第三章　最佳逼近

/* Approximation Theory */

偏差
/* deviation*/

- 最佳**一致**逼近 /* uniform approximation */

在 $\| f \|_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]} | f(x) |$ 意义下，使得 $\| P - y \|_\infty$ 最小。也称为**minimax problem**。

- **定义7**　设$\mathbf{P_n(x)}\in \mathrm{H_n}$, $\mathrm{f(x)}\in \mathrm{C[a,b]}$, 称

f(x)在[a,b]上的最小偏差

$$ - P_n \|_\infty = \max_{a\le x\le b} | f(x) - P_n(x) | $$

为f(x) … [a,b]上的偏差.

$$E_n = \inf_{P_n\in H_n} \{\Delta(f, P_n)\} = \inf_{P_n\in H_n} \max_{a\le x\le b} | f(x) - P_n(x) |$$

➤**定义8** 假定**f(x)** ∈ C[a, b], 若存在$P_n^*(x) \in H_n$ 使得

$$\Delta(f, P_n^*) = E_n$$

则称 $P_n^*(x)$是**f(x)**在**[a,b]**上的最佳一致逼近多项式或最小偏差逼近多项式，简称最佳逼近多项式。

➤**定理4** 若**f(x)** ∈ C[a, b], 则总存在 $P_n^*(x) \in H_n$ 使

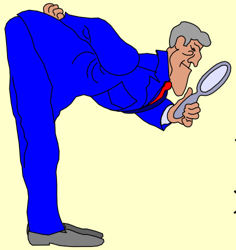
$$\left\| f(x) - P_n^*(x) \right\|_\infty = E_n$$

➤**定义9** 设**f(x)** ∈ C[a, b], P(x) ∈ H_n, 若在$x=x_0$上有

$$|P(x_0) - f(x_0)| = \max_{a \le x \le b} |P(x) - f(x)| = \mu$$

则称 $\mathbf{x_0}$ 为偏差点

v 1.0 最佳一致逼近多项式 /* optimal uniform approximating polynomial */ 的构造：求 n 阶多项式 $P_n(x)$ 使得 $\| P_n - y \|_\infty$ 最小。



直接构造 *OUAP* 的确比较困难，不妨换个角度，先考察它应该具备的性质。有如下结论：

① *OUAP* 存在，且必同时有$\pm$偏差点。

证明：存在性证明略。后者用反证法，设只有正偏差点。

设 $\| P_n - y \|_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]} | P_n(x) - y(x) | = E_n$

而对于所有的 $x\in[a, b]$ 都有 $P_n(x) - y(x) > -E_n$

$\Longrightarrow$ $-E_n + \varepsilon \le P_n(x) - y(x) \le E_n$

$\Longrightarrow$ $|[P_n(x) - \varepsilon / 2] - y(x)| \le E_n - \varepsilon / 2$ ∎

是n阶多项式

是误差更小的多项式

② （**Chebyshev定理**）P_n 是 y 的$OUAP$ $\Leftrightarrow$ P_n 关于 y 在定义域上至少有$n+2$个交错的± 偏差点。

即存在点集 $a \le x_1 < \ldots < x_{n+2} \le b$ 使得$P_n(t_k) - y(t_k) = \pm(-1)^k \| P_n - y \|_\infty$

$\{ x_k \}$称为切比雪夫交错组 /* Chebyshev alternating sequence */

证明充分性(用反证法) 假定**P(x)**在**[a,b]**上有**n+2**个点使上式成立，而不是最佳逼近多项式，假设**Q(x)**$\in H_n(x)$, $Q(x) \neq P(x)$, 是最佳逼近多项式，则 $\| f(x) - Q(x) \|_\infty < \| f(x) - P(x) \|_\infty$

由于 $$P(x) - Q(x) = [P(x) - f(x)] - [Q(x) - f(x)]$$

在点$x_1, x_2, \cdots, x_{n+2}$上的符号与 $P(x_k) - f(x_k)(k = 1, \cdots, n+1)$ 一致

所以，**P(x)-Q(x)**在**n+2**个点上轮流取+,-号,由连续函数的性质，它在**[a,b]**上有**n+1**个零点。

矛盾

但**P(x)-Q(x)**是不超过**n**次的多项式，它的零点个数不超过**n**.

③ 若 $y\in C[a,b]$ 且 y 不是 n 次多项式，则 n 次 $OUAP$ 唯一。

$$\|f-\frac{P_n+Q_n}{2}\|_\infty \le \frac{1}{2}(\|f-P_n\|_\infty+\|f-Q_n\|_\infty) = \min_{P\in G_n}\|f-P\|_\infty .$$

证明：反证，设有2个$OUAP$'s，

则它们的平均函数 $R_n(x)=\dfrac{P_n(x)+Q_n(x)}{2}$ 也是一个$OUAP$。

对于R_n 有Chebyshev交错组$\{x_1,\ldots,x_{n+2}\}$使得

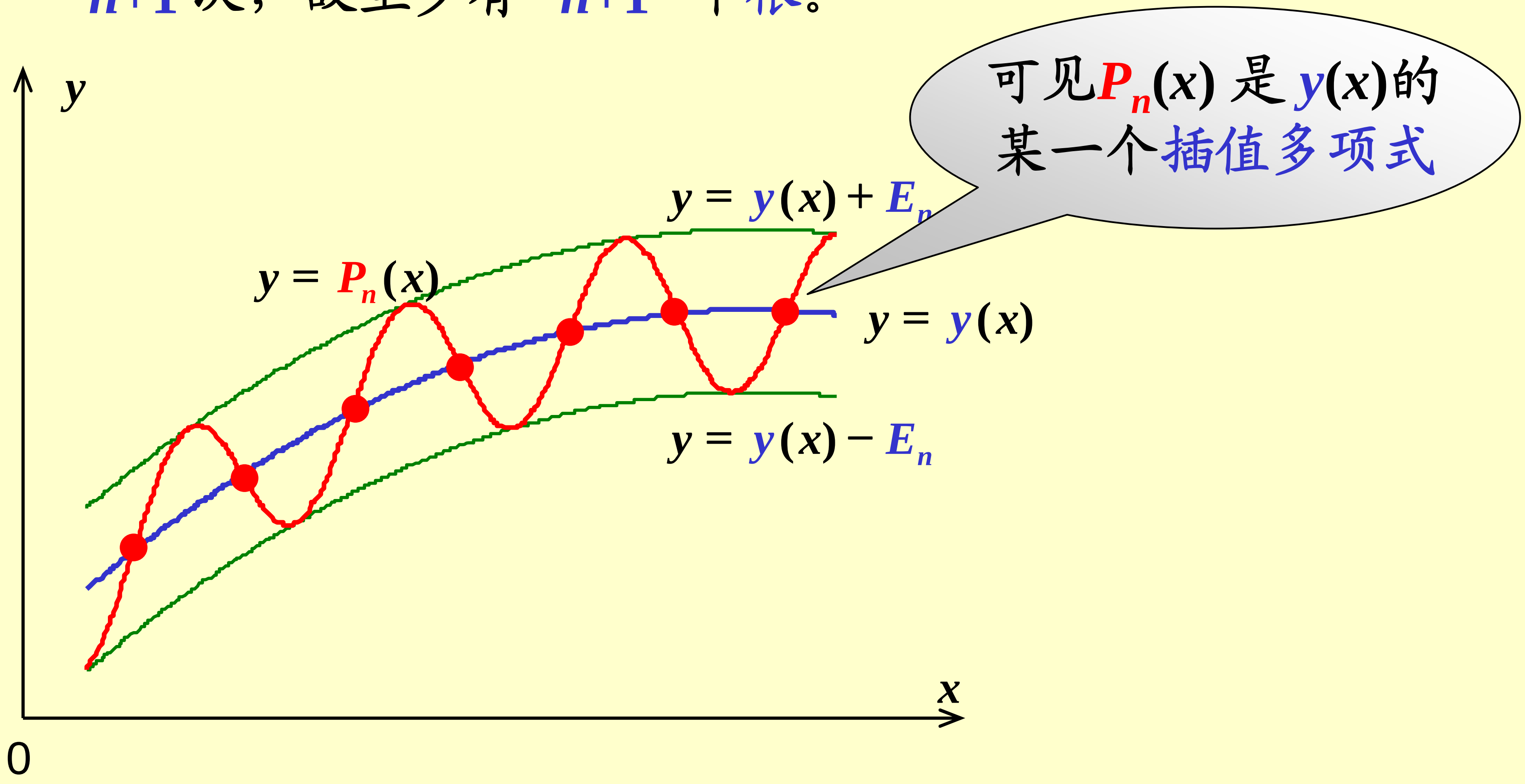
$$E_n=|R_n(x_k)-y(x_k)|\le\frac{1}{2}|P_n(x_k)-y(x_k)|+\frac{1}{2}|Q_n(x_k)-y(x_k)|\le E_n$$

$$\Longrightarrow |P_n(x_k)-y(x_k)|=|Q_n(x_k)-y(x_k)|=E_n$$

则在每一个交错点必须有 $P_n(x_k)-y(x_k)=y(x_k)-Q_n(x_k)$

$$\Longrightarrow R_n(x_k)-y(x_k)=0 \quad \Longrightarrow E_n=0 \qquad \blacksquare$$

④ 由**Chebyshev**定理可推出：$P_n(x) - y(x)$ 在定义域上至少变号 $n+1$ 次，故至少有 $n+1$ 个根。



➢**定理6** 在区间[-1,1]上所有最高次项系数为1的n次多项式中，$w_n(x)=\dfrac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ 与零的偏差最小，其偏差为 $\dfrac{1}{2^{n-1}}$

证明：由于

$$w_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)=x^n-P_{n-1}^*(x)$$

$$\max_{-1\le x\le 1}|w_n(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}\max_{-1\le x\le 1}|T_n(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}$$

$T_n(x)$有n+1个交错点-- $x_k=\cos\frac{k}{n}\pi$ (k=0,1,…,n)

由定理5，区间[-1,1]上x^n在H_{n-1}中最佳逼近多项式为$P_{n-1}^*(x)$,即$w_n(x)$是与零的偏差最小的多项式。

➢例3 求$f(x)=2x^3+x^2+2x-1$在[-1,1]上的最佳2次逼近多项式。

➢ 推论　设$f^{(n+1)}(x)$在(a, b)内保号，如果$P_n^*(x)$是$f(x)$在[a, b]上的n次最佳一致逼近多项式，那么$f(x)-P_n^*(x)$的交错点组恰好含n+2个点，且a和b均属于该交错点组.

证明：用反证法．假设$f(x)-P_n^*(x)$的交错点组的点超过n+2个，或a或b不属于该交错点组．不论何种情形，均可得在(a, b)内至少存在n+1个点ξ_i (i=1, 2, …, n+1)，使得

$$f'(\xi_i)-P_n^{*\prime}(\xi_i)=0$$

反复应用罗尔定理(n+1次)，可得至少存在一点，使得

$$f^{(n+1)}(\eta)=f^{(n+1)}(\eta)-P_n^{*(n+1)}(\eta)=0$$

这与$f^{(n+1)}(x)$在(a, b)内保号矛盾．故推论成立.

➢最佳一次逼近多项式

假定**f(x)**$\in C^2[a,b]$， f'' 在 (a,b) 内不变号，求最佳一致逼近多项式 $P_1(x)=a_0+a_1x$.

由定理5，至少有3个点 $a \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le b$**,使得**

$$P_1(x_k) - f(x_k) = \pm u$$

$f'(x) - a_1$ **在(a,b)内只有一个零点，记为** x_2**,**

$$P_1'(x_2) - f'(x_2) = a_1 - f'(x_2) = 0 \qquad f'(x_2) = a_1$$

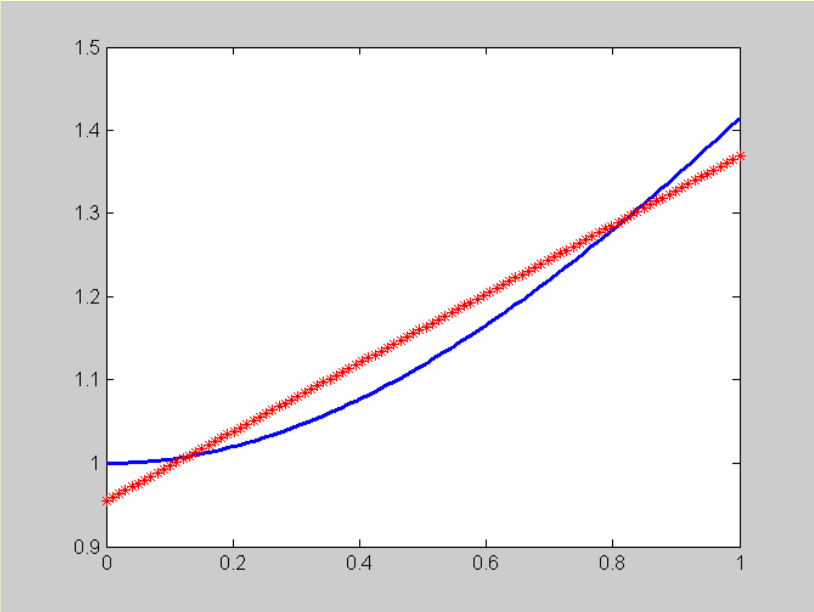
区间端点必为偏差点，且满足 $P_1(a) - f(a) = P_1(b) - f(b) = -[P_1(x_2) - f(x_2)]$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 a - f(a) = a_0 + a_1 b - f(b) \\ a_0 + a_1 a - f(a) = f(x_2) - (a_0 + a_1 x_2) \end{cases} \Rightarrow \quad a_0 = \frac{f(a)+f(x_2)}{2} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{a+x_2}{2}$$

$$a_1 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_2)$$

例4 求$f(x)=\sqrt{1+x^2}$在[0,1]上的最佳一次逼近多项式。

解 $a_1=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_2)$



$\Rightarrow$ $a_1=\sqrt{2}-1\approx 0.414$

$\Rightarrow$ $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{2}-1$

$\Rightarrow$ $x_2=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\approx 0.4551$

$\Rightarrow$ $f(x_2)=\sqrt{1+x^2}\approx 1.0986$

$$a_0=\frac{f(a)+f(x_2)}{2}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{a+x_2}{2}$$

$\Rightarrow$ $a_0\approx 0.955$ $\Rightarrow$ $P_1(x)=0.955+0.414x$

令x=b/a⩽1,则

$$\sqrt{a^2+b^2}\approx 0.955a+0.414b$$

误差限为 $|f(0)-P(0)|=1-0.955=0.045$ $\Rightarrow$ $\max\limits_{0\le x\le 1}|\sqrt{1+x^2}-P_1(x)|\le 0.045$