11.7.17

$$\|A^{-1}\|^{-1} = \inf_{x\neq 0} \left(\|Ax\| / \|x\|\right)$$

□ $$\|A\| \triangleq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$$\|A^{-1}\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} \Rightarrow \|A^{-1}\|^{-1} = \frac{1}{\sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|}}$$

т.к. A-невырождена

решим $x \triangleq Ay$, тогда из невырожденности мы пробежим все то же пр-во $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \|A^{-1}\|^{-1} = \frac{1}{\sup\limits_{y\neq 0} \frac{\|A^{-1}Ay\|}{\|Ay\|}} = \frac{1}{\sup\limits_{y\neq 0} \frac{\|y\|}{\|Ay\|}} \; (=)$$

очевидно, что если мы ищем sup знаменателя, то это $\Leftrightarrow$ поиску inf всей дроби (в случае const числителя)

$$(=) \; \inf_{y\neq 0} \frac{1}{\frac{\|y\|}{\|Ay\|}} = \inf_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|}$$ ■

11.9.2

г) $A = \begin{pmatrix} 65 & 72 \\ 72 & 82 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 137 \\ 154 \end{pmatrix}$ $\quad \frac{\|\Delta b\|_3}{\|b\|_3} = 0{,}01 \quad \|x\|_3 = \sqrt{(x,x)}$

$$\mu = \|A\| \|A^{-1}\|$$

$$(A+\Delta A)(x+\Delta x) = (b+\Delta b)$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \mu \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \qquad \|A\|_3 = \sqrt{\max_{i=\overline{1,n}} \lambda^i(A^TA)}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 9409 & 10584 \\ 10584 & 11908 \end{pmatrix} \qquad \chi_{A^TA} = \lambda^2 - 21317\lambda + 21316 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 21316 \end{cases} \Rightarrow \quad \|A\|_3 = \sqrt{21316} = 146$$

$$\|A^T\|_3 = 146 \quad \text{т.к.} \quad A = A^T$$

Из теорем минела, для минимизации приращения (максим) надо брать собств. вектора максим. собств значения (миним)

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leqslant 146 \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = 1{,}46$$

$$\vartheta_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -0{,}7474 \\ 0{,}6644 \end{pmatrix}$$

$$\vartheta_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0{,}6643 \\ 0{,}7474 \end{pmatrix}$$

$$\|\Delta b\| = 0{,}01 \|b\|$$

$$\Rightarrow \quad \Delta b_{max} = \frac{0{,}01 \|b\| \vartheta_{\lambda_1}}{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -1{,}5406 \\ 1{,}3694 \end{pmatrix}$$

$$\Delta b_{min} = \frac{0{,}01 \|b\| \vartheta_{\lambda_2}}{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1{,}3694 \\ 1{,}5400 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 0{,}0099927$$

№ 7.37

a) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ область сх-ти?

Посмотрим на $\rho(A)$

Якоби:

$$A = L + D + U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \alpha & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = D^{-1} b - D^{-1}(L+U)x$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1} b - D^{-1}(L+U)x^{(k)}$$

$$D^{-1}(L+U) = -\frac{\beta}{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(D^{-1}(L+U)) = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \rho \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \cdot \sqrt{2}$$

стандартная м-ца

т.е. сх-ть будет при $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \sqrt{2} < 1 \qquad |\beta| < \frac{|\alpha|}{\sqrt{2}}$

Гаусса-Зейделя:

Аналогично: $x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1} U x^{(k)} + (D+L)^{-1} b$

$$(D+L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ -\beta/\alpha^2 & 1/\alpha & 0 \\ \beta^2/\alpha^3 & -\beta/\alpha^2 & 1/\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta/\alpha & 0 \\ 0 & -\beta^2/\alpha^2 & \beta/\alpha \\ 0 & \beta^3/\alpha^3 & -\beta^2/\alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{(D+L)^{-1}U} = -\lambda\left(\left(-\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\lambda\right)^2 - \frac{\beta^4}{\alpha^4}\right) = -\lambda\left(\cancel{\frac{\beta^4}{\alpha^4}} + 2\frac{\beta^2}{\alpha^2}\lambda + \lambda^2 - \cancel{\frac{\beta^4}{\alpha^4}}\right) =$$

$$= -\lambda^2\left(2\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \lambda\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \rho\left((D+L)^{-1}U\right) = 2\frac{\beta^2}{\alpha^2} < 1 \quad \Rightarrow \quad |\beta| < \frac{|\alpha|}{\sqrt{2}}$$