то матрица A и преобразование (1) называются *вырожденными.* Это преобразование не будет взаимно однозначным.

Докажем это. Рассмотрим два возможных случая:

1) Если $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$, то при любых x_1 и x_2 будут $y_1 = 0, y_2 = 0$. В этом случае любая точка $(x_1;\ x_2)$ плоскости x_1Ox_2 переходит в начало координат плоскости y_1Oy_2.

2) Пусть хотя бы один из коэффициентов преобразования отличен от нуля, например $a_{11} \neq 0$.

Умножая первое из уравнений (1) на a_{21}, второе на a_{11} и производя вычитание, получим с учетом равенства (5)

$$\begin{array}{c|l} a_{21} & y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{11} & y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{a_{21}y_1 - a_{11}y_2 = 0} \end{array} \tag{6}$$

Итак, при любых x_1, x_2 для значений y_1 и y_2 получаем равенство(6), т. е. соответствующая точка плоскости x_1Ox_2 попадает на прямую (6) плоскости y_1Oy_2. Очевидно, что это отображение не является взаимно однозначным, так как каждой точке прямой (6) плоскости y_1Oy_2 соответствует совокупность точек плоскости x_1Ox_2, лежащих на прямой $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_3$

В обоих случаях отображение не является взаимно однозначным.

Пример 1. Преобразование

$$y_1 = 2x_1 + x_2, \quad y_2 = x_1 - x_2$$

является взаимно однозначным, так как определитель $\Delta(A)$ матрицы преобразования A отличен от нуля:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Обратное преобразование будет

$$x_1 = \tfrac{1}{3}y_1 + \tfrac{1}{3}y_2, \quad x_2 = \tfrac{1}{3}y_1 - \tfrac{2}{3}y_2$$

Матрица обратного преобразования, в соответствии с формулой (4) будет

$$A^{-1} = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{matrix} \right\|.$$

Пример 2. Линейное преобразование

$$y_1 = x_1 + 2x_2, \quad y_2 = 2x_1 + 4x_2$$

является вырожденным, так как определитель матрицы преобразования

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Это преобразование переводит все точки плоскости (x_1, x_2) в прямую $y_2 - 2y_1 = 0$ плоскости (y_1, y_2).

§4 Действия над матрицами. Сложения матриц

Определение 1. *Суммой* двух матриц $\left\|a_{ij}\right\|$ и $\left\|b_{ij}\right\|$ с одинаковым количеством строк и одинаковым количеством столбцов называется матрица $\left\|c_{ij}\right\|$, у которой элементом c_{ij} является сумма $a_{ij}+b_{ij}$ соответствующих элементов матриц $\left\|a_{ij}\right\|$ и $\left\|b_{ij}\right\|$, т. е.

$$\left\|a_{ij}\right\| + \left\|b_{ij}\right\| = \left\|c_{ij}\right\|, \text{если} \tag{1}$$

$$a_{ij}+b_{ij}=c_{ij} \quad (i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n). \tag{2}$$

Пример 1. $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{Vmatrix}.$

Аналогичным образом определяется *разность* двух матриц. Целесообразность такого определения суммы двух матриц, в частности, следует из представления вектора как столбцевой матрицы:

Умножение матрицы на число. Чтобы умножить умножить матрицу на число λ, нужно умножить на это число каждый элемент матрицы:

$$\lambda\left\|a_{ij}\right\| = \left\|\lambda a_{ij}\right\| \tag{3}$$

Если λ целое, то формула (3) получается как следствие правила сложения матриц.

Пример 2. $\lambda\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{Vmatrix}.$

Произведение двух матриц. Пусть имеем линейное преобразование плоскости x_1Ox_2 на плоскость y_1Oy_2:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \tag{4}$$

с матрицей преобразования

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Пусть, далее, произведено линейное преобразование плоскости y_1Oy_2 на плоскость z_1Oz_2:

$$z_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2, \quad z_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \tag{6}$$

с матрицей преобразования

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Требуется определить матрицу преобразования плоскости x_1Ox_2 на плоскость z_1Oz_2. Подставляя выражение (4) в равенства (6), получаем

$$z_1 = b_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{12}(a_{12}x_1 + a_{22}x_2),$$

$$z_2 = b_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{22}(a_{12}x_1 + a_{22}x_2),$$