No.

Date

Tugas 3 Metode Numerik Kuliah

Nama : Antonius Aditya Rizky Wijaya

NIM : G5402221003

3.1 $y = x_1 + x_2 t$

t	10	15	20
y	11,60	11,85	12,25

a. $y = x_1 + x_2 t$

$11{,}60 = x_1 + 10x_2 \quad \ldots (1)$

$11{,}85 = x_1 + 15x_2 \quad \ldots (2)$

$12{,}25 = x_1 + 20x_2 \quad \ldots (3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 15 \\ 1 & 20 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11{,}60 \\ 11{,}85 \\ 12{,}25 \end{bmatrix}$$

b. $$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 10 & 11{,}60 \\ 1 & 15 & 11{,}85 \\ 1 & 20 & 12{,}25 \end{array}\right] \underset{E_{21}(-1)}{\overset{E_{31}(-1)}{\sim}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 10 & 11{,}60 \\ 0 & 5 & 0{,}25 \\ 0 & 10 & 0{,}65 \end{array}\right] \overset{E_{32}(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 10 & 11{,}60 \\ 0 & 5 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0{,}15 \end{array}\right]$$

$r(A) = 2 \neq r(A|B) = 3$

∴ SPL tidak konsisten //

* Dari (1) dan (2)

$\left.\begin{matrix} x_1 = 11{,}1 \\ x_2 = 0{,}05 \end{matrix}\right\}$ error di (3) = 0,15

* Dari (1) dan (3)

$\left.\begin{matrix} x_1 = 10{,}95 \\ x_2 = 0{,}065 \end{matrix}\right\}$ error di (2) = 0,075

* Dari (2) dan (3)

$\left.\begin{matrix} x_1 = 10{,}65 \\ x_2 = 0{,}08 \end{matrix}\right\}$ error di (1) = 0,15

∴ Sehingga dapat dipilih

$x_1 = 10{,}95$

$x_2 = 0{,}065$

Karena memiliki error terkecil //

c. Least Squares

$$F = \sum_{i=1}^{3} (y_i - x_1 - x_2 t_i)^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{3} 2(y_i - x_1 - x_2 t_i)(-1) = 0$$

$$x_1 \Sigma 1 + x_2 \Sigma t_i = \Sigma y_i$$

$$3x_1 + 45 x_2 = 35{,}7 \quad \ldots (4)$$

No.
Date

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{3} 2(y_i - x_1 - x_2 t_i)(-t_i) = 0$$

$$x_1 \Sigma t_i + x_2 \Sigma t_i^2 = \Sigma t_i y_i$$

$$45 x_1 + 725 x_2 = 538{,}75 \quad \ldots (5)$$

∴ Dari (4) dan (5) didapat :

$x_1 = 10{,}925$

$x_2 = 0{,}065$

Jika dibandingkan dengan hasil (b), didapan nilai (x_1, x_2) yang tidak jauh berbeda. //

(3.2) Data titik : (0,1), (1,2), (3,3)

persamaan garis lurus : $y = ax + b$

(a) $y = ax + b$

$$\left.\begin{matrix} 1 = b \\ 2 = a + b \\ 3 = 3a + b \end{matrix}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Ax = B$$

(b) $Ax = B$

$A^T A x = A^T B$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(c) Jika dimisalkan $\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = C$, maka dengan faktorisasi Cholesky,

C bisa ditulis $C = R^T R$, dimana dalam kasus ini R adalah matriks segitiga atas berukuran 2x2. Dengan menyelesaikannya kita dapat :

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{10} & \sqrt{8/5} \\ 0 & \sqrt{7/5} \end{bmatrix}$$

Kemudian menyelesaikan $R^T y = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \end{bmatrix}$ dengan substitusi maju didapat :

$$y = \begin{bmatrix} 11/\sqrt{10} \\ 8/\sqrt{35} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya menyelesaikan $R \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = y$ dengan substitusi mundur didapat :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/14 \\ 8/7 \end{bmatrix}$$, sehingga persamaan garis lurus kuadrat terkecilnya :

$$y = \frac{9}{14} x + \frac{8}{7}$$ //

No.

Date

3.3 Buat sistem persamaan linear kuadrat terkecil $Ax \approx$ dengan menyelesaikan model fungsi $f(t,x) = x_1 t + x_2 e^t$ untuk tiga titik data: $(1,2), (2,3), (3,5)$.

Dari tiga titik didapat persamaan :

$$f(t,x) = x_1 t + x_2 e^t$$

$$\left.\begin{aligned} 2 &= x_1 + e x_2 \\ 3 &= 2x_1 + e^2 x_2 \\ 5 &= 3x_1 + e^3 x_2 \end{aligned}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & e^1 \\ 2 & e^2 \\ 3 & e^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

Dengan metode kuadrat terkecil, kita perlu meminimumkan error dari

$$S(x_1, x_2) = (2 - (x_1 + e x_2))^2 + (3 - (2x_1 + e^2 x_2))^2 + (5 - (3x_1 + e^3 x_2))^2$$

menggunakan $\frac{\partial S(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0$ dan $\frac{\partial S(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0$, setelah kedua turunan parsial tersebut diselesaikan, maka diperoleh 2 persamaan dan dari 2 persamaan tersebut akan didapat (x_1, x_2). Yang mana setelah dihitung dengan kalkulator, didapat aproksimasi nilai $(x_1, x_2) \approx (1{,}594\ ,\ 0{,}009)$.

$\therefore$ Dengan demikian, persamaan yang paling cocok adalah $y = 1{,}594x + 0{,}009e^x$ //

3.7 A matriks $m \times n$ dan b vektor m.

a. Buktikan solusi masalah kuadrat terkecil $Ax \approx b$ selalu ada.

Masalah kuadrat terkecil adalah mencari vektor x yang meminimalkan jarak kuadrat antara Ax dan b, yaitu dengan mencari x sehingga $\|Ax - b\|^2$ diminimalkan.

$$\begin{aligned} \min_x \|Ax - b\|^2 = \nabla \|Ax - b\|^2 &= 0 \\ 2A^T(Ax - b) &= 0 \\ 2A^T Ax - 2A^T b &= 0 \\ A^T A x &= A^T b \end{aligned}$$

Kita memiliki persamaan $A^T A x = A^T b$, karena matriks $A^T A$ selalu merupakan matriks positif semi definit, maka solusi x selalu dapat ditemukan.

b Buktikan solusi unik jika dan hanya jika rank $(A) = n$.

Jika rank $(A) = n$, berarti setiap kolom matriks A independen. Dalam hal ini, $A^T A x = A^T b$ memiliki solusi unik karena matriks $A^T A$ adalah matriks persegi yang non singular. Oleh karena itu, x adalah satu-satunya solusi yang memenuhi.

Sebaliknya jika ran $(A) < n$, artinya terdapat paling tidak satu kolom dalam matriks A yang dapat diwakili oleh kombinasi linear dari kolom-kolom lainnya. Ini membuat $A^T A$ singular, yang berarti tidak ada solusi unik untuk $A^T A x = A^T b$.

$\therefore$ Jadi solusi masalah kuadrat terkecil $Ax \approx b$ selalu ada, jika dan hanya jika rank$(A) = n$ //

No.

Date

(3.11) Diberikan matriks $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$, A dan C kuadrat. Buktikan kalau A dan C harus ortogonal dan $B = 0$.

Jawab :

X ortogonal jika $XX^T = I$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T & 0^T \\ B^T & C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} AA^T + BB^T & BC^T \\ CB^T & CC^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$AA^T + BB^T = I$ .... (1)

$BC^T = 0$ ... (2)

$CB^T = 0$ ... (3)

$CC^T = I \rightarrow$ Berarti C ortogonal, C dan $C^T \neq 0$

Karena C dan $C^T \neq 0$, maka dari (2) dan (3) didapat $B = 0$

selanjutnya dari (1) didapat $AA^T + 0 = I$, sehingga A juga ortogonal.

(3.14) Jika vektor $V \neq 0$, buktikan $H = I - 2\frac{VV^T}{V^TV}$ ortogonal dan simetrik.

$$H = I - 2\frac{VV^T}{V^TV}$$

$$H^T = \left(I - 2\frac{VV^T}{V^TV}\right)^T$$

$$H^T = I^T - 2\frac{(V.V^T)^T}{(V^TV)^T}$$, kita tahu $(A.B)^T = B^TA^T$, $(A^T)^T = A$

$$H^T = I - 2\frac{(V^T)^T.V^T}{V^T.(V^T)^T}$$

$$H^T = I - 2\frac{V.V^T}{V^TV}$$

$H^T = H \rightarrow$ H simetrik //

$$* \; H.H^T = H^2 = \left(I - 2\frac{V.V^T}{V^TV}\right)^2 = I^2 - 2\left(2\frac{VV^T}{V^TV}\right) + 4\left(\frac{VV^T}{V^TV}\right) = I^2$$

$\therefore H.H^T = I^2$

$H.H^T = I \rightarrow$ H ortogonal //

No.

Date

3.17 Tentukan transformasi Householder yang menghilangkan semua kecuali entri pertama dari vektor $[1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ khususnya jika $\left(I - 2\dfrac{vv^T}{v^Tv}\right)\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

berapa nilai dari α dan v?

Jawab:

Misulkan $a = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$, kemudian ambil $v = a - \alpha e_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \alpha\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\alpha\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

dimana $\alpha = \pm\|a\|_2 = \pm 2$,

Karena a_1 positif, hindari pembatalan dengan memilih tanda negatif untuk α

$v = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ //

∴ Untuk memastikan transformasi householder berjalan, hitung:

$Ha = a - 2\dfrac{v^Ta}{v^Tv}v = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - 2 \cdot \dfrac{6}{12}\begin{bmatrix}3\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ ✓

∴ Sehingga didapat kesimpulan:

$\alpha = -2$

$v = \begin{bmatrix}3\\1\\1\\1\end{bmatrix}$