IPB University
Bogor Indonesia
Sekolah Sains Data Matematika dan Informatika

Valuasi Opsi Saham Karyawan dengan Volatilitas Stokastik Menggunakan *Least Squares Monte Carlo*

KELOMPOK 8:

Antonius Aditya Rizky Wijaya	G5402221003
Khansa Maghfira Azzahra	G5402221004
Viola Firda Rizqi Anggrainiputri	G5402221018

Dosen Pembimbing :
Prof. Dr. Ir. Endar Hasafah Nugrahani M.S.

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Opsi Saham Karyawan (OSK) digunakan oleh ***startup*** dan **korporasi besar** sebagai bentuk **insentif karyawan**.

OSK memiliki **periode *vesting***, **risiko *forfeiture***, kecenderungan ***early exercise***, serta tantangan valuasi akibat **fluktuasi harga saham**.

Pada penelitian sebelumnya, pohon binomial digunakan karena **fleksibel untuk fitur *vesting* dan *forfeiture***, namun terbatas karena mengasumsikan **volatilitas konstan**.

Solusi untuk **memvaluasi** OSK:

1. **Least Squares Monte Carlo (LSMC)**
2. **Model Heston**

Tujuan

Memvaluasi OSK dengan volatilitas stokastik model Heston menggunakan pendekatan *Least Squares Monte Carlo.*

Melihat pengaruh perubahan parameter tertentu terhadap valuasi OSK.

DATA DAN METODE PENELITIAN

Data

Goldman Sachs

Sumber Data | **Periode Data** | **Jumlah Data**

Investing.com → **Des 2019 - Des 2024** (harian) → **1.258** observasi

Opsi Saham Karyawan (OSK)

OSK adalah hak bagi karyawan untuk membeli **saham perusahaan** dimasa depan (opsi *call*) dengan **harga kesepakatan** (harga *strike*). OSK digunakan sebagai insentif jangka panjang untuk meningkatkan **loyalitas** dan **kinerja karyawan**.

Fitur OSK

Periode *Vesting*

Opsi hanya bisa dieksekusi **setelah periode tertentu**. Jika karyawan keluar **sebelum vesting selesai**, opsi akan **hangus**.

Forfeiture Rate

Persentase opsi yang **dibatalkan**, misalnya karena **karyawan resign**. Sangat memengaruhi **valuasi**, terutama saat opsi ***out-the-money***.

Eksekusi Lebih Awal

OSK **tidak bisa diperjualbelikan**, sehingga biasanya dieksekusi **lebih awal** saat **harga saham tinggi**, untuk **mengurangi risiko**.

Model Stokastik Heston

Model Heston diperkenalkan oleh **Steven Heston** pada **1993** → Menangkap **pergerakan harga aset** dan **volatilitas secara lebih realistis** dibanding model dengan **volatilitas konstan.** → **Relevan** untuk **valuasi OSK**

Proses untuk harga aset

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t$$

Proses untuk volatilitas

$$dV_t = \kappa\,(\theta - V_t)dt + \xi\sqrt{V_t}dZ_t$$

Korelasi

$$dW_t dZ_t = \rho dt$$

μ : Rata-rata logaritma *return* aset

κ : Laju *mean reversion*

θ : Tingkat rata-rata variansi jangka panjang

ξ : Volatilitas dari variansi

ρ : Korelasi antara W_t dan Z_t

V_t : Variansi aset pada waktu ke-t

S_t : Harga aset pada waktu ke-t

dW_t : Proses Wiener dari S_t

dZ_t : Proses Wiener dari V_t

Metode Euler-Maruyama

Model Heston **tidak memiliki solusi analitik** → Dibutuhkan metode numerik: **Euler Maruyama** menghasilkan **aproksimasi** S_t dan V_t secara **diskret** → **Simulasi jalur harga dan volatilitas**

Misalkan terdapat PDS

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dW_t$$

Dengan interval waktu [0, T] memenuhi diskretisasi

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_t < \ldots < \tau_n = T$$

dan jarak sebesar $\Delta t = \dfrac{T}{n}$

Hasil Diskretisasi Euler-Maruyama

$$X_{t+1} = X_t + f(t, X_t)\Delta t + g(t, X_t)\Delta W_t$$

dengan

$$X_0 = x_0$$

$$\Delta t = (\tau_{t+1} - \tau_t)$$

$$\Delta W_t = (W_{t+1} - W_t) \sim N(0, \Delta t)$$

Metode Euler-Maruyama

Pengaplikasian diskretisasi Euler-Maruyama terhadap PDS model Heston

PDS Model Heston		Solusi
$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t$	$\longrightarrow$	$S_{t+1} = S_t + \mu(S_t)\Delta t + \sqrt{V_t}(S_t)\Delta W_t$
$dV_t = \kappa\left(\theta - V_t\right)dt + \xi\sqrt{V_t}dZ_t$	$\longrightarrow$	$V_{t+1} = V_t + \kappa(\theta - V_t)\Delta t + \xi\sqrt{V_t}\Delta Z_t$

untuk $t = 0, 1, \ldots, n-1$

dengan

$V_0 = v_0$

$S_0 = s_0$

$\Delta W_t, \Delta Z_t \sim N\left(0, \Delta t\right)$

Metode *Ordinary Least Squares* (OLS)

OLS adalah **metode regresi linear** untuk **mengestimasi hubungan antar variabel** dengan **meminimalkan jumlah kuadrat galat dari model**

OLS dimanfaatkan untuk **mengestimasi parameter pada model Heston**.

Bentuk model regresi linear dasar

$$y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + \varepsilon_i$$

OLS meminimumkan jumlah kuadrat galat dari model

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 x$$

Metode *Ordinary Least Squares* (OLS)

Pengaplikasian OLS untuk estimasi parameter model Heston

Persamaan untuk **volatilitas aset (V_t)** dapat dinyatakan dalam persamaan regresi:

$$\Delta V_t = \beta_0 + \beta_1 V_t + \varepsilon_t$$

dengan

$V_t = v_t$

$\beta_0 = \kappa\theta\Delta t$

$\beta_1 = -\kappa\Delta t$

$\varepsilon_t = \xi\sqrt{V_t}\varepsilon\sqrt{\Delta t}, \varepsilon \sim N(0,1)$

Menggunakan metode ***Ordinary Least Squares* (OLS)**, estimasi nilai β_0 dan β_1 bisa diperoleh, sehingga nilai parameter model Heston juga bisa diestimasi:

$$\hat{\kappa} = -\frac{\hat{\beta}_1}{\Delta t}, \quad \hat{\theta} = \frac{\hat{\beta}_0}{\kappa\Delta t}, \quad \hat{\xi} = \frac{stdev\left(\frac{\varepsilon_t}{\sqrt{V_t}}\right)}{\sqrt{\Delta t}}, \quad \hat{\rho} = corr\left(R_t, \Delta V_t\right) = \frac{cov\left(R_t, \Delta V_t\right)}{stdev\left(R_t\right) stdev\left(\Delta V_t\right)}$$

Metode *Exponential Weighted Moving Average* (EWMA)

Untuk mendapatkan estimasi variansi harian (v_t), digunakan **metode EWMA** yang mempertimbangkan **efek *clustering*** dengan memberi **bobot lebih besar pada data terbaru** menggunakan **parameter *smoothing* λ**.

$$\boxed{v_t = \lambda v_{t-1} + (1-\lambda)R_{t-1}^2}$$

Mengikuti model RiskMetrics $\lambda = 0.94$ dan diasumsikan bahwa

$$\boxed{v_0 \approx var\left(R_t\right)}$$

dengan

$$\boxed{R_t = ln\left(S_t\right) - ln\left(S_{t-1}\right) = ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)}$$

R_t : Logaritma *return* aset pada waktu ke-t
v_t : Estimasi variansi pada waktu ke-t

Metode *Least Squares Monte Carlo* (LSMC)

Metode **Least Squares Monte Carlo (LSMC)** adalah **teknik numerik** untuk menilai **OSK**, yang dapat dieksekusi kapan saja sebelum jatuh tempo. Metode ini menggabungkan **simulasi Monte Carlo** dan **regresi OLS** dengan **pendekatan mundur** untuk memperkirakan **nilai kelanjutan opsi** di setiap titik waktu. Formulasi estimasi nilai kelanjutan:

$$\boxed{\hat{F}_M\left(\omega; t_k\right) = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \phi_j X_t}$$

dengan,

α_j : Koefisien hasil regresi
$\phi_j X_t$: Fungsi basis (polinomial harga saham)
M : Jumlah fungsi basis

Metode *Least Squares Monte Carlo* (LSMC)

Keputusan **eksekusi opsi** jika

$$\boxed{H_t(\omega) \geqslant \hat{F}_M(\omega; t_k)} \quad \text{dengan} \quad H_t(\omega) = max(S_t - K, 0)$$

Valuasi Opsi dihitung dengan **mendiskonto arus kas** hasil eksekusi kembali **ke waktu awal**

$$\boxed{\Pi_0 = \frac{1}{N}\sum_{\omega=1}^{N} e^{-r\tau(\omega)} H_{\tau(\omega)}(\omega)}$$

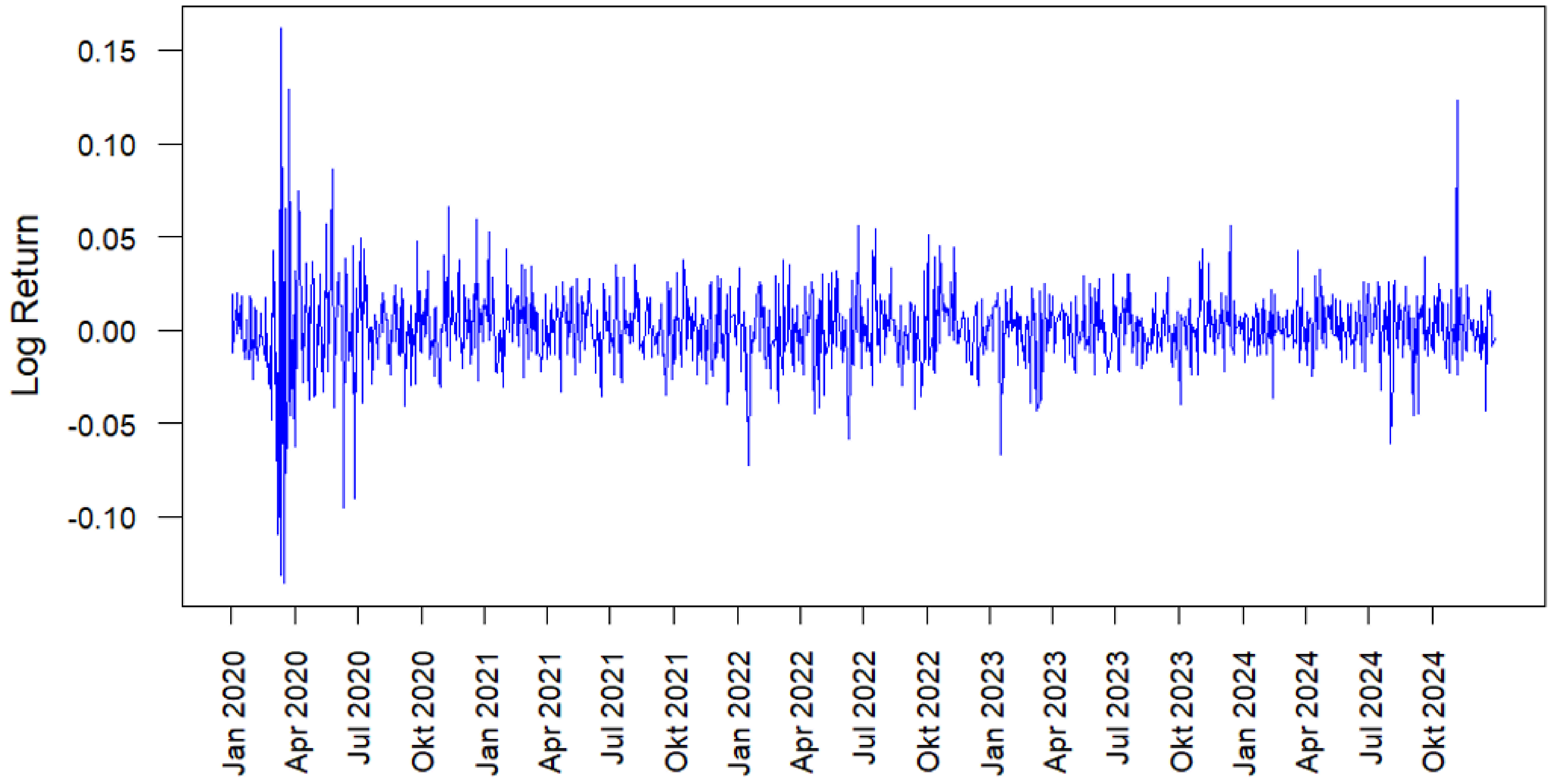
dengan

Π_0 : Nilai opsi di waktu awal
$\tau(\omega)$: Waktu optimal pelaksanaan untuk waktu ke-ω
$H_{\tau(\omega)}$: Nilai eksekusi (*payoff*) pada $\tau(\omega)$
r : Suku bunga bebas risiko
N : Jumlah lintasan simulasi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil Numerik Estimasi Variansi Harian (v_t) dari Logaritma *Return*

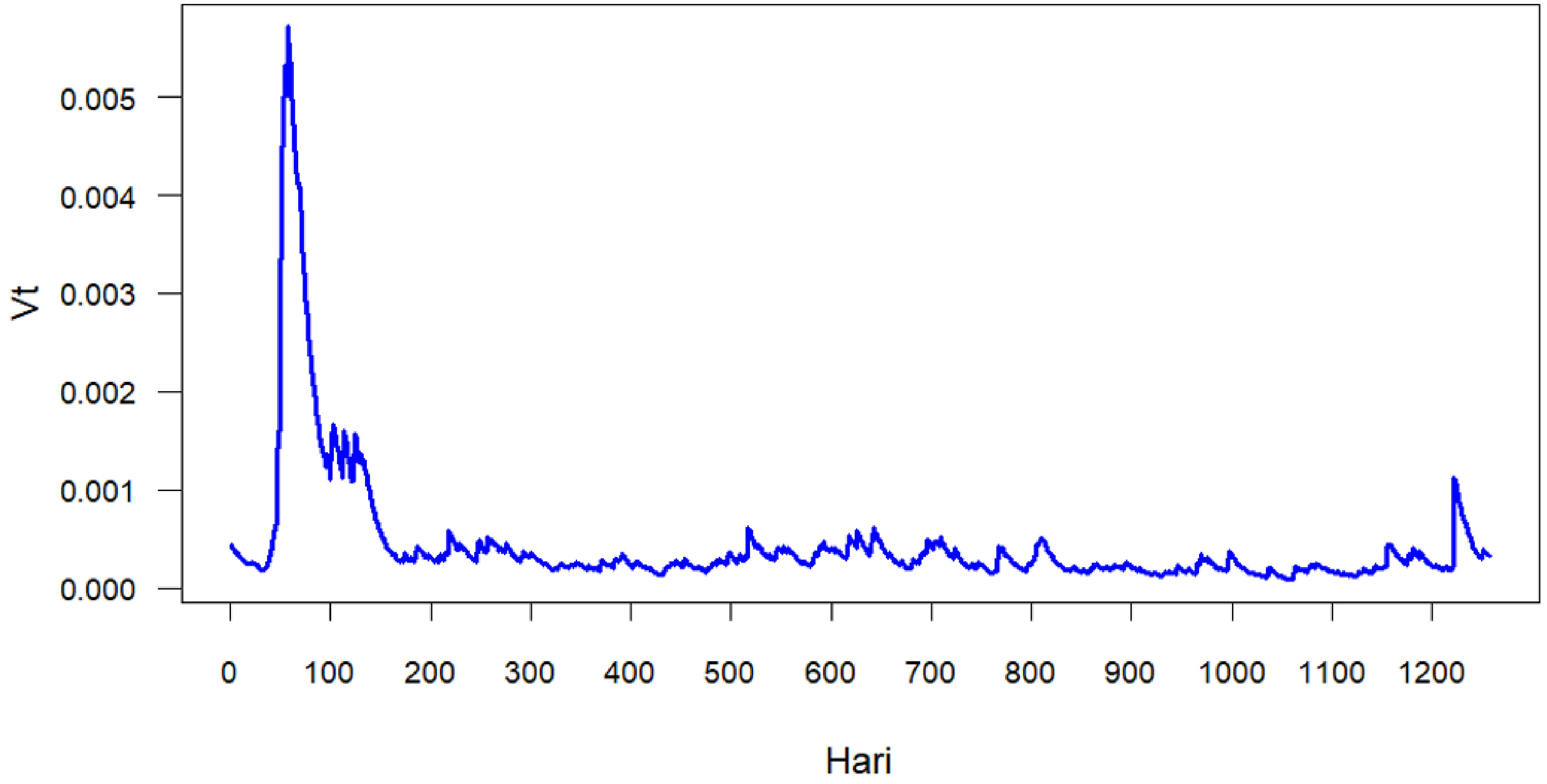
Visualisasi **logaritma return saham** disajikan pada **Gambar 1** untuk menggambarkan **fluktuasi harga** sepanjang **periode pengamatan**.



Gambar 1. Grafik Logaritma *Return* Saham Goldman Sachs

Hasil Numerik Estimasi Variansi Harian (v_t) dari Logaritma *Return*

Estimasi **variansi harian** v_t dilakukan dengan **metode EWMA** ($\lambda = 0.94$), yang lebih **responsif terhadap perubahan pasar** karena memberi **bobot lebih besar** pada **data return terbaru**. **Nilai awal** v_0 diambil dari **variansi historis** dan diperbarui secara **iteratif**.



Gambar 2. Grafik Estimasi Variansi Harian Logaritma *Return*

Hasil **EWMA** menunjukkan **volatilitas saham** yang **fluktuatif**, sesuai asumsi **volatilitas stokastik** pada **model Heston**.

Hasil Numerik Estimasi Nilai Parameter Model Stokastik Heston

Pada bagian metode didapatkan formula estimasi parameter berikut :

$$\hat{\kappa} = -\frac{\hat{\beta}_1}{\Delta t}$$

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{\beta}_0}{\kappa \Delta t}$$

$$\hat{\xi} = \frac{stdev\left(\frac{\epsilon_t}{\sqrt{V_t}}\right)}{\sqrt{\Delta t}}$$

$$\hat{\rho} = corr\left(R_t, \Delta V_t\right)$$

$$\hat{v}_0 = var\left(R_t\right)$$

Tabel 1. Hasil Estimasi Nilai Parameter Model Stokastik Heston

Parameter	Nilai
$\hat{\kappa}$	1.954857
$\hat{\theta}$	0.000425
$\hat{\xi}$	0.046303
$\hat{\rho}$	-0.005901
$\hat{v}_0$	0.000435

Note:

*Penentuan harga opsi dengan model Heston memerlukan **asumsi risk neutral**, sehingga **nilai paremater** μ, **diganti** dengan **nilai tingkat bunga bebas risiko** (r).*

Hasil Numerik Valuasi Opsi Saham Karyawan

Nilai parameter model Heston **hasil estimasi** → **Simulasi jalur harga** dan **volatilitas saham** sesuai model Heston → **Hasil simulasi** + metode *Least Squares Monte Carlo* (**LSMC**) → **Nilai eksak** opsi saham karyawan (**OSK**)

Tabel 2. Parameter Awal untuk Menghitung Nilai Eksak OSK

Parameter	Nilai
Harga saham awal (S_0)	\$573.55
Harga *strike* (K)	\$602.23
Waktu Jatuh Tempo (T)	5 tahun
Periode *vesting* (T_v)	24 bulan
Forfeiture Rate (q)	5%
Tingkat Bunga Bebas Risiko (r)	5%

Dengan ***N* = 200000 jalur simulasi**, diperoleh **nilai eksak OSK** yang konvergen dan stabil sebesar **\$82.4847**

Hasil Numerik Valuasi Opsi Saham Karyawan

Dilakukan **variasi jumlah jalur simulasi**. Nilai **galat relatif** dihitung dengan formula berikut:

$$\varepsilon_r = \frac{\left|O^{(i)} - \hat{O}\right|}{\hat{O}}$$

dengan

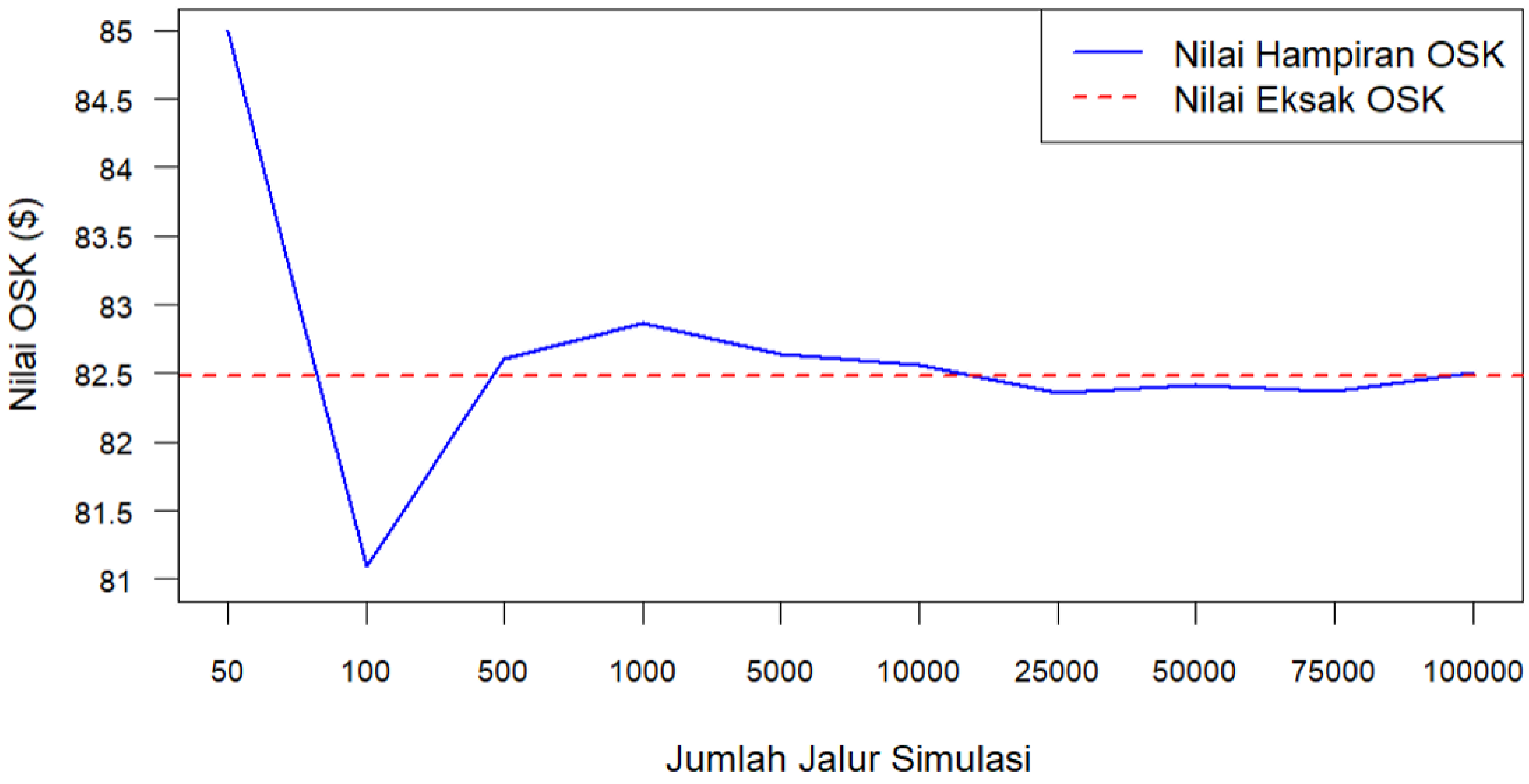
$O^{(i)}$: nilai OSK dengan *i* jalur simulasi.

$\hat{O}$: nilai eksak OSK.

Tabel 3. Nilai OSK dengan Jumlah Simulasi yang Berbeda

Jumlah Simulasi	Nilai OSK ($)	Galat Relatif
50	84.9925	0.0304
100	81.0915	0.0169
500	82.6009	0.0014
1000	82.8656	0.0046
5000	82.6437	0.0019
10000	82.5577	0.0009
25000	82.3635	0.0015
50000	82.4130	0.0009
75000	82.3724	0.0014
100000	82.5042	0.0002

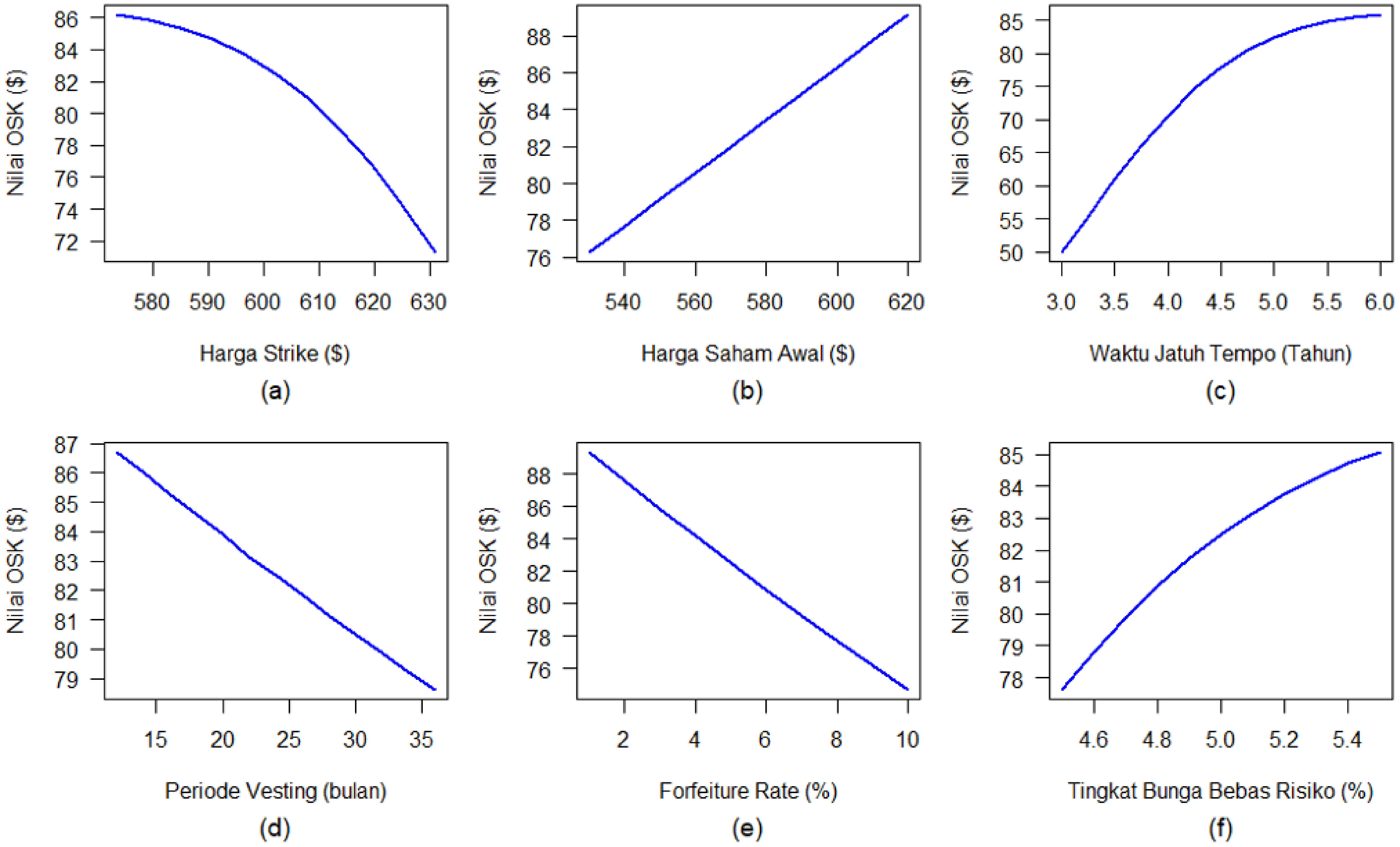
Hasil Numerik Valuasi Opsi Saham Karyawan



Gambar 3. Grafik Perbandingan Nilai Hampiran OSK dengan Nilai Eksak OSK

Seiring **meningkatnya** jumlah jalur simulasi, nilai hampiran OSK **cenderung mendekati** nilai eksaknya.

Pengaruh Perubahan Nilai Parameter Awal terhadap Valuasi Opsi Saham Karyawan



Gambar 4. Grafik Pengaruh Perubahan Nilai Parameter Awal terhadap Valuasi OSK

Simulasi dilakukan dengan menggunakan ***N* = 100000 jalur simulasi**.

Nilai OSK mengalami **penurunan** seiring meningkatknya:

- Harga *strike (K)*
- Periode *vesting* (T_v)
- *Forfeiture rate (q)*

Nilai OSK mengalami **peningkatan** seiring meningkatknya:

- Harga saham awal (S_0)
- Waktu jatuh tempo *(T)*
- Tingkat bunga bebas risiko *(r)*

IPB University — Bogor Indonesia —

KESIMPULAN

Kesimpulan

Metode **LSMC** berhasil memvaluasi **OSK** dengan **volatilitas stokastik tinggi** secara **stabil** dan **konvergen** berbasis **model Heston** dan input **variansi harian EWMA**. **Galat** relatif **menurun** seiring bertambahnya jumlah simulasi dan LSMC mampu menangani kompleksitas struktur OSK secara simultan, termasuk fitur ***early exercise***, **periode *vesting***, dan **risiko *forfeiture***.

Hasil analisis sensitivitas menunjukkan **nilai OSK menurun** saat **harga *strike***, **periode *vesting***, dan **risiko *forfeiture* meningkat**, serta **naik** saat **harga saham awal**, **waktu jatuh tempo**, dan **tingkat bunga bebas risiko meningkat**. Hal ini menunjukkan bahwa **LSMC sensitif terhadap parameter pasar** dan unggul untuk **valuasi derivatif kompleks**.

DAFTAR PUSTAKA

Daftar Pustaka

[1] A. A. A. I. Kartikasari and I. B. P. Astika, “Pengaruh Harga Eksekusi dan Jumlah Opsi Saham Karyawan (ESOP) pada Kinerja Perusahaan,” E-Jurnal Akuntansi Universitas Udayana, vol. 11, no. 3, pp. 698–712, Jun. 2015.

[2] D. C. Lesmana, R. T. A. Ramadhan, S. Nurjanah, and V. S. Dharmawan, “Pricing Employee Stock Option using Trinomial Tree Method,” BAREKENG: J. Math. & App, vol. 19, no. 2, pp. 709–720, Jun. 2025, doi: 10.30598/barekengvol19iss2pp0709-0720.

[3] D. L. Fitroh and R. Artiono, “Model Matematika Penilaian Opsi Saham Karyawan Menggunakan Metode Pohon Binomial,” MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika, vol. 11, no. 3, pp. 360–367, Sep. 2023, doi: 10.26740/mathunesa.v11n3.p360-367.

[4] A. U. Alfajriyah, E. R. M. Putri, D. B. Utomo, and Moch. T. Hakiki, “Stock Option Pricing Using Binomial Trees with Implied Volatility,” Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi, vol. 20, no. 3, pp. 724–742, May 2024, doi: 10.20956/j.v20i3.34476.

[5] D. P. D. Damiyanti, K. Dharmawan, and L. P. I. Harini, “Perhitungan Value at Risk dengan Penduga Volatilitas Stokastik Heston,” E-Jurnal Matematika, vol. 7, no. 4, pp. 317–321, Nov. 2018, doi: 10.24843/MTK.2018.v07.i04.p220.

[6] F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, “Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach,” Rev Financ Stud, vol. 14, no. 1, pp. 113–147, Jan. 2001, doi: 10.1093/rfs/14.1.113.

[7] D. P. Anggraeni, “Penggunaan Model Binomial pada Penentuan Harga Opsi Saham Karyawan,” Jurnal Matematika, vol. 5, no. 1, Jun. 2015.

Daftar Pustaka

[8] C. Chalimatusadiah, D. C. Lesmana, and R. Budiarti, “Penentuan Harga Opsi dengan Volatilitas Stokastik Menggunakan Metode Monte Carlo,” Jambura Journal of Mathematics, vol. 3, no. 1, pp. 80–92, Jan. 2021, doi: 10.34312/jjom.v3i1.10137.

[9] H. Syafwan, F. Siagian, P. Putri, and M. Handayani, “Forecasting Jumlah Pengangguran di Kabupaten Asahan Menggunakan Metode Weighted Moving Average,” Jurnal Teknik Informatika Kaputama (JTIK), vol. 5, no. 2, pp. 224–229, Jul. 2021.

[10] “RiskMetricsTM—Technical Document,” New York, Dec. 1996.

[11] D. Irsalina, “Pengaruh Inflasi terhadap Strategi Optimal Investasi dan Konsumsi di Indonesia dengan Tingkat Bunga dan Volatilitas Stokastik,” Thesis, IPB University, Bogor, 2021.

[12] X. Han and P. E. Kloeden, Random Ordinary Differential Equations and Their Numerical Solution, vol. 85. in Probability Theory and Stochastic Modelling, vol. 85. Singapore: Springer, 2017. doi: 10.1007/978-981-10-6265-0.

[13] G. James, D. Witten, T. Hastie, and R. Tibshirani, An Introduction to Statistical Learning: with Applications in R - Second Edition, 2nd ed. New York: Springer, 2021.

TERIMA KASIH

IPB University
Bogor Indonesia

Program Studi S1 Aktuaria
Jl. Meranti
Kampus IPB Dramaga Bogor 16680
E-mail: aktuaria@apps.ipb.ac.id