No. Jumat
Date 23/02 2024

Latihan 2 Metode Numerik

Nama : Antonius Aditya Rizky Wijaya
NIM : G5402221003

3.1) Benar, sebuah persamaan linear kuadrat terkecil selalu memiliki solusi.

3.2) Salah

3.3) Benar, persamaan kuadrat terkecil pada kolom $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dari A adalah meminimalkan $\|Ax-b\|^2 = \|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j - b\|^2$. Ax adalah vektor di range (A) = span $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ yang paling dekat dengan b, dengan intuisi geometri didapat bahwa residual $r = Ax-b$ ortogonal terhadap range (A).

3.4) Benar, sistem yang ditentukan secara berlebihan memiliki solusi yang meminimalkan norm residual.

3.5) Benar, sebuah persamaan linear kuadrat terkecil $Ax \approx b$ jika menghasilkan residual nol maka memiliki solusi yang unik.

3.6) Salah, residual nol hanya menjamin adanya solusi, bukan bersolusi tunggal. Jika kolom A tak linear bisa saja bersolusi ganda.

3.7) Benar, hasil perkalian antara transformasi Householder dan rotasi Givens selalu merupakan matriks ortogonal.

3.8) Benar, dalam transformasi Householder, matriks Q mencerminkan vektor x sekitar suatu hyperplane yang didefinisikan oleh vektor satuan. Akibatnya, komponen terakhir k dari vektor Qx akan menjadi nol untuk suatu $k < n$, tergantung pada sifat transformasi dan vektor x yang spesifik.

3.9) Salah, metode berbasis faktorisasi ortogonal seperti dekomposisi QR, seringkali lebih efisien secara komputasi dari metode berdasarkan persamaan normal untuk menyelesaikan persamaan linear kuadrat terkecil.

3.10) (a) Suatu fungsi $f(t, a)$ dianggap linear pada komponen a jika fungsi tersebut dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari unsur-unsur a.

(b) Contoh fungsi model $f(t, a)$ yang linear dalam komponen x adalah $f(t, x) = mx + b$.

(c) Contoh fungsi $f(t, x)$ yang tak linear adalah $f(t, x) = x \cos(at)$.

3.11) Tidak ada solusi jika $P(A) \neq P(A|B)$ dan ada solusi namun tak tunggal jika $P(A) = P(A|B)$ dengan syarat rank $(A) < n$.

3.12) Dalam menyelesaikan masalah kuadratik terkecil yang overdetermined, masalah yang lebih serius adalah ketika baris-baris A bergantung linear, yang mana ini menyebabkan A tidak memiliki solusi yang tunggal.

3.13) Matriks kuadrat terkecil yang dihasilkan akan memiliki peringkat yang sama dengan jumlah parameter model. Sehingga dalam kasus ini peringkatnya menjadi 3.

No

Date

3.14) Sistem persamaan normal untuk masalah kuadrat terkecil linear $Ax \approx b$ dapat diperoleh dengan meminimalkan galat kuadrat antara persamaan matriks Ax dan vektor b. Untuk meminimumkannya, kita dapat menurunkan fungsi terhadap a dan mengatur nilainya menjadi nol.

$$E(a) = (Ax-b)^T(Ax-b)$$

$$\frac{dE(a)}{da} = 2A^T(Ax-b) = 0 \iff A^T.Ax - A^Tb = 0$$

Persamaan ini dikenal sebagai persamaan normal untuk masalah kuadrat linear terkecil. Solusi dari sistem persamaan ini memberikan nilai-nilai vektor a yang meminimalkan galat kuadrat.

3.15) 1.) Ill-Conditioning : Matriks A^TA sehingga perubahan kecil pada data dapat menyebabkan kesalahan besar pada solusi.

2.) Amplification of round-off errors : Matriks A^TA dapat memperbesar kesalahan pembulatan selama proses komputasi. Ini membuat solusi tak akurat.

3.16) A adalah matriks $m \times n$, dalam kondisi apa matriks A dapat dikatakan A^TA?

a. Simetrik?

matriks A dapat dikatakan A^TA jika dimensinya sama (simetrik) sehingga kedua matriks dapat dikalikan.

b. Nonsingular?

matriks A^TA adalah matriks $m \times n$ dan merupakan matriks segi yang bisa dicari nilai determinannya. Jika $m=n$, $\det \neq 0$, sehingga A matriks nonsingular

c. Definit positif?

1.) Ketika $m=n$, matriks A adalah matriks segi dan A^TA adalah matriks definit positif jika dan hanya jika A adalah matriks invertible.

2.) Ketika $m>n$, matriks A^TA bukan matriks rank penuh sehingga matriks tersebut selalu semidefinit positif.

3.) Ketika $m<n$, rank matriks $A^TA < n$, sehingga mungkin itu bisa menjadi matriks positif atau hanya semidefinit positif.

3.17) Pilihan (c) bahwa matriks A^TA singular menunjukkan bahwa solusi residual minimum dari masalah kuadrat terkecil $Ax \approx b$ tak tunggal.

3.18) a. Ya, eliminasi Gauss dapat digunakan untuk menghitung faktorisasi LU. Jika $m>n$, maka $k=n$ dan L akan membentuk matriks segitiga bawah. Jika $m<n$, maka $k=m$ dan U akan membentuk matriks segitiga atas. Namun faktorisasi LU pada matriks tak segi tidaklah sama dengan matriks segi. Pemilihan metode eliminasi Gauss mempengaruhi faktorisasi LU. Karena berbentuk segi panjang, beberapa kolom/baris tidak dapat digunakan untuk faktorisasi.

(b) Ya, dengan syarat matriks $A = C$ dimana C adalah hasil substitusi maju pada matriks A yang telah ditambahkan B.

3.19) (a) Dua vektor x dan y dikatakan saling tegak lurus (ortogonal) jika sudut antara keduanya $90°$. Artinya hasil perkalian (dot product) kedua vektor $= 0$.

(b) Jika dua vektor tak nol saling tegak lurus, maka tidak mungkin salah satunya dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari yang lain. Jika kita memiliki dua vektor v dan w yang saling tegak lurus, skalar a dan b bukan nol sehingga $av + bw = 0$, karena itu akan bertentangan dengan sifat tegak lurusnya. Sehingga, vektor-vektor tersebut linearly independent.

(c) Contoh vektor nol-nol yang saling tegak lurus dibidangnya:

1.) vektor $(1,0)$ dan $(0,1)$

2.) vektor $(2,1)$ dan $(-1,2)$

3.) vektor $(3,-4)$ dan $(4,3)$

(d) Misal, vektor $V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; vektor $V_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\rightarrow V_1 \cdot V_2 = (2 \cdot 4) + (1 \cdot 2) = 8 + 2 = 10 \neq 0$

$\therefore$ V_1 dan V_2 tidak ortogonal satu sama lain karena hasil dot product $\neq 0$.

(e) 1.) Dekomposisi QR, menghasilkan matriks Q yang ortogonal dapat mempermudah pemecahan sistem persamaan linear yang melibatkan matriks segitiga atas R.

2.) Penyelesaian solusi tanggal, hal ini bergantung pada keortogonalan antara variabel independen, untuk memastikan independensi linear diantara variabel

3.20) Ya, dalam ruang Euclidean n-dimensi, ortogonalitas adalah relasi transitif. Jika x ortogonal terhadap y, dan y ortogonal terhadap z, maka x juga ortogonal terhadap z.

3.21) Ortogonal projector adalah operator berdamping sendiri yang dibatasi, beroperasi pada ruang Hibert H, sehingga $P_L^2 = P_L \| P_L \| = 1$. Dimana P_L adalah pemetaan dari H ke suatu sub-ruang L darinya sehingga $X - P_L X$ adalah ortogonal ke $P_L X$

3.22) (a) Transformasi ortogonal, seperti Householder atau Givens, sering digunakan untuk menyelesaikan masalah kuadrat terkecil karena mempertahankan panjang vektor dan keseimbangan antar variabel yang penting dalam meminimalkan galat kuadrat.

(b) Metode Householder dan Givens tidak sering digunakan untuk menyelesaikan sistem linear kuadrat karena transformasi ortogonal membutuhkan lebih banyak komputasi dibanding metode langsung seperti eliminasi Gauss. Untuk sistem linear kuadrat, dengan matriks segi, eliminasi Gauss lebih efisien.

(c) Ya, transformasi ortogonal memang memiliki keunggulan dibandingkan eliminasi Gauss untuk menyelesaikan sistem linear kuadrat. Salah satunya adalah stabilitas numerik.

No.

Date

3.23) Matriks yang ortogonal adalah matriks (a), (b), dan (d) karena setiap kolom dan barisnya adalah vektor unit dan saling tegak lurus, serta transpose matriks = invers matriks.

3.24) Which of the following properties does an $n \times n$ orthogonal matrix necessarily have?

a.) it is non singular

Salah satu syarat matriks ortogonal adalah jika tak ada baris atau kolomnya yang merupakan kelipatan dari baris atau kolom lain. Determinan matriks non-singular $\neq 0$, yang artinya tidak ada baris atau kolom yang merupakan kelipatan dari baris atau kolom lain. Nonsingular adalah syarat perlu bagi matriks ortogonal.

b.) It preserves the Euclidean vector norm when multiplied times a vector.

matriks ortogonal mempertahankan norma vektor Euclidean ketika dikalikan dengan vektor. Jika A matriks ortogonal $n \times n$ dan x adalah vektor n-dimensi, maka norma Euclidean hasil perkalian A_x akan = norma Euclidean dari vektor x. Ini sifat fundamental matriks ortogonal.

c.) Its transpose its inverse.

Jika mengambil transpose dari matriks ortogonal, maka hasilnya akan sama dengan invers dari matriks tersebut.

d.) Its columns are orthonormal.

Setiap kolom dari matriks ortogonal mewakili vektor satuan, dan setiap dua kolom yang berbeda adalah ortogonal satu sama lain.

g.) Norma matriks Euclidean adalah 1. Ini disebabkan fakta bahwa kolom-kolom atau baris-baris dari matriks ortogonal adalah vektor satuan.

3.25) Jenis matriks yang ortogonal adalah:

a.) matriks permutation

c.) Householder transformation

d.) givens rotation.

Selain itu, f.) matriks diagonal dapat dikatakan matriks ortogonal jika elemen diagonalnya adalah 1 atau -1, sehingga tidak semua matriks diagonal memiliki sifat ortogonal.