

# 1 Метод простой итерации

В данной главе рассматривается один из вариантов получения семейства итерационных алгоритмов решения систем линейный алгебраических уравнений (СЛАУ) типа простой итерации.

## 1.1 Ряд Неймана

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора в окрестности точки  $t = 0$  функции

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k. \quad (1)$$

Радиус абсолютной сходимости данного ряда –  $|t| < 1$ .

Используя аналогичный ряд из степеней некоторой квадратной матрицы  $T$ , можем определить функцию от матрицы:

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k, \quad (2)$$

здесь  $I$  – единичная матрица. Несложно показать, что необходимым и достаточным условием абсолютной сходимости ряда (2) является  $\rho(T) < 1$ , где  $\rho(T)$  – спектральный радиус матрицы  $T$ . Достаточным условием сходимости данного ряда является  $\|T\| < 1$ . Ряд (2) называют **рядом Неймана**.

## 1.2 От ряда Неймана к методу простейших итераций

Предположим, что мы хотим обратить некоторую матрицу  $A$ , сделаем замену переменных  $T = I - A$ . Тогда ряд Неймана перепишется в следующем виде:

$$\frac{1}{A} \equiv A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k. \quad (3)$$

Данный ряд сходится при условии  $\|I - A\| < 1$  или  $\rho(I - A) < 1$ . Таким образом мы определили обратную матрицу как сумму бесконечного ряда (при условии что он сходится). Вычисление конечной частичной суммы данного ряда можно использовать как процедуру приближенного обращения матрицы  $A$ , точность процедуры определяется нормой остаточной суммы. Для реализации такой процедуры было бы непрактично хранить приближение к обратной матрице, удобнее хранить вектор приближенного решения. Предположим, что мы решаем систему уравнений  $Ax = b$ , введем обозначение:

$$x^k = \sum_{m=0}^k (I - A)^m b. \quad (4)$$

Здесь  $x^k$  – приближенное решение полученное с использованием  $k + 1$  члена разложения ряда (3). Для вычисления  $x^k$  требуется лишь операция умножения матрицы

$I - A$  на вектор и операция сложения векторов. Часто заранее определить количество членов ряда  $k$ , достаточное для достижения заданной точности, оказывается затруднительным, поэтому было бы удобно переписать данную формулу в виде рекуррентного соотношения между последовательными приближенными решениями.

Предположим, что мы вычислили некоторое приближение  $x^k$ , получим формулу перехода к приближению  $x^{k+1}$ .

$$x^{k+1} = \sum_{m=0}^{k+1} (I - A)^m b = (I - A) \sum_{m=0}^k (I - A)^m b + (I - A)^0 b = (I - A)x^k + b. \quad (5)$$

Введем в рассмотрение вектор невязки  $r^k = b - Ax^k$ , тогда:

$$x^{k+1} = (I - A)x^k + b = x^k + b - Ax^k = x^k + r^k. \quad (6)$$

Таким образом получено рекуррентное соотношение, которые определяет итерационный процесс поиска приближенного решения системы уравнений  $Ax = b$ . Данный итерационный процесс – прообраз метода простой итерации. Будем в шутку называть его методом **простейшей итерации**.

### 1.3 От простейшего к простому

Недостатком метода простейшей итерации является его узкая область применимости, так как условием сходимости метода является  $\|I - A\| < 1$  или  $\rho(I - A) < 1$ , и лишь немногие матрицы отвечают данному требованию. Мы можем попробовать исправить ситуацию, перейдя от исходной системе уравнений к эквивалентной системе, домножив её на некоторую матрицу, обратную к невырожденной матрице  $P$ :

$$Ax = b \Rightarrow P^{-1}Ax = P^{-1}b. \quad (7)$$

Рассмотрим как изменятся формулы метода простейшей итерации:

$$x^{k+1} = x^k + \tilde{r}^k = x^k + (P^{-1}b - P^{-1}Ax^k) = x^k + P^{-1}r^k. \quad (8)$$

Можно надеяться подобрать матрицу  $P$  таким образом, что будет выполняться условие сходимости метода простейшей итерации для новой системы уравнений (7) и при этом обращение матрицы  $P$  может быть эффективно реализовано. Переход от исходной системы уравнений к новой системе путем домножения на некоторую матрицу называют **предобуславливанием**, а матрицу  $P$ , используемую для этого перехода – **предобуславливателем**.

Метод простейшей итерации с предобуславливанием будем называть **методом простой итерации**. Рассмотрим некоторые классические варианты метода простой итерации (все они отличаются лишь выбором матрицы  $P$ ):

- **Метод Ричардсона.**  $P = \frac{1}{\alpha}I$ , где  $\alpha$  – скаляр отличный от нуля. Это простейший вариант выбора матрицы которую легко обращать. Параметр  $\alpha$  следует выбирать из условий спектрального радиуса или некоторой нормы матрицы  $S = I - P^{-1}A$ . Эту матрицу принято называть матрицей перехода.

- **Метод Якоби.**  $P = D$ , где  $D$  – диагональная матрица с диагональю матрицы  $A$ .
- **Метод Гаусса-Зейделя.**  $P = L+D$ , где  $L$  – нижняя треугольная часть матрицы  $A$ .  
Матрица  $L + D$  легко обращается методом бегущего счета (обратная подстановка метода Гаусса).