张书茂申诉

305 idiots

2012 年 10 月

目录

1 第一题

如原题解答,并补证了 O_1, O_2 在 AN 同侧。

2 第二题第 2 小问

$\because a \notin \overline{A}$,且 $a \neq 1$,故可设 $a = 2^i \cdot j$,$i, j \in N$,$j \neq 1$,$2 \nmid j$.
考虑数 $1 \cdot 2^{i+1}, 2 \cdot 2^{i+1}, \ldots, (j-1) \cdot 2^{i+1}$ 共 $(j-1)$ 个数.
首先说明,它们均不被 j 整除.
否则,反设 $j \mid t \cdot 2^{i+1}, t \in \{1, 2, \ldots, j-1\}$. $\because (j, 2^{i+1}) = 1, \therefore j \mid t$.
$\therefore t \geq j$ 或 $t = 0$, 矛盾.
再证,它们模 j 互不同余.
否则,设 $x \cdot 2^{i+1} \equiv y \cdot 2^{i+1} \pmod{j}$. $x, y \in 1, 2, \ldots, j-1, x \neq y$, $\therefore j \mid (y-x) \cdot 2^{i+1}$
$\because (j, 2^{i+1}) = 1, \therefore j \mid (y-x), \therefore y - x = 0$ 或 $y - x \geq j$, 与 $x, y \in 1, 2, \ldots, j-1$ 矛盾.
设 B 为 $1 \cdot 2^{i+1}, 2 \cdot 2^{i+1}, \ldots, (j-1) \cdot 2^{i+1}$ 模 j 的最小非负整数构成的集合,
则 $B = \{1, 2, \ldots, j-1\}, \therefore$ 存在 $l \in \{1, 2, \ldots, j-1\}$, 使 $2^{i+1} \cdot l \equiv j - 1 \pmod{j}$.
$\therefore$ 取 $b = 2^{i+1} \cdot l, \therefore b(b+1) = 2^{i+1} \cdot l(2^{i+1}l+1)$. $\because j \mid (2^{i+1}l+1), 2^{i+1} \mid 2^{i+1} \cdot l, \therefore 2^{i+1} \cdot j \mid b(b+1)$,
即 $2a \mid b(b+1)$. 又 $b = 2^{i+1}l \leq 2^{i+1}(j-1) = 2^{i+1} \cdot j - 2^{i+1} < 2^{i+1} \cdot j - 1 = 2a - 1$. $\therefore b = 2^{i+1}l$ 满足要求.

3 第三题

当 $n \leq 14$ 时
$\frac{\sqrt{(n+1)!}}{3^n} \leq \sqrt{\frac{15!}{(3^{14})^2}} = \sqrt{\frac{15 \times 14 \times \cdots \times 2}{9 \times 9 \times \cdots \times 9}}$
$\because \frac{(9+i)(9-i)}{9 \cdot 9} = \frac{9^2 - i^2}{9^2} < 1, i = 1, 2, \cdots, 6$
$\therefore \sqrt{\frac{15!}{9^14}} < \sqrt{\frac{2}{9}} < 1, \therefore \sqrt{\frac{(n+1)!}{(3^n)^2}} < 1$
$\because |P_0P_i| \geq d, i = 1, 2, \cdots, n.$
$\therefore \prod_{i=1}^{n} |P_0P_i| \geq d^n > d^n \frac{\sqrt{(n+1)!}}{3^n} = (\frac{d}{3})^n \sqrt{(n+1)!}$
当 $n > 14$ 时
设 $n = k$ 时命题成立.
当 $n = k + 1$ 时, 下面用反证法. 证明:$|P_0P_1|, \cdots, |P_0P_{n+1}$ 中, 存在一个大于等于 $\frac{d}{3}\sqrt{n+2}$.

否则, 假设不成立. 则以 P_0 位圆心,$d(\frac{\sqrt{n+2}}{3}+\frac{1}{2})$ 为半径作圆, 再以 $P_i(i=1,2,\cdots,n+1)$ 为圆心,$\frac{d}{2}$ 为半径作圆. 则 $\odot P_i(i=1,2,\cdots,n+1)$ 均内含于 $\odot P_0(d(\frac{\sqrt{n+2}}{3}+\frac{1}{2})>\frac{d}{2}+\frac{d}{3}\sqrt{n+2}>\frac{d}{2}+|P_0P_i|)$.

且 $\odot P_i(i=1,2,\cdots,n+1)$ 均外离或外切 (否则, 设 $\odot P_i$ 与 $\odot P_j$ 交于 A,B 两点, 则 P_i,A,P_j 不共线,$|P_iP_j|<|P_iA|+|P_jA|=d$. 矛盾).

考虑它们的面积则 $\pi d^2(\frac{\sqrt{n+2}}{3}+\frac{1}{2})^2>\pi\frac{d^2}{4}(n+1)$

$\therefore \frac{n+2}{9}+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{n+2}}{3}>\frac{n+1}{4},12\sqrt{n+2}>5n-8,144n+288>25n^2-80n+64.25n^2-224n-224<0.$

设 $f(x)=25x^2-224x-224,\therefore f(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{112}{25}<14$.

又 $f(14)=126\times 14-224>0.\therefore n<14$ 与 $n\geq 14$ 矛盾.

$\therefore$ 不妨设 $|P_0P_{n+1}|=\frac{d}{3}\sqrt{n+2}$.

由归纳假设, 因为 $P_0,P_1,\cdots,P_n$ 之间距离大于等于 d. $\therefore\prod_{i=1}n|P_0P_i|>(\frac{d}{3})^n\sqrt{(n+1)!}$.

$\therefore\prod_{i=1}^{n+1}|P_0P_i|>(\frac{d}{3})^n\sqrt{(n+1)!}\cdot\frac{d}{3}\sqrt{n+2}=(\frac{d}{3})^(n+1)\sqrt{(n+2)!}$.

由 $n=k+1$ 时,命题成立.

由数学归纳法, 命题对 $n\in N^*$ 成立即 $\prod_{i=1}^{n}|P_0P_i|>(\frac{d}{3})^n\sqrt{(n+1)!}$.

4 第四题

首先证明：S_n 发散 (当 n 趋于正无穷时，S_n 趋于正无穷)

设 $f(x)=\ln x-(x-1),f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$. 当 $x\geq 1$ 时，$f'(x)\leq 0,\because f(1)=0,\therefore x>1$ 时，$f(x)<0,\therefore\ln x<x-1$. 令 $x=\frac{n+1}{n},\therefore\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n},\therefore S_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}>\ln\frac{2}{1}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)$. $\because n$ 趋于正无穷时 $\ln(n+1)$ 趋于正无穷, $\therefore S_n$ 发散.

下面用反证法证明命题. 即设存在 $0\leq a<b\leq 1$，使 $\{S_n-[S_n]\}$ 中只有有限项属于 (a,b), 故存在 N, 使 $n>N$ 时，$S_n-[S_n]$ 无一项属于 (a,b). 设 $N'=[\frac{1}{b-a}]+1$, 记 $M=\max\{N,N'\}$, 则 $n>M$ 时，$S_{n+1}-S_n<\frac{1}{M+1}<b-a$,即 S_n" 步长" 小于 $b-a$. 设 $k=[S_{M+1}],\therefore S_{M+1}\in[k,k+1)$, $\because S_{M+1}-[S_{M+1}]\notin(a,b)$.

1. $S_M<k+a$. $\therefore S_n<k+a$, 否则存在 $j\in N^*$, $S_j<k+a,S_{j+1}>k+b$, 显然 $j\geq M$. $\therefore S_{j+1}-S_j>b-a$, 与 $S_{j+1}-Sj<b-a$ 矛盾. $\therefore S_n<k+a$, 与 S_n 发散矛盾.

2. $S_M>k+b$. $\therefore S_n<k+1+a$, 否则存在 $j\in N^*$, $S_j<k+1+a,S_{j+1}>k+1+b$. 显然 $j\geq M$. $\therefore S_{j+1}-S_j>b-a$ 与 $S_{j+1}-S_j<b-a$ 矛盾. $\therefore S_n<k+1+a$, 与 S_n 发散矛盾.

综上，矛盾，故命题成立. 即对 $0\leq a<b\leq 1$ 的实数 a,b，数列 $\{S_n-[S_n]\}$ 中有无穷多项属于 (a,b)