Memòria de pràctiques: Generació de fractals de Newton

Marc Roig Oliva

Índex

1 Motivació del treball

Una empresa de disseny necessita un programa per generar un fitxer de dades que despres es pugui utilitzar per representar fractals de Newton al programa gnuplot. Més específicament es demana el disseny de les rutines de càlcul i el codi per l'escriptura de les dades al fitxer.

2 Implementació del treball

La empresa demana la creació de un programa principal: **dibfr** i una llibreria amb les rutines de càlcul: **nwtfr**. Aquesta llibreria consta de les rutines:

- **avalp**: Avalua el polinomi complex $p(z) = (z - w_0)(z - w_1) \cdots (z - w_{n-1})$ on z i w son complexos de la forma $a + bi$
- **avaldp**: Avalua la derivada del polinomi complex anterior
- **cnvnwt**: Aproxima les arrels de $p(z)$ utilitzant el metode de Newton[1] per calcular les conques d'atraccio[2] de z_i

El programa principal **dibfr** crida a la funció **cnvnwt** per obtenir les conques d'atraccio i una vegada les sap decideix quin ha de donar a cada punt per dibuixar el fractal

El programa principal i la llibreria **nwtfr** utilitzen les llibreries pre-programades de C:

- stdio.h (standard input-output)
- stdlib.h (standard library)
- math.h
- assert.h

3 Implementació del software

La estratègia de disseny de les rutines **avalp** i **avaldp** es basa en que la multiplicació de dos nombres complexos $z = a + bi$ i $t = c + di$ es pot avaluar de la forma $(ac - bd) + i(ad + bc)$

La estratègia de disseny de la rutina **cnvnwt** es basa en que el quocient de dos complexos s'avalua com:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

[1] $z_{n+1} = z_n - \dfrac{p(z_n)}{p'(z_n)}$

[2] Si $z_n \xrightarrow{n \to \infty} w_j$ es diu que z_0 pertany a la conca d'atracció de l'arrel w_j

4 Manual del software

4.1 avalp

- x (double): part real de z
- y (double): part imaginària de z
- *px (double): part real de $p(z)$
- *py (double): part imaginària de $p(z)$
- n (int): nombre d'arrels de $p(z)$ (i per tant grau del polinomi)
- u[ ] (double): vector de les parts reals dels complexos w_i
- v[ ] (double): vector de les parts imaginàries dels complexos w_i

Es una funcio de tipus **void** (sense retorn) que guarda la part real de la funció $p(z)$ al punter ***px** i la part imaginària al punter ***py**.

4.2 avaldp

- x (double): part real de z
- y (double): part imaginària de z
- *dpx (double): part real de $p'(z)$
- *dpy (double): part imaginària de $p'(z)$
- n (int): nombre d'arrels de $p(z)$ (i per tant grau del polinomi)
- u[ ] (double): vector de les parts reals dels complexos w_i
- v[ ] (double): vector de les parts imaginàries dels complexos w_i

Es una funcio de tipus **void** que guarda la part real de la funció $p'(z)$ al punter ***dpx** i la part imaginària al punter ***dpy**.

4.3 cnvnwt

- x (double): part real de z
- y (double): part imaginària de z
- tolcnv (double): tolèrancia maxima de convergencia per a calcular les conques
- maxit (int): nombre màxim d'iteracions del mètode de Newton
- n (int): nombre d'arrels de $p(z)$ (i per tant grau del polinomi)
- u[ ] (double): vector de les parts reals dels complexos w_i
- v[ ] (double): vector de les parts imaginàries dels complexos w_i

Es una funcio que aplica el mètode de Newton per aproximar les arrels w_j, si algun dels iterats aproxima aquesta arrel amb un error menor que **tolcnv** retorna l'enter j (l'index de l'arrel aproximada) i si cap dels iterats s'apropa retornara -1.

4.4 dibfr

Aquesta utilitat rep 9 arguments:

- narr (int): nombre d'arrels del polinomi $p(z)$
- xmn, xmx, ymn, ymx (double): delimitacions dels eixos on es dibuixa el fractal
- nx, ny(int): nombre de punts que prenem horitzontalment i verticalment respectivament
- tolcnv (double): Error màxim a l'hora de calcular les conques
- maxit (int): màxim nombre d'iteracions del mètode de Newton per calcular una conca

La utilitat s'encarrega de llegir per consola les arrels del polinomi p juntament amb els seus codis de color normalitzats, i imprimeix per consola cada punt de la gràfica juntament amb el seu color, a més a l'hora d'exectuar s'aplica una redirecció de sortida per guardar totes aquestes dades a l'arxiu "fractal.txt". La crida del programa es faria de la forma:

```
./dibfr n xmn xmx nx ymn ymx ny tolcnv maxit > fractal.txt
```

Posteriorment s'introduirien les n arrels de la forma: u_i v_i r_i g_i b_i on u, v son les parts reals i imaginàries de cada arrel de p i r, g, b son els codis de colors normalitzats

Per dibuixar el fractal, dins de gnuplot s'executaran les comandes:

```
unset key
plot "fractal.txt" w rgbimage
```

5 Exemples d'ús de les utilitats

Representació de $p(z) = z^3 - 1$

La crida del programa es fa de la forma:

```
./dibfr 3=n -2=xmn 2=xmx 640=nx -2=ymn 2=ymx 480=ny \
    1e-3=tolcnv 50=maxit > fractal.txt
```

```
1 0 1 0 0
-0.5 .8660254037844386 0 1 0
-0.5 -.8660254037844386 0 0 1
```

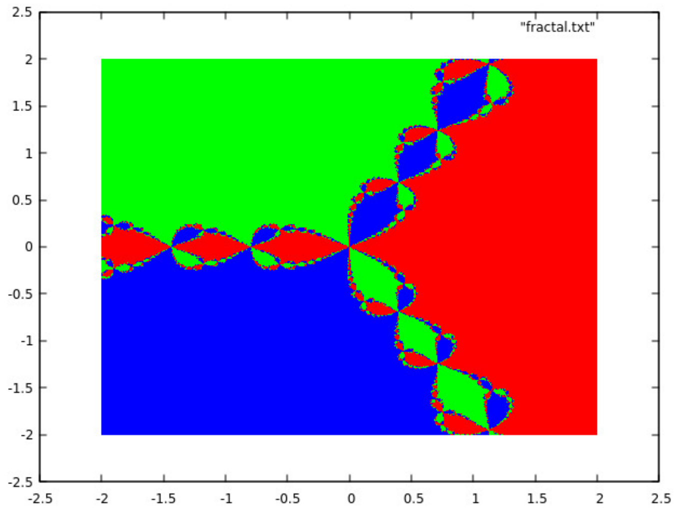

Figure 1: Fractal de $p(z) = z^3 - 1$

6 Validació del software i experimentació numèrica

6.1 Canvi de color de les arrels

La crida del programa es similar variant només el codi de color RGB

```
./dibfr 3=n -2=xmn 2=xmx 640=nx -2=ymn 2=ymx 480=ny \
   1e-3=tolcnv 50=maxit > fractal.txt

1 0 1 1 0
-0.5 .8660254037844386 0 1 1
-0.5 -.8660254037844386 1 0 1
```

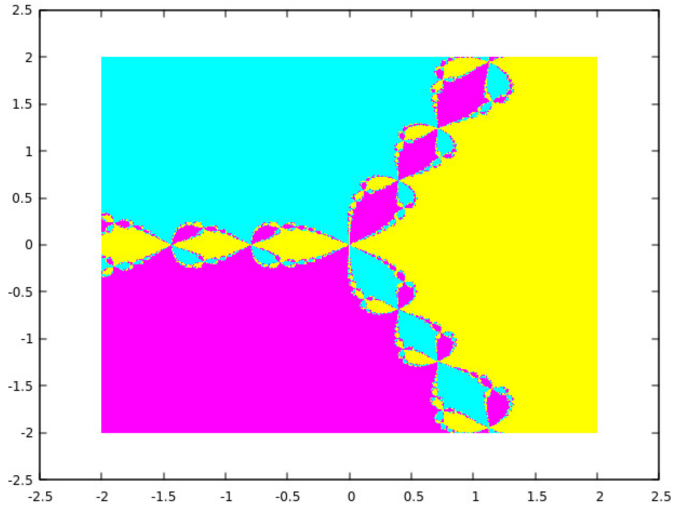

Figure 2: Fractal de $p(z) = z^3 - 1$ amb diferents colors

6.2 Experimentacio amb polinomis de major grau

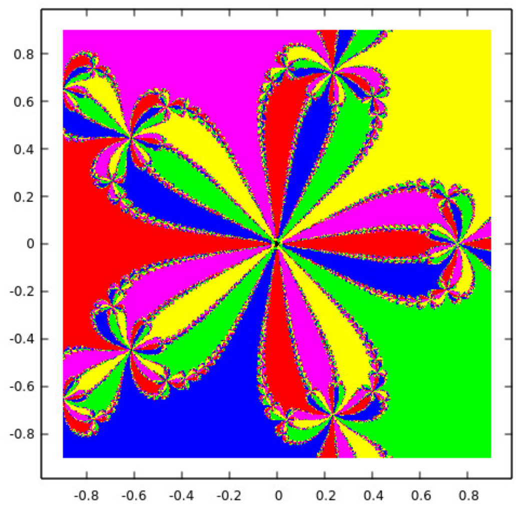

Figure 3: Fractal de $p(z) = z^5 - 1$

6.3 Us dels scripts de gnuplot per fer zoom

Creació d'un fractal de grau 12 i ús dels scripts de gnu **dibprimer** i **recalczoom**

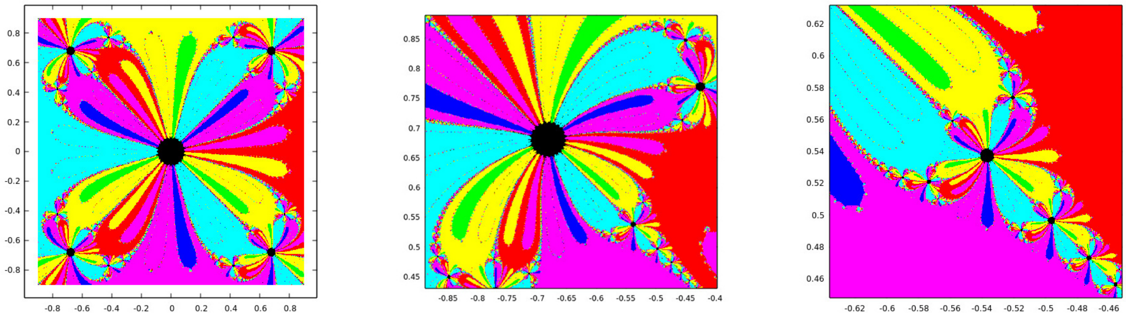

Figure 4: Progressió del fractal $p(z) = z^{12} - 1$ amb 2 zooms

Arrels del polonimi $p(z) = z^{12} - 1$

n	Re w_n	Im w_n	Red	Green	Blue
1	1.974111019	-0.6580370065	255	0	128
2	1.316074013	0	255	0	0
3	1.974111019	0.6580370065	255	128	0
4	0.6580370065	1.974111019	255	255	0
5	0	1.316074013	128	255	0
6	-0.6580370065	1.974111019	0	255	0
7	-1.974111019	0.6580370065	0	255	128
8	-1.316074013	0	0	255	255
9	-1.974111019	-0.6580370065	0	128	255
10	-0.6580370065	-1.974111019	0	0	255
11	0	-1.316074013	128	0	255
12	0.6580370065	-1.974111019	255	0	255

Variables definides a l'script "dibprimer.gnu" i "recalczoom.gnu"

```
narr=12
farr='punts'
fout='fractal.txt'
xmn=-0.9
xmx=0.9
nx=640
ymn=-0.9
ymx=0.9
ny=480
tolcnv=1e-10
maxit=100
```