Exercice 1

Résolution

Nous savons que :

$A\Delta B = (A \bigcap \overline{B}) \bigcup (\overline{A} \bigcap B)$

Si $A =$ nous avons :

$A \Longrightarrow (A \bigcup \overline{B}) =$
$A \Longrightarrow (\overline{A} \bigcap B) = (E \bigcup B) = B$
$A\Delta B = (A \bigcap \overline{B}) \bigcup (\overline{A} \bigcap B) = \bigcup B = B$

Exercice 2

Résolution

Notons p = "il pleut ", q =" Abel se promène avec un parapluie" et r = "Béatrice se promène avec un parapluie".
on sait que : $p \Rightarrow q$ et $p \Rightarrow r$.

1. On ne peut rien conclure car q peut être vrai que p soit vrai ou faux et donc que r soit vrai ou faux.

2. $\rceil q \Rightarrow \rceil p \Rightarrow \rceil r$

3. $r \Rightarrow p \Rightarrow q$

4. $\rceil r \Rightarrow \rceil p$

5. $\rceil p \Rightarrow \rceil r$

6. $p \Rightarrow q \Rightarrow q$

Exercice 3

Résolution

1. $\rceil p = (\forall t \in R, \exists x \in R, t \leq f(x))$

2. Si $f(x) = \cos(x)$ cette assertion est vrai car cette fonction est majorée.
Si $f(x) = x^2$ cette assertion est fausse car cette fonction n'est pas majorée.

3.1

a. Cette proposition est équivalente à p.

b. Cette proposition est fausse car l'ensemble R n'est pas minoré.

c. Cette proposition n'est pas toujours vrai car vrai si on prend $f(x) = x - 1$ et fausse si on prend $f(x) = x^2$ et $t = -1$.

d. Cette proposition est toujours vrai car l'ensemble R admet toujours un élément plus grand qu'un autre.

Exercice 4

Résolution

1. $\rceil p = (\forall t \in R, \exists x \in R, t \leq f(x))$

2. Si $f(x) = \cos(x)$ cette assertion est vrai car cette fonction est majorée.
Si $f(x) = x^2$ cette assertion est fausse car cette fonction n'est pas majorée.

3.1

a. Cette proposition est équivalente à p.

b. Cette proposition est fausse car l'ensemble R n'est pas minoré.

c. Cette proposition n'est pas toujours vrai car vrai si on prend $f(x) = x - 1$ et fausse si on prend $f(x) = x^2$ et $t = -1$.

d. Cette proposition est toujours vrai car l'ensemble R admet toujours un élément plus grand qu'un autre.

Exercice 3

Résolution

1. $\rceil p = (\forall t \in R, \exists x \in R, t \leq f(x))$

2.Sif(x) $=$ cos(x) cette assertion est vrai car cette fonction est majorée.
Si $f(x) = x^2$ cette assertion est fausse car cette fonction n'est pas majorée.

3.1

a. Cette proposition est équivalente à p.

b. Cette proposition est fausse car l'ensemble R n'est pas minoré.

c. Cette proposition n'est pas toujours vrai car vrai si on prend $f(x) = x - 1$ et fausse si on prend $f(x) = x^2$ et $t = -1$.

d. Cette proposition est toujours vrai car l'ensemble R admet toujours un élément plus grand qu'un autre.

Exercice 6

Résolution

Vérifions si les propriétés sont bien respecté.

Réflexivité : Soit $A \in E$ nous avons bel et bien ARA car $A = A$.
Symétrie : Par définition nous avons bel et bien si $A = B$, $B = A$ ou si $A = \overline{B}$, $B = \overline{A}$
Transitivité : Nous avons donc soit $A, B, C \in E$ avec ARB et BRC donc :

Si $A = B$ et $B = C$ nous avons bel et bien $A = C$.
Si $A = B$ et $B = \overline{C}$ nous avons $A = B$ et donc $A = \overline{C}$.
Si $A = \overline{B}$ et $B = C$ nous avons $B = C$ et donc $A = \overline{C}$.
Si $A = \overline{B}$ et $B = \overline{C}$ nous avons $C = \overline{B}$ et donc $A = C$.

Donc nous avons bel et bien une relation d'équivalence.

Exercice 7

Résolution

Vérifions que les propriétés sont respectée.

Réflexivité : $pRp = p^1$ pour tout $p \in N*$.
Antisymétrie : si pRq et qRp nous avons $p = q^k$ et $q = p^j$ avec $k, j \geq 1$ donc $p = p^{jk}$.Cela implique que $p = 1$ donc $q = 1$ ou $jk = 1$ donc $j = k = 1$ et $p = q$.

Transitivité : si pRq et qRp, nous avons $q = p^k$ et $r = q^j = p^{jk}$, ceci implique pRr.

Mais cette relation, d'ordre n'est pas total du fait que par exemple on ne puisse pas comparé $2et3$.

Démontrons par l'absurde soit p un majorant de $2, 3$