Уравнение (34') ставит в соответствие каждой точке (x, y) одно или несколько значений $\frac{dy}{dx}$, определяющих поле направлений данного семейства. Мы можем положить $x = x_1, y = y_1$; направление поля для изогональных траекторий связано с направлением поля для данного семейства соотношением (32), откуда. разрешая относительно $\frac{dy}{dx}$, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - k}{k \cdot \frac{dy_1}{dx_1} + 1}.$$

Вставляя это выражение в уравнение (34'), с заменой в нем x, y соответственно на x_1, y_1, получаем уравнение поля для семейства изогональных траекторий, т. е. их диференциальное уравнение:

$$\Phi_1\left(x_1, y_1, \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - k}{k \cdot \frac{dy_1}{dx_1} + 1}\right) = 0. \tag{35}$$

В случае ортогональных траекторий $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dy_1}{dx_1}$ связаны отношением:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}},$$

откуда диференциальное уравнение для ортогональных траекторий

$$\Phi_1\left(x_1, y_1, -\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}\right) = 0. \tag{35'}$$

П р и м е ч а н и е. В дальнейшем мы будем отбрасывать индексы и обозначать координаты точки траектории также через x, y там, где это не может вызвать путаницы.

Пример 24. Найти изогональные траектории пучка прямых с центром в начале координат: $y = ax$. Пусть угол пересечения $x \neq \frac{\pi}{2}, \operatorname{tg} a = k$. Имеем:

$$\frac{dy}{dx} = a, \quad \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy_1}{dx_1} \cdot \frac{dy}{dx}} = k,$$

заменяя $\frac{dy}{dx}$ его значением a, которое в силу уравнения семейства равно $\frac{y_1}{x_1}$, получаем (опуская индексы):

$$\frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx}} = k,$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + kx}{x - ky}.$$

Это уравнение однородное, но оно проще интегрируется при помощи интегрирующего множителя:

$$xdy - ydx = k(xdx + ydy),$$

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{k}\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

откуда

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \ln C,$$

или

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$$

или, наконец, в полярных координатах $r = Ce^{\frac{\varphi}{k}}$ (семейство логарифмических спиралей).

Если $a = \frac{\pi}{2}$, то имеем:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{y_1}{x_1}}$$

или

$$x_1dx_1 + y_1dy_1 = 0$$

или $x_1^2 + y_1^2 = C$ – семейство окружностей.

Пример 25. Имеем семейство софокусных эллипсов с фокусаи в точках: $x = \pm 1, y = 0:$

$$\frac{x^2}{1+\lambda} + \frac{y^2}{\lambda} = 1 \qquad (\lambda > 0).$$

Их диференциальное уравнение будет (гл. 1, §1, 4):

$$(xy' - x)(x + yy') = y',$$

или

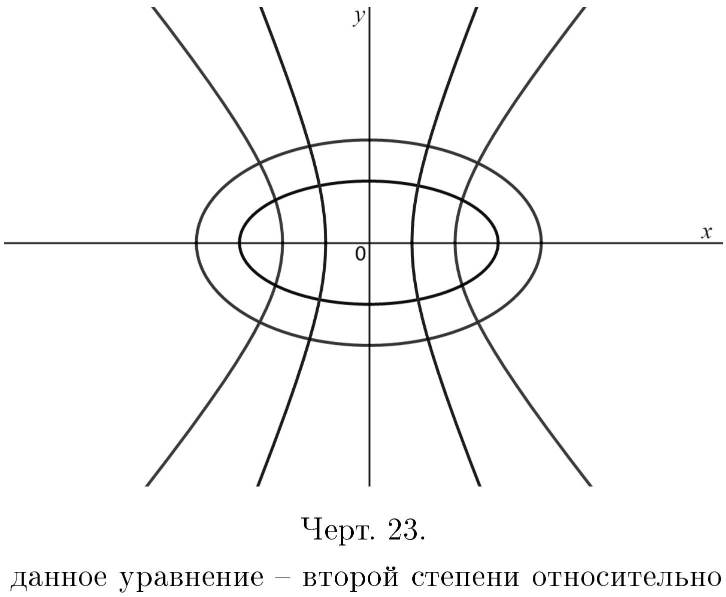
$$xyy'^2 + (x^2 - y^2 - 1)y' - xy = 0.$$

Чтобы получить диференциальное уравнение ортогональных траекторий, достаточно заменить в этом уравнении y' на $-\frac{1}{y'}$; получаем:

$$\frac{xy}{y'^2} - \frac{(x^2 - y^2 - 1)}{y'} - xy = 0,$$

или

$$xyy'^2 + (x^2 - y^2 - 1)y' - xy = 0,$$



Черт. 23.

т. е. то же уравнение. Дело объясняется тем, что данное уравнение – второй степени относительно y; через каждую точку проходят две кри-