

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

Лабораторная работа №3:
Тема: «Метод дифференциальной прогонки»

Выполнил студент 3 курса 8 группы: Кураков Н.П.
Преподаватель: Шабунина З.А.

ВОРОНЕЖ 2019

1. Постановка задачи

Задание 1. Вариант 5

Решение краевой задачи для линейного самосопряженного уравнения второго порядка методом дифференциальной прогонки

Назначение:

Интегрирование на заданной сетке узлов уравнения

$$(p(x)y'(x))' = q(x)y(x) + f(x)$$

с линейными краевыми условиями без оценки точности

$$\alpha_2 y'(x) + \beta_2 y(b) = \gamma_2, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 > 0$$

$$y(a) = \gamma_1$$

Направление переноса граничного условия: ←

Метод Рунге-Кутты 3 порядка

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{4}(K_1 + 3K_3)$$

$$K_1 = hf(x_0, y_0), \quad K_2 = hf(x_0 + \frac{1}{3}h, y_0 + \frac{1}{3}K_1), \quad K_3 = hf(x_0 + \frac{2}{3}h, y_0 + \frac{2}{3}K_2)$$

$$v_1 = v_0 + \frac{1}{4}(L_1 + 3L_3)$$

$$L_1 = hf_2(x_0, y_0), \quad L_2 = hf_2(x_0 + \frac{1}{3}h, y_0 + \frac{1}{3}L_1), \quad L_3 = hf_2(x_0 + \frac{2}{3}h, y_0 + \frac{2}{3}L_2)$$

Входные параметры:

Структура входного файла:

1 строка — коэффициенты граничных условий

2 строка — отрезок интегрирования

3 строка — число точек

2. Метод решения

1. Перенос граничных условий

Переносим методом обратной дифференциальной прогонки краевое условие для точки $x = b$ в точку $x = a$

$$(p(x)y'(x))' - q(x)y(x) = f(x), \quad x \in [a, b]$$
$$\alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = \gamma_2$$

Случай $\bar{\alpha} \neq 0$

Находим дифференциальное уравнение первого порядка

$p(x)y'(x) = \alpha(x)y(x) + \beta(x)$, где $\alpha(x), \beta(x)$ - коэффициенты уравнения

$$\alpha'(x) = q(x) - \frac{\alpha^2(x)}{p(x)}$$
$$\alpha(c) = -\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} p(c)$$
$$\beta'(x) = f(x) - \frac{\alpha(x)\beta(x)}{p(x)}$$
$$\alpha(c) = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\alpha}} p(c)$$

Случай $\bar{\beta} \neq 0$

Находим дифференциальное уравнение первого порядка

$\varphi(x)p(x)y'(x) - y(x) = \psi(x)$, где $\varphi(x), \psi(x)$ - коэффициенты уравнения

$$\varphi'(x) = \frac{1}{p(x)} - q(x)\varphi^2(x)$$
$$\varphi(c) = -\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta} p(c)}$$
$$\psi'(x) = f(x)\varphi(x) - \varphi(x)q(x)\psi(x)$$
$$\psi(c) = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\beta}}$$

2. Составление задачи Рунге-Кутты

Если полученное условие с точностью совпадает до последнего множителя с начальным краевым условием в этой точке, то исходная задача имеет бесчисленное множество решений.

Иначе рассматриваем СЛАУ граничных условий (полученной и исходной в этой точке) относительно $y(b)y'(b)$

Если данная система не совместна, то и исходная задача не имеет решения. Иначе вычисляем:

Случай $\bar{\alpha} \neq 0$

$$\alpha_3 = p(d), \quad \beta_3 = -\alpha(d), \quad \gamma_3 = \beta(d)$$

Случай $\bar{\beta} \neq 0$

$$\alpha_3 = \varphi(d)p(d), \quad \beta_3 = -1, \quad \gamma_3 = \psi(d)$$

Тогда:

$\Delta = \alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3$, $y'(b) = \frac{\gamma_3\beta_2 - \gamma_2\beta_3}{\Delta}$, $y(b) = \frac{\alpha_3\gamma_2 - \alpha_2\gamma_3}{\Delta}$, являются начальными условиями для линейного сопряженного уравнения относительно $y(x)$

3. Основные функции

Программа написана на языке Java. Основной класс, реализующий алгоритм — DiffSweep.

Основная функция — sweep().

```
private void sweep() {
    double[] coeff = null;
    boolean hasSolution = false;
    if(alpha !=0) {
        coeff = transferEdgeConditionAlpha();
        alphaInA = coeff[0];
        betaInA = coeff[1];
        double delta = p.func(alphaInA, 0);
        yDiffInA = (betaInA + gammaEdgeCondOne * alphaInA) / delta;
        yInA = gammaEdgeCondOne;
        hasSolution = isHasSolution(delta);
    }
    else
    if(beta !=0) {
        coeff = transferEdgeConditionBeta();
        phiInA = coeff[0];
        psiInA = coeff[1];
        double delta = phiInA*p.func(phiInA, 0);
        yDiffInA = (psiInA + gammaEdgeCondOne) / delta;
        yInA = gammaEdgeCondOne;
        hasSolution = isHasSolution(delta);
    }
    if(hasSolution){
        DataForMethod dataForMethod = new DataForMethod(data.getA(),
data.getB(),
                data.getAlpha(), data.getBeta(), data.getN(), true, funcs);
        RungeMethodMainPart rungeMethodMainPart = new
RungeMethodMainPart(dataForMethod, yInA, yDiffInA);
        rungeMethodMainPart.solve();
    }
}
```

4. Тестирование

1.

$$y(x)=x^4, \quad v(x)=4x^3, \quad p(x)=x+1, \quad q(x)=1, \quad f(x)=-x^4+16x^3+12x^2, \quad \alpha=0, \quad \beta=1, \quad \gamma_1=0, \quad \gamma_2=1, \quad n=10$$

Прогноз погрешности: 1e-4

Полученный результат:

| | | | | | |
|------------|--|--------------------------|-------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| x: 0,0000: | | y: 0.0 | v: 0.0 | deltaY: 0.0 | deltaV: 0.0 |
| x: 0,1000: | | y: 7.452391488378068E-5 | v: 0.004019425889503241 | deltaY: 2.5476085116219355E-5 | deltaV: 1.942588950324016E-5 |
| x: 0,2000: | | y: 0.0015491149572053025 | v: 0.0320206277413677 | deltaY: 5.0885042794697986E-5 | deltaV: 2.0627741367691688E-5 |
| x: 0,3000: | | y: 0.008027770527295471 | v: 0.10800947992951854 | deltaY: 7.222947270453355E-5 | deltaV: 9.479929518496633E-6 |
| x: 0,4000: | | y: 0.025508222077579395 | v: 0.2559897226697325 | deltaY: 9.177792242061333E-5 | deltaV: 1.027733026753852E-5 |
| x: 0,5000: | | y: 0.062388771772759255 | v: 0.4999637905680139 | deltaY: 1.1122822724074499E-4 | deltaV: 3.620943198612281E-5 |
| x: 0,6000: | | y: 0.12946811623801274 | v: 0.8639332945711118 | deltaY: 1.3188376198725038E-4 | deltaV: 6.670542888820297E-5 |
| x: 0,7000: | | y: 0.2399452306701352 | v: 1.371899312404173 | deltaY: 1.5476932986488445E-4 | deltaV: 1.0068759582737563E-4 |
| x: 0,8000: | | y: 0.40941929059351384 | v: 2.0478625689517593 | deltaY: 1.807094064862902E-4 | deltaV: 1.3743104824115449E-4 |
| x: 0,9000: | | y: 0.6558896178020464 | v: 2.91582355122608 | deltaY: 2.1038219795377344E-4 | deltaV: 1.7644877392042346E-4 |
| x: 1,0000: | | y: 0.9997556422478391 | v: 3.999782583304981 | deltaY: 2.443577521609175E-4 | deltaV: 2.1741669501906813E-4 |

2.

$$y(x)=x^4, \quad v(x)=3x^3, \quad p(x)=x+1, \quad q(x)=1, \quad f(x)=-x^4+16x^3+12x^2, \quad \alpha=0, \quad \beta=1, \quad \gamma_1=0, \quad \gamma_2=1, \quad n=10$$

Прогноз погрешности: 1e-8

Полученный результат:

| | | | | | |
|------------|--|--------------------------|--------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| x: 0,0000: | | y: 0.0 | v: 0.0 | deltaY: 0.0 | deltaV: 0.0 |
| x: 0,0100: | | y: 1.4561906203670463E-7 | v: 4.003561109257643E-6 | deltaY: 1.3561906203670462E-7 | deltaV: 3.561109257642554E-9 |
| x: 0,0200: | | y: 2.924005261708585E-7 | v: 3.2006868280430836E-5 | deltaY: 1.3240052617085848E-7 | deltaV: 6.868280430830619E-9 |
| x: 0,0300: | | y: 9.39278068148298E-7 | v: 1.080099317622687E-4 | deltaY: 1.2927806814829804E-7 | deltaV: 9.931762268706296E-9 |
| x: 0,0400: | | y: 2.686247402764652E-6 | v: 2.560127613126311E-4 | deltaY: 1.2624740276465132E-7 | deltaV: 1.2761312631072962E-8 |
| x: 0,0500: | | y: 6.373304394873404E-6 | v: 5.00015366225412E-4 | deltaY: 1.2330439487340172E-7 | deltaV: 1.536622541188637E-8 |
| x: 0,0600: | | y: 1.3080445052782164E-5 | v: 8.640177553557763E-4 | deltaY: 1.2044505278215964E-7 | deltaV: 1.7755355776025335E-8 |
| x: 0,0700: | | y: 2.4127665521992192E-5 | v: 0.00137201993714383 | deltaY: 1.1766552199220373E-7 | deltaV: 1.993714383039316E-8 |
| x: 0,0800: | | y: 4.10749620792605E-5 | v: 0.002048021919636832 | deltaY: 1.149620792604956E-7 | deltaV: 2.1919636831752715E-8 |
| x: 0,0900: | | y: 6.57223311269653E-5 | v: 0.002916023710510051 | deltaY: 1.1233112696531285E-7 | deltaV: 2.3710510051438288E-8 |
| x: 0,1000: | | y: 1.0010976918775682E-4 | v: 0.004000025317086358 | deltaY: 1.0976918775684546E-7 | deltaV: 2.5317086358757346E-8 |
| | | | | | |
| x: 0,9000: | | y: 0.6560999470713236 | v: 2.9159998730650614 | deltaY: 5.2928676552710385E-8 | deltaV: 1.269349390042862E-7 |
| x: 0,9100: | | y: 0.6857495542047567 | v: 3.014283869501598 | deltaY: 5.57952434254716E-8 | deltaV: 1.3049840230650034E-7 |
| x: 0,9200: | | y: 0.7163929012967707 | v: 3.1147518659169124 | deltaY: 5.87032293886125E-8 | deltaV: 1.3408308774387478E-7 |
| x: 0,9300: | | y: 0.7480519483468664 | v: 3.217427862311268 | deltaY: 6.165313370942727E-8 | deltaV: 1.3768873241559731E-7 |
| x: 0,9400: | | y: 0.7807488953545516 | v: 3.3223358586849185 | deltaY: 6.464544866080502E-8 | deltaV: 1.413150823026399E-7 |
| x: 0,9500: | | y: 0.814506182319341 | v: 3.4294998550381073 | deltaY: 6.76806591881629E-8 | deltaV: 1.449618931559371E-7 |
| x: 0,9600: | | y: 0.8493464892407561 | v: 3.5389438513710685 | deltaY: 7.075924424171376E-8 | deltaV: 1.486289327168322E-7 |
| x: 0,9700: | | y: 0.8852927361183247 | v: 3.650691847684026 | deltaY: 7.388167522215383E-8 | deltaV: 1.5231597361164972E-7 |
| x: 0,9800: | | y: 0.9223680829515811 | v: 3.7647678439771965 | deltaY: 7.704841875622037E-8 | deltaV: 1.5602280312165817E-7 |

| | | | | | |
|-------------------------------|--|-----------------------|----------------------|------------------------------|--|
| x: 0,9900: | | y: 0.9605959297400658 | v: 3.881195840250786 | deltaY: 8.025993414317867E-8 | |
| deltaV: 1.5974921385719654E-7 | | | | | |
| x: 1,0000: | | y: 0.9999999164833252 | v: 3.999999836504993 | deltaY: 8.351667479811198E-8 | |
| deltaV: 1.634950068662988E-7 | | | | | |

3.

$$y(x)=x^2, \quad v(x)=2x, \quad p(x)=x+1, \quad q(x)=1, \quad f(x)=-x^2+4x+2, \quad \alpha=0, \quad \beta=1, \quad \gamma_1=0, \quad \gamma_2=1, \quad n=10$$

Прогноз погрешности: 1e-4

Полученный результат:

| | | | | | |
|------------|--|------------------------|------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| x: 0,0000: | | y: 0.0 | v: 0.0 | deltaY: 0.0 | deltaV: 0.0 |
| x: 0,1000: | | y: 0.00999545162917026 | v: 0.20000511538631843 | deltaY: 4.548370829741966E-6 | deltaV: 5.1153863184216775E-6 |
| x: 0,2000: | | y: 0.03999102061700391 | v: 0.40000853165410677 | deltaY: 8.97938299609935E-6 | deltaV: 8.531654106747055E-6 |
| x: 0,3000: | | y: 0.089987301412109 | v: 0.6000107715266535 | deltaY: 1.2698587891019075E-5 | deltaV: 1.0771526653408081E-5 |
| x: 0,4000: | | y: 0.15998412748836077 | v: 0.8000121799342483 | deltaY: 1.5872511639258846E-5 | deltaV: 1.2179934248290891E-5 |
| x: 0,5000: | | y: 0.2499813754016328 | v: 1.0000129906159911 | deltaY: 1.8624598367211753E-5 | deltaV: 1.2990615991137489E-5 |
| x: 0,6000: | | y: 0.35997895188471685 | v: 1.2000133655325922 | deltaY: 2.104811528313988E-5 | deltaV: 1.3365532592235496E-5 |
| x: 0,7000: | | y: 0.489976785288108 | v: 1.4000134190408553 | deltaY: 2.3214711892094453E-5 | deltaV: 1.3419040855167097E-5 |
| x: 0,8000: | | y: 0.6399748197520388 | v: 1.6000132331841173 | deltaY: 2.518024796127616E-5 | deltaV: 1.323318411716734E-5 |
| x: 0,9000: | | y: 0.8099730111466037 | v: 1.8000128676243499 | deltaY: 2.6988853396359147E-5 | deltaV: 1.2867624349821583E-5 |
| x: 1,0000: | | y: 0.9999713241863708 | v: 2.0000123662455414 | deltaY: 2.8675813629197577E-5 | deltaV: 1.2366245541350906E-5 |

4.

$$y(x)=x^2, \quad v(x)=2x, \quad p(x)=x+1, \quad q(x)=1, \quad f(x)=-x^2+4x+2, \quad \alpha=0, \quad \beta=1, \quad \gamma_1=0, \quad \gamma_2=1, \quad n=100$$

Прогноз погрешности: 1e-8

Полученный результат:

| | | | | | |
|------------|--|--------------------------|------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| x: 0,0000: | | y: 0.0 | v: 0.0 | deltaY: 0.0 | deltaV: 0.0 |
| x: 0,0100: | | y: 1.0008101036719497E-4 | v: 0.0200000013575816 | deltaY: 8.101036719496471E-8 | deltaV: 1.3575815992206142E-9 |
| x: 0,0200: | | y: 4.000804796148852E-4 | v: 0.04000000267782888 | deltaY: 8.047961488520054E-8 | deltaV: 2.677828882247102E-9 |
| x: 0,0300: | | y: 9.000799672944126E-4 | v: 0.06000000396211573 | deltaY: 7.996729441258829E-8 | deltaV: 3.962115732725202E-9 |
| x: 0,0400: | | y: 0.0016000794729475686 | v: 0.08000000521175565 | deltaY: 7.947294756852942E-8 | deltaV: 5.211755652045902E-9 |
| x: 0,0500: | | y: 0.0025000789961320312 | v: 0.10000000642800494 | deltaY: 7.899613203073835E-8 | deltaV: 6.4280049338893974E-9 |
| x: 0,0600: | | y: 0.0036000785364206913 | v: 0.12000000761206563 | deltaY: 7.853642069056282E-8 | deltaV: 7.61206561672445E-9 |
| x: 0,0700: | | y: 0.004900078093401015 | v: 0.14000000876508825 | deltaY: 7.809340101579826E-8 | deltaV: 8.765088266304844E-9 |
| x: 0,0800: | | y: 0.006400077666674433 | v: 0.1600000098881745 | deltaY: 7.766667443290937E-8 | deltaV: 9.88817450142676E-9 |
| x: 0,0900: | | y: 0.008100077255855771 | v: 0.18000001098237964 | deltaY: 7.72558557717018E-8 | deltaV: 1.098237964458626E-8 |
| x: 0,1000: | | y: 0.010000076860572691 | v: 0.20000001204871481 | deltaY: 7.68605726928634E-8 | deltaV: 1.2048714831403018E-8 |
| | | | | | |
| x: 0,9000: | | y: 0.81000007639984 | v: 1.8000000536657184 | deltaY: 7.639983989893295E-8 | deltaV: 5.3665718313666844E-8 |
| x: 0,9100: | | y: 0.8281000766452125 | v: 1.820000053939238 | deltaY: 7.66452123990291E-8 | deltaV: 5.393923796503941E-8 |
| x: 0,9200: | | y: 0.8464000768948419 | v: 1.8400000542103963 | deltaY: 7.689484182726858E-8 | deltaV: 5.42103961720386E-8 |
| x: 0,9300: | | y: 0.8649000771486889 | v: 1.86000005447926 | deltaY: 7.7148688770734E-8 | deltaV: 5.44792599921351E-8 |
| x: 0,9400: | | y: 0.8836000774067151 | v: 1.8800000547458946 | deltaY: 7.740671492673101E-8 | deltaV: 5.474589448439815E-8 |
| x: 0,9500: | | y: 0.9025000776688832 | v: 1.9000000550103637 | deltaY: 7.76688831027883E-8 | deltaV: 5.501036359767397E-8 |

| | | | | |
|-------------------------------|--|-----------------------|-----------------------|------------------------------|
| x: 0,9600: | | y: 0.9216000779351564 | v: 1.9200000552727292 | deltaY: 7.793515621745684E-8 |
| deltaV: 5.5272729060362735E-8 | | | | |
| x: 0,9700: | | y: 0.940900078205499 | v: 1.9400000555330514 | deltaY: 7.820549907666674E-8 |
| deltaV: 5.553305149064158E-8 | | | | |
| x: 0,9800: | | y: 0.9604000784798762 | v: 1.9600000557913895 | deltaY: 7.847987626430353E-8 |
| deltaV: 5.5791389508286215E-8 | | | | |
| x: 0,9900: | | y: 0.9801000787582538 | v: 1.9800000560478006 | deltaY: 7.875825380754264E-8 |
| deltaV: 5.604780062284931E-8 | | | | |
| x: 1,0000: | | y: 1.0000000790405983 | v: 2.000000056302341 | deltaY: 7.904059828867105E-8 |
| deltaV: 5.630234101161591E-8 | | | | |