

то матрица  $A$  и преобразование (1) называются *вырожденными*. Это преобразование не будет взаимно однозначным.

Докажем это. Рассмотрим два возможных случая:

1) Если  $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$ , то при любых  $x_1$  и  $x_2$  будут  $y_1 = 0, y_2 = 0$ . В этом случае любая точка  $(x_1; x_2)$  плоскости  $x_1Ox_2$  переходит в начало координат плоскости  $y_1Oy_2$ .

2) Пусть хотя бы один из коэффициентов преобразования отличен от нуля, например  $a_{11} \neq 0$ .

Умножая первое из уравнений (1) на  $a_{21}$ , второе на  $a_{11}$  и производя вычитание, получим с учетом равенства (5)

$$\begin{array}{r|l} a_{21} & y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{11} & y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ \hline & a_{21}y_1 - a_{11}y_2 = 0 \end{array} \quad (6)$$

Итак, при любых  $x_1, x_2$  для значений  $y_1$  и  $y_2$  получаем равенство (6), т. е. соответствующая точка плоскости  $x_1Ox_2$  попадает на прямую (6) плоскости  $y_1Oy_2$ . Очевидно, что это отображение не является взаимно однозначным, так как каждой точке прямой (6) плоскости  $y_1Oy_2$  соответствует совокупность точек плоскости  $x_1Ox_2$ , лежащих на прямой  $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$

В обоих случаях отображение не является взаимно однозначным.

Пример 1. Преобразование

$$y_1 = 2x_1 + x_2, \quad y_2 = x_1 - x_2$$

является взаимно однозначным, так как определитель  $\Delta(A)$  матрицы преобразования  $A$  отличен от нуля:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Обратное преобразование будет

$$x_1 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2, \quad x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2$$

Матрица обратного преобразования, в соответствии с формулой (4) будет

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}.$$

Пример 2. Линейное преобразование

$$y_1 = x_1 + 2x_2, \quad y_2 = 2x_1 + 4x_2$$

является вырожденным, так как определитель матрицы преобразования

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Это преобразование переводит все точки плоскости  $(x_1, x_2)$  в прямую  $y_2 - 2y_1 = 0$  плоскости  $(y_1, y_2)$ .

## §4 Действия над матрицами. Сложения матриц

Определение 1. Суммой двух матриц  $\|a_{ij}\|$  и  $\|b_{ij}\|$  с одинаковым количеством строк и одинаковым количеством столбцов называется матрица  $\|c_{ij}\|$ , у которой элементом  $c_{ij}$  является сумма  $a_{ij} + b_{ij}$  соответствующих элементов матриц  $\|a_{ij}\|$  и  $\|b_{ij}\|$ , т. е.

$$\|a_{ij}\| + \|b_{ij}\| = \|c_{ij}\|, \text{ если} \quad (1)$$

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Пример 1.  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix}.$

Аналогичным образом определяется *разность* двух матриц. Целесообразность такого определения суммы двух матриц, в частности, следует из представления вектора как столбцовой матрицы:

Умножение матрицы на число. Чтобы умножить матрицу на число  $\lambda$ , нужно умножить на это число каждый элемент матрицы:

$$\lambda \|a_{ij}\| = \|\lambda a_{ij}\| \quad (3)$$

Если  $\lambda$  целое, то формула (3) получается как следствие правила сложения матриц.

Пример 2.  $\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix}.$

Произведение двух матриц. Пусть имеем линейное преобразование плоскости  $x_1 O x_2$  на плоскость  $y_1 O y_2$ :

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \quad (4)$$

с матрицей преобразования

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Пусть, далее, произведено линейное преобразование плоскости  $y_1 O y_2$  на плоскость  $z_1 O z_2$ :

$$z_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2, \quad z_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \quad (6)$$

с матрицей преобразования

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Требуется определить матрицу преобразования плоскости  $x_1 O x_2$  на плоскость  $z_1 O z_2$ . Подставляя выражение (4) в равенства (6), получаем

$$\begin{aligned} z_1 &= b_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2), \\ z_2 &= b_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{22}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2), \end{aligned}$$