Отчет по лабораторной работе №22 по курсу

__Языки и методы программирования____________

Студент группы М8О-101Б-21 Постнов Александр Вячеславович, № по списку 17

Контакты www, e-mail: 61pav03@mail.ru

Работа выполнена: «» 202 2г.

Преподаватель: ____ каф. 806 _____Титов В.К.______________________

Входной контроль знаний с оценкой _____________________

Отчет сдан « » _________2021_ г., итоговая оценка _____

Подпись преподавателя ________________

1. **Тема:** Издательская система TeX

2. **Цель работы:** Ознакомиться с системой TeX и выполнить задание____________________

3. **Задание** (*вариант №17*)**:** Сверстать 514-515 страницу учебника Н.С Пискунова«Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. II том»

514 МАТРИЦЫ [ГЛ. XXI

то матрица A и преобразование (1) называются *вырожденными*. Это преобразование не будет взаимно однозначным.

Докажем это. Рассмотрим два возможных случая:

1) Если $a_{11}=a_{12}=a_{21}=a_{22}=0$, то при любых x_1 и x_2 будут $y_1=0$, $y_2=0$. В этом случае любая точка $(x_1; x_2)$ плоскости x_1Ox_2 переходит в начало координат плоскости y_1Oy_2.

2) Пусть хотя бы один из коэффициентов преобразования отличен от нуля, например $a_{11}\neq 0$.

Умножая первое из уравнений (1) на a_{21}, второе на a_{11} и производя вычитание, получим с учетом равенства (5)

$$\begin{array}{r|l} a_{21} & y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2, \\ a_{11} & y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2, \\ \hline \multicolumn{2}{c}{a_{21}y_1-a_{11}y_2=0.} \end{array} \qquad (6)$$

Итак, при любых x_1, x_2 для значений y_1 и y_2 получаем равенство (6), т. е. соответствующая точка плоскости x_1Ox_2 попадает на прямую (6) плоскости y_1Oy_2. Очевидно, что это отображение не является взаимно однозначным, так как каждой точке прямой (6) плоскости y_1Oy_2 соответствует совокупность точек плоскости x_1Ox_2, лежащих на прямой $y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2$.

В обоих случаях отображение не является взаимно однозначным.

Пример 1. Преобразование

$$y_1=2x_1+x_2, \quad y_2=x_1-x_2$$

является взаимно однозначным, так как определитель $\Delta(A)$ матрицы преобразования A отличен от нуля:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3.$$

Обратное преобразование будет

$$x_1=\frac{1}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2, \quad x_2=\frac{1}{3}y_1-\frac{2}{3}y_2.$$

Матрица обратного преобразования, в соответствии с формулой (4) будет

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{Vmatrix}.$$

Пример 2. Линейное преобразование

$$y_1=x_1+2x_2, \quad y_2=2x_1+4x_2$$

является вырожденным, так как определитель матрицы преобразования

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

Это преобразование переводит все точки плоскости (x_1, x_2) в прямую $y_2-2y_1=0$ плоскости (y_1, y_2).

§ 4] ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ. СЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ 515

§ 4. Действия над матрицами. Сложение матриц

Определение 1. *Суммой* двух матриц $\|a_{ij}\|$ и $\|b_{ij}\|$ с одинаковым количеством строк и одинаковым количеством столбцов называется матрица $\|c_{ij}\|$, у которой элементом c_{ij} является сумма $a_{ij}+b_{ij}$ соответствующих элементов матриц $\|a_{ij}\|$ и $\|b_{ij}\|$, т. е.

$$\|a_{ij}\|+\|b_{ij}\|=\|c_{ij}\|, \qquad (1)$$

если

$$a_{ij}+b_{ij}=c_{ij} \quad (j=1, 2, \ldots, m; \ j=1, 2, \ldots, n). \qquad (2)$$

Пример 1. $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{Vmatrix}.$

Аналогичным образом определяется *разность* двух матриц. Целесообразность такого определения суммы двух матриц, в частности, следует из представления вектора как столбцевой матрицы.

Умножение матрицы на число. Чтобы умножить матрицу на число λ, нужно умножить на это число каждый элемент матрицы:

$$\lambda\|a_{ij}\|=\|\lambda a_{ij}\|. \qquad (3)$$

Если λ целое, то формула (3) получается как следствие правила сложения матриц.

Пример 2. $\lambda\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{Vmatrix}.$

Произведение двух матриц. Пусть имеем линейное преобразование плоскости x_1Ox_2 на плоскость y_1Oy_2:

$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2, \quad y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2 \qquad (4)$$

с матрицей преобразования

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}. \qquad (5)$$

Пусть, далее, произведено линейное преобразование плоскости y_1Oy_2 на плоскость z_1Oz_2:

$$z_1=b_{11}y_1+b_{12}y_2, \quad z_2=b_{21}y_1+b_{22}y_2 \qquad (6)$$

с матрицей преобразования

$$B=\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix}. \qquad (7)$$

Требуется определить матрицу преобразования плоскости x_1Ox_2 на плоскость z_1Oz_2. Подставляя выражения (4) в равенства (6), получаем

$$z_1=b_{11}(a_{11}x_1+a_{12}x_2)+b_{12}(a_{21}x_1+a_{22}x_2),$$
$$z_2=b_{21}(a_{11}x_1+a_{12}x_2)+b_{22}(a_{21}x_1+a_{22}x_2),$$

4. **Оборудование(лабораторное)**:
ЭВМ -, процессор -, имя узла сети - с ОП - ГБ,
НМД - ГБ, терминал- адрес -, принтер -
Другие устройства -

Оборудование ПЭВМ студента, если использовалось:
Процессор AMD Ryzen 5 4500U, с ОП 8 ГБ
Другие устройства -

5. **Программное обеспечение:**
Операционная система семейства -, наименование - версия -
интерпретатор команд - версия
Система программирования - версия -
Редактор текстов - версия -
Утилиты операционной системы -
Прикладные системы и программы -
Местонахождение и имена файлов программ и данных -

Программное обеспечение ЭВМ студента, если использовалось:
Операционная система семейства GNU/Linux, наименование Manjaro версия 5-13-12-1
интерпретатор команд GNOME Terminal версия 3.38.2.
Система программирования ____ версия ________________
Редактор текстов emacs версия 3.27.20
Утилиты операционной системы
Прикладные системы и программы -
Местонахождение и имена файлов программ и данных -

6. **Идея, метод, алгоритм** решения задачи (в формах: словесной, псевдокода, графической [блок-схема, диаграмма, рисунок, таблица] или формальные спецификации с пред- и постусловиями)
Подробно изучить основные возможности системы и языка TeX
Сверстать в TeX заданные согласно варианту страницы книги
Поиск информации в книгах, интернет ресурсах, чтобы узнать, как верстать какую-либо формулу

7. Сценарий выполнения работы [план работы, первоначальный текст программы в черновике (можно на отдельном листе) и тесты либо соображения по тестированию].

```
\documentclass[a4paper, 14pt]{article}


\usepackage[14pt]{extsizes}

\headheight=0.5cm

\headsep=0.5cm

\usepackage[T2A]{fontenc}

\usepackage[utf8]{inputenc}

\usepackage[russian]{babel}

\usepackage[left=2cm,right=2cm,

   top=1.8cm,bottom=2.5cm]{geometry}

\usepackage{ifthen}
```

```
\usepackage{fancyhdr}
\usepackage{amsmath}
\pagestyle{fancy}
\fancyhf{}

\setlength{\headheight}{30pt}

\fancypagestyle{first}{
\fancyhead{}
\fancyhead[C]{\textsc{матрицы}}
\fancyhead[L]{514}
\fancyhead[R]{[\textsc{гл. xxi}}
\renewcommand{\headrulewidth}{0pt}
\fancyfoot{}
}


\fancypagestyle{second}{
\fancyhead{}
\fancyhead[C]{\textsc{действия над матрицами. сложения матриц}}
\fancyhead[L]{\textbf{\S   4]}}
\fancyhead[R]{515}
\renewcommand{\headrulewidth}{0pt}
\fancyfoot{}
}


\begin{document}
\thispagestyle{first}


то матрица $A$ и преобразование (1) называются \emph{вырожденными}. Это преобразование не будет взаимно однозначным.

Докажем это. Рассмотрим два возможных случая:
```

1) Если $a_{11}=a_{12}=a_{21}=a_{22}=0$, то при любых x_1 и x_2 будут $y_1=0, y_2 = 0$. В этом случае любая точка (x_{1}; x_{2}) плоскости x_1Ox_2 переходит в начало координат плоскости $y_{1}Oy_{2}$.

2) Пусть хотя бы один из коэффициентов преобразования отличен от нуля, например $a_{11} \ne 0$.

Умножая первое из уравнений (1) на a_{21}, второе на a_{11} и производя вычитание, получим с учетом равенства (5)

\begin{center}
\begin{tabular}{l | l}
a_{21} & $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ \\
a_{11} & $y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$ \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{$a_{21}y_1 - a_{11}y_2 = 0$} \\

\end{tabular}
\end{center}

\begin{flushright}
(6)
\end{flushright}

Итак, при любых x_1, x_2 для значений y_1 и y_2 получаем равенство(6), т. е. соответствующая точка плоскости x_1Ox_2 попадает на прямую (6) плоскости y_1Oy_2. Очевидно, что это отображение не является взаимно однозначным, так как каждой точке прямой (6) плоскости y_1Oy_2 соответствует совокупность точек плоскости x_1Ox_2, лежащих на прямой $y_1=a_{11}x_1 + a_{12}x_3$

В обоих случаях отображение не является взаимно однозначным.

\begin{small}
П\,р\,и\,м\,е\,р 1. Преобразование
\begin{center}
\normalsize{$y_1=2x_1 + x_2$,\hspace{5mm}$y_2=x_1 - x_2$}
\end{center}

```
является взаимно однозначным, так как определитель $\Delta(A)$ матрицы преобразования $A$ отличен от нуля:

\begin{center}
\normalsize{$\Delta(A) = \begin{vmatrix}
2 & \hspace{3mm}1\\
1 & -1
\end{vmatrix} = -3$.}
\end{center}
Обратное преобразование будет
\begin{center}
   \normalsize{$x_1 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2$,\hspace{5mm}$x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2$}
\end{center}
Матрица обратного преобразования, в соответствии с формулой (4) будет
\begin{center}
\Large{
$A^{-1} = \begin{Vmatrix}
\frac{1}{3} & \hspace{5mm}\frac{1}{3}\\
\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}
\end{Vmatrix}$.}
\end{center}

П\,р\,и\,м\,е\,р 2. Линейное преобразование
\begin{center}
\normalsize{$y_1=x_1 + 2x_2$,\hspace{5mm}$y_2=2x_1 + 4x_2$}
\end{center}
является вырожденным, так как определитель матрицы преобразования
\begin{center}
\normalsize{$\Delta(A) = \begin{vmatrix}
1 & 2\\
2 & 4
\end{vmatrix} = 0$.}
\end{center}
Это преобразование переводит все точки плоскости $(x_1, x_2)$ в прямую $y_2 - 2y_1 = 0$ плоскости $(y_1, y_2).$
% \maketitle
\end{small}
```

```latex
\newpage

\thispagestyle{second}

\begin{center}

\textbf{\large{\textsection{4 Действия над матрицами. Сложения матриц}}}%

\end{center}


О\,п\,р\,е\,д\,е\,л\,е\,н\,и\,е 1. \emph{Суммой} двух матриц
$\begin{Vmatrix}a_{ij}\end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix}b_{ij}\end{Vmatrix}$ с одинаковым
количеством строк и одинаковым количеством столбцов называется матрица
$\begin{Vmatrix}c_{ij}\end{Vmatrix}$, у которой элементом $c_{ij}$ является сумма $a_{ij} +
b_{ij}$ соответствующих элементов матриц $\begin{Vmatrix}a_{ij}\end{Vmatrix}$ и
$\begin{Vmatrix}b_{ij}\end{Vmatrix}$, т. е.

\begin{equation}

       \begin{Vmatrix}a_{ij}\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix}b_{ij}\end{Vmatrix} =
\begin{Vmatrix}c_{ij}\end{Vmatrix}, \hbox{если}

\end{equation}

\begin{equation}

   a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}\hspace{5mm}(i = 1, 2, ..., m;\hspace{2mm}j = 1, 2, ..., n).

\end{equation}


П\,р\,и\,м\,е\,р 1. $\begin{Vmatrix}

a_{11} & a_{12} \\

a_{21} & a_{22}

\end{Vmatrix}$ +

$\begin{Vmatrix}

b_{11} & a_{12} \\

a_{21} & a_{22}

\end{Vmatrix}$ =

$\begin{Vmatrix}

a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\

a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22}

\end{Vmatrix}$.\\*


Аналогичным образом определяется \emph{разность} двух матриц.

Целесообразность такого определения суммы двух матриц,

в частности, следует из представления вектора как столбцевой

матрицы:
```

У\,м\,н\,о\,ж\,е\,н\,и\,е\hspace{5mm}м\,а\,т\,р\,и\,ц\,ы\hspace{5mm}н\,а\hspace{5mm}ч\,и\,с\,л\,о. Чтобы умножить умножить матрицу на число λ, нужно умножить на это число каждый элемент матрицы:

\begin{equation}

\lambda\begin{Vmatrix}a_{ij}\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}\lambda a_{ij}\end{Vmatrix}

\end{equation}

Если λ целое, то формула (3) получается как следствие правила сложения матриц.

П\,р\,и\,м\,е\,р 2. $\lambda\begin{Vmatrix}

a_{11} & a_{12} \\

a_{21} & a_{22}

\end{Vmatrix}$ =

$\begin{Vmatrix}

\lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\

\lambda a_{21} & \lambda a_{22}

\end{Vmatrix}$.*

П\,р\,о\,и\,з\,в\,е\,д\,е\,н\,и\,е\hspace{5mm}д\,в\,у\,х\hspace{5mm}м\,а\,т\,р\,и\,ц. Пусть имеем линейное преобразование плоскости x_1Ox_2 на плоскость y_1Oy_2:

\begin{equation}

y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,\hspace{5mm}y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2

\end{equation}

с матрицей преобразования

\begin{equation}

A = \begin{Vmatrix}

a_{11} & a_{12} \\

a_{21} & a_{22}

\end{Vmatrix}.

\end{equation}

Пусть, далее, произведено линейное преобразование плоскости y_1Oy_2 на плоскость z_1Oz_2:

\begin{equation}

z_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2,\hspace{5mm}z_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2

\end{equation}

с матрицей преобразования

\begin{equation}

```
   B = \begin{Vmatrix}
b_{11} & b_{12} \\
b_{21} & b_{22}
\end{Vmatrix}.
\end{equation}


Требуется определить матрицу преобразования плоскости $x_1Ox_2$ на плоскость $z_1Oz_2$.
Подставляя выражение (4) в равенства (6), получаем
$$z_1 = b_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{12}(a_{12}x_1 + a_{22}x_2),$$
$$z_2 = b_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{22}(a_{12}x_1 + a_{22}x_2),$$
\end{document}
```

Пункты 1-7 отчета составляются строго до начала лабораторной работы.

Допущен к выполнению работы. **Подпись преподавателя** ____________________

8. Распечатка протокола (подклеить листинг окончательного варианта программы с тестовыми примерами, подписанный преподавателем).

```
[alex@fedora 22(?)]$ cat head.txt
-----------------------------------------------------
|    Лабораторная работа №22                          |
|    Издательская система TeX                   |
|    Выполнил:  студент группы М8О-101Б-21          |
|    Постнов Александр Вячеславович                        |
-----------------------------------------------------
[alex@fedora 22(?)]$ cat main.tex
\documentclass[a4paper, 14pt]{article}

\usepackage[14pt]{extsizes}
\headheight=0.5cm
\headsep=0.5cm
\usepackage[T2A]{fontenc}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage[russian]{babel}
\usepackage[left=2cm,right=2cm,
  top=1.8cm,bottom=2.5cm]{geometry}
\usepackage{ifthen}
\usepackage{fancyhdr}
\usepackage{amsmath}
\pagestyle{fancy}
\fancyhf{}

\setlength{\headheight}{30pt}

\fancypagestyle{first}{
\fancyhead{}
\fancyhead[C]{\textsc{матрицы}}
\fancyhead[L]{514}
```

```
\fancyhead[R]{[\textsc{гл. xxi}}
\renewcommand{\headrulewidth}{0pt}
\fancyfoot{}
}


\fancypagestyle{second}{
\fancyhead{}
\fancyhead[C]{\textsc{действия над матрицами. сложения матриц}}
\fancyhead[L]{\textbf{\S   4]}}
\fancyhead[R]{515}
\renewcommand{\headrulewidth}{0pt}
\fancyfoot{}
}


\begin{document}
\thispagestyle{first}
```

то матрица A и преобразование (1) называются \emph{вырожденными}. Это преобразование не будет взаимно однозначным.

Докажем это. Рассмотрим два возможных случая:

1) Если $a_{11}=a_{12}=a_{21}=a_{22}=0$, то при любых x_1 и x_2 будут $y_1=0, y_2 = 0$. В этом случае любая точка (x_{1}; x_{2}) плоскости x_1Ox_2 переходит в начало координат плоскости $y_{1}Oy_{2}$.

2) Пусть хотя бы один из коэффициентов преобразования отличен от нуля, например $a_{11} \ne 0$.

Умножая первое из уравнений (1) на a_{21}, второе на a_{11} и производя вычитание, получим с учетом равенства (5)

```
\begin{center}
\begin{tabular}{l | l}
$a_{21}$ & $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ \\
$a_{11}$ & $y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$ \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{$a_{21}y_1 - a_{11}y_2 = 0$} \\

\end{tabular}
\end{center}


\begin{flushright}
(6)
\end{flushright}
```

Итак, при любых x_1, x_2 для значений y_1 и y_2 получаем равенство(6), т. е. соответствующая точка плоскости x_1Ox_2 попадает на прямую (6) плоскости y_1Oy_2. Очевидно, что это отображение не является взаимно однозначным, так как каждой точке прямой (6) плоскости y_1Oy_2 соответствует совокупность точек плоскости x_1Ox_2, лежащих на прямой $y_1=a_{11}x_1 + a_{12}x_3$

В обоих случаях отображение не является взаимно однозначным.

\begin{small}
П\,р\,и\,м\,е\,р 1. Преобразование
\begin{center}
\normalsize{$y_1=2x_1 + x_2$,\hspace{5mm}$y_2=x_1 - x_2$}
\end{center}
является взаимно однозначным, так как определитель $\Delta(A)$ матрицы преобразования A отличен от нуля:

\begin{center}
\normalsize{$\Delta(A) = \begin{vmatrix}
2 & \hspace{3mm}1\\
1 & -1
\end{vmatrix} = -3$.}
\end{center}
Обратное преобразование будет
\begin{center}
\normalsize{$x_1 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2$,\hspace{5mm}$x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2$}
\end{center}
Матрица обратного преобразования, в соответствии с формулой (4) будет
\begin{center}
\Large{
$A^{-1} = \begin{Vmatrix}
\frac{1}{3} & \hspace{5mm}\frac{1}{3}\\
\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}
\end{Vmatrix}$.}
\end{center}

П\,р\,и\,м\,е\,р 2. Линейное преобразование
\begin{center}
\normalsize{$y_1=x_1 + 2x_2$,\hspace{5mm}$y_2=2x_1 + 4x_2$}
\end{center}
является вырожденным, так как определитель матрицы преобразования
\begin{center}
\normalsize{$\Delta(A) = \begin{vmatrix}
1 & 2\\
2 & 4
\end{vmatrix} = 0$.}
\end{center}
Это преобразование переводит все точки плоскости (x_1, x_2) в прямую $y_2 - 2y_1 = 0$ плоскости $(y_1, y_2).$
% \maketitle
\end{small}

```latex
\newpage
\thispagestyle{second}
\begin{center}
\textbf{\large{\textsection{4 Действия над матрицами. Сложения матриц}}}%
\end{center}

О\,п\,р\,е\,д\,е\,л\,е\,н\,и\,е 1. \emph{Суммой} двух матриц $\begin{Vmatrix}a_{ij}\end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix}b_{ij}\end{Vmatrix}$ с одинаковым количеством строк и одинаковым количеством столбцов называется матрица $\begin{Vmatrix}c_{ij}\end{Vmatrix}$, у которой элементом $c_{ij}$ является сумма $a_{ij} + b_{ij}$ соответствующих элементов матриц $\begin{Vmatrix}a_{ij}\end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix}b_{ij}\end{Vmatrix}$, т. е.
\begin{equation}
    \begin{Vmatrix}a_{ij}\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix}b_{ij}\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}c_{ij}\end{Vmatrix}, \hbox{если}
\end{equation}
\begin{equation}
  a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}\hspace{5mm}(i = 1, 2, ..., m;\hspace{2mm}j = 1, 2, ..., n).
\end{equation}

П\,р\,и\,м\,е\,р 1. $\begin{Vmatrix}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{Vmatrix}$ +
$\begin{Vmatrix}
b_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{Vmatrix}$ =
$\begin{Vmatrix}
a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\
a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22}
\end{Vmatrix}$.\\*

Аналогичным образом определяется \emph{разность} двух матриц.
Целесообразность такого определения суммы двух матриц,
в частности, следует из представления вектора как столбцевой
матрицы:

У\,м\,н\,о\,ж\,е\,н\,и\,е\hspace{5mm}м\,а\,т\,р\,и\,ц\,ы\hspace{5mm}н\,а\hspace{5mm}ч\,и\,с\,л\,о. Чтобы умножить умножить матрицу на число $\lambda$, нужно умножить на это число каждый элемент матрицы:
\begin{equation}
  \lambda\begin{Vmatrix}a_{ij}\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}\lambda a_{ij}\end{Vmatrix}
\end{equation}

Если $\lambda$ целое, то формула (3) получается как следствие правила сложения матриц.

П\,р\,и\,м\,е\,р 2. $\lambda\begin{Vmatrix}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{Vmatrix}$ =
```

```
$\begin{Vmatrix}
\lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\
\lambda a_{21} & \lambda a_{22}
\end{Vmatrix}$.\\*

П\,р\,о\,и\,з\,в\,е\,д\,е\,н\,и\,е\hspace{5mm}д\,в\,у\,х\hspace{5mm}м\,а\,т\,р\,и\,ц. Пусть имеем линейное преобразование плоскости $x_1Ox_2$ на плоскость $y_1Oy_2$:
\begin{equation}
   y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,\hspace{5mm}y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2
\end{equation}
с матрицей преобразования
\begin{equation}
   A = \begin{Vmatrix}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{Vmatrix}.
\end{equation}

Пусть, далее, произведено линейное преобразование плоскости $y_1Oy_2$ на плоскость $z_1Oz_2$:
\begin{equation}
   z_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2,\hspace{5mm}z_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2
\end{equation}
с матрицей преобразования
\begin{equation}
   B = \begin{Vmatrix}
b_{11} & b_{12} \\
b_{21} & b_{22}
\end{Vmatrix}.
\end{equation}

Требуется определить матрицу преобразования плоскости $x_1Ox_2$ на плоскость $z_1Oz_2$. Подставляя выражение (4) в равенства (6), получаем
$$z_1 = b_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{12}(a_{12}x_1 + a_{22}x_2),$$
$$z_2 = b_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{22}(a_{12}x_1 + a_{22}x_2),$$
\end{document}
```

```
[alex@fedora 22(?)]$ latex main.tex
This is pdfTeX, Version 3.141592653-2.6-1.40.22 (TeX Live 2021) (preloaded format=latex)
 restricted \write18 enabled.
entering extended mode
(./main.tex
LaTeX2e <2020-10-01> patch level 4
L3 programming layer <2021-05-07>
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/base/article.cls
Document Class: article 2020/04/10 v1.4m Standard LaTeX document class
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/base/size10.clo))
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/extsizes/extsizes.sty
```

```
Package ExtSizes Warning: It is better to use one of the extsizes classes,
 if you can.

(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/extsizes/size14.clo))
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/base/fontenc.sty
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/cyrillic/t2aenc.def
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/base/t2aenc.dfu))
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/cyrillic/t2acmr.fd))
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/base/inputenc.sty)
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/generic/babel/babel.sty
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/generic/babel/babel.def
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/generic/babel/txtbabel.def))
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/generic/babel-russian/russianb.ldf

Package babel Warning: No hyphenation patterns were preloaded for
(babel)                the language `Russian' into the format.
(babel)                Please, configure your TeX system to add them and
(babel)                rebuild the format. Now I will use the patterns
(babel)                preloaded for \language=0 instead on input line 32.

)) (/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/geometry/geometry.sty
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/graphics/keyval.sty)
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/generic/iftex/ifvtex.sty
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/generic/iftex/iftex.sty)))
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/base/ifthen.sty)
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/fancyhdr/fancyhdr.sty)
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/amsmath/amsmath.sty
For additional information on amsmath, use the `?' option.
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/amsmath/amstext.sty
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/amsmath/amsgen.sty))
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/amsmath/amsbsy.sty)
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/amsmath/amsopn.sty))
(/usr/share/texlive/texmf-dist/tex/latex/l3backend/l3backend-dvips.def)
No file main.aux.
*geometry* driver: auto-detecting
*geometry* detected driver: dvips

Overfull \hbox (62.76103pt too wide) in paragraph at lines 43--44
[]\T2A/cmr/m/n/14.4 �� ������� $\OML/cmm/m/it/14.4 A$ \T2A/cmr/m/n/14.4 � �����
���������� (1) ���������� \T2A/cmr/m/it/14.4
�������������\T2A/cmr/m/n/14.4 . ���
 ���������������

Overfull \hbox (22.12907pt too wide) in paragraph at lines 51--52
[]\T2A/cmr/m/n/14.4 ������� ������ �� ���������� (1) �� $\OML/cmm/m/it/14.4
a[]$
\T2A/cmr/m/n/14.4 , ������ �� $\OML/cmm/m/it/14.4 a[]$ \T2A/cmr/m/n/14.4 � ����
����� ����������,
```

```
[1]
Overfull \hbox (40.77393pt too wide) in paragraph at lines 119--120
[]\T2A/cmr/m/n/14.4 ������������ 1. \T2A/cmr/m/it/14.4 ������ \T2A/cmr/m/n/14.4
���� ������ $[]$ � $[]$ c ���������� ����������

Overfull \hbox (11.31866pt too wide) in paragraph at lines 119--120
\T2A/cmr/m/n/14.4 ����� � ���������� ���������� ��������
���������� ������� $[
]$, � �������

Underfull \hbox (badness 10000) in paragraph at lines 127--139


Overfull \hbox (25.5266pt too wide) in paragraph at lines 140--144
[]\T2A/cmr/m/n/14.4 ����������� ������� ������������ \T2A/cmr/m/it/14.4
�������
� \T2A/cmr/m/n/14.4 ���� ������. ����������������

Overfull \hbox (7.8327pt too wide) in paragraph at lines 140--144
\T2A/cmr/m/n/14.4 ������ ����������� ����� ���� ������, �
���������, ������� ��
 �������������

Overfull \hbox (38.60002pt too wide) in paragraph at lines 145--146
[]\T2A/cmr/m/n/14.4 ��������� ������� �a �����. ����� ��������
�������� �������


Underfull \hbox (badness 10000) in paragraph at lines 152--160


Overfull \hbox (16.73022pt too wide) in paragraph at lines 161--162
[]\T2A/cmr/m/n/14.4 ������������ ���x ������. ����� �����
�������� �������������
��

Overfull \hbox (22.25293pt too wide) in paragraph at lines 185--186
[]\T2A/cmr/m/n/14.4 ��������� ��������� �������
��������������� ��������� $\OML
/cmm/m/it/14.4 x[]Ox[]$ \T2A/cmr/m/n/14.4 �� ���������
[2] (./main.aux) )
(see the transcript file for additional information)
Output written on main.dvi (2 pages, 11804 bytes).
Transcript written on main.log.
[alex@fedora 22(?)]$ ls
13-03-2022_23-32-44  head.txt  main.dvi  main.png  исход.png
15-03-2022_14-18-36  main.aux  main.log  main.tex
[alex@fedora 22(?)]$ dvipdf main.dvi
[alex@fedora 22(?)]$ ls
13-03-2022_23-32-44  head.txt  main.dvi  main.pdf  main.tex
```

15-03-2022_14-18-36 main.aux main.log main.png исход.png

то матрица A и преобразование (1) называются *вырожденными*. Это преобразование не будет взаимно однозначным.

Докажем это. Рассмотрим два возможных случая:

1) Если $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$, то при любых x_1 и x_2 будут $y_1 = 0, y_2 = 0$. В этом случае любая точка $(x_1; x_2)$ плоскости x_1Ox_2 переходит в начало координат плоскости y_1Oy_2.

2) Пусть хотя бы один из коэффициентов преобразования отличен от нуля, например $a_{11} \neq 0$.

Умножая первое из уравнений (1) на a_{21}, второе на a_{11} и производя вычитание, получим с учетом равенства (5)

$$\begin{array}{r|l} a_{21} & y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{11} & y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{a_{21}y_1 - a_{11}y_2 = 0} \end{array} \tag{6}$$

Итак, при любых x_1, x_2 для значений y_1 и y_2 получаем равенство(6), т. е. соответствующая точка плоскости x_1Ox_2 попадает на прямую (6) плоскости y_1Oy_2. Очевидно, что это отображение не является взаимно однозначным, так как каждой точке прямой (6) плоскости y_1Oy_2 соответствует совокупность точек плоскости x_1Ox_2, лежащих на прямой $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_3$

В обоих случаях отображение не является взаимно однозначным.

Пример 1. Преобразование

$$y_1 = 2x_1 + x_2, \quad y_2 = x_1 - x_2$$

является взаимно однозначным, так как определитель $\Delta(A)$ матрицы преобразования A отличен от нуля:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Обратное преобразование будет

$$x_1 = \tfrac{1}{3}y_1 + \tfrac{1}{3}y_2, \quad x_2 = \tfrac{1}{3}y_1 - \tfrac{2}{3}y_2$$

Матрица обратного преобразования, в соответствии с формулой (4) будет

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{Vmatrix}.$$

Пример 2. Линейное преобразование

$$y_1 = x_1 + 2x_2, \quad y_2 = 2x_1 + 4x_2$$

является вырожденным, так как определитель матрицы преобразования

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Это преобразование переводит все точки плоскости (x_1, x_2) в прямую $y_2 - 2y_1 = 0$ плоскости (y_1, y_2).

§4 Действия над матрицами. Сложения матриц

Определение 1. *Суммой* двух матриц $\|a_{ij}\|$ и $\|b_{ij}\|$ с одинаковым количеством строк и одинаковым количеством столбцов называется матрица $\|c_{ij}\|$, у которой элементом c_{ij} является сумма $a_{ij} + b_{ij}$ соответствующих элементов матриц $\|a_{ij}\|$ и $\|b_{ij}\|$, т. е.

$$\|a_{ij}\| + \|b_{ij}\| = \|c_{ij}\|, \text{если} \tag{1}$$

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij} \quad (i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n). \tag{2}$$

Пример 1. $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{Vmatrix}.$

Аналогичным образом определяется *разность* двух матриц. Целесообразность такого определения суммы двух матриц, в частности, следует из представления вектора как столбцевой матрицы:

Умножение матрицы на число. Чтобы умножить умножить матрицу на число λ, нужно умножить на это число каждый элемент матрицы:

$$\lambda \|a_{ij}\| = \|\lambda a_{ij}\| \tag{3}$$

Если λ целое, то формула (3) получается как следствие правила сложения матриц.

Пример 2. $\lambda \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{Vmatrix}.$

Произведение двух матриц. Пусть имеем линейное преобразование плоскости x_1Ox_2 на плоскость y_1Oy_2:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \tag{4}$$

с матрицей преобразования

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Пусть, далее, произведено линейное преобразование плоскости y_1Oy_2 на плоскость z_1Oz_2:

$$z_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2, \quad z_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \tag{6}$$

с матрицей преобразования

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Требуется определить матрицу преобразования плоскости x_1Ox_2 на плоскость z_1Oz_2. Подставляя выражение (4) в равенства (6), получаем

$$z_1 = b_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{12}(a_{12}x_1 + a_{22}x_2),$$
$$z_2 = b_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{22}(a_{12}x_1 + a_{22}x_2),$$

9. Дневник отладки должен содержать дату и время сеансов отладки и основные события (ошибки в сценарии и программе, нестандартные ситуации) и краткие комментарии к ним. В дневнике отладки приводятся сведения об использовании других ЭВМ, существенном участии преподавателя и других лиц в написании и отладке программы.

№	Лаб. или дом.	Дата	Время	Событие	Действие по исправлению	Примечание

10. Замечания автора

11.**Выводы**

_____

______Ознакомился с системой TeX ,возможно буду применять в будущем.____

Недочёты при выполнении задания могут быть устранены следующим образом: _________________________________

____

Подпись студента __Постнов_______________