Допустим, что для члена ${y_i}^{(m-1)}(x) - {y_i}^{(m-2)}(x)$ мы получим оценку

$$| {y_i}^{(m-1)}(x) - {y_i}^{m-2}(x) | \leqslant$$

$$\leqslant M(nK)^{m-2} \frac{|x-x_0|}{(m-1)!}^{m-1} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n); \qquad (8_{m-1})$$

покажем, что аналогичная оценка справедлива для следующего члена:

$$| {y_i}^{(m)}(x) - {y_i}^{(m-1)}(x) | =$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} [f_i(x, {y_1}^{(m-1)}, \ldots, {y_n}^{(m-1)}) - f_i(x, {y_1}^{(m-2)}, \ldots, {y_n}^{m-2})]\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f_i(x, {y_1}^{(m-1)}, \ldots, {y_n}^{(m-1)}) - f_i(x, {y_1}^{(m-2)}, \ldots, {y_n}^{(m-2)})|\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant K \left| \int_{x_0}^{x} \sum_{l=1}^{n} | {y_l}^{(m-1)} - {y_l}^{(m-2)} |\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant M(nK)^{m-1} \left| \int_{x_0}^{x} \frac{|\, x-x_0\,|^{m-1}}{(m-1)!} dx \right| =$$

$$= M\,(nK)^{m-1} \frac{|\, x-x_0\,|}{m!}^{m}. \qquad (8_m)$$

Таким образом мы доказали, что оценка (8_m) справедлива для всякого натурального m. Замечая далее, что $|\, x - x_0\,| \leqslant h$, мы видим, что все члены рядов (8), начиная со второго, соответственно не больше по абсолютной величине, чем члены знакоположительного числового ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} M(nK)^{m-1} \frac{h^m}{m!}.$$

Этот последний ряд, как легко проверить, сходится; следовательно, ряды (8) сходятся равномерно для значений x в отрезке $x_0 - h \leqslant x \leqslant$ $\leqslant x_0 + h$; так как их члены суть непрерывные функции, то и суммы их будут фукнциями непрерывными. Обозначим их через $Y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Мы имеем:

$$Y_i(x) = {y_i}^0 + \sum_{l=1}^{\infty} ({y_i}^{(l)} - {y_i}^{(l-1)}) = \lim_{m\to\infty} {y_i}^{(m)}(x).$$

Докажем, что *функции*

$$Y_1(x),\, Y_2(x),\ \ldots,\ Y_n(x)$$

дают искомую систему решений системы дифференциальных уравнений (4).

По самому определению ${y_i}^{(m)}(x)$ [см. (7_m)] мы имеем ${y_i}^{(m)}(x_0) = {y_i}^0$, следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} {y_i}^{(m)}(x_0) = Y_i(x_0) = {y_i}^0,$$

т. е. предельные *функции $Y_i(x)$ удовлетворяют начальным условиям.*

Докажем, что эти функции удовлетворяют системе (4). В силу равенства (7_m) мы можем написать:

$$\begin{aligned} {y_i}^{(m)}(x) = {y_i}^0 + \int_{x_0}^{x} \{\, & f_i\,[x,\, {y_1}^{(m-1)}(x),\, \ldots,\, {y_n}^{(m-1)}\,(x)] - \\ & -f_i\,[x,\, Y_1(x),\, \ldots,\, Y_n\,(x)]\,\}\,dx + \\ & + \int_{x_0}^{x} f_i\,[x,\, Y_1(x),\, \ldots,\, Y_n(x)]\,dx \qquad (i = 1,\ 2,\, \ldots,\ n). \end{aligned} \tag{9}$$

Оценим абсолютную величину первого интеграла:

$$\begin{aligned} &|\int_{x_0}^{x} \{f_i\,(x,\, {y_1}^{(m-1)},\, \ldots,\, {y_n}^{(m-1)}) - f_i\,(x,\, Y_1,\, \ldots,\, Y_n)\,\}\,dx\,| \leqslant \\ &\leqslant |\int_{x_0}^{x} |\,f_i\,(x,\, {y_1}^{(m-1)},\, \ldots,\, {y_n}^{(m-1)}) - f_i\,(x,\, Y_1,\, \ldots,\, Y_n)\,|\,dx\,| \leqslant \\ &\leqslant K|\int_{x_0}^{x} \{\,|\,{y_1}^{(m-1)} - Y_1\,| + \ldots + |{y_n}^{(m-1)} - Y_n|\,\}\,dx\,|. \end{aligned} \tag{9$'$}$$

(Последнее неравенство есть следствие условий Липшица). Так как функции ${y_i}^{(m-1)}\,(x)$ $(m = 1,\, 2,\, \ldots)$ сходятся в интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ равномерно к $Y_i\,(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то для любого наперед заданного ε можно найти такое N, что для $m - 1 > N$ и для всякого значения x в рассматриваемом интервале выполняются неравенства:

$$|\,{y_i}^{(m-1)}(x) - Y_i\,(x)\,| < \frac{\varepsilon}{nKh} \qquad (i = 1,\ 2,\, \ldots,\ n),$$

и тогда для первого интеграла в формуле (9) получается в силу неравенства (9’) оценка при $|\,x - x_0\,| \leqslant h$:

$$|\int_{x_0}^{x} \{f_i\,(x,\, {y_1}^{(m-1)},\, \ldots,\, {y_n}^{(m-1)}) - f_i\,(x,\, Y_1,\, \ldots,\, Y_n)\,\}\,dx\,| < \frac{\varepsilon}{nKh} hnK = \varepsilon.$$

Следовательно, при $m \to \infty$ предел этого интеграла равен нулю. С другой стороны, по доказанному, $\lim\limits_{m\to\infty} {y_i}^m(x) = Y_i(x)$, и равенства (9) дают:

$$Y_i(x) = {y_i}^0 + \int_{x_0}^{x} f\,(x,\, Y_1,\, \ldots,\, Y_n)\,dx \qquad (i = 1,\ 2,\, \ldots,\ n);$$