存在
- 5)rank(A)=n

定理2 设  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为对称正定阵

- 1)A非奇异, A-1亦对称正定
- 2) 顺序主子阵Ak亦是对称正定阵
- 3)A的特征值都大于零
- 4)A的顺序主子式都大于零。

定理3: 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$  为对称矩阵,若 $det(A_k) > 0(k=1,2,...,n)$ ,或A的特征值都大于零,则A为对称正定阵。

定理4 (Jordan标准型) 设A为n阶矩阵,则存在一个非奇异矩阵P使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_r(\lambda_r) \end{bmatrix}$$

其中

$$J_{i} = \begin{bmatrix} \lambda_{i} & 1 & & & \\ & \lambda_{i} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{i} & 1 \\ & & & & \lambda_{i} \end{bmatrix}_{n_{i} \times n_{i}} \qquad \sum_{i=1}^{r} n_{i} = n$$

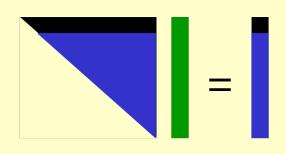
# 第五章 线性代数方程组的解法 /\* Direct Method for Solving Linear Systems \*/



- § 1 高斯消元法 /\* Gaussian Elimination \*/
  - > 高斯消元法:



思 首先将A化为上三角阵 /\* upper-triangular matrix 路 \*/, 再回代求解 /\* backward substitution \*/。



消元 
$$i$$
己  $A^{(1)} = A = (a_{ij}^{(1)})_{n \times n}$  ,  $\vec{b}^{(1)} = \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix}$ 

Step 1: 设 $a_{11}^{(1)} \neq 0$ , 计算因子 $m_{i1} = a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)}$  (i = 2, ..., n)将增广矩阵/\* augmented matrix \*/ 第 i 行 - m;1 × 第1

行,得到
$$a_{11}^{(1)} a_{12}^{(1)} \dots a_{1n}^{(1)} \begin{vmatrix} b_1^{(1)} \\ b_1^{(2)} \end{vmatrix}$$
 其中 
$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1}a_{1j}^{(1)} \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1}b_1^{(1)} \\ (i, j = 2, ..., n) \end{cases}$$

其中
$$\begin{cases}
a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1}a_{1j}^{(1)} \\
b_{i}^{(2)} = b_{i}^{(1)} - m_{i1}b_{1}^{(1)}
\end{cases}$$

$$(i, j = 2, ..., n)$$

Step k: 设 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ , 计算因子 $m_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$  (i = k + 1, ..., n)

且计算 
$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)} \end{cases}$$
$$(i, j = k + 1, ..., n)$$

共进行
$$n-1$$
步



$$x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)}$$

$$x_{i} = \frac{b_{i}^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_{j}}{a_{ii}^{(i)}} \qquad (i = n-1, ..., 1)$$

定理 若A的所有顺序主子式/\* determinant of leading principal submatrices \*/ 均 下为0,则高斯消元无需换行即可进行到底,得到唯一解。

注:事实上,只要A非奇异,即A-1存在,则可通过逐次 消元及行交换,将方程组化为三角形方程组,求出唯 一解。

推论: 如果A的顺序主子式 $D_k \neq 0(k=1,2,...,n-1)$ ,则

证明: 用归纳法证明充分性

当k=1时,定理显然成立。

$$\begin{cases} a_{11} = D_1 \\ a_{kk}^{(k)} = D_k / D_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots, n) \end{cases}$$

假设充分性对k-1成立,下面证明定理充分性对k亦成立。

设 $\mathbf{D}_{i} \neq \mathbf{0}(i=1,2,...,k)$ ,由归纳法假设有  $a_{ii}^{(i)} \neq 0$  (i=1,2,...,k-1)

用Gauss消去法将A<sup>(1)</sup> 约化到A<sup>(k)</sup>

■ 假设  $a_{ii}^{(i)} \neq 0$  可推出 $\mathbf{D}_{i} \neq \mathbf{0}$ 

# ■矩阵的三角分解

消去法每步的消去相当于对A左乘初等矩阵

$$L_{1}A^{(1)} = A^{(2)}, L_{1}b^{(1)} = b^{(2)}$$

$$L_{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -m_{21} & 1 \\ -m_{31} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & 1 \end{bmatrix}$$

第**k**步消元 
$$L_k A^{(k)} = A^{(k+1)}, L_k b^{(k)} = b^{(k+1)}$$

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & -m_{k+1,k} & 1 \\ & & \vdots & \ddots \\ & & -m & & 1 \end{bmatrix}$$

重复执行消元

$$L_{n-1} \cdots L_2 L_1 A^{(1)} = A^{(n)}$$

$$L_{n-1} \cdots L_2 L_1 b^{(1)} = b^{(n)}$$

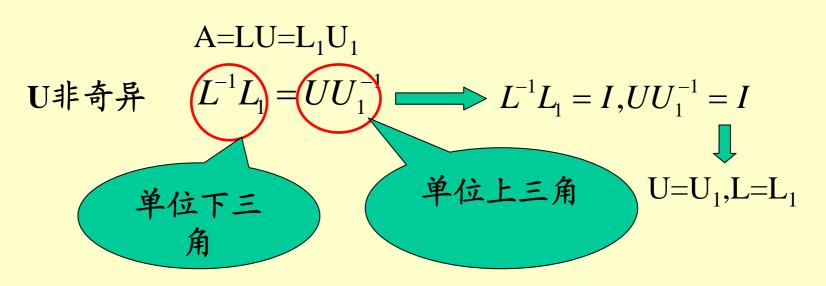
**注U=A<sup>(n)</sup>** 
$$A = L_1^{-1}L_2^{-1}\cdots L_{n-1}^{-1}U = LU$$

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ m_{21} & 1 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

消去法产生了一个将A分解为两个三角矩阵相乘法的因式分解。

定理7(矩阵的LU分解) 设A为n阶矩阵,若A的顺序主子式  $Di \neq 0$ (i=1,2,...,n-1),则A可分解为一个单位下三角矩阵L和一个上三角矩阵U的乘积,且这种分解是唯一的。

证明 由高斯消去法的矩阵分析,得A=LU的存在性下面证明分解的唯一性,A非奇异



▶ 选主元消去法 /\* Pivoting Strategies \*/

例: 单精度解方程组 
$$\begin{cases} 10^{-9}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

/\* 精确解为 
$$x_1 = \frac{1}{1-10^{-9}} = 1.00...0100...$$
和  $x_2 = 2-x_1 = 0.99...9899...*/$ 

## 用Gaussian Elimination计算:

$$m_{21} = a_{21} / a_{11} = 10^{9}_{8 \uparrow}$$
 $a_{22} = 1 - m_{21} \times 1 = 0.0...01 \times 10^{9} - 10^{9} = -10^{9}$ 
 $b_{2} = 2 - m_{21} \times 1 = -10^{9}$ 

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 10^{-9} & 1 \\ 0 & -10^9 & -10^9 \end{bmatrix}$$

小主元/\* Small pivot element \*/ 可能导致计 算失败。

$$\Rightarrow x_2 = 1, x_1 \neq 0$$

★ 全主元消去法 /\* Complete Pivoting \*/

每一步选绝对值最大的元素为主元素,保证  $|m_{ik}| \leq 1$ 

Step k: ① 选取  $|a_{i_k j_k}| = \max_{k \le i, j \le n} |a_{ij}| \ne 0;$ 

- ② If  $i_k \neq k$  then 交换第 k 行与第  $i_k$  行; If  $j_k \neq k$  then 交换第 k 列与第  $j_k$  列;
- ③ 消元

注:列交换改变了x<sub>i</sub>的顺序,须记录交换次序,解完后再换回来。

※ 列主元消去法 /\* Partial Pivoting, or maximal column pivoting \*/
省去换列的步骤,每次仅选一列中最大的元。

$$|a_{i_k,k}| = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}| \neq 0$$

§ 1 Gaussian Elimination – Pivoting Strategies

[10]
 
$$\begin{bmatrix} 10^{-9} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
 $\Rightarrow$ 
 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 10^{-9} & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 
 $\Rightarrow$ 
 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 

$$\Rightarrow x_2 = 1, x_1 = 1 \checkmark$$

注: 列主 法没有全主元法稳定。

注意: 这两个方程组在 数学上严格等价。

算法3(列主元消去法)用A的具有行交换的列主元消去法,消元结果冲掉A,乘数 $m_{ij}$ 冲掉 $a_{ij}$ ,计算解x冲掉常数项b,行列式存放在det中

 $1 \det \leftarrow 1$ 

1)按列选主元 
$$|a_{i_k,k}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}| \neq 0$$

2)若 
$$a_{i_k,k} = 0$$
 则计算停止 (det(A)=0)

$$3)$$
若 $i_k$ =k则转 $4$ ) 否则,换行 
$$a_{kj} \leftrightarrow a_{i_k,j} (j=k,k+1,...,n)$$
 
$$b_k \leftrightarrow b_{i_k}$$
 
$$\det \leftarrow -\det$$

4)消元计算 对i=k+1,...,n

$$a_{ik} \leftarrow m_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$$

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - m_{ik} * a_{kj} \quad j=k+1,...,n$$

$$b_i \leftarrow b_i - m_{ik} * b_k$$

5)  $\det \leftarrow a_{kk} * \det$ 

3若a<sub>nn</sub>=0,停止计算 (det(A)=0)

**4.**回代求解  $b_n \leftarrow b_n/a_{nn}$ 

对i=n-1,...,2,1 
$$b_i \leftarrow (b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} * b_j) / a_{ii}$$

 $5.\det$  ←  $a_{nn}$ \* det

用矩阵运算来描述列主元消去法

$$L_1I_{1i_1}A^{(1)}=A^{(2)}$$
  $L_1I_{1i_1}b^{(1)}=b^{(2)}$   $L_kI_{ki_k}A^{(k)}=A^{(k+1)}$   $L_kI_{ki_k}b^{(k)}=b^{(k+1)}$  初等置换阵  $|\mathbf{m}_{ik}| \leq 1$   $M \in \mathbb{Z}$   $\mathbf{L}_{n-1}I_{n-1i_{n-1}}\cdots L_2I_{2,i_2}L_1I_{1i_1}A=A^{(n)}=U$   $\mathbf{P}b=b^{(n)}$   $\mathbf{P}$  为置换阵  $\mathbf{P}A=\mathbf{L}U$ 

定理8(列主元的三角分解定理)若A为非奇异矩阵,则存在排列阵P,使PA=LU,其中L为单位下三角阵,U为单位上三角阵。

n)

## > 运算量 /\* Amount of Computation \*/

由于计算机中乘除/\* multiplications / divisions \*/ 运算的时 间远远超过加减 /\* additions / subtractions \*/ 运算的时间,故 估计某种算法的运算量时,往往只估计乘除的次数,而且通 常以乘除次数的最高次幂为运算量的数量级。

# **Gaussian Elimination:**

<sup>且</sup> Gaussian Elimination 的总乘除次数为

$$\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{1}{3}n$$
 , 运算量为  $\frac{n^3}{3}$  级。

共进行,

Step k: 设个(k)

共进行
$$n$$

$$x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)}$$

$$x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)}$$

$$y_n = b_n^{(n)} / a_{nn$$

#### § 1 Gaussian Elimination – Amount of Computation

**Complete Pivoting:** 

比 Gaussian Elimination多出 $o\left(\frac{n^3}{3}\right)$ 比较,保证稳定,但费时。

## **Partial Pivoting:**

比 Gaussian Elimination只多出 $o\left(\frac{n^2}{3}\right)$ 比较,略省时,但不保证稳定。

#### **Gauss-Jordan Method:**

运算量约为 $O(n^3/2)$ 。故通常只用于求逆矩阵,而不用于解方程组。求逆矩阵即 $[A|I] \Rightarrow [I|A^{-1}]$ 。

▶ 高斯-若当消去法 /\* Gauss-Jordan Method \*/

与 Gaussian Elimination 的主要区别:

- ☞ 把 a<sub>kk</sub>(k) 所在列的上、下元素全消为0;

$$A \vec{x} = \vec{b} \implies I \vec{x} = A^{-1} \vec{b}$$

Gauss-Jordan消去法完成k-1步

肖去法完成k-1步
$$(A^{(k)}|b^{(k)}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1k} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & 1 & \cdots & 0 & a_{2k} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & a_{k-1k} & \cdots & a_{k-1n} & b_{k-1} \\ & & & a_{kk} & \cdots & a_{kn} & b_k \\ & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nk} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

#### 算法:

1 按列选主元 
$$|a_{i_k,k}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}| \neq 0$$

2换行(当i<sub>k</sub>≠k时)交换(A|b)第k行与第i<sub>k</sub>行元素

3计算乘数 
$$m_{kk} = 1/a_{kk}$$

$$m_{ik} = -\frac{a_{ik}}{a_{kk}} (i = 1, 2, \dots, n, i \neq k)$$
4消元计算 
$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} + m_{ik} a_{kj}$$

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} + m_{ik} a_{kj}$$

$$b_i \leftarrow b_i + m_{ik}b_k$$

5计算主行  $a_{ki} \leftarrow a_{ki} m_{kk} b_k \leftarrow b_k m_{kk}$ 

$$(A \mid b) \to (A^{(k+1)} \mid b^{(k+1)}) = \begin{vmatrix} 1 & & & b_1 \\ & 1 & & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & b_n \end{vmatrix}$$

定理9设A为非奇异矩阵,方程组 $AX=I_n$ 的增广矩阵为  $C=(A|I_n)$ .若对C应用Gauss-Jordan方法化为 $(I_n|T)$ ,则 $A^{-1}=T$