Вычислительная математика **Преподаватель:** *Г.С. Гойман*
Задание по теме 1
30.09.2025

Вариант	Номер задачи		
1	I.8.17*	1*.1	I.9.1
2	I.8.18*	1*.2	I.9.2
3	I.8.17*	1*.3	I.9.3
4	I.8.18*	1*.4	1*
5	I.8.17*	1*.5	2*
6	I.8.18*	1*.6	3*
7	I.8.17*	1*.7	4*
8	I.8.18*	1*.8	5*
9	I.8.17*	1*.9	I.9.1
10	I.8.18*	1*.10	I.9.2
11	I.8.17*	1*.9	I.9.3
12	I.8.18*	1*.8	1*
13	I.8.17*	1*.7	2*
14	I.8.18*	1*.6	3*
15	I.8.17*	1*.5	4*
16	I.8.18*	1*.4	5*
17	I.8.17*	1*.3	I.9.1
18	I.8.17*	1*.2	I.9.2
19	I.8.17*	1*.1	I.9.3
20	I.8.17*	1*.2	5*

Дополнение к задачам 8.17, 8.18
Постройте график функции $\sin(x)$ в заданной арифметике с плавающей запятой.

Задача 1*.

a) На заданом шаблоне получить формулу численого дифференцирования, которая точна для функции $g(x)$ и имеет максимально возможный порядок аппроксимации. Указать полученный порядок аппроксимации.

b) Вывести выражение для оценки ошибки численного дифференцировании с учетом погрешности округлений. Получить аналитическое выражение для оптимального шага численного дифференцирования и соответствующей ему ошибки дифференцирования.

c) Программно реализовать полученную формулу численного дифференцирования для вычисления соответствующей производной функции $f(x)$ в точке x_0.

d) Постройте на одном графике экспериментальную и теоретическую зависимости ошибки от шага численного дифференцирования при использовании арифметики с плавающей точкой одинарной и двойной точности. Сделать вывод о соответсвтии теоретической оценки результатам численных расчетов экспериментов.

Варианты условий:

1) $f'(x) \approx af(x+h) + bf(x) + cf(x-h) + df(x-2h)$, $g(x) = \sin(x)$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$
2) $f'''(x) \approx af(x+h) + bf(x) + cf(x-h) + df(x-2h)$, $g(x) = \cos(x)$, $f(x) = \sin(2x)$, $x_0 = \frac{\pi}{16}$
3) $f'(x) \approx af(x) + bf(x-h) + cf(x-2h) + df(x-3h)$, $g(x) = \exp(x)$, $f(x) = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$
4) $f''(x) \approx af(x+2h) + bf(x+h) + cf(x) + df(x-h) + ef(x-2h), g(x) = \sin(x), f(x) = x^7$, $x_0 = 1$
5) $f'(x) \approx af(x+2h) + bf(x+h) + cf(x) + df(x-h)$, $g(x) = \sin(2x)$, $f(x) = \ln x$, $x_0 = 2$
6) $f'(x) \approx af(x+2h) + bf(x-h) + cf(x-2h) + df(x-3h)$, $g(x) = \cos(2x)$, $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$
7) $f''(x) \approx af(x) + bf(x-h) + cf(x-2h) + df(x-3h)$, $g(x) = \sin(x)$, $f(x) = \sin^2 x$, $x_0 = 2$
8) $f''(x) \approx af(x+h) + bf(x) + cf(x-h) + df(x-2h)$, $g(x) = \exp(2x)$, $f(x) = \sin x + \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$
9) $f'''(x) \approx af(x+2h) + bf(x+h) + cf(x) + df(x-h) + ef(x-2h), g(x) = \sin(x), f(x) = e^{2x}$, $x_0 = 2$
10) $f'(x) \approx af(x+h) + bf(x-h) + cf(x-2h) + df(x-3h)$, $g(x) = \ln(x)$, $f(x) = \cos 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$

Задача 2*. а) Применить алгоритм Архимеда для нахождения числа π ках предела последовательности периметров правильных 2^n-угольников вписанных в круг единичного диаметра. Существует рекурсивная связь между периметрами двух последовательных многоугольников из этого класса вида:

$$p_{n+1} = 2^n \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - (p_n/2^n)^2}\right)}, \quad p_2 = 2\sqrt{2}.$$

Вычислить значения p_n для значений $n = 3,\ 4, \ldots,\ 60$. Объясните результат.
б) Формулу для вычисления p_n из предыдущего пункта можно улучшить, если устранить из нее вычитание. Запишем p_{n+1} в виде

$$p_{n+1} = 2^n \sqrt{r_{n+1}}, \quad r_{n+1} = r_n/(2 + \sqrt{4 - r_n}), \quad r_3 = 2/(2 + \sqrt{2}).$$

Используйте полученную итерационную формулу для вычисления p_n и r_n при $n = 3,\ 4, \ldots,\ 60$. В конечном счете, разность $4 - r_n$ будет округляться до значения 4. Таким образом, последняя формула также подвержена влиянию опибок округления при больших значениях n. Однако есть ли теперь основания для беспокойства?

Задача 3*. Одним из методов решения кубических уравнений является формула Кардано. Кубическое уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ заменой $x = y - a/3$ преобразуется к виду $y^3 + py + q = 0$, в котором коэффициенты $p = b - a^2/3$, $q = c - ab/3 + 2(a/3)^3$. Один вещественный корень исходного уравнения определяется следующим образом: $s = \sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2}$, $y_1 = \sqrt[3]{s - q/2} + \sqrt[3]{-s - q/2}$, и тогда вещественный корень исходного уравнения есть величина $x_1 = y_1 - a/3$. Два других корня можно найти, разделив исходное уравнение на $x - x_1$ и решив получившееся квадратное уравнение.
Воспользуйтесь методом Кардано для нахождения вещественного корня уравнения $x^3 + 3x^2 + \alpha^2 x + 3\alpha^2 = 0$ при различных значениях α. Исследуйте потерю точности из-за ошибок округления при больших α порядка величины, обратной к $\varepsilon_{\text{маш}}$.

Задача 4*. Реализуйте функцию, вычисляющую функцию Бесселя первого рода $J_0(x)$, суммируя часть ее ряда Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} .$$

Используя эту функцию и формулу численного дифференцирования, найдите производную функции Бесселя $J_0(x)$ в точке $x = 1$ с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.
Если в программе используются константы, такие как число членов ряда Тейлора или значение шага дифференцирования, должно быть указано, как они получены.

Примечание. Для дифференцирования использовать оптимальный шаг h^*. Считать, что погрешность, с которой вычисляются значения $J_0(x)$ равна ошибке метода вычисления функции с помощью отрезка ее ряда Тейлора, и может быть принята равной первому отброшенному слагаемому в ряде Тейлора. Использовать минимальное число членов ряда Тейлора для решения этой задачи. Для оценки максимумов модуля всех производных функции Бесселя использовать $M_n \leq 1$.

Задача 5*. Реализуйте функцию, вычисляющую приближенное значение первой производной функции $f(x)$ в точке при помощи схемы центральных разностей четвертого порядка точности. Исследуйте экспериментально порядок точности данной схемы при вычислении производной функции

$$f(x) = \begin{cases} (1 - \sin 2x)^k, |3\pi/4 - x| \leq \pi/2, \\ 0, \quad \text{иначе.} \end{cases}$$

при $k = 2,\ 3$ в точке $x = \pi/4$. Объясните полученный результат.