

Вариант	Номер задачи			
1	II.7.7	II.9.2а	II.7.37а	1*а
2	II.7.10	II.9.2б	II.7.37б	1*б
3	II.7.11	II.9.2в	II.7.37в	1*в
4	II.7.12	II.9.2г	II.7.37г	1*г
5	II.7.13	II.9.2д	II.7.37а	1*д
6	II.7.16	II.9.2а	II.7.37б	2*а
7	II.7.23	II.9.2б	II.7.37в	2*б
8	II.7.24	II.9.2в	II.7.37г	2*в
9	II.7.17	II.9.2г	II.7.37а	2*г
10	II.7.7	II.9.2д	II.7.37б	1*а
11	II.7.10	II.9.2а	II.7.37в	1*б
12	II.7.23	II.9.2б	II.7.37г	1*в
13	II.7.13	II.9.2в	II.7.37а	1*г
14	II.7.26	II.9.2г	II.7.37б	1*д
15	II.7.7	II.9.2д	II.7.37в	2*а
16	II.7.10	II.9.2а	II.7.37г	2*б
17	II.7.11	II.9.2б	II.7.37а	2*в
18	II.7.12	II.9.2в	II.7.37б	2*г
19	II.7.13	II.9.2г	II.7.37в	1*а
20	II.7.12	II.9.2д	II.7.37а	1*б

**Задача 1\*.** Рассматривается задача приближенного решения уравнения теплопроводности

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} = \sin(2\pi x), \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

$$\psi(0) = 10, \quad \psi(1) = 20. \quad (2)$$

Для этого предлагается использовать аппроксимацию оператора второй производной на равномерной сетке

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} \approx \frac{\psi_{i+1} - 2\psi_i + \psi_{i-1}}{\Delta x^2}, \quad (3)$$

что приводит к необходимости решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{-\psi_{i+1} + 2\psi_i - \psi_{i-1}}{\Delta x^2} = \sin(2\pi x_i), \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (4)$$

Где  $\Delta x = 1/N$ ,  $x_i = i\Delta x$ .

а) Реализуйте метод Ричардсона решения данной системы уравнений с использованием оптимального параметра  $\tau_{opt}$ . Для поиска оптимального параметра  $\tau_{opt}$  использовать степенной метод нахождения собственных значений матрицы (считать, что матрица положительно определенная). Оцените экспериментально скорость сходимости метода, сравните с теоретической оценкой. Используя теоретическую оценку скорости сходимости, получить решение системы с относительной точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

б) Реализуйте метод Гаусса-Зейделя решения данной системы уравнений. При помощи степенного метода поиска максимального по модулю собственного значения оцените число обусловленности матрицы системы. Используя оценку числа обусловленности, получить решение системы с относительной точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Оцените экспериментально скорость сходимости метода.

в) Реализуйте метод Якоби решения данной системы уравнений. При помощи степенного метода поиска максимального по модулю собственного значения оценить спектральный радиус матрицы перехода. Используя эту оценку, получить решение системы с относительной точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Оцените экспериментально скорость сходимости метода.

г) Реализуйте метод минимальных невязок решения данной системы уравнений. При помощи степенного метода поиска максимального по модулю собственного значения оцените число обусловленности матрицы системы. Используя оценку числа обусловленности, получить решение системы с относительной точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Оцените экспериментально скорость сходимости метода. Постройте график зависимости  $\tau_k$  от номера итерации  $k$ , чем объясняется характер зависимости при больших значениях  $k$ ?

д) Реализуйте метод наискорейшего спуска решения данной системы уравнений. При помощи степенного метода поиска максимального по модулю собственного значения оцените число обусловленности матрицы системы. Используя оценку числа обусловленности, получить решение системы с относительной точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Оцените экспериментально скорость сходимости метода. Постройте график зависимости  $\tau_k$  от номера итерации  $k$ , чем объясняется характер зависимости при больших значениях  $k$ ?

### Задача 2\*.

а) Реализуйте метод Ричардсона решения системы уравнений из задачи II.10.6д. Оптимальное значение параметра  $\tau$  подобрать экспериментально, основываясь на оценке скорости сходимости метода на первых 10 итерациях. При помощи степенного метода поиска максимального по модулю собственного значения оцените число обусловленности матрицы системы. Используя оценку числа обусловленности, получить решение системы с относительной точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

б) Реализуйте метод Гаусса-Зейделя решения системы уравнений из задачи II.10.6г. При помощи степенного метода оцените число обусловленности матрицы системы. Используя оценку числа обусловленности, получить решение системы с относительной точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

в) Реализуйте метод Якоби решения системы уравнений из задачи II.10.6о. При помощи степенного метода поиска максимального по модулю собственного значения оцените число обусловленности матрицы системы. Используя оценку числа обусловленности, получить решение системы с относительной точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

г) Реализуйте метод минимальных невязок решения системы уравнений из задачи

II.10.6o. При помощи степенного метода поиска максимального по модулю собственного значения оцените число обусловленности матрицы системы. Используя оценку числа обусловленности, получить решение системы с относительной точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Постройте график зависимости  $\tau_k$  от номера итерации  $k$ , чем объясняется характер зависимости при больших значениях  $k$ ?