

Valuasi Opsi Saham Karyawan dengan Volatilitas Stokastik Menggunakan *Least Squares Monte Carlo*

Antonius Aditya Rizky Wijaya¹, Khansa Maghfira Azzahra², Viola Firda Rizqi Anggrainiputri³, Endar Hasafah Nugrahani^{4*}

^{1,2,3,4} Program Studi Aktuaria, Sekolah Sains Data, Matematika, dan Informatika, IPB University, Bogor 16680, Indonesia

* Penulis Korespondensi. Email: e_nugrahani@apps.ipb.ac.id

ABSTRAK

Penelitian ini berfokus pada valuasi opsi saham karyawan (OSK) dengan mempertimbangkan dinamika volatilitas stokastik model Heston menggunakan metode *Least Squares Monte Carlo* (LSMC). Estimasi parameter model pada penelitian ini berbasis data, yaitu menggunakan data harga penutupan harian saham Goldman Sachs dari Desember 2019 hingga Desember 2024. Penelitian dimulai dengan mengestimasi variansi harian menggunakan metode *Exponential Weighted Moving Average* (EWMA), lalu dilanjutkan dengan estimasi parameter model Heston melalui metode Euler-Maruyama dan *Ordinary Least Squares* (OLS). Berdasarkan parameter yang diperoleh, simulasi LSMC dengan jumlah jalur optimal dijalankan untuk mendapatkan nilai eksak OSK dengan mempertimbangkan fitur eksekusi opsi lebih awal, periode *vesting*, dan *forfeiture rate*. Hasil menunjukkan bahwa estimasi nilai OSK konvergen dan stabil pada jumlah jalur simulasi yang optimal, di mana peningkatan jumlah jalur simulasi secara konsisten menurunkan galat relatif. Analisis pengaruh perubahan nilai parameter awal menunjukkan bahwa kenaikan harga *strike*, periode *vesting*, dan *forfeiture rate* menurunkan nilai OSK, sedangkan kenaikan harga saham awal, waktu jatuh tempo, dan suku bunga bebas risiko meningkatkan nilai OSK. Hal ini menegaskan keandalan LSMC dalam memvaluasi OSK serta memodelkan sensitivitas parameter OSK di bawah volatilitas stokastik.

Kata Kunci:

Least Squares Monte Carlo; Opsi Saham Karyawan; Volatilitas Stokastik Heston

ABSTRACT

This study focuses on valuing employee stock options (ESOs) under stochastic volatility dynamics of the Heston model using the Least Squares Monte Carlo (LSMC) method. Model parameters are estimated from daily closing prices of Goldman Sachs stock spanning December 2019 to December 2024. The research begins by estimating daily variance via the Exponential Weighted Moving Average (EWMA) method, followed by Heston parameter estimation using the Euler-Maruyama and Ordinary Least Squares (OLS) method. Based on the obtained parameters, LSMC simulation with the optimal number of paths is run to obtain the exact value of ESOs by considering the early option exercise features, vesting period, and forfeiture rates. Results demonstrate that the ESOs value estimate converges and remains stable at the optimal number of simulation paths, with increasing paths consistently reducing relative error. Analysis of the influence of changes in initial parameter values shows that higher strike prices, longer vesting periods, and increased forfeiture rates decreases the ESOs value, whereas higher initial stock prices, longer maturities, and elevated risk-free rates increases the ESOs value. These findings underscore the reliability of LSMC for ESOs valuation and its effectiveness in capturing parameter sensitivity under stochastic volatility.

Keywords:

Employee Stock Options; Heston Stochastic Volatility; Least Squares Monte Carlo

1. Pendahuluan

Perusahaan-perusahaan modern telah mengembangkan berbagai skema kompensasi untuk meningkatkan kesejahteraan karyawan dan mendorong kinerja jangka panjang, salah satunya adalah opsi saham karyawan (OSK). Program OSK digunakan oleh perusahaan *startup* maupun korporasi besar untuk meningkatkan motivasi dan loyalitas karyawan [1]. Bagi perusahaan *startup*, program OSK merupakan salah satu bentuk insentif yang dapat menarik minat karyawan.

Cara kerja OSK umumnya melibatkan periode *vesting*, yakni periode waktu di mana karyawan harus tetap bekerja di perusahaan sebelum memperoleh hak untuk mengeksekusi opsi tersebut. Selain adanya periode *vesting*, OSK memiliki karakteristik kompleks lain yang membedakannya dari opsi biasa, seperti adanya risiko *forfeiture* yang bergantung pada kondisi individual, serta kemungkinan eksekusi lebih awal [2]. Valuasi OSK menjadi tantangan tersendiri, terutama karena fluktuasi harga saham yang tidak konstan dari waktu ke waktu.

Metode pohon binomial telah menjadi pendekatan populer dalam valuasi OSK karena fleksibilitasnya dalam mengakomodasi periode *vesting* dan risiko *forfeiture* [3]. Namun, pendekatan ini memiliki keterbatasan dalam menangkap dinamika volatilitas pasar yang berubah-ubah. Model pohon binomial umumnya mengasumsikan volatilitas yang konstan, hal ini tidak mencerminkan kondisi pasar yang sebenarnya [4]. Untuk mengatasi hal ini, model volatilitas stokastik seperti model Heston diperkenalkan. Model Heston mengasumsikan bahwa volatilitas mengikuti proses *mean reverting* yang memungkinkan representasi fluktuasi harga saham secara lebih realistis dibanding model deterministik [5].

Dalam menentukan valuasi opsi dengan volatilitas stokastik, diperlukan metode numerik karena tidak ada solusi analitik eksplisit. Salah satu pendekatan numerik yang unggul untuk permasalahan ini adalah metode *Least Squares Monte Carlo* (LSMC). Metode ini efektif dalam menangani opsi yang memiliki fitur eksekusi lebih awal seperti pada opsi Amerika [6]. LSMC mengkombinasikan simulasi Monte Carlo dengan regresi *least squares* untuk memperkirakan nilai optimal dari opsi yang dapat dieksekusi pada setiap titik waktu [6], hal ini sangat penting mengingat OSK cenderung dieksekusi lebih awal.

Sejauh ini, sebagian besar penelitian hanya menggunakan metode pohon binomial atau model Black-Scholes dalam valuasi OSK, dan hanya sedikit yang mengintegrasikan LSMC dengan model Heston secara eksplisit. Padahal, kombinasi ini mampu menangani kompleksitas OSK dengan lebih baik, khususnya dalam simulasi jalur harga saham dan pengambilan keputusan optimal terhadap keputusan eksekusi opsi.

Dengan mempertimbangkan kompleksitas struktur OSK dan dinamika stokastik volatilitas saham, valuasi opsi yang akurat menjadi esensial bagi perusahaan dalam menyusun laporan keuangan dan mengelola strategi kompensasi. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk memvaluasi OSK menggunakan LSMC dengan simulasi harga saham berdasarkan model Heston dan melihat bagaimana pengaruh perubahan nilai parameter awalnya terhadap harga OSK. Pendekatan ini menggabungkan keunggulan LSMC dalam menangani opsi yang memiliki fitur eksekusi lebih awal dengan fleksibilitas model Heston dalam merepresentasikan dinamika volatilitas. Penelitian ini diharapkan mampu memberikan estimasi nilai OSK yang lebih akurat dan realistis dalam kondisi pasar yang dinamis.

2. Metode

Dalam memvaluasi Opsi Saham Karyawan (OSK) dengan volatilitas stokastik, diperlukan metode numerik untuk mendapatkan hampiran nilainya. Metode numerik yang digunakan adalah metode *Least Squares Monte Carlo* (LSMC) yang menghasilkan nilai hampiran yang konvergen ke nilai eksaknya. Penelitian ini menggunakan metode Euler-Maruyama, *Ordinary Least Squares* (OLS), dan *Exponential Weighted Moving Average* (EWMA) untuk mengestimasi nilai parameter-parameter model stokastik Heston, di mana estimasinya menggunakan data asli yaitu data harga historis harian dari harga penutupan saham Goldman Sachs (GS) dari tanggal 31 Desember 2019 sampai 31 Desember 2024. Data terdiri dari 1258 observasi yang diambil dari situs investing.com.

2.1 Opsi Saham Karyawan (OSK)

OSK memberi hak kepada karyawan untuk membeli saham perusahaan di masa depan dengan harga yang telah ditentukan sebelumnya (harga *strike*). Opsi ini memiliki beberapa ciri khas sebagai berikut:

2.1.1 Periode Vesting (T_v)

Dalam sistem OSK, terdapat periode *vesting* di mana opsi tidak dapat dieksekusi selama periode tersebut. Jika karyawan meninggalkan perusahaan sebelum periode *vesting* selesai, opsi tersebut menjadi batal [7]. Namun jika karyawan tetap bekerja sampai periode *vesting* selesai, opsi dapat dieksekusi apabila menguntungkan, yaitu ketika harga saham acuan berada di atas harga *strike* (*in-the-money*).

2.1.2 Forfeiture Rate (q)

Forfeiture rate adalah persentase suatu aset yang diperkirakan akan dibatalkan atau hilang dalam satu tahun. Pembatalan ini biasanya terjadi karena berbagai alasan seperti karyawan mengundurkan diri atau tidak memenuhi syarat. Tentu efek ini sangat berpengaruh terhadap valuasi OSK, terutama selama periode *vesting*. Saat opsi berada dikondisi *in-the-money*, karyawan cenderung bertahan karena adanya potensi keuntungan. Sebaliknya, saat opsi berada dikondisi *out-the-money*, kecenderungan karyawan untuk keluar meningkat [2].

2.1.3 Eksekusi Lebih Awal

Berbeda dengan opsi lain, OSK tidak bisa diperdagangkan [7], sehingga satu-satunya cara agar karyawan mendapatkan uang tunai dari OSK adalah dengan mengeksekusi opsi dan memperdagangkan sahamnya. Biasanya karyawan akan mengeksekusi OSK ketika nilai saham telah melebihi harga *strike* dengan ratio tertentu. Semakin besar nilai sahamnya tentu akan semakin menguntungkan, namun eksekusi lebih awal sering dilakukan untuk mengurangi risiko.

2.2 Model Stokastik Heston

Model stokastik Heston pertama kali dikemukakan oleh Heston pada tahun 1993. Model ini mengasumsikan bahwa proses untuk volatilitas aset, mengikuti proses Cox-Ingersoll-Ross [8]. Keunggulan model Heston adalah kemampuannya dalam menangkap dinamika volatilitas pasar secara realistis untuk penetapan harga opsi. Dalam konteks valuasi OSK, penggunaan model Heston menjadi relevan karena OSK memiliki sensitivitas tinggi terhadap pergerakan volatilitas. Pada model ini, proses harga aset dan proses volatilitas aset dinyatakan dengan persamaan diferensial stokastik berikut [8]:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t \quad (1)$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \xi\sqrt{V_t}dZ_t \quad (2)$$

$$dW_t dZ_t = \rho dt \quad (3)$$

dengan

S_t : Harga aset pada waktu ke- t

V_t : Variansi aset pada waktu ke- t

μ : Rata-rata logaritma *return* aset

κ : Laju *mean reversion*

θ : Tingkat rata-rata variansi jangka panjang

ξ : Volatilitas dari variansi

ρ : Korelasi antara W_t dan Z_t

dW_t : Proses Wiener dari S_t

dZ_t : Proses Wiener dari V_t .

Karena penelitian ini menggunakan data asli, maka nilai S_0 ditentukan berdasarkan data yang ada dan $V_t = v_t$ diperoleh menggunakan metode EWMA.

2.2.1 Metode Exponential Weighted Moving Average (EWMA)

Metode EWMA digunakan untuk menangkap volatilitas pasar yang bersifat *clustering* dan tidak konstan. Metode ini memberikan bobot yang lebih besar pada data yang lebih baru dibandingkan data yang lebih lama [9]. Formula EWMA ditunjukkan dalam persamaan (4)

$$v_t = \lambda v_{t-1} + (1 - \lambda)R_{t-1}^2 \quad (4)$$

dengan v_t adalah estimasi variansi harian pada waktu ke- t , dan λ adalah parameter *smoothing*. Mengikuti model RiskMetrics, data harian menggunakan $\lambda = 0.94$ [10]. Pada pendekatan ini diasumsikan bahwa

$$v_0 \approx \text{var}(R_t) \quad (5)$$

dengan R_t adalah logaritma *return* aset pada waktu ke- t , dihitung menggunakan formula berikut:

$$R_t = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1}) = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right). \quad (6)$$

2.2.2 Metode Euler-Maruyama

Solusi numerik dari persamaan diferensial stokastik model Heston diaproksimasi menggunakan metode Euler-Maruyama. Misalkan himpunan solusi dari persamaan diferensial stokastik dinyatakan sebagai $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$, perubahan X terhadap t dapat dinyatakan dalam persamaan diferensial stokastik berikut:

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dW_t, \quad 0 \leq t \leq T \quad (7)$$

dengan $f(t, X_t)$ adalah *drift rate* dari X dan $(g(t, X_t))^2$ adalah *variance rate* dari X , nilai awal $X_0 = x_0$ dan dW_t adalah proses Wiener [11]. Misalkan pula interval waktu $[0, T]$

memenuhi diskretisasi $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_t < \dots < \tau_n = T$ dan memiliki jarak yang sama sebesar $\Delta t = \frac{T}{n}$, maka menggunakan metode Euler-Maruyama, diperoleh solusi persamaan diferensial stokastik X_t sebagai berikut:

$$X_{t+1} = X_t + f(t, X_t)\Delta t + g(t, X_t)\Delta W_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (8)$$

dengan nilai awal $X_0 = x_0$, $\Delta t = (\tau_{t+1} - \tau_t)$, dan $\Delta W_t = (W_{t+1} - W_t) \sim N(0, \Delta t)$ [12].

Persamaan diferensial stokastik model Heston pada persamaan (1) dan persamaan (2) bisa dinyatakan dalam bentuk persamaan (7), sehingga menggunakan metode Euler-Maruyama didapatkan solusi persamaan diferensial stokastik model Heston yang sesuai dengan persamaan (8) sebagai berikut:

$$S_{t+1} = S_t + \mu S_t \Delta t + \sqrt{V_t} S_t \Delta W_t \quad (9)$$

$$V_{t+1} = V_t + \kappa(\theta - V_t)\Delta t + \xi \sqrt{V_t} \Delta Z_t \quad (10)$$

untuk $t = 0, 1, \dots, n-1$, dengan

$$S_0 = s_0$$

$$V_0 = v_0$$

dan $\Delta W_t, \Delta Z_t \sim N(0, \Delta t)$.

2.2.3 Metode Ordinary Least Squares (OLS)

Metode OLS merupakan teknik regresi linear yang digunakan untuk mengestimasi koefisien dalam model regresi yang menghubungkan satu peubah takbebas dengan satu atau lebih peubah bebas [13]. Misalkan model regresi linear dituliskan dalam formula berikut:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Metode OLS akan meminimumkan jumlah kuadrat galat dari persamaan (11), sehingga parameter β_0 dan β_1 dapat diestimasi [13].

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (12)$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad (13)$$

dengan $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ dan $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ adalah rata-rata sampel [13].

Persamaan (10) dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$V_{t+1} - V_t = \kappa(\theta - V_t)\Delta t + \xi \sqrt{V_t} \Delta Z_t$$

$$\Delta V_t = \kappa \theta \Delta t + (-\kappa \Delta t) V_t + \xi \sqrt{V_t} \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

sehingga diperoleh persamaan regresi

$$\Delta V_t = \beta_0 + \beta_1 V_t + \epsilon_t \quad (14)$$

dengan $\beta_0 = \kappa \theta \Delta t$ sebagai *intercept*, $\beta_1 = -\kappa \Delta t$ sebagai *slope*, dan $\epsilon_t = \xi \sqrt{V_t} \epsilon \sqrt{\Delta t}$ sebagai galat, di mana $\epsilon \sim N(0, 1)$. Menggunakan metode OLS, estimasi nilai β_0 dan β_1 bisa diperoleh menggunakan persamaan (12) dan persamaan (13), sehingga nilai parameter κ dan θ bisa diestimasi dengan persamaan berikut:

$$\hat{\kappa} = -\frac{\hat{\beta}_1}{\Delta t} \quad (15)$$

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{\beta}_0}{\kappa \Delta t}. \quad (16)$$

Nilai parameter ξ dapat diestimasi dengan memanfaatkan bentuk galat regresi

$$\epsilon_t = \xi \sqrt{V_t} \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

sehingga

$$\frac{\epsilon_t}{\sqrt{V_t}} = \xi \epsilon \sqrt{\Delta t} \sim N(0, \xi^2 \Delta t)$$

dengan demikian $stdev\left(\frac{\epsilon_t}{\sqrt{V_t}}\right) = \xi \sqrt{\Delta t}$, dan diperoleh estimasi untuk nilai parameter ξ sebagai berikut:

$$\hat{\xi} = \frac{stdev\left(\frac{\epsilon_t}{\sqrt{V_t}}\right)}{\sqrt{\Delta t}}. \quad (17)$$

Kemudian dalam model Heston, dW_t dan dZ_t berkorelasi ρ . Secara empiris, logaritma *return* saham (R_t) dipengaruhi oleh dW_t dan perubahan volatilitas (ΔV_t) dipengaruhi oleh dZ_t , sehingga nilai parameter ρ bisa diaproksimasi dengan korelasi antara R_t dan ΔV_t , dengan formula berikut [8]:

$$\hat{\rho} \approx corr(R_t, \Delta V_t) = \frac{cov(R_t, \Delta V_t)}{stdev(R_t)stdev(\Delta V_t)}. \quad (18)$$

Setelah semua parameter model Heston diperoleh, dilakukan simulasi jalur harga dan volatilitas saham dengan jumlah simulasi tertentu sesuai solusi model Heston pada persamaan (9) dan (10). Hasil simulasi tersebut digunakan untuk melakukan valuasi nilai OSK menggunakan metode *Least Squares Monte Carlo* (LSMC).

2.3 Metode *Least Squares Monte Carlo* (LSMC)

Metode LSMC adalah pendekatan numerik yang diperkenalkan oleh Longstaff dan Schwartz pada tahun 2001 untuk mengevaluasi opsi Amerika, yaitu opsi yang dapat dieksekusi kapan saja, baik sebelum atau pada saat jatuh tempo. Metode ini menggabungkan simulasi Monte Carlo dengan regresi *least squares* untuk memperkirakan nilai kelanjutan (*continuation value*) dari sebuah opsi. Metode LSMC bekerja secara mundur (*backward induction*) dari waktu jatuh tempo ke waktu sekarang. Setelah nilai kelanjutan opsi diperkirakan dengan regresi *least squares*, akan dibandingkan dengan nilai eksekusi langsung (*payoff*). Jika *payoff* lebih besar, maka opsi dieksekusi [6]. Pendekatan ini memungkinkan penilaian opsi Amerika yang kompleks dan sulit diselesaikan secara analitik.

Secara teoritis, nilai kelanjutan opsi pada waktu tertentu t_k dihitung sebagai nilai harapan dari arus kas masa depan yang telah didiskontokan, ditulis secara matematis sebagai berikut [6]:

$$F(\omega; t_k) = E_Q \left[\sum_{j=k+1}^K \exp\left(-\int_{t_k}^{t_j} r(\omega, s) ds\right) C(\omega, t_j; t_k, T) \middle| \mathcal{F}_{t_k} \right] \quad (19)$$

dengan

- $F(\omega; t_k)$: Nilai kelanjutan pada waktu t_k untuk lintasan ω
 $E_Q[\cdot]$: Harapan di bawah peluang *risk neutral* Q
 $r(\omega, s)$: Suku bunga bebas risiko sesaat pada waktu s untuk lintasan ω
 $C(\omega, t_j; t_k, T)$: Arus kas pada waktu t_j jika opsi tak dieksekusi pada waktu t_k hingga T
 \mathcal{F}_{t_k} : Filtrasi yang tersedia hingga waktu t_k .

Nilai harapan bersyarat ini sangat sulit dihitung secara langsung, namun dengan pendekatan LSMC dari nilai-nilai aktual hasil simulasi, diperoleh formula estimasi sebagai berikut [6]:

$$\hat{F}_M(\omega; t_k) = \sum_{j=1}^M \alpha_j \phi_j(X_t) \quad (20)$$

dengan

- $\hat{F}_M(\omega; t_k)$: Estimasi nilai kelanjutan berdasarkan regresi *least squares*
 α_j : Koefisien regresi yang diestimasi
 $\phi_j(X_t)$: Fungsi basis (misalnya polinomial dari harga aset X_t)
 M : Jumlah fungsi basis.

Proses ini dilakukan hanya pada jalur simulasi yang *in-the-money*, karena hanya jalur tersebut yang relevan untuk memutuskan apakah opsi akan dieksekusi [6]. Setelah didapatkan estimasi nilai kelanjutan \hat{F}_M , buat aturan pelaksanaan dengan menentukan apakah opsi akan dieksekusi atau tidak. Opsi akan dieksekusi jika

$$H_t(\omega) \geq \hat{F}_M(\omega; t_k)$$

dengan $H_t(\omega)$ adalah nilai eksekusi langsung (*payoff*) [6]. Dalam konteks valuasi OSK yang merupakan opsi *call*

$$H_t(\omega) = \max(S_t - K, 0) \quad (21)$$

dengan K adalah harga *strike*. Setelah aturan pelaksanaan ditentukan untuk semua lintasan, nilai opsi dihitung dengan mendiskonto arus kas hasil eksekusi kembali ke waktu awal [6]

$$\Pi_0 = \frac{1}{N} \sum_{\omega=1}^N e^{-r \cdot \tau(\omega)} H_{\tau(\omega)}(\omega) \quad (22)$$

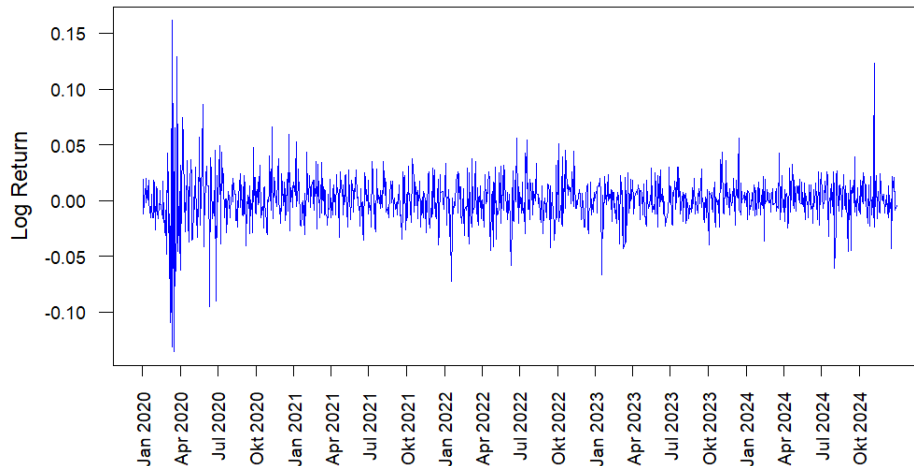
dengan

- Π_0 : Nilai opsi di waktu awal
 $\tau(\omega)$: Waktu optimal pelaksanaan untuk lintasan ke- ω
 $H_{\tau(\omega)}$: Nilai eksekusi (*payoff*) pada $\tau(\omega)$
 r : Suku bunga bebas risiko
 N : Jumlah lintasan simulasi.

3. Hasil dan Pembahasan

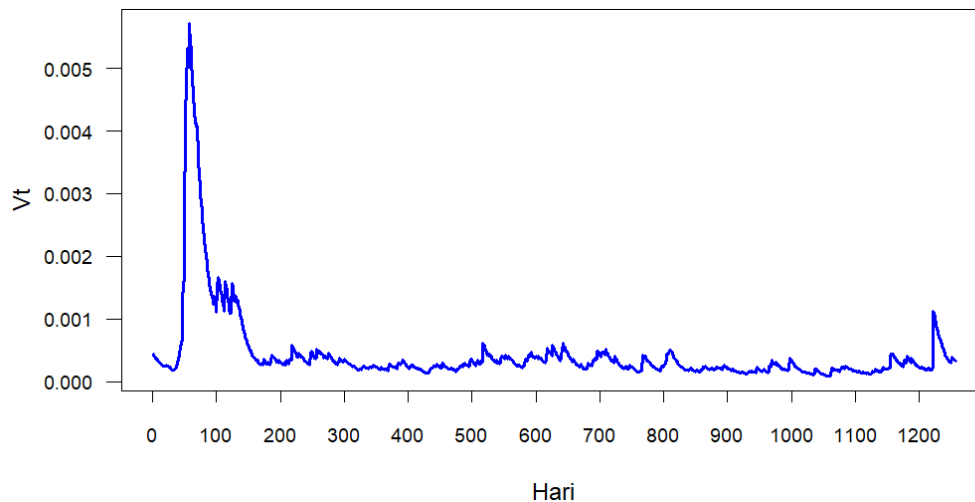
3.1 Hasil Numerik Estimasi Variansi Harian (v_t) dari Logaritma Return

Nilai logaritma *return* dari saham Goldman Sachs dihitung menggunakan persamaan (6). Hasil perhitungan logaritma *return* disajikan dalam bentuk grafik pada Gambar 1.



Gambar 1. Grafik logaritma *return* saham Goldman Sachs

Setelah logaritma *return* dihitung, estimasi variansi harian (v_t) dilakukan menggunakan pendekatan EWMA dengan $\lambda = 0.94$ untuk data harian. Karena pendekatan ini memberikan bobot lebih besar pada data *return* terbaru, estimasi variansi lebih responsif terhadap perubahan kondisi pasar terkini. Variansi historis logaritma *return* digunakan sebagai variansi harian awal (v_0) seperti yang dinyatakan dalam persamaan (5), kemudian diperbarui secara iteratif sesuai persamaan (4). Hasil estimasi disajikan dalam bentuk grafik pada Gambar 2.



Gambar 2. Grafik estimasi variansi harian logaritma *return*

Hasil estimasi variansi harian menggunakan metode EWMA menunjukkan pola volatilitas saham yang fluktuatif dan tidak konstan, sesuai dengan asumsi model Heston yang mengakomodasi volatilitas stokastik.

3.2 Hasil Numerik Estimasi Nilai Parameter Model Stokastik Heston

Nilai parameter model stokastik Heston diestimasi dengan formula-formula yang telah diperoleh sebelumnya, yaitu pada persamaan (5), persamaan (15), persamaan (16), persamaan (17), dan persamaan (18). Estimasi dilakukan menggunakan bantuan *software* pemrograman RStudio, dan diperoleh hasil estimasi nilai parameter seperti yang disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Hasil estimasi nilai parameter model stokastik Heston

Parameter	Nilai
$\hat{\kappa}$	1.954857
$\hat{\theta}$	0.000425
$\hat{\xi}$	0.046303
$\hat{\rho}$	-0.005901
\hat{v}_o	0.000435

Dalam menghitung valuasi opsi saham karyawan (OSK) dengan model stokastik Heston diperlukan asumsi *risk neutral*, sehingga dalam penelitian ini, nilai tingkat bunga bebas risiko (r) digunakan untuk mengganti nilai parameter μ .

3.3 Hasil Numerik Valuasi Opsi Saham Karyawan

Nilai parameter dari model stokastik Heston yang telah diestimasi sebelumnya digunakan untuk mensimulasikan jalur pergerakan harga saham sesuai dengan dinamika model Heston melalui persamaan (9) dan persamaan (10). Kemudian berdasarkan hasil simulasi, metode LSMC digunakan untuk menghitung nilai eksak OSK. Selain hasil estimasi parameter model Heston, digunakan pula sejumlah parameter awal untuk menghitung nilai eksak OSK, sebagaimana ditunjukkan dalam Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Parameter awal untuk menghitung nilai eksak OSK

Parameter	Nilai
Harga saham awal (S_0)	\$573.55
Harga <i>strike</i> (K)	\$602.23
Waktu jatuh tempo (T)	5 tahun
Periode <i>vesting</i> (T_v)	24 bulan
<i>Forfeiture rate</i> (q)	5%
Tingkat bunga bebas risiko (r)	5%

Pada penelitian ini, digunakan $N = 200000$ jalur simulasi sebagai jumlah simulasi yang optimal untuk menghitung nilai eksak OSK. Pada jumlah jalur simulasi tersebut, hasil simulasi menunjukkan nilai yang konvergen dan stabil sehingga didapat nilai eksak OSK sebesar \$82.4847. Tabel 3 menyajikan hasil dari simulasi LSMC untuk nilai OSK dengan variasi jumlah jalur simulasi, disertai dengan nilai galat relatif dari setiap variasi. Nilai galat relatif dihitung dengan formula berikut.

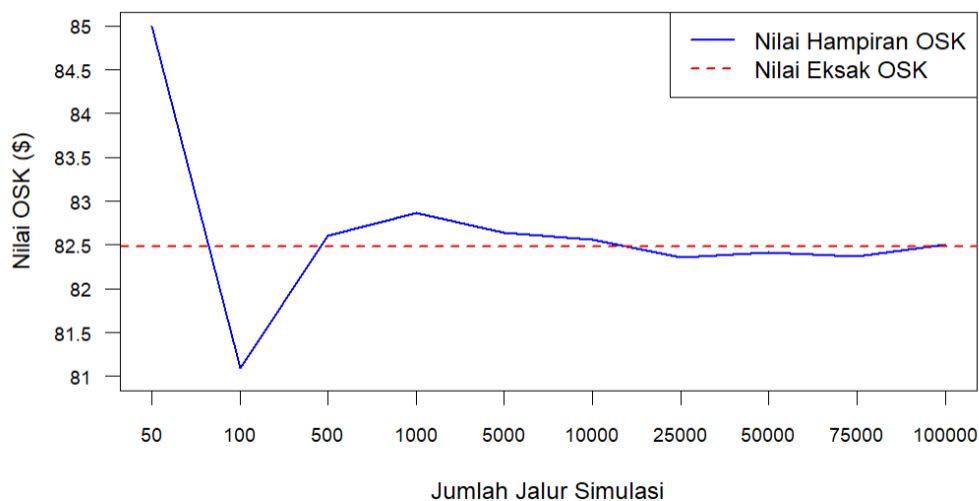
$$\varepsilon_r = \frac{|O^{(i)} - \hat{O}|}{\hat{O}} \quad (23)$$

dengan $O^{(i)}$ adalah nilai OSK dengan i jalur simulasi dan \hat{O} adalah nilai eksak OSK.

Tabel 3. Nilai OSK dengan jumlah simulasi yang berbeda

Jumlah Simulasi	Nilai OSK (\$)	Galat Relatif
50	84.9925	0.0304
100	81.0915	0.0169
500	82.6009	0.0014
1000	82.8656	0.0046
5000	82.6437	0.0019
10000	82.5577	0.0009
25000	82.3635	0.0015
50000	82.4130	0.0009
75000	82.3724	0.0014
100000	82.5042	0.0002

Hasil simulasi pada Tabel 3 menunjukkan bahwa peningkatan jumlah jalur simulasi, cenderung membuat galatnya menurun dan menghasilkan estimasi yang lebih akurat terhadap nilai eksak OSK. Perbandingan nilai hampiran OSK dengan nilai eksaknya disajikan pada Gambar 3.

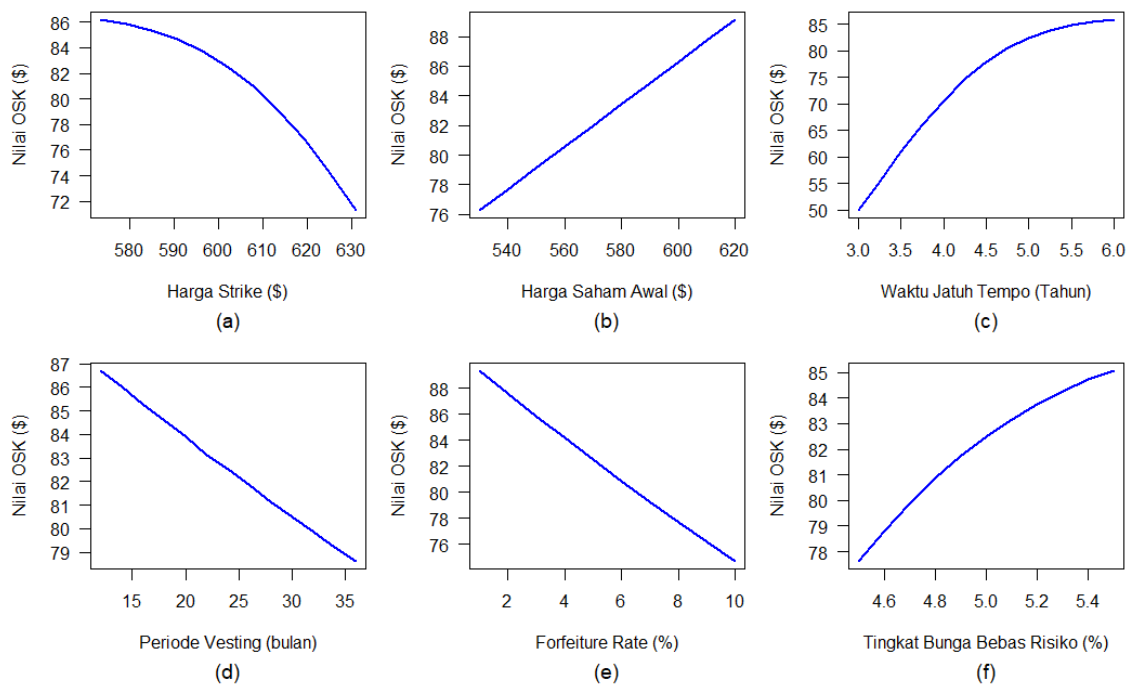


Gambar 3. Grafik perbandingan nilai hampiran OSK dengan nilai eksak OSK

Gambar 3 memperlihatkan pergerakan nilai hampiran OSK yang semakin mendekati nilai eksaknya seiring dengan penambahan jumlah jalur simulasi.

3.4 Pengaruh Perubahan Nilai Parameter Awal terhadap Valuasi Opsi Saham Karyawan

Beberapa parameter diindikasikan memiliki pengaruh terhadap perubahan valuasi OSK. Parameter yang diamati adalah harga *strike* (K), harga saham awal (S_0), waktu jatuh tempo (T), periode *vesting* (T_v), *forfeiture rate* (q), dan tingkat bunga bebas risiko (r). Simulasi dilakukan dengan menggunakan $N = 100000$ jalur simulasi. Grafik pengaruh perubahan nilai parameter awal terhadap valuasi OSK disajikan pada Gambar 4.



Gambar 4. Grafik pengaruh perubahan nilai parameter awal terhadap valuasi OSK
 (a) pengaruh perubahan K , (b) pengaruh perubahan S_0 , (c) pengaruh perubahan T ,
 (d) pengaruh perubahan T_v , (e) pengaruh perubahan q , (f) pengaruh perubahan r

Gambar 4a menunjukkan bahwa seiring meningkatnya harga *strike*, maka nilai OSK mengalami penurunan. Hal ini sesuai dengan sifat opsi *call*, di mana semakin tinggi harga eksekusi, semakin kecil kemungkinan opsi berada dalam kondisi menguntungkan (*in-the-money*), sehingga menurunkan nilai wajar dari opsi tersebut.

Gambar 4b menunjukkan bahwa terdapat hubungan positif antara harga saham awal dengan nilai OSK. Semakin tinggi harga saham awal maka semakin tinggi nilai OSK. Hal ini sesuai dengan sifat dasar opsi *call*, di mana nilai opsi cenderung naik seiring dengan kenaikan harga aset dasar.

Gambar 4c menunjukkan bahwa semakin panjang waktu jatuh tempo OSK, semakin tinggi nilai OSK. Hal ini sesuai dengan sifat opsi, di mana opsi dengan waktu jatuh tempo yang lebih lama cenderung memiliki nilai yang lebih tinggi karena berpotensi meningkatkan peluang bagi harga saham bergerak ke arah yang menguntungkan selama periode yang panjang tersebut.

Gambar 4d menunjukkan hubungan yang negatif antara periode *vesting* dan nilai OSK. Semakin lama periode *vesting* maka semakin rendah nilai OSK. Hal ini diakibatkan meningkatnya risiko ketidakpastian yang dihadapi karyawan, seperti kemungkinan berhenti bekerja sebelum hak eksekusi diperoleh. Selain itu, periode *vesting* yang lebih lama mengurangi nilai waktu efektif dari OSK, sehingga menurunkan nilai total yang dapat diperoleh dari opsi tersebut.

Gambar 4e menunjukkan bahwa semakin tinggi *forfeiture rate* maka semakin rendah nilai OSK. Hal ini disebabkan karena meningkatnya risiko bahwa karyawan tidak akan memenuhi syarat untuk mengeksekusi OSK karena pengunduran diri atau pemutusan hubungan kerja sebelum OSK dapat dieksekusi.

Gambar 4f menunjukkan bahwa terdapat hubungan positif antara tingkat suku bunga bebas risiko dengan nilai OSK. Semakin tinggi tingkat suku bunga bebas risiko maka semakin tinggi pula nilai OSK. Hal ini terjadi karena kenaikan suku bunga menyebabkan nilai pasar saham pada satuan waktu berikutnya meningkat juga (asumsi *risk neutral*), sehingga memperbesar selisih antara nilai pasar saham dan harga eksekusi, hal ini meningkatkan nilai OSK saat ini.

4. Kesimpulan

Hasil penelitian ini menegaskan bahwa metode *Least Squares Monte Carlo* (LSMC) terbukti efektif memvaluasi opsi saham karyawan (OSK) dengan volatilitas stokastik Heston, menghasilkan nilai eksak OSK yang konvergen dan stabil, di mana peningkatan jumlah jalur simulasi dari puluhan hingga ratusan ribu secara konsisten menurunkan galat relatif. Metode LSMC berhasil mengakomodasi fitur eksekusi lebih awal, periode *vesting* dan efek *forfeiture* secara simultan, sehingga memberikan estimasi yang lebih akurat dibanding pendekatan deterministik konvensional. Analisis pengaruh perubahan nilai parameter awal menunjukkan bahwa peningkatan harga *strike*, periode *vesting*, dan *forfeiture rate* menurunkan nilai OSK, sementara peningkatan harga saham awal, waktu jatuh tempo, dan tingkat bunga bebas risiko meningkatkan nilai OSK. Hal ini menunjukkan bahwa LSMC tidak hanya efektif memvaluasi nilai OSK dalam volatilitas stokastik Heston, tetapi juga sensitif terhadap perubahan kondisi pasar dan parameter khusus OSK, menjadikannya metode andalan untuk valuasi instrumen derivatif kompleks dalam praktik keuangan modern.

Kontribusi Penulis

Antonius Aditya Rizky Wijaya: Konseptualisasi, metodologi, pengolahan data, penulisan – persiapan draf asli, penulisan – tinjauan dan penyuntingan.

Khansa Maghfira Azzahra: Konseptualisasi, penulisan – persiapan draf asli.

Viola Firda Rizqi Anggrainiputri: Metodologi, penulisan – tinjauan dan penyuntingan.

Endar Hasafah Nugrahani: Validasi, analisis formal, supervisi.

Ucapan Terima Kasih

Para penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah berkontribusi dalam penelitian ini dan dalam penyusunan manuskrip. Kami sangat menghargai editor dan reviewer atas masukan serta dukungannya dalam menyempurnakan karya ini.

Pendanaan

Penelitian ini tidak menerima pendanaan eksternal.

Konflik Kepentingan

Para penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan yang terkait dengan artikel ini.

Referensi

- [1] A. A. A. I. Kartikasari and I. B. P. Astika, "Pengaruh Harga Eksekusi dan Jumlah Opsi Saham Karyawan (ESOP) pada Kinerja Perusahaan," *E-Jurnal Akuntansi Universitas Udayana*, vol. 11, no. 3, pp. 698–712, Jun. 2015.
- [2] D. C. Lesmana, R. T. A. Ramadhan, S. Nurjanah, and V. S. Dharmawan, "Pricing Employee Stock Option using Trinomial Tree Method," *BAREKENG: J. Math. & App*, vol. 19, no. 2, pp. 709–720, Jun. 2025, doi: 10.30598/barekengvol19iss2pp0709-0720.
- [3] D. L. Fitroh and R. Artiono, "Model Matematika Penilaian Opsi Saham Karyawan Menggunakan Metode Pohon Binomial," *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, vol. 11, no. 3, pp. 360–367, Sep. 2023, doi: 10.26740/mathunesa.v11n3.p360-367.
- [4] A. U. Alfajriyah, E. R. M. Putri, D. B. Utomo, and Moch. T. Hakiki, "Stock Option Pricing Using Binomial Trees with Implied Volatility," *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, vol. 20, no. 3, pp. 724–742, May 2024, doi: 10.20956/j.v20i3.34476.
- [5] D. P. D. Damiyanti, K. Dharmawan, and L. P. I. Harini, "Perhitungan Value at Risk dengan Penduga Volatilitas Stokastik Heston," *E-Jurnal Matematika*, vol. 7, no. 4, pp. 317–321, Nov. 2018, doi: 10.24843/MTK.2018.v07.i04.p220.
- [6] F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, "Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach," *Rev Financ Stud*, vol. 14, no. 1, pp. 113–147, Jan. 2001, doi: 10.1093/rfs/14.1.113.
- [7] D. P. Anggraeni, "Penggunaan Model Binomial pada Penentuan Harga Opsi Saham Karyawan," *Jurnal Matematika*, vol. 5, no. 1, Jun. 2015.
- [8] C. Chalimatusadiah, D. C. Lesmana, and R. Budiarti, "Penentuan Harga Opsi dengan Volatilitas Stokastik Menggunakan Metode Monte Carlo," *Jambura Journal of Mathematics*, vol. 3, no. 1, pp. 80–92, Jan. 2021, doi: 10.34312/jjom.v3i1.10137.
- [9] H. Syafwan, F. Siagian, P. Putri, and M. Handayani, "Forecasting Jumlah Pengangguran di Kabupaten Asahan Menggunakan Metode Weighted Moving Average," *Jurnal Teknik Informatika Kaputama (JTik)*, vol. 5, no. 2, pp. 224–229, Jul. 2021.
- [10] "RiskMetrics™—Technical Document," New York, Dec. 1996.
- [11] D. Irsalina, "Pengaruh Inflasi terhadap Strategi Optimal Investasi dan Konsumsi di Indonesia dengan Tingkat Bunga dan Volatilitas Stokastik," Thesis, IPB University, Bogor, 2021.
- [12] X. Han and P. E. Kloeden, *Random Ordinary Differential Equations and Their Numerical Solution*, vol. 85. in Probability Theory and Stochastic Modelling, vol. 85. Singapore: Springer, 2017. doi: 10.1007/978-981-10-6265-0.
- [13] G. James, D. Witten, T. Hastie, and R. Tibshirani, *An Introduction to Statistical Learning: with Applications in R - Second Edition*, 2nd ed. New York: Springer, 2021.