最佳平方逼近

已知 $[a, b]$上定义的 $f(x)$，求一个简单易算的近似函数 $P(x)$ 使得 $\int_a^b [P(x)-f(x)]^2 dx$ 最小。

最佳平方逼近函数

$$\|f(x)-S^*(x)\|^2 = \min_{S(x)\in\varphi} \|f(x)-S(x)\|_2^2 = \min_{S(x)\in\varphi} \int_a^b \rho(x)[f(x)-S(x)]^2 dx$$

$$\Updownarrow$$

$$I(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \int_a^b \rho(x)[\sum_{j=0}^n a_j\varphi_j(x) - f(x)]^2 dx$$

多元函数求最小值

定义 考虑一般的线性无关函数族 $\Phi=\{\ \varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots\ ,\ \varphi_n(x),\ \ldots\ \}$，其有限项的线性组合 $P(x)=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\varphi_j(x)$ 称为广义多项式 /* generalized polynomial */.

常见多项式:

- $\{\ \varphi_j(x)=x^j\ \}$ 对应代数多项式 /* algebraic polynomial */
- $\{\ \varphi_j(x)=\cos jx\ \}$、$\{\ \psi_j(x)=\sin jx\ \}\Rightarrow\{\ \varphi_j(x),\ \psi_j(x)\ \}$对应三角多项式 /* trigonometric polynomial */
- $\{\ \varphi_j(x)=e^{k_j x},\ k_i\neq k_j\ \}$ 对应指数多项式 /* exponential polynomial */

设 $P(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)$

则有: $\dfrac{\partial I}{\partial a_k} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \sum_{j=0}^{n} (\varphi_k, \varphi_j) a_j = (\varphi_k, y),\; k = 0, \dots, n$

即: $\begin{pmatrix} \\ b_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j) \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi_0, y) \\ \vdots \\ (\varphi_n, y) \end{pmatrix} = \vec{c}$

法方程组
/*normal equations */

定理 $B\vec{a} = \vec{c}$ 存在唯一解 $\Leftrightarrow$ $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ 线性无关。

证明: 若存在一组系数 $\{\alpha_i\}$ 使得 $\alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + \dots + \alpha_n\varphi_n = 0$

则等式两边分别与 $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ 作内积，得到:

$$\begin{cases} \alpha_0(\varphi_0,\varphi_0) + \alpha_1(\varphi_1,\varphi_0) + \dots + \alpha_n(\varphi_n,\varphi_0) = 0 \\ \alpha_0(\varphi_0,\varphi_1) + \alpha_1(\varphi_1,\varphi_1) + \dots + \alpha_n(\varphi_n,\varphi_1) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0(\varphi_0,\varphi_n) + \alpha_1(\varphi_1,\varphi_n) + \dots + \alpha_n(\varphi_n,\varphi_n) = 0 \end{cases}$$

即: $B\,\vec{\alpha} = \vec{0}$

… … ∎

满足法方程组的解，也满足

$$\|f(x)-S^*(x)\|^2=\min_{S(x)\in\varphi}\|f(x)-S(x)\|_2^2=\min_{S(x)\in\varphi}\int_a^b\rho(x)[f(x)-S(x)]^2dx$$

即 $$\int_a^b\rho(x)[f(x)-S^*(x)]^2dx\le\int_a^b\rho(x)[f(x)-S(x)]^2dx$$

$$D=\int_a^b\rho(x)[f(x)-S(x)]^2dx-\int_a^b\rho(x)[f(x)-S^*(x)]^2dx$$

$$=\int_a^b\rho(x)[S(x)-S^*(x)]^2dx+2\int_a^b\rho(x)[S^*(x)-S(x)][f(x)-S^*(x)]dx$$

由于S*(x)的系数是法方程组的解

$$\boxed{\int_a^b\rho(x)[f(x)-S^*(x)]\varphi_k(x)dx=0}$$

$$D=\int_a^b\rho(x)[S(x)-S^*(x)]^2dx\ge0$$

■

记δ(x)=f(x)−S*(x)，则平方误差为

$$\|\delta(x)\|_2^2 = (f(x)-S^*(x), f(x)-S^*(x))$$

$$= (f(x), f(x)) - (S^*(x), f(x))$$

$$= \|f(x)\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} a_k^*(\varphi_k(x), f(x))$$

若取 $\varphi_k(x)=x^k, \rho(x)=1 \quad f(x)\in C[0,1]$ 求**n**次最佳平方逼近多项式

$$S^*(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

$$(\varphi_j(x), \varphi_k(x)) = \int_0^1 x^{k+j} dx = \frac{1}{k+j+1}$$

Hilbert矩阵

$$(f(x), \varphi_k(x)) = \int_0^1 f(x) x^k dx = d_k$$

当n较大时，Hilbert矩阵是病态的，直接求解相当困难

例5 设 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$,求[0,1]上的一次最佳平方逼近多项式

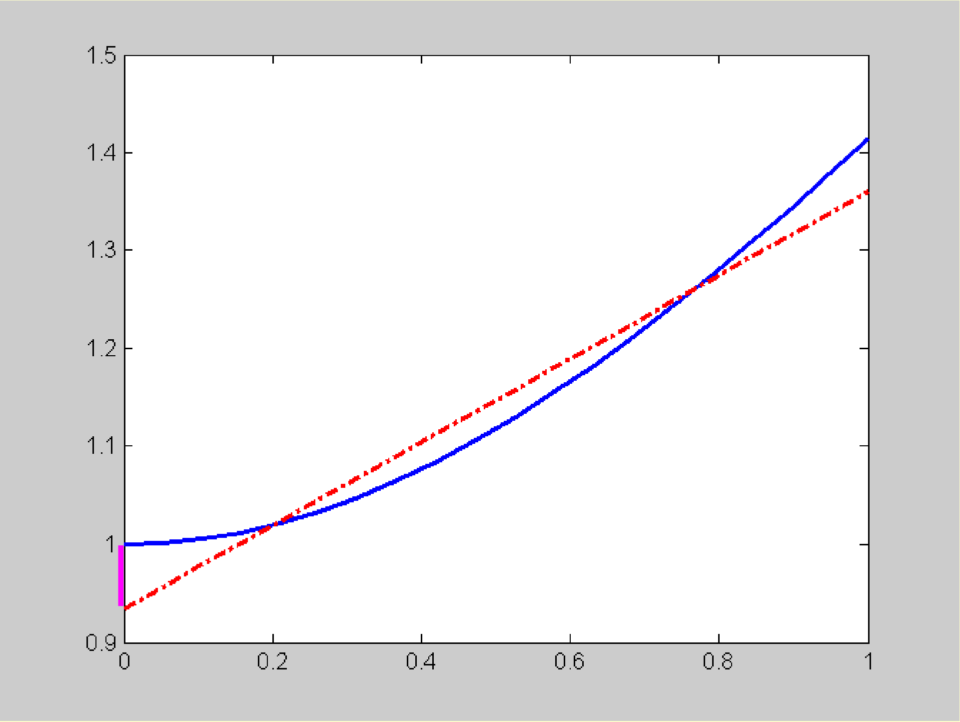
解 $d_0=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\ln(1$

$d_1=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{3}(1+$

得方程组 $\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=$

解出 $a_0=0.934$ $a_1=$

$S^*(x)=0.934+0.42$



平方误差 $\|\delta(x)\|_2^2=(f(x),f(x))-(S_1^*(x),f(x))$

$=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx-0.426d_1-0.934d_0=0.0026$

最大误差 $\|\delta(x)\|_\infty=\max_{0\le x\le 1}|\sqrt{1+x^2}-S_1^*(x)|\approx 0.066$

改进：若能取函数族 $\Phi=\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots\}$，使得任意一对 $\varphi_i(x)$ 和 $\varphi_j(x)$ 两两（带权）正交，则 B 就化为对角阵！

这时直接可算出 $a_k=\dfrac{(\varphi_k, y)}{(\varphi_k, \varphi_k)}$

最佳平方逼近函数为：$S^*(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(f(x),\varphi_k(x))}{\|\varphi_k(x)\|_2^2}\varphi_k(x)$

均方误差为：

$$\|\delta(x)\|_2=\|f(x)-S_n^*(x)\|_2$$

$$=\left(\|f(x)\|_2^2-\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(f(x),\varphi_k(x))}{\|\varphi_k(x)\|_2}\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Bessel不等式 $\sum_{k=0}^{n}(a_k^*\|\varphi_k(x)\|_2)^2\le\|f(x)\|^2$

广义Foureir级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k^*\varphi_k(x)$

➢定理7 设**f(x)**∈C[a, b]，S*(x)是f(x)的最佳平方逼近多项式，其中 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ 是正交多项式族，则有

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f(x)-S_n^*(x)\right\|_2=0$$

➢例 考虑函数**f(x)** ∈ **C[a,b]**的**Legendre**多项式**$\{P_0(x),P_1(x),\ldots,P_n(x))\}$**展开

$$S_n^*(x)=a_0^*P_0(x)+a_1^*P_1(x)+\cdots+a_n^*P_n(x)$$

其中
$$a_k^*=\frac{(f(x),P_k(x))}{(P_k(x),P_k(x))}=\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_k(x)dx$$

平方误差为
$$\boxed{\left\|\delta(x)\right\|_2^2=\int_{-1}^{1}f^2(x)dx-\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}a_k^{*2}}$$

➢**定理8** 设**f(x)**∈C²[−1, 1], $S_n^*(x)$ 是f(x)的基于Legenda多项式的最佳平方逼近，则对任意x∈**[-1,1]**和ε **>0,**当**n**充分大时，有

$$|f(x)-S_n^*(x)|\le\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

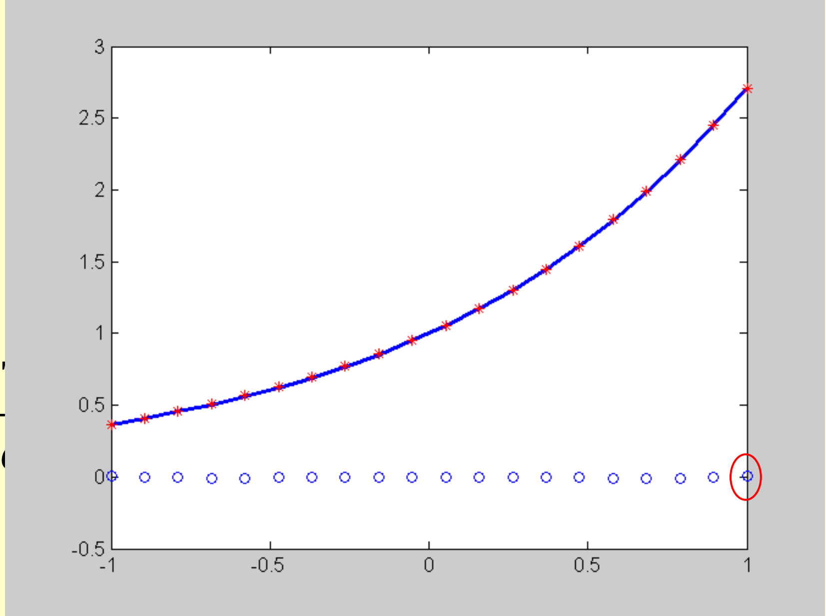
➢**定理9** 在所有最高次项系数为**1**的**n**次多项式中，**Legenda**多项式 $\tilde{P}_n(x)$ 在**[-1,1]**上与零的平方误差最小。

证明: 设$Q_n(x)$是任意一个最高次项系数为**1**的**n**次多项式，它可表示为 $Q_n(x)=\tilde{P}_n(x)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\tilde{P}_k(x)$

$$\|Q_n(x)\|_2^2=(\tilde{P}_n(x),\tilde{P}_n(x))+\sum_{k=0}^{n-1}a_k^2(\tilde{P}_k(x),\tilde{P}_k(x))\ge(\tilde{P}_n(x),\tilde{P}_n(x))=\|\tilde{P}_n(x)\|_2^2$$

当且仅当$a_0=a_1=\ldots=a_n=0$时等号才成立，即当 $Q_n(x)=\tilde{P}_n(x)$ 时，平方误差最小

例6 求$f(x)=e^x$在[-1,1]上的三次最佳平方逼近多项式



解

$$(f(x),P_0(x))=\int_{-1}^{1}e^x dx=e-\frac{1}{e}\approx 2.3504$$

$$(f(x),P_1(x))=\int_{-1}^{1}xe^x dx=\frac{2}{e}\approx 0.7358$$

$$(f(x),P_2(x))=\int_{-1}^{1}(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2})e^x dx=e-$$

$$(f(x),P_3(x))=\int_{-1}^{1}(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x)e^x dx=\frac{37}{e}$$

$$a_0^*=\frac{1}{2}(f(x),P_0(x))=1.1752 \qquad a_1^*=\frac{3}{2}(f(x),P_1(x))=1.1036$$

$$a_2^*=\frac{5}{2}(f(x),P_2(x))=0.3578 \qquad a_3^*=\frac{7}{2}(f(x),P_3(x))=0.07046$$

$$S_3^*(x)=0.9963+0.9979x+0.5367x^2+0.1761x^3$$

均方误差 $\|\delta(x)\|_2=(\int_{-1}^{1}e^{2x}dx-\sum_{k=0}^{3}\frac{2}{2k+1}a_k^{*2})^{1/2}\le 0.0084$

最大误差 $\|\delta(x)\|_\infty=\|e^x-S_3^*(x)\|_\infty\le 0.0113$

若**f(x)** ∈ C[a, b], 求[a, b]上的最佳平方逼近多项式，做变换

$$x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2} \qquad -1\le t\le 1$$

令 $F(t)=f(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2})$ 在**[-1,1]**上可用**Legendre**多项式做最佳平方逼近多项式 $S_n^*(t)$

从而得到**[a,b]**上的最佳平方函逼近多项式

$$S_n^*(\frac{1}{b-a}(2x-a-b))$$

注：利用函数的**Legendre**展开部分和得到最佳平方逼近多项式与由 $S(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$

直接通过解法方程得到的最佳平方逼近多项式是一致的。

Chebyshev级数

$f(x)\in C[-1,1]$ 展开成广义Fourier级数为

$$\frac{C_0^*}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}C_k^*T_k(x)$$

其中

$$C_k^*=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad T_k(x)=\cos(k\arccos x)$$

若f (x) 的二阶导数在[−1, 1]上分段连续，则f (x) 在[−1, 1]上的Chebyshev级数一致收敛于f (x)，即

$$f(x)=\frac{C_0^*}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}C_k^*T_k(x)$$

近似最佳一致逼近多项式

取部分和为 $$S_n^*=\frac{C_0^*}{2}+\sum_{k=1}^{n}C_k^*T_k(x)$$

误差为 $$f(x)-S_n^*(x)\approx C_{n+1}^*T_{n+1}(x)$$

例8 $f(x)=e^x$在$[-1,1]$上的Chebyshev级数部分和S_3

$$C_k^* = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos k\theta d\theta$$

C0=2.532, C1=1.130,C2=0.271,C3=0.044

$$S_3 = 0.995 + 0.997x + 0.542x^2 + 0.117x^3$$

误差 $$\left\| e^x - S_3(x) \right\|_\infty \approx 0.00607$$