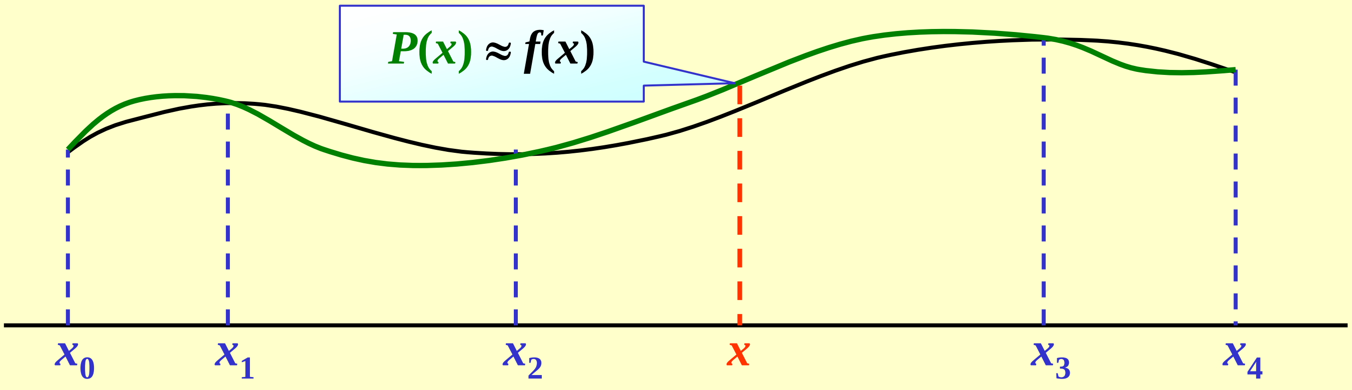
第二章 多项式插值 /* Interpolation */

当精确函数 $y = f(x)$ 非常复杂或未知时，在一系列节点 $x_0 \ldots x_n$ 处测得函数值 $y_0 = f(x_0), \ldots y_n = f(x_n)$，由此构造一个简单易算的近似函数 $P(x) \approx f(x)$，满足条件 $P(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0, \ldots n)$。这里的 $P(x)$ 称为 $f(x)$ 的插值函数。最常用的插值函数是多项式



插值函数：设函数y=f(x)在区间[a,b]上有定义，且已知在点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 上的值

$y_0, y_1, \cdots y_n$,若存在一简单函数P(x),使

$$P(x_i) = y_i \quad (i = 0, \ldots n)。$$

成立，就称P(x)为f(x)的插值函数，点

$x_0, x_1, \cdots x_n$ 称为插值节点，包含插值节点的区间[a,b]称为插值区间，求插值函数P(x)的方法称为插值法。若P(x)是次数不超过n的代数多项式，即 $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

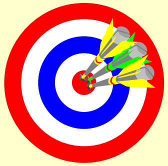
其中a_i为实数，就称P(x)为插值多项式，该插值法称为多项式插值。若P(x)为分段的多项式，就称为分段插值，若P(x)为三角多项式，就称为三角插值。

◆主要研究内容

➢如何求出插值多项式、分段插值函数、样条函数

➢插值多项式的存在唯一性、收敛性、误差估计

§1 拉格朗日多项式 /* Lagrange Polynomial */



求 n 次多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 使得

$$P_n(x_i)=y_i\,,\quad i=0,\ldots,n$$

条件：无重合节点，即 $i\neq j \Longrightarrow x_i\neq x_j$

$n=1$ …… 使得

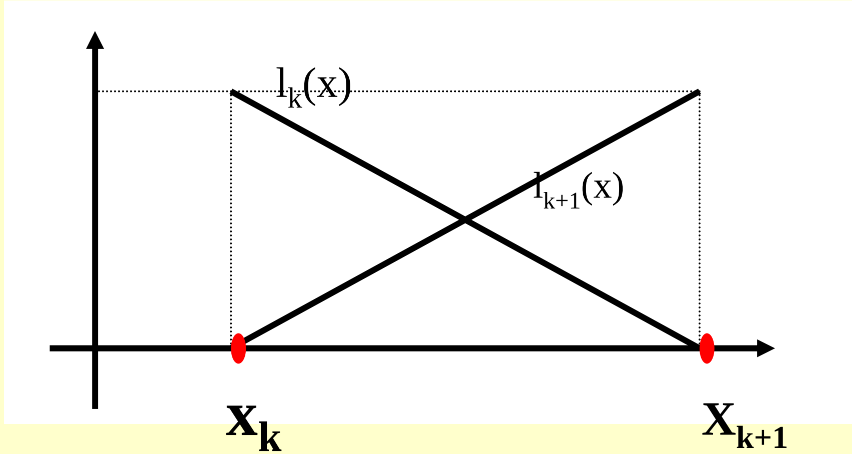
称为拉氏基函数 /* Lagrange Basis */，

满足条件 $l_i(x_j)=\delta_{ij}$ /* Kronecker Delta */

可见 $P_1(x)$ 是过 $(x_0, y$ …… $y_1)$ 两点的直线。

$$\Rightarrow\quad P_1(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

$$=\underbrace{\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)}_{l_0(x)}y_0+\underbrace{\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)}_{l_1(x)}y_1=\sum_{i=0}^{1}l_i(x)y_i$$



$n \ge 1$　希望找到 $l_i(x)$，$i = 0, \ldots, n$ 使得 $l_i(x_j)=\delta_{ij}$；然后令

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)\, y_i$$ ，则显然有 $P_n(x_i) = y_i$ 。

$l_i(x)$　每个 ……

与节点有关，而与 f 无关

Lagrange Polynomial

$l_i(x_i)=1 \Rightarrow C_i = \prod_{j\neq i} \frac{1}{(x_i - x_j)}$

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j\neq i\\ j=0}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)\, y_i$$

插值基函数： 若n次多项式$l_j(x)(j=0,1,\ldots n)$在n+1个节点 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 上满足条件

$$l_j(x_k) = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$$

就称这n+1个n次多项式$l_0(x),l_1(x),\ldots,l_n(x)$为节点$x_0,x_1,\ldots,x_n$上的**n次插值基函数**。

Lagrange多项式也可以写成

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{w_{n+1}(x)}{(x - x_k) w'_{n+1}(x_k)}$$

其中

$$w_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

$$w'_{n+1}(x_k) = (x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x - x_n)$$

定理 (唯一性) 满足 $P(x_i)=y_i,\ i=0,\ldots,n$ 的 n 阶插值多项式是唯一存在的。

证明:

反证：若不唯一，则除了 $L_n(x)$ 外还有另一 n 阶多项式 $P_n(x)$ 满足 $P_n(x_i)=y_i$。

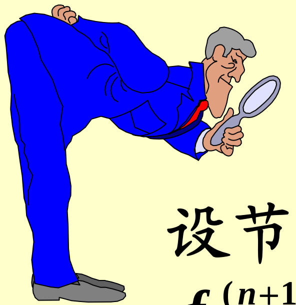
考察 $Q_n(x)=P_n(x)-L_n(x)$，则 Q_n 的阶数 $\le n$

而 Q_n 有 $n+1$ 个不同的根 $x_0 \ldots x_n$ ■

注：若不将多项式次数限制为 n，则插值多项式不唯一。

例如 $P(x)=L_n(x)+p(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ 也是一个插值多项式，其中 $p(x)$ 可以是任意多项式。

注：$\sum_{k=0}^{n} x_k^m l_k(x)=x^m, m=0,1,\ldots,n$



➤ 插值余项 /* Remainder */

设节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，且 f 满足条件 $f \in C^n[a,b]$，$f^{(n+1)}$在$[a\,,b]$内存在，考察截断误差 $\boxed{R_n(x) = f(x) - L_n(x)}$

$R_n(x)$ 至少有 $n+1$ 个根 ➡ $R_n(x) = K(x)\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$

注意这里是对 t 求导

$\varphi(t) = R_n(t) - K(x)\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$

$\varphi(t)$有 $n+2$ 个不同的根 $x_0 \ldots x_n\ x$ ➡ $\varphi^{(n+1)}(\xi_x) = 0, \quad \xi_x \in (a, b)$

$$||$$

$$f^{(n+1)}(\xi_x) - \cancel{L_n^{(n+1)}}(\xi_x) - K(x)(n+1)! = R_n^{(n+1)}(\xi_x) - K(x)\ (n+1)!$$

➡ $K(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$

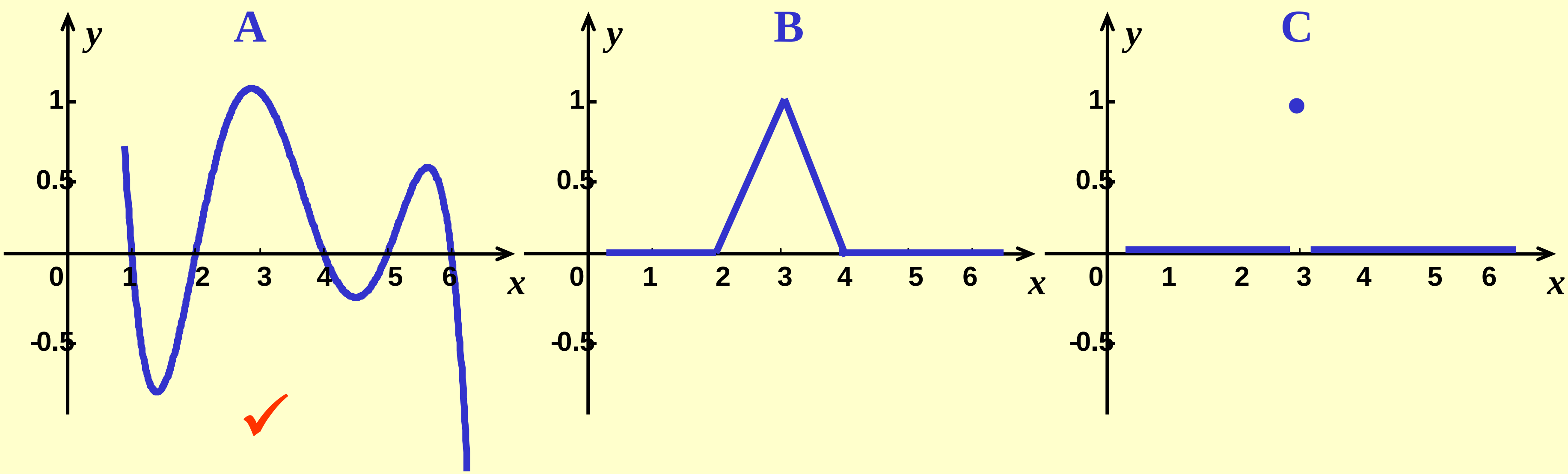
$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

注： ☞ 通常不能确定 ξ_x，而是估计 $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M_{n+1}$, $\forall x \in (a,b)$

将 $\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}|x-x_i|$ 作为误差估计上限。

☞ 当 $f(x)$ 为任一个次数$\le n$ 的多项式时，$f^{(n+1)}(x)\equiv 0$, 可知 $R_n(x)\equiv 0$，即插值多项式对于次数$\le n$ 的多项式是精确的。

Quiz: 给定 $x_i = i+1$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. 下面哪个是 $l_2(x)$的图像？



例1 证明 $$\sum_{i=0}^{5}(x_i - x)^2 l_i(x) = 0$$

其中 $l_i(x)$ 是关于点 $x_0, x_1, \ldots, x_5$ 的插值基函数。

例3 设 $f \in C^2[a,b]$

$$\max_{a\le x\le b}\left| f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right] \right| \le \frac{1}{8}(b-a)^2 M_2$$

其中 $M_2 = \max_{a\le x\le b}| f''(x) |$

例：已知 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

分别利用 $\sin x$ 的1次、2次 Lagrange 插值计算 $\sin 50°$ 并估计误差。

$$50^0=\frac{5\pi}{18}$$

解：$n=1$ 分别利用 x_0, x_1 以及 x_1, x_2 计算

x_0　　x_1　　x_2

⌖ 利用 $x_0=\frac{\pi}{6}$, $x_1=\frac{\pi}{4}$ ➡ $L_1(x)=\frac{x-\pi/4}{\pi/6-\pi/4}\times\frac{1}{2}+\frac{x-\pi/6}{\pi/4-\pi/6}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

内插通常优于外推。选择要计算的 x 所在的区间的端点，插值效果较好。

si… x, $f^{(2)}(\xi_x)=-\sin\xi_x$, $\xi_x\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$

… $\frac{\pi}{4})$

➡ … $\sin 50° = 0.7660444\ldots$

外推 /* extrapolation */ 的…差 ≈ -0.01001

⌖ 利用 $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{3}$ ➡ $\sin 50° \approx$ 0.7…8, $0.00538<\tilde{R}_1\left(\frac{5\pi}{18}\right)<0.00660$

内插 /* interpolation */ 的实际误差 ≈ 0.00596

$n = 2$

$$L_2(x) = \frac{(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})}\times\frac{1}{2} + \frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})}\times\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})}{(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 50^0 \approx L_2(\frac{5\pi}{18}) \approx 0.76543$$

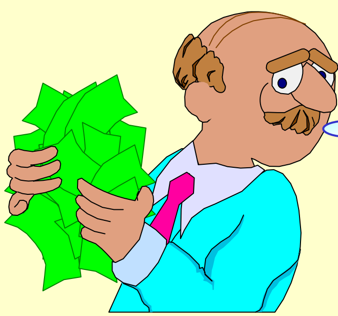
$$R_2(x) = \frac{-\cos\xi_x}{3\,!}(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})\,; \qquad \frac{1}{2} < \cos\xi_x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 0.00044 < R_2\left(\frac{5\pi}{18}\right) < 0.00077$$

$\sin 50° = 0.7660444\ldots$

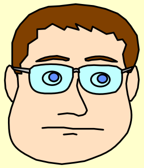
2次插值的实际误差 ≈ 0.00061

高次插值通常优于低次插值

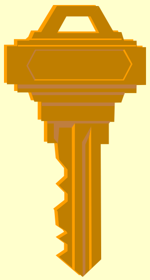


但绝对不是次数越高就越好，嘿嘿……

§ 2 牛顿插值 /* Newton's Interpolation */



Lagrange 插值虽然易算，但若要增加一个节点时，全部基函数 $l_i(x)$ 都需重新算过。



将 $L_n(x)$ 改写成 $\overset{?}{a_0}+\overset{?}{a_1}(x-x_0)+\overset{?}{a_2}(x-x_0)(x-x_1)+\ldots$ $+\overset{?}{a_n}(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$ 的形式，希望每加一个节点时只附加一项上去即可。

➢ 差商（亦称均差）/* divided difference */

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \quad (i \neq j,\ x_i \neq x_j)$$

1阶差商 /* the 1st divided difference of f w.r.t. x_i and x_j */

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k} \quad (i \neq k)$$

2阶差商

K+1阶差商:

$$f[x_0,\ldots,x_{k+1}]=\frac{f[x_0,x_1,\ldots,x_k]-f[x_1,\ldots,x_k,x_{k+1}]}{x_0-x_{k+1}}$$

$$=\frac{f[x_0,\ldots,x_{k-1},x_k]-f[x_0,\ldots,x_{k-1},x_{k+1}]}{x_k-x_{k+1}}$$

差商的性质:

1. $$f[x_0,\ldots,x_k]=\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{\omega'_{k+1}(x_i)}$$

其中 $\omega_{k+1}(x)=\prod_{i=0}^{k}(x-x_i)$, $\omega'_{k+1}(x_i)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k}(x_i-x_j)$

差商的值与 x_i 的顺序无关!

2. 若**f(x)**在**[a,b]**上存在**n**阶导数，且节点 $\mathbf{x_0, x_1, \ldots x_n} \in [a, b]$, 则差商与导数关系如下:

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

➢ 牛顿插值 /* Newton's Interpolation */

$$N_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+a_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

$$\begin{cases} f(x)=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0) & \cdots\cdots\cdots\ 1 \\ f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+(x-x_1)f[x,x_0,x_1] & \cdots\cdots\cdots\ 2 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \\ f[x,x_0,\ldots,x_{n-1}]=f[x_0,\ldots,x_n]+(x-x_n)f[x,x_0,\ldots,x_n] & \cdots\ n-1 \end{cases}$$

将后一式带入前一式

$$\Rightarrow f(x)=\underbrace{f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots+f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})}_{N_n(x)}$$
$$\underbrace{+f[x,x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)}_{R_n(x)}$$

$N_n(x)$

$$a_i=f[x_0,\ldots,x_i]$$

$R_n(x)$

注：☞ 由唯一性可知 $N_n(x) \equiv L_n(x)$，只是算法不同，故其余项也相同，即

$$f[x, x_0, \ldots, x_n]\omega_{k+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{k+1}(x)$$

$$\Rightarrow \quad f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}, \quad \xi \in (x_{\min}, x_{\max})$$

☞ 实际计算过程为

$$\begin{array}{lllll}
f(x_0) & & & & \\
f(x_1) & f[x_0, x_1] & & & \\
f(x_2) & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
\cdots & \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots & & \\
f(x_{n-1}) & \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots & & \\
f(x_n) & f[x_{n-1}, x_n] & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & f[x_0, \ldots, x_n] & \\
f(x_{n+1}) & f[x_n, x_{n+1}] & f[x_{n-1}, x_n, x_{n+1}] & f[x_1, \ldots, x_{n+1}] & f[x_0, \ldots, x_{n+1}]
\end{array}$$

例2 给出f (x) 的函数表, 求4次Newton插值多项式, 并由此计算f (0. 596) 的近似值.

0.40	0.41075					
0.55	0.57815	1.11600				
0.65	0.69675	1.18600	0.28000			
0.80	0.88811	1.27573	0.35893	0.19733		
0.90	1.02652	1.38410	0.43348	0.21300	0.03134	
1.05	1.25382	1.51533	0.52493	0.22863	0.03126	-0.00012

$$N_4(x) = 0.41075 + 1.116(x-0.4) + 0.28(x-0.4)(x-0.55)$$

$$+0.19733(x-.04)(x-.055)(x-0.65)$$

$$+0.03134(x-0.4)(\ldots 55)(x-0.8)$$

f [x, x_0, …x_4] 的近似

$$f(0.596) \approx N_4(\ldots 2$$

$$|R_4(x)| \approx | f[x_0, \cdots, x_5] w_5(0.596) | \leq 3.63 \times 10^{-9}$$

➢ 等距节点公式 /* Formulae with Equal Spacing */

当节点等距分布时： $x_i = x_0 + i\,h \quad (i = 0, \dots, n)$

向前差分 /* forward difference */

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1}(\Delta f_i) = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i$$

向后差分 /* backward difference */

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

$$\nabla^k f_i = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}$$

中心差分 /* centered difference */

$$\delta^k f_i = \delta^{k-1} f_{i+\frac{1}{2}} - \delta^{k-1} f_{i-\frac{1}{2}}$$

其中 $f_{i\pm\frac{1}{2}} = f(x_i \pm \frac{h}{2})$

不变算子: I ; 移位算子: E $\quad \Delta = E - I, \quad \nabla = I - E^{-1}, \quad \delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$

$If_k = f_k \qquad Ef_k = f_{k+1}$

差分的重要性质:

- 线性: 例如 $\Delta(a\ f(x)+b\ g(x)) = a\,\Delta f + b\,\Delta g$
- 若 $f(x)$是 m 次多项式, 则 $\Delta^k f(x)\ (0\le k\le m)$是 $m-k$ 次多项式, 而 $\Delta^k f(x)=0\quad(k>m)$
- 差分值可由函数值算出:

$$\Delta^n f_k = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j} f_{n+k-j}$$

$$\nabla^n f_k = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j} f_{k+j-n}$$

其中 $\binom{n}{j} = \dfrac{n(n-1)...(n-j+1)}{j\,!}$ /* binomial coefficients */

- 函数值可由差分值算出:

$$f_{n+k} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\Delta^j f_k$$

- $$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k!\,h^k}$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}] = \frac{\nabla^k f_n}{k!\,h^k}$$

由 R_n 表达式 ➡

$$f^{(k)}(\xi) = \frac{\Delta^k f_0}{h^k}$$

牛顿公式 $N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$

牛顿前差公式 /* Newton's forward-difference formula */

设 $x = x_0 + th$，则 $N_n(x) = N_n(x_0 + th) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} t \\ k \end{pmatrix} \Delta^k f(x_0)$

$R_n(x) =$ … $f^{(n+1)}$(… (x_0, x_n)

$$\begin{pmatrix} t \\ k \end{pmatrix} = \frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)}{k!}$$

牛顿后… difference formula */

将节点顺…

$$N_n(x) = f(x_n) + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + \ldots + f[x_n, \ldots, x_0](x - x_n)\ldots(x - x_1)$$

设 $x = x_n + th$，则 $N_n(x) = N_n(x_n + th) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} -t \\ k \end{pmatrix} \nabla^k f(x_n)$

注：一般当 x 靠近 x_0 时用前插，靠近 x_n 时用后插，故两种公式亦称为表初公式和表末公式。

例3 给出$f(x)=\cos x$在$x_k=kh, k=0,1,\ldots,6, h=0.1$处的函数值，试用4次等距节点插值公式计算f(0.048)及f(0.566)的近似值并估计误差。

解：差分表。

$f(x_k)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
1.00000					
0.99500	-0.00500				
0.98007	-0.01493	-0.00993			
0.95534	-0.02473	-0.00980	0.00013		
0.92106	-0.03428	-0.00955	0.00025	0.00012	
0.87758	*-0.04348*	-0.00920	0.00035	0.00010	-0.00002
0.82534	*-0.05224*	*-0.00876*	*0.00044*	*0.00009*	-0.00001

$$N_4(0.048) = 1.0000 + 0.48 \times (-0.0050)$$
$$+ \frac{0.48(0.48-1)}{2}(-0.0093)$$
$$+ \frac{1}{3!}0.48(0.48-1)(0.48-2)(0.00013)$$
$$+ \frac{0.48}{4!}(0.48-1)(0.48-2)(0.48-3)(0.00012)$$
$$= 0.99885 \approx \cos 0.048$$

误差

$$|R_4(0.048)| \le \frac{M_5}{5!}|t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)|h^5$$
$$\le 1.5845 \times 10^{-7}$$

$$N_4(0.566) = 0.82534 - 0.34[-0.05244 + 0.66(\frac{-0.00876}{2})$$
$$+(1.66)(\frac{0.00044}{6} + 2.66 \times \frac{0.00009}{24}))]$$
$$= 0.84405$$

误差

$$|R_4(0.566)| \le \frac{M_5}{5!}|t(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)|h^5$$
$$\le 1.7064 \times 10^{-7}$$

§ 3 埃尔米特插值 /* Hermite Interpolation */

不仅要求函数值重合，而且要求若干阶导数也重合。
即：要求插值函数 $\varphi(x)$ 满足 $\varphi(x_i) = f(x_i)$, $\varphi'(x_i) = f'(x_i)$, …, $\varphi^{(mi)}(x_i) = f^{(mi)}(x_i)$.

注： ☞ N 个条件可以确定 $N-1$ 阶多项式。

☞ 要求在1个节点 x_0 处直到 m_0 阶导数都重合的插值多项式即为Taylor多项式

$$\varphi(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(m_0)}(x_0)}{m_0!}(x-x_0)^{m_0}$$

其余项为 $R(x) = f(x) - \varphi(x) = \dfrac{f^{(m_0+1)}(\xi)}{(m_0+1)!}(x-x_0)^{(m_0+1)}$

☞ 一般只考虑 f 与 f' 的值。

重节点均差与Taylor插值

定理3 设 $f \in C^n[a,b]$ $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为**[a,b]**上的互异节点，则

$f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ 是其变量的连续函数

$$\lim_{x \to x_0} f[x_0, x] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$f[x_0, x_0] = \lim_{x \to x_0} f[x_0, x] = f'(x_0)$$

$$f[x_0, x_0, \cdots x_0] = \lim_{x_i \to x_0} f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

一般地，已知 $x_0, \ldots, x_n$ 处有 $y_0, \ldots, y_n$ 和 $y_0', \ldots, y_n'$，求 $H_{2n+1}(x)$ 满足 $H_{2n+1}(x_i) = y_i$，$H'_{2n+1}(x_i) = y_i'$。

$$l_i(x) = \prod_{j \ne i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

解：设 $H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i h_i(x) + \sum_{i=0}^{n} y_i' \hat{h}_i(x)$

其中 $h_i(x_j) = \delta_{ij}$，$h_i'(x_j) = 0$，$\hat{h}$ …，$\hat{h}_i'(x_j) = \delta_{ij}$

这样的Hermite 插值唯一

$h_i(x)$ 有 … $h_i(x) = (A_i x + B_i) l_i^2(x)$

由余下条件 $h_i(x_i) = 1$ 和 $h_i'(x_i) = 0$ 可解 A_i 和 B_i $\Rightarrow$

$$h_i(x) = [1 - 2 l_i'(x_i)(x - x_i)] l_i^2(x)$$

$\hat{h}_i(x)$ 有根 $x_0, \ldots, x_n$，除了 x_i 外都是2重根 $\Rightarrow$ $\hat{h}_i(x) = C_i (x - x_i) l_i^2(x)$

又：$\hat{h}_i'(x_i) = 1 \Rightarrow C_i = 1$ ➡ $\hat{h}_i(x) = (x - x_i) l_i^2(x)$

设 $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$，$f \in C^{2n}[a,b]$ 则 $R_n(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \left[\prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right]^2$

- 当n=1时，考虑区间$[x_k, x_{k+1}]$上的Hermit插值$H_3(x)$,满足条件

$$H_3(x_k) = y_k \qquad H_3(x_{k+1}) = y_{k+1}$$

$$H_3'(x_{k+1}) = m_k \qquad H_3'(x_{k+1}) = m_{k+1}$$

插值基函数为:

$$h_k(x) = (1 + 2\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k})(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}})^2$$

$$h_{k+1}(x) = (1 + 2\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}})(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k})^2$$

$$\hat{h}_k(x) = (x - x_k)(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}})^2 \qquad \hat{h}_{k+1}(x) = (x - x_{k+1})(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}})^2$$

例：设 $x_0 \neq x_1 \neq x_2$，已知 $f(x_0)$、$f(x_1)$、$f(x_2)$ 和 $f'(x_1)$，求多项式 $P(x)$ 满足 $P(x_i) = f(x_i)$，$i = 0, 1, 2$，且 $P'(x_1) = f'(x_1)$，并估计误差。

解法一：首先，P 的阶数 $= 3$ 模仿 Lagrange 多项式的思想，设

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\, h_i(x) + f'(x_1)\, \hat{h}_1(x)$$

其中 $h_i(x_j) = \delta_{ij}$，$h_i'(x_1) = 0$，$\hat{h}_1(x_i) = 0$，$\hat{h}_1'(x_1) = 1$

$h_0(x)$ 有根 x_1, x_2，且 $h_0'(x_1) = 0 \Rightarrow x_1$ 是重根。$h_0(x) = C_0(x - x_1)^2(x - x_2)$

又：$h_0(x_0) = 1 \Rightarrow C_0$ ➡ $h_0(x) = \dfrac{(x-x_1)^2(x-x_2)}{(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)}$

$h_2(x)$ 与 $h_0(x)$ 完全类似。

$h_1(x)$ 有根 $x_0, x_2 \Rightarrow h_1(x$

由余下条件 $h_1(x$

与 Lagrange 分析完全类似

$\hat{h}_1(x)$ 有根 $x_0, x_1, x_2 \Rightarrow \hat{h}_1(x) = C_1(x - x_0)($ … $)(x - x_2)$

又：$\hat{h}_1'(x_1) = 1 \Rightarrow C_1$ 可解。

$$R_3(x) = f(x) - P_3(x) = K(x)(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2), \quad K(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}$$

解法2

因为此多项式通过点 $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$

因此，假设该多项式的形式为

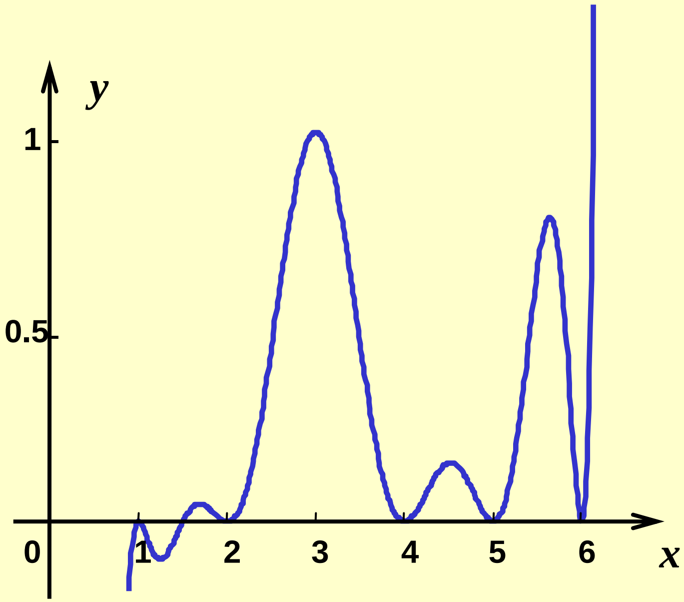
$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + A(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

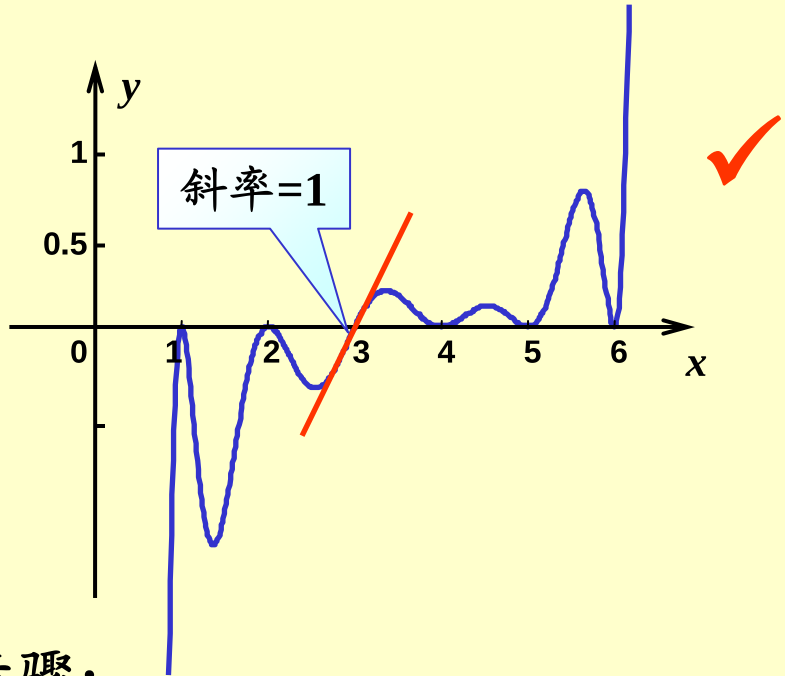
由条件 $P'(x_1) = f'(x_1)$

得到 $$A = \frac{f'(x) - f[x_0, x_1] - (x_1 - x_0) f[x_0, x_1, x_2]}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

截断误差为 $$R(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)(x - x_0)(x - x_1)^2 (x - x_2)$$

Quiz: 给定 $x_i = i + 1,\ i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. 下面哪个是 $\hat{h}_2(x)$的图像?





求Hermite多项式的基本步骤:

① 写出相应于条件的$h_i(x)$、$\hat{h}_i(x)$ 的组合形式;

② 对每一个$h_i(x)$、$\hat{h}_i(x)$ 找出尽可能多的条件给出的根;

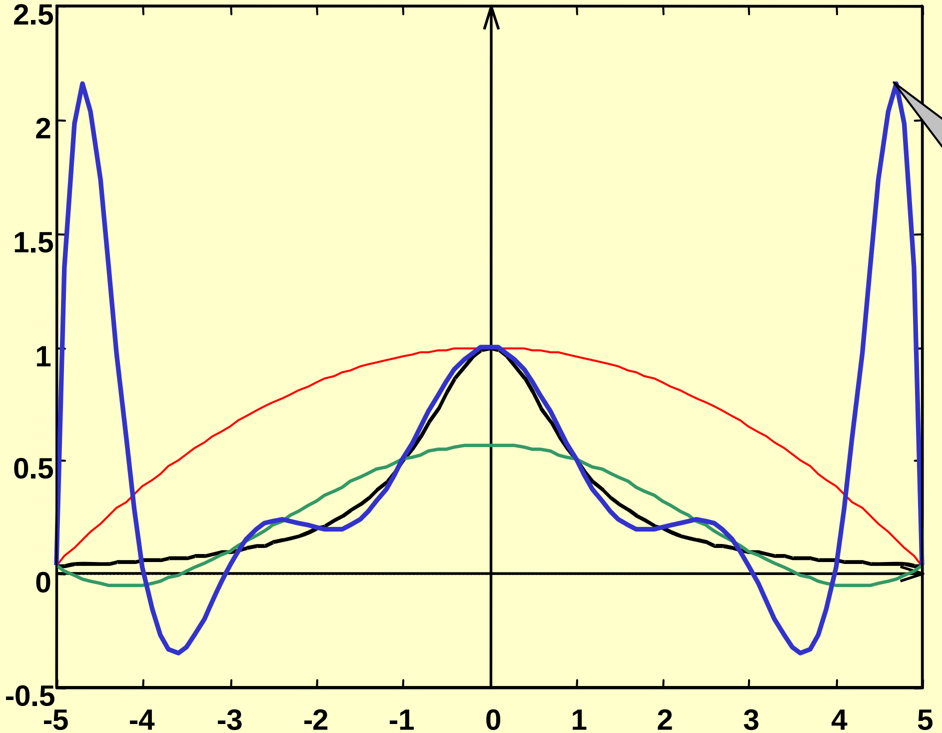
③ 根据多项式的总阶数和根的个数写出表达式;

④ 根据尚未利用的条件解出表达式中的待定系数;

⑤ 最后完整写出$H(x)$。

§ 4 分段低次插值 /* piecewise polynomial approximation */

例：在[–5, 5]上考察 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的 $L_n(x)$。取 $x_i=-5+\dfrac{10}{n}i\quad(i=0,\ldots,n)$



$L_n(x) \not\to f(x)$

n 越大，端点附近抖动越大，称为 **Runge 现象**

分段低次插值

➢ 分段线性插值 /* piecewise linear interpolation */

在每个区间$[x_i, x_{i+1}]$上，用1阶多项式 (直线) 逼近 $f(x)$:

$$f(x) \approx P_1(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1} \quad \text{for} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

在整个区间[a,b]上函数f(x)为 $f(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x)$

其中基函数$l_j(x)$的形式为

$$l_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & x_{j-1} \le x \le x_j \\ \dfrac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} & x_j \le x \le x_{j+1} \\ 0 & x \in [a, b], x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}] \end{cases}$$

误差估计为 $\max_{x_k \le x \le x_{k+1}} |f(x) - P_h(x)| \le \dfrac{M}{2} \max_{x_k \le x \le x_{k+1}} |(x - x_k)(x - x_{k+1})|$

或 $\max_{x_k \le x \le x_{k+1}} |f(x) - P_h(x)| \le \dfrac{M}{8} h^2$ 其中 $M = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$

$h = \max_k |x_{k+1} - x_k|$

分段线性插值函数具有局部非零性质—$l_j(x)$只在x_j附近不为零，在其它地方均为零。

记 $h = \max |x_{i+1} - x_i|$，易证：当 $h \to 0$ 时，$P_1^h(x) \overset{\text{一致}}{\rightarrow} f(x)$

说明 $$1 = \sum_{j=0}^{n} l_j(x) = l_k(x) + l_{k+1}(x), x \in [x_k, x_{k+1}]$$

$$f(x) = [l_k(x) + l_{k+1}(x)] f(x)$$

$$P_1(x) = y_k l_k(x) + y_{k+1} l_{k+1}(x)$$

f(x)在[a,b]上的连续模

$$|f(x) - P_1(x)| \le l_k(x)|f(x) - y_k| + l_{k+1}(x)|f(x) - y_{k+1}|$$

$$\le [l_k(x) + l_{k+1}(x)] w(h_k) = w(h_k) \le w(h)$$

当$f(x) \in C[a, b]$时，有$\lim\limits_{h \to 0} w(h) = 0$

由前式推出 $$\max_{a \le x \le b} |f(x) - P_1(x)| \le w(h)$$

$$\lim_{h \to 0} P_1^h(x) = f(x)$$

失去了原函数的光滑性。

- 分段Hermite插值 /* Hermite piecewise polynomials */

给定 $x_0, \ldots, x_n$； $y_0, \ldots, y_n$； $y'_0, \ldots, y'_n$

在$[x_i, x_{i+1}]$上利用两点的 y 及 y' 构造3次Hermite函数

满足如下条件:

1. $I_h(x) \in C^1[a, b]$

2 $I_h(x_k) = f_k, I'_h(x_k) = f'_k$

3. $I_h(x)$在每个小区间$[x_k, x_{k+1}]$上是三次多项式

$$I_h(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)\left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 f_k$$

$$+ \left(1 + 2\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 f_{k+1} + (x - x_k)\left(\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\right)^2 f'_k$$

$$+ (x - x_{k+1})\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right)^2 f'_{k+1}$$

导数一般不易得到。

定理4: $f \in C^4[a,b]$ **$I_h(x)$ 是f(x)的分段三次Hermit插值多项式子，节点为** $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

则

$$\max_{a \le x \le b} | f(x) - I_h(x) | \le \frac{1}{384} h_k^4 \max_{a \le x \le b} | f^{(4)}(x) |$$

在整个区间[a,b]上表示为 $I_h(x)=\sum_{j=0}^{n}[f_j h_j(x)+f_j'\hat{h}_j(x)]$

其中

$$h_j(x)=\begin{cases}(1+2\dfrac{x-x_j}{x_{j-1}-x_j})(\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}})^2 & x_{j-1}\le x\le x_j(j\ne 0)\\ (1+2\dfrac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j})(\dfrac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}})^2 & x_j\le x\le x_{j-1}(j\ne n)\\ 0 & others\end{cases}$$

$$\hat{h}_j(x)=\begin{cases}(x-x_j)(\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}})^2 & x_{j-1}\le x\le x_j(j\ne 0)\\ (x-x_j)(\dfrac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}})^2 & x_j\le x\le x_{j-1}(j\ne n)\\ 0 & others\end{cases}$$

定理3 设$f\in C^1[a,b]$，则当$h\to 0$时，$I_h(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$

说明　由于$h_j(x),\hat{h}_j(x)$是局部非零的，所以有

$$I_h(x)=f_k h_k(x)+f_{k+1}h_{k+1}(x)+f_k'(x)\hat{h}_k(x)+f_{k+1}'(x)\hat{h}_{k+1}(x)$$

$$x_k\le x\le x_{k+1}$$

对$h_j(x),\hat{h}_j(x)$进行估计，有

$$0\le h_k(x)\le 1$$

$$|\hat{h}_k(x)|\le\frac{4}{27}h_k,|\hat{h}_{k+1}(x)|\le\frac{4}{27}h_k$$

当$f(x)=1$时，有　$h_k(x)+h_{k+1}(x)=1$

$$|f(x)-I_h(x)|\le h_k(x)|f(x)-f_k|+h_{k+1}(x)|f(x)-f_{K+1}|+\frac{4}{27}h_k[|f_k'|+|f_{k+1}'|]$$

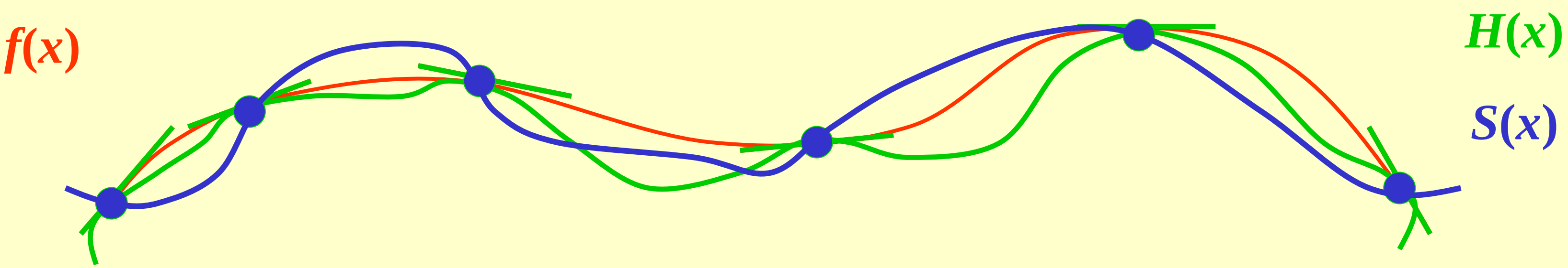
$$\le h_k(x)|f'(\xi)|h_k+h_{k+1}(x)|f'(\eta)|h_{k+1}+\frac{4}{27}[|f_k'|+|f_{k+1}'|]h_k$$

$$\Rightarrow\max_{a\le x\le b}|f(x)-I_h(x)|\le\frac{35}{27}h\max_{a\le x\le b}|f'(x)|\Rightarrow\lim_{h\to 0}I_h(x)=f(x)$$

§5 三次样条 /* Cubic Spline */

定义 设 $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ 。三次样条函数 $S(x) \in C^2[a,b]$ ，且在每个$[x_i, x_{i+1}]$上为三次多项式 /* cubic polynomial */。若它同时还满足 $S(x_i) = f(x_i),\ (i = 0, \ldots, n)$，则称为 f 的三次样条插值函数 /* cubic spline interpolant */.

注：三次样条与分段 Hermite 插值的根本区别在于$S(x)$自身光滑，不需要知道f的导数值（除了在2个端点可能需要）；而Hermite插值依赖于f在所有插值点的导数值。



$S(x)$在每个小区间$[x_j,x_{j+1}]$上要确定4个待定系数

故应确定4n个参数。　根据S(x)的二阶连续性，有

$$S(x_j-0)=S(x_j+0)\quad S'(x_j-0)=S'(x_j+0)\quad S''(x_j-0)=S''(x_j+0)$$

共有3n-3个条件，加上n+1个插值条件，共有4n-2个

需要补充2个条件，常见的有如下3中边界条件

1.已知两端的一阶导数值， $S'(x_0)=f_0',S'(x_n)=f_n'$

2.两端的二阶导数已知 $S''(x_0)=f_0'',S''(x_n)=f_n''$

特殊地，有自然边界条件 $S''(x_0)=S''(x_n)=0$

3.f(x)是以x_n-x_0为周期的周期函数，要求S(x)也是周期函数

$$S(x_n-0)=S(x_0+0)\quad S'(x_n-0)=S'(x_0+0)\quad S''(x_n-0)=S''(x_0+0)$$

- 构造三次样条插值函数的三弯矩法
  /* method of bending moment */

在 $[x_{j-1}, x_j]$上，记 $h_j = x_j -$ … $x_j]$

对应力学中的梁弯矩，故名

则 $S^{[j]}{''}(x)$ 为 1 次多项式，需 2 个点 … 值确定之。

设 $S^{[j]}{''}(x_{j-1}) = M_{j-1}$， $S^{[j]}{''}(x_j) = M_j$ 对于 $x \in [x_{j-1}, x_j]$ 可得到

对每个 j, 此为3次多项式

$$S^{[j]}{''}(x) = M_{j-1}\frac{x_j - x}{h_j} + M_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j}$$

积分2次，可得 $S^{[j]}{'}(x)$ 和 $S^{[j]}(x)$:

$$S^{[j]}{'}(x) = -M_{j-1}\frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + M_{j-1}\frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + A_j$$

$$S^{[j]}(x) = M_{j-1}\frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j\frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + A_j x + B_j$$

利用已知
$S^{[j]}(x_{j-1}) = y_{j-1}$
$S^{[j]}(x_j) = y_j$
可解

$$A_j = \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{M_j - M_{j-1}}{6} h_j \qquad A_j x + B_j = \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1}}{6} h_j^2\right) \frac{x_j - x}{h_j} + \left(y_j - \frac{M_j}{6} h_j^2\right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j}$$

下面解决 M_j： 利用 S' 在 x_j 的连续性

$$[x_{j-1}, x_j]: \; S^{[j]\prime}(x) = -M_{j-1} \frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + f[x_{j-1}, x_j] - \frac{M_j - M_{j-1}}{6} h_j$$

$$[x_j, x_{j+1}]: \; S^{[j+1]\prime}(x) = -M_j \frac{(x_{j+1} - x)^2}{2h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^2}{2h_{j+1}} + f[x_j, x_{j+1}] - \frac{M_{j+1} - M_j}{6} h_{j+1}$$

利用 $S^{[j]\prime}(x_j-) = S^{[j+1]\prime}(x_j+)$，合并关于 M_{j-1}、M_j、M_{j+1} 的同类项，$\lambda_j = \dfrac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}$，$\mu_j = 1 - \lambda_j$，$g_j = \dfrac{6}{h_j + h_{j+1}}\left(f[x_j, x_{j+1}] - f[x_{j-1}, x_j]\right)$，整理后得到： $\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = g_j$

$1 \le j \le n-1$

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{bmatrix}$$

即：有 $n+1$ 个未知数，$n-1$ 个方程。

还需2个边界条件 /* boundary conditions */

✍ 第1类边条件 /* clamped boundary */: $S'(a) = y_0'$, $S'(b) = y_n'$

$$[a, x_1]:\ S^{[1]\prime}(x) = -M_0\frac{(x_1-x)^2}{2h_1} + M_1\frac{(x-a)^2}{2h_1} + f[x_0,x_1] - \frac{M_1-M_0}{6}h_1$$

类似地利用$[\,x_{n-1},\ b\,]$上的 $S^{[n]\prime}(x)$ ➡

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = \dfrac{6}{h_1}\left(f[x_0,x_1] - y_0'\right) = g_0 \\ M_{n-1} + 2M_n = \dfrac{6}{h_n}\left(y_n' - f[x_{n-1},x_n]\right) = g_n \end{cases}$$

✍ 第2类边条件: $S''(a) = y_0'' = M_0$, $S''(b) = y_n'' = M_n$

这时: $\lambda_0 = 0,\ g_0 = 2y_0''$; $\mu_n = 0,\ g_n = 2y_n''$

特别地, $M_0 = M_n = 0$ 称为自由边界 /* free boundary */，对应的样条函数称为自然样条 /* Natural Spline */。

$$\lambda_n = \frac{h_0}{h_{n-1}+h_0}$$

✍ 第3类边条件 /* periodic boundary */ :

当 f 为周期函数时，

$y_n = y_0$, $S'(a^+) = S'(b^-)$

$\Rightarrow\ M_0 = M_n$

$$\lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

$$\mu_n = 1 - \lambda_n = \frac{h_{n-1}}{h_{n-1}+h_0}$$

$$d_n = 6\frac{f[x_0,x_1] - f[x_{n-1},x_n]}{h_0 + h_{n-1}}$$

例5 设**f(x)**为定义在**[27.7,30]**上的函数，在节点 x_i**(i=0,1,2,3)**上的值如下:

$$f(x_0)=f(27.7)=4.1, f(x_1)=f(28)=4.3$$

$$f(x_2)=f(29)=4.1, f(x_3)=f(30)=3.0$$

求三次样条函数**S(x)**,使它满足边界条件

$$S'(27.7)=3.0, S'(30)=-4.0$$

解:

x_i	$f(x_k)$	Δ f	Δ ^{2}f
27.7	4.1		
28	4.3	2/3	
29	4.1	-0.2	-2/3
30	3.0	-1.1	-9/20

$$h_0 = 0.3, h_1 = h_2 = 1 \qquad \lambda_0 = 1, \mu_3 = 1$$

$$\mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j}, j = 1, 2, \cdots n-1 \Rightarrow \mu_1 = \frac{h_0}{h_0 + h_1} = \frac{3}{13} \quad \mu_2 = \frac{h_2}{h_1 + h_2} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_j = 1 - \mu_j, j = 1, 2, \cdots n-1 \Rightarrow \lambda_1 = 1 - \mu_1 = \frac{10}{13} \quad \lambda_2 = 1 - \mu_2 = \frac{1}{2}$$

$$d_0 = \frac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - f_0') = -\frac{140}{3} \qquad d_1 = 6f[x_0, x_1, x_2] = -4$$

$$d_2 = 6f[x_1, x_2, x_3] = -2.7 \qquad d_3 = \frac{6}{h_2}(f_3' - f[x_2, x_3]) = -17.4$$

由此得到方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ \frac{3}{13} & 2 & \frac{10}{13} & \\ & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{-140}{3} \\ -4 \\ -2.7 \\ -17.4 \end{bmatrix}$$

解得，$\mathbf{M_0=-23.531, M_1=0.396, M_2=0.830, M_3=-9.115}$

$$S(x)=\begin{cases} 13.07278(x-28)^3-14.84322(x-28)+0.22000(x-27.7)^3+14.31358(x-27.7) & x\in[27.7,28] \\ 0.06600(29-x)^3+4.23400(29-x)+0.13833(x-28)^3+3.96167(x-28) & x\in[28,29] \\ 0.13833(30-x)^3+3.96167(30-x)-1.51917(x-29)^3+4.51917(x-29) & x\in[29,30] \end{cases}$$

➢ 误差界与收敛性

定理4 设**f(x)**∈C4[a, b], S(x)为满足第一种或第二种条件的三次样条函数，令

$$h=\max_{0\le i\le n-1} h_i, h_i=x_{i+1}-x_i (i=0,1,\cdots,n-1)$$

则有估计式

$$\max_{a\le x\le b}|f^{(k)}(x)-S^{(k)}(x)|\le C_k \max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|h^{4-k}, k=0,1,2$$

其中$C_0=5/384$, $C_1=1/24$, $C_2=3/8$

注： ☞ 另有三转角法得到样条函数，即设 $S^{[j]\prime}(x_j) = m_j$，则易知$[x_{j-1}, x_j]$上的$S^{[j]}(x)$ 就是Hermite函数。再利用S''的连续性，可导出关于m_j的方程组，加上边界条件即可解。

☞ Cubic Spline 由boundary conditions 唯一确定。

☞ 收敛性：若 $f \in C[a,b]$，且 $\dfrac{\max h_i}{\min h_i} \le C < \infty$，则

$$S(x) \xrightarrow{\text{一致}} f(x) \quad as \quad \max h_i \to 0$$

即:提高精度只须增加节点，而无须提高样条阶数。

☞ 稳定性：只要边条件保证 $|\mu_0|, |\lambda_0|, |\mu_n|, |\lambda_n| < 2$，则方程组系数阵为SDD阵，保证数值稳定。

Sketch of the Algorithm: Cubic Spline

① 计算 μ_j, λ_j, g_j;　　② 计算 M_j (追赶法等);

③ 找到 x 所在区间 (即找到相应的 j);

④ 由该区间上的 $S^{[j]}(x)$ 算出 $f(x)$ 的近似值。

插值法小结

- Lagrange : 给出 $y_0 \dots y_n$，选基函数 $l_i(x)$，其次数为节点数 –1。
- Newton $\equiv L_n(x)$，只是形式不同；节点等距或渐增节点时方便处理。
- Hermite: 给出 y_i 及 y_i'，选 $h_i(x)$ 及 $\hat{h}_i(x)$ 。
- Spline: 分段低次, 自身光滑, f 的导数只在边界给出。