

# Méthodes Mathématiques pour le Traitement d'Images

---

Florent Dupont  
[Florent.Dupont@univ-lyon1.fr](mailto:Florent.Dupont@univ-lyon1.fr)  
LIRIS, équipe ORIGAMI

Support de cours :  
<http://liris.cnrs.fr/florent.dupont/Enseignement/MMTI.pdf>

# Objectifs

- Modèle fréquentiel
  - Transformation de Fourier : définitions et propriétés
  - Cas des images (signaux bi-dimensionnels)
- Filtre linéaire et produit de convolution
  - Propriétés et lien avec la transformation de Fourier.
  - Amélioration d'images (filtres passe bas, passe haut et passe bande)
- Echantillonnage des signaux
  - Modèle théorique de l'échantillonnage régulier, théorème de Shannon
- Transformation de Fourier discrète
  - Algorithme FFT
  - Applications (analyse, compression...)
- Modèle temps fréquence et analyse multi-résolution
  - Ondelettes : définitions, propriétés, algorithme FWT
  - Exemples d'ondelettes (Haar, Daubechies)
  - Applications (analyse, compression...)

- Traitement du signal (1D, 2D, 3D...)
  - extraire l'information utile d'un signal :  
→ filtrage, corrélation, détection, estimation, analyse spectrale...
  - élaborer des signaux permettant d'étudier le comportement des systèmes physiques ou servant de support pour la transmission ou le stockage d'information :  
→ modulation, échantillonnage...

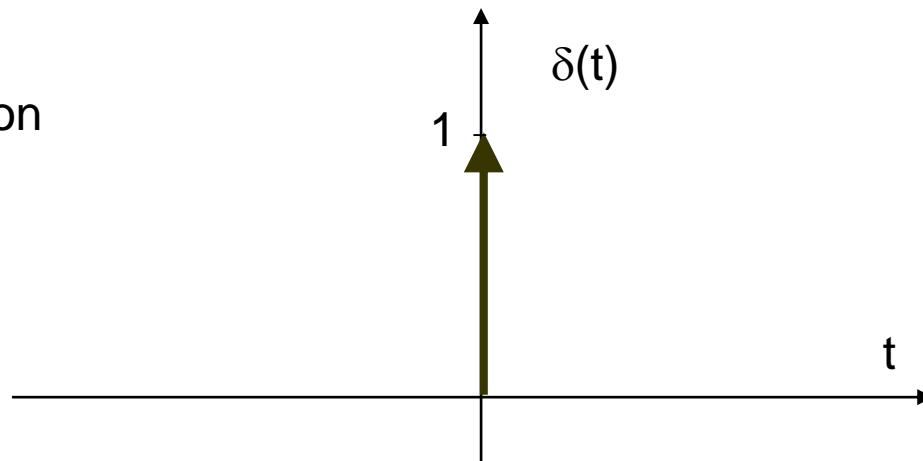
# Pour commencer : quelques signaux élémentaires

→ utiles pour modéliser des phénomènes physiques

- Impulsion de Dirac

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & \text{pour } t \neq 0 \\ \delta(0) = \infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 & \leftarrow \text{impulsion de poids unité} \end{cases}$$

Représentation



- propriétés

$$f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t) \quad \text{localisation}$$

$$f(t) \cdot \delta(t-t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = f(0)$$

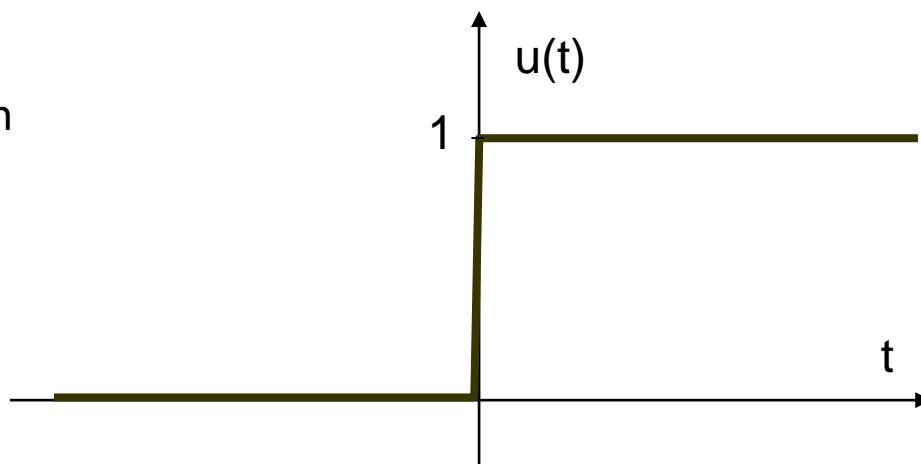
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

- Echelon unité (échelon de Heavyside)

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt$$

$$\begin{cases} u(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ u(t) = 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

Représentation



- Signal rectangulaire unité (ou créneau, ou porte)

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |t| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

remarques :

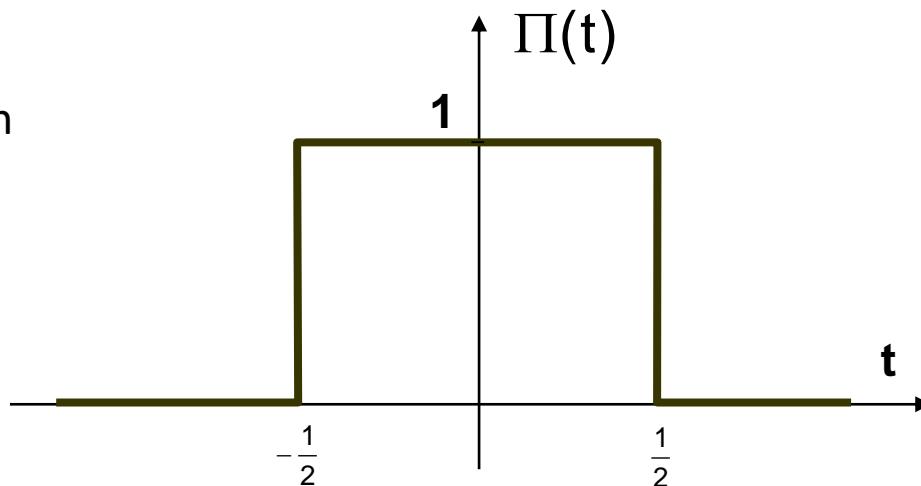
- 
- 

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) dt = 1$$

$$\Pi(t) = u(t + \frac{1}{2}) - u(t - \frac{1}{2})$$

avec  $u(t)$  : échelon unité

Représentation



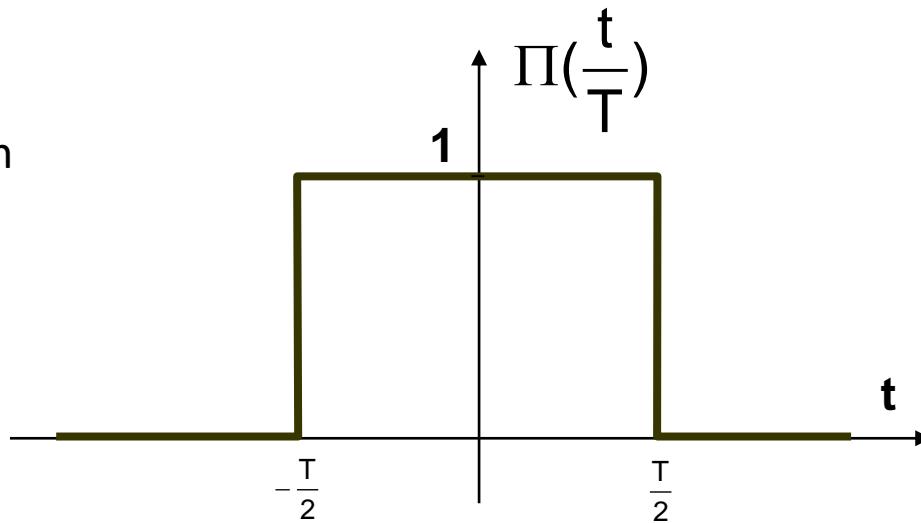
- Porte de largeur  $T$

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

Représentation

remarques :

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) dt = T$
- $\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = u(t + \frac{T}{2}) - u(t - \frac{T}{2})$



- signal sinusoïdal

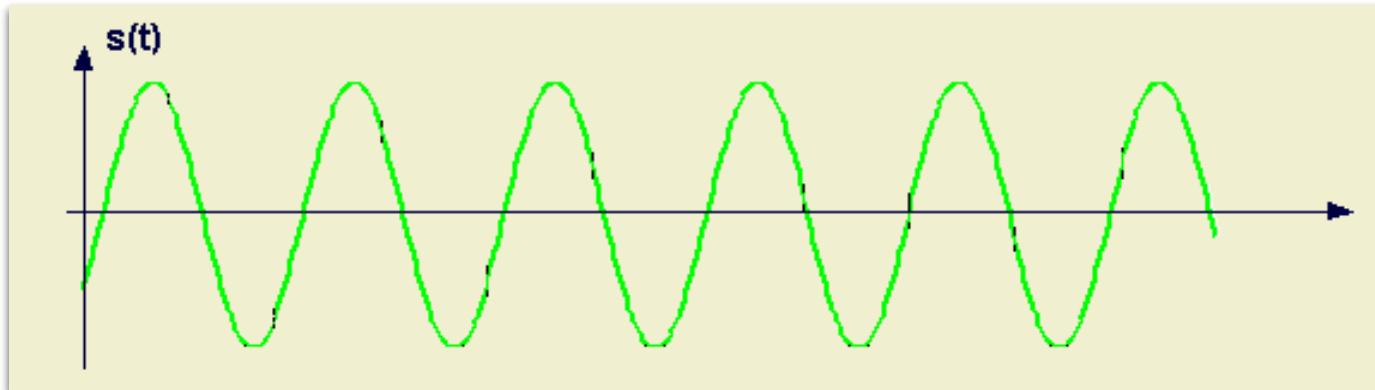
$$s(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$$

$a$  : amplitude du signal

$\omega$  : pulsation

$\omega = 2\pi f$  avec  $f$ : fréquence

$\varphi$  : phase initiale



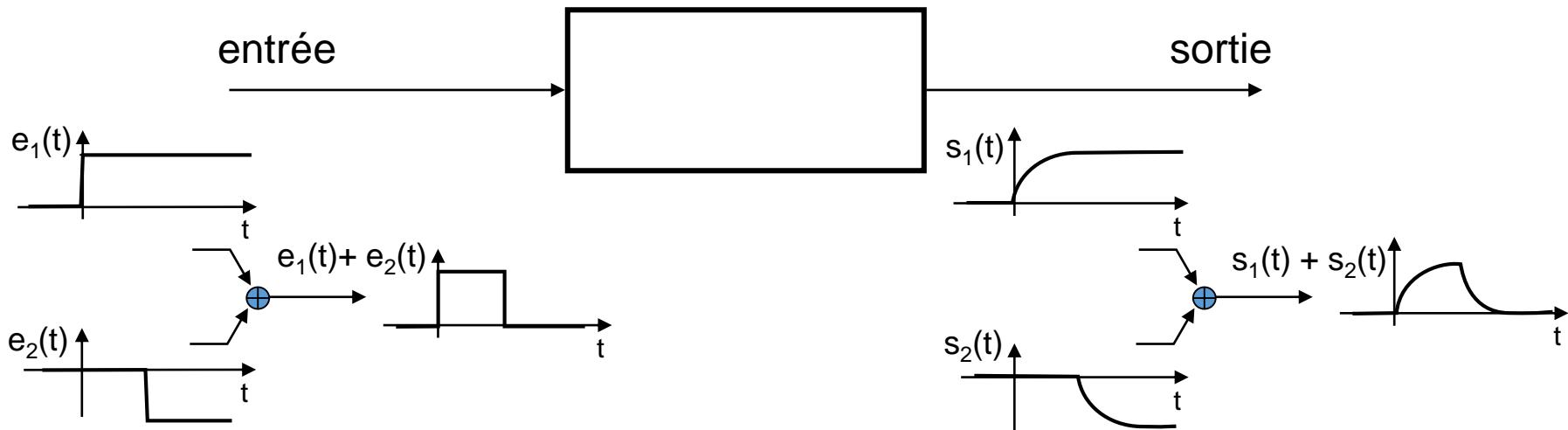
# Notion de système

- **Système**

Toute entité, ou appareil qui effectue une transformation sur un signal



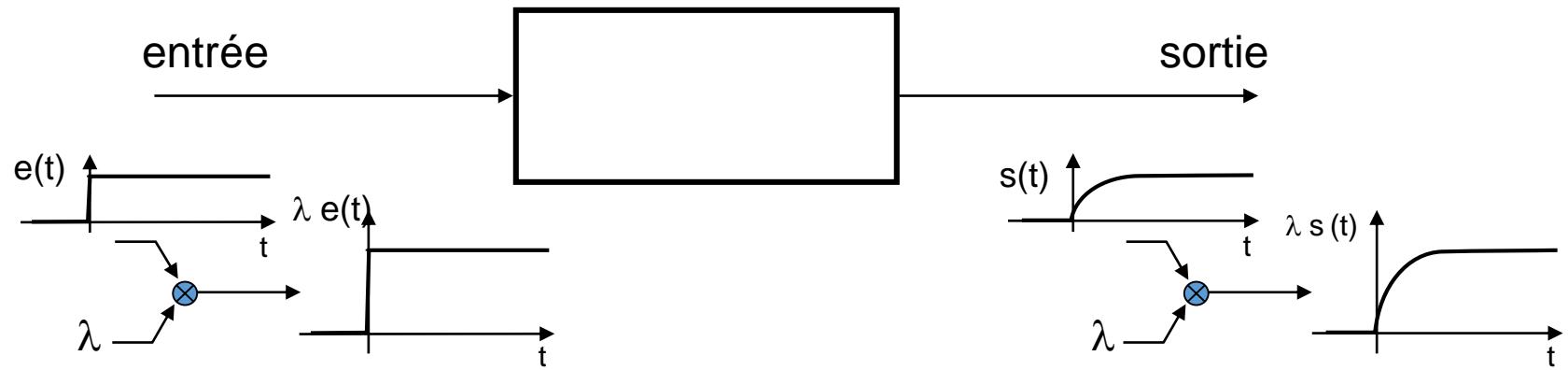
- Propriétés
  - Linéarité



□ additivité

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } e_1(t) \rightarrow s_1(t) \\ \text{et } e_2(t) \rightarrow s_2(t) \end{array} \right\} \text{ alors } e_1(t) + e_2(t) \rightarrow s_1(t) + s_2(t)$$

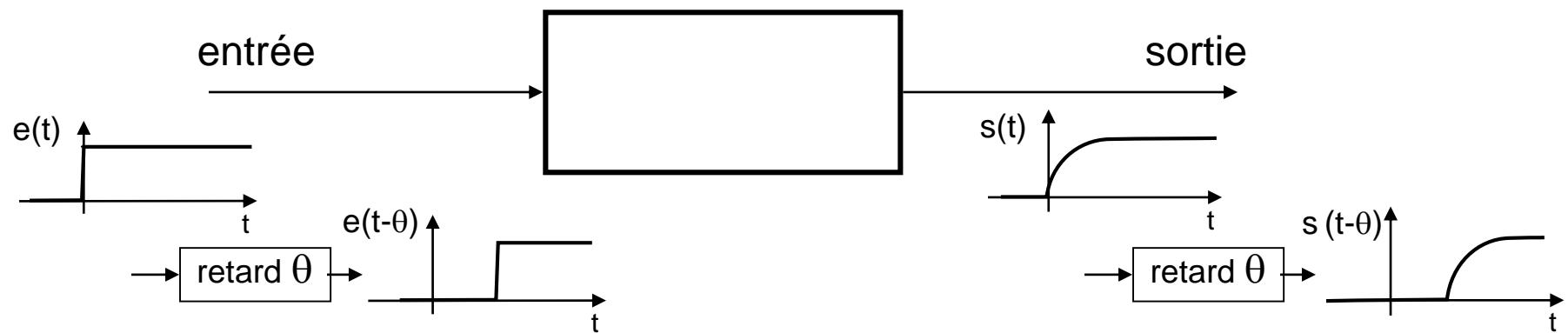
- linéarité



□ homogénéité

si  $e(t) \rightarrow s(t)$       alors       $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.e(t) \rightarrow \lambda.s(t)$

- Invariance ou stationnarité



$$\text{si } e(t) \rightarrow s(t) \quad \text{alors} \quad e(t - \theta) \rightarrow s(t - \theta)$$

→ Le comportement du système reste identique dans le temps

Si le système est linéaire et invariant, il existe une relation intégro-différentielle linéaire à coefficients constants entre  $e(t)$  et  $s(t)$ .

- causalité
  - la réponse à l'instant  $t$  ne dépend pas des valeurs futures de l'entrée  
→ système physique ou non-anticipateur

# Notion de réponse impulsionnelle, Convolution

- réponse impulsionnelle

→ réponse à une impulsion de Dirac



- réponse indicielle

→ réponse à un échelon unité



- Sortie du système pour une entrée quelconque

Hypothèses :

- Le système est linéaire et invariant
- On connaît la réponse impulsionnelle

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

$$\delta(t - \theta) \rightarrow h(t - \theta) \quad \text{invariance}$$

$$e(\theta) \cdot \delta(t - \theta) \rightarrow e(\theta) \cdot h(t - \theta) \quad \text{homogénéité}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e(\theta) \cdot \delta(t - \theta) d\theta \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e(\theta) \cdot h(t - \theta) d\theta \quad \text{additivité}$$



$$e(t) \rightarrow e(t) * h(t) \text{ produit de convolution}$$

- Produit de convolution

$$e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\theta) \cdot h(t - \theta) d\theta$$

→ Un système linéaire invariant est complètement déterminé par sa réponse impulsionnelle

de même que :

Un système linéaire invariant est complètement déterminé par sa réponse indicelle

- Propriétés

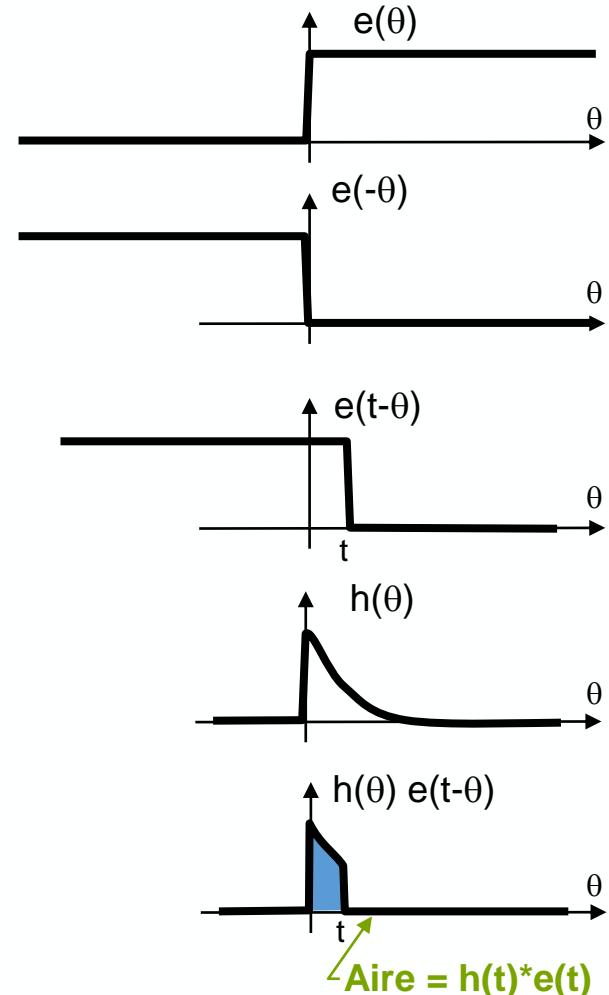
- $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$
- $f(t) * \delta(t) = f(t)$
- $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$       retard

## • Interprétation

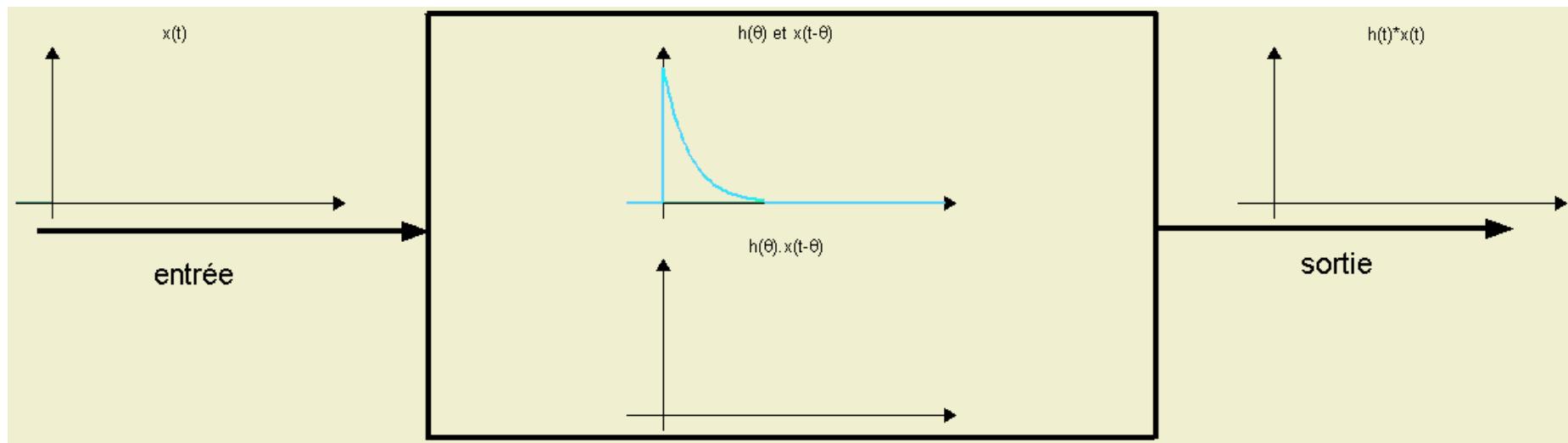
$$e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\theta).h(t - \theta)d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta).e(t - \theta)d\theta$$

Pour obtenir la valeur de  $e(t)*h(t)$  à un instant  $t$  :

- Retournement temporel de l'un des signaux
- Translation en  $t$
- Produit point à point du signal retourné-translaté avec l'autre signal
- Intégration



$$e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\theta) \cdot h(t - \theta) d\theta$$



# Réponse fréquentielle

Soient une entrée  $e(t) = A e^{2\pi j f t}$  (exponentielle complexe)  
et un système de réponse impulsionnelle  $h(t)$

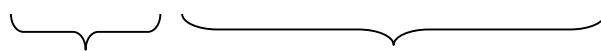
→ sortie  $s(t)$

$$s(t) = e(t) * h(t)$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t - \theta) \cdot h(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{2\pi j f (t - \theta)} h(\theta) d\theta$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{2\pi j f t} e^{-2\pi j f \theta} h(\theta) d\theta$$

$$s(t) = A e^{2\pi j f t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi j f \theta} h(\theta) d\theta$$



$e(t)$        $H(f)$       ← fonction indépendante de  $t$

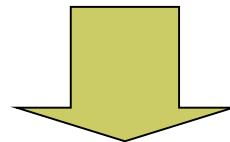
$$s(t) = e(t) \cdot H(f)$$

**H(f)** → fonction de transfert du système

**Exponentielle complexe** → fonction propre pour les systèmes linéaires invariants

**Décomposition des signaux sur une base de fonctions exponentielles complexes**

→ la réponse à ces signaux se calcule alors par un simple produit



## Transformation de Fourier

# Transformée de Fourier

- Définition
- Propriétés
- Transformées des signaux de test
- Transformée de Fourier des signaux à valeur moyenne non nulle

# Joseph Fourier (1768-1830)

- Instruction chez les Bénédictins puis dans une école militaire.
- Participe à la révolution, manquant de peu de se faire guillotiner durant la Terreur et sauvé de justesse par la chute de Robespierre.



- Intègre l'École Normale Supérieure : élève de Joseph-Louis Lagrange et Pierre-Simon Laplace.
- Participe à l'expédition de Napoléon en Égypte en 1798, et occupe un haut poste de diplomate dans ce pays conquis.
- À son retour en France en 1801, nommé par Napoléon préfet de l'Isère.
- conduit à Grenoble ses expériences sur la propagation de la chaleur qui lui permettront de modéliser l'évolution de la température au travers de séries trigonométriques.
- Il entre à l'Académie des Sciences en 1817.

# Définition

$x(t)$  intégrable sur  $\mathbb{R}$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{2\pi j f t} df \quad \xrightarrow{F} \quad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-2\pi j f t} dt$$

$X(f)$  est généralement complexe :

$$X(f) = \mathcal{R}e(X(f)) + j \mathcal{I}m(X(f)) \quad \text{avec}$$

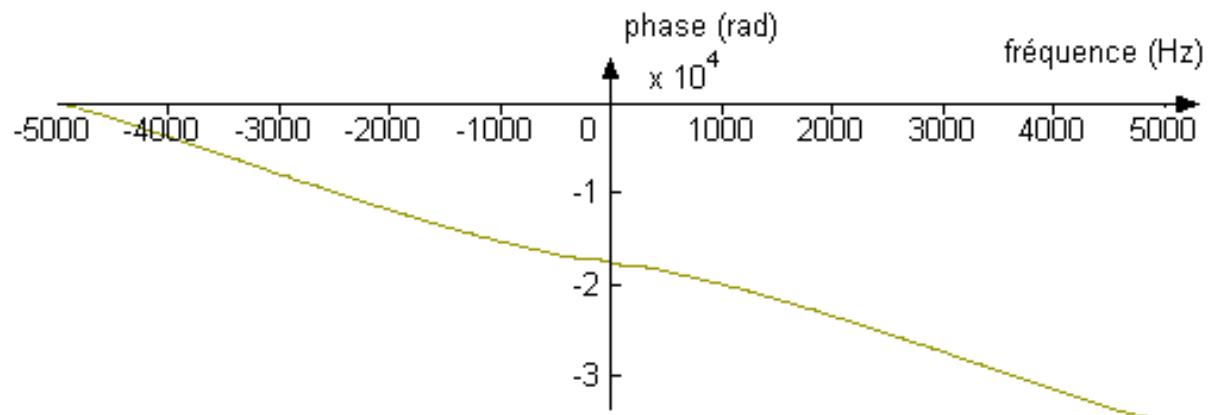
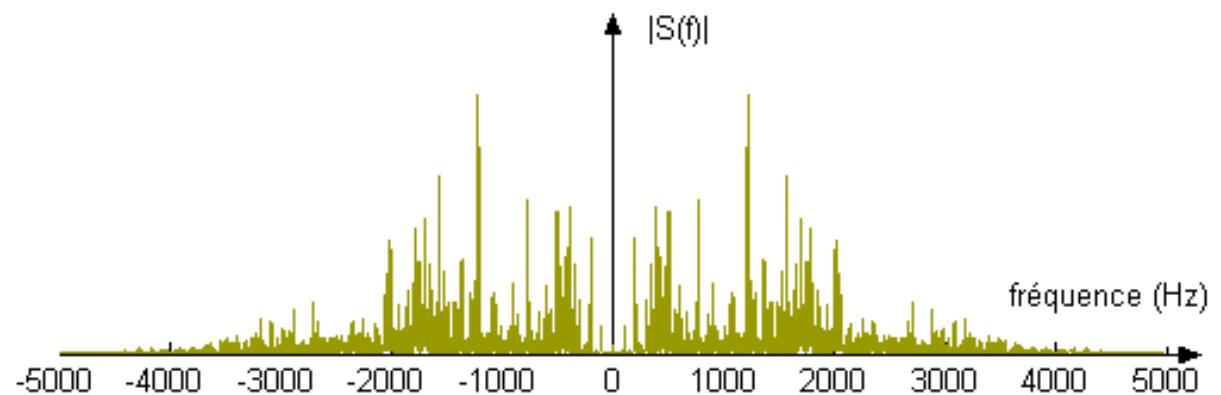
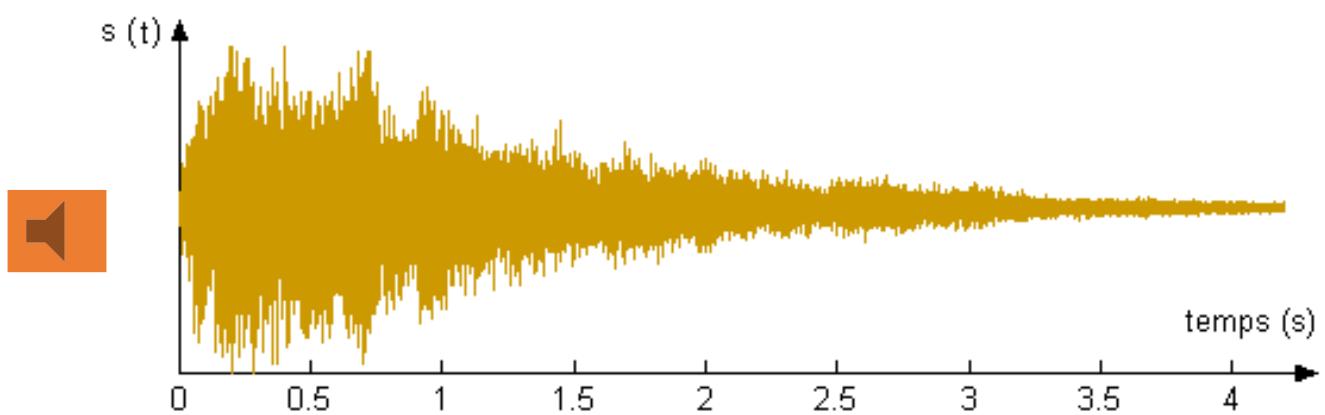
$$\begin{cases} \mathcal{R}e(X(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt \\ \mathcal{I}m(X(f)) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt \end{cases}$$

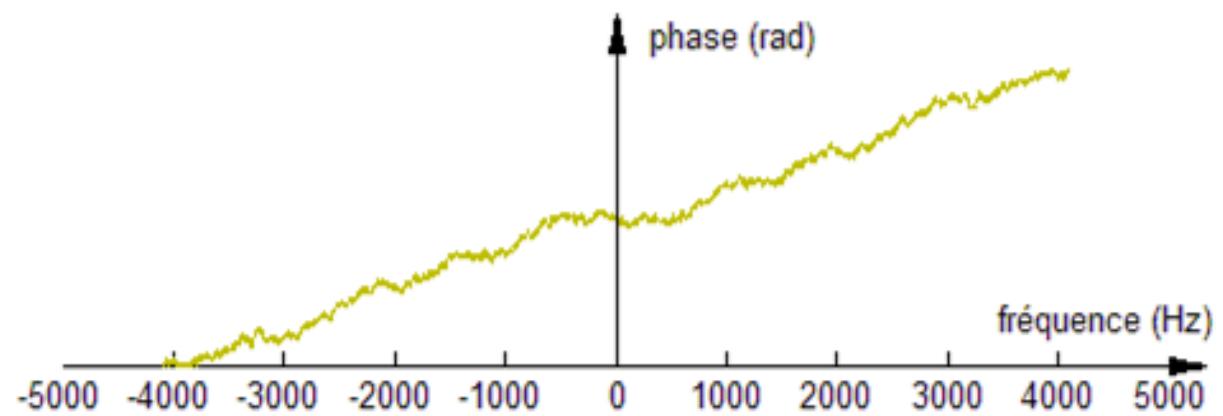
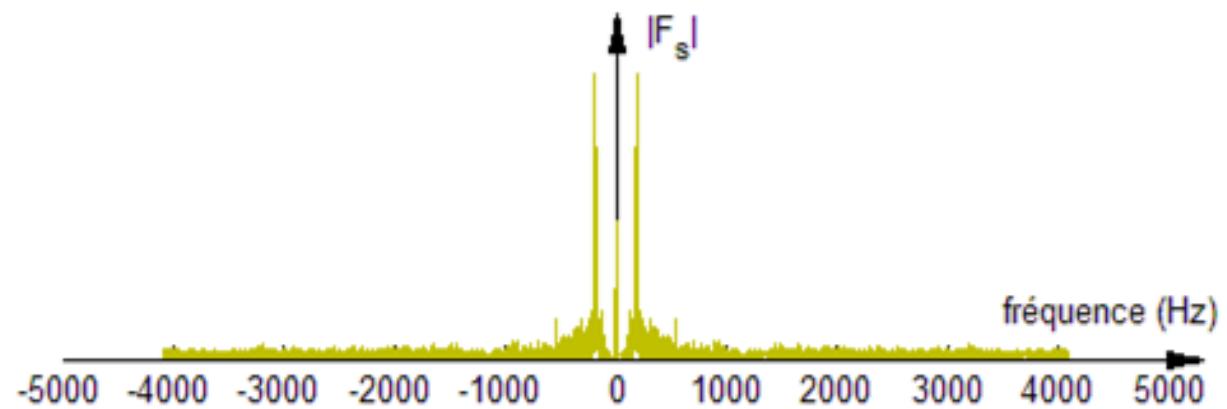
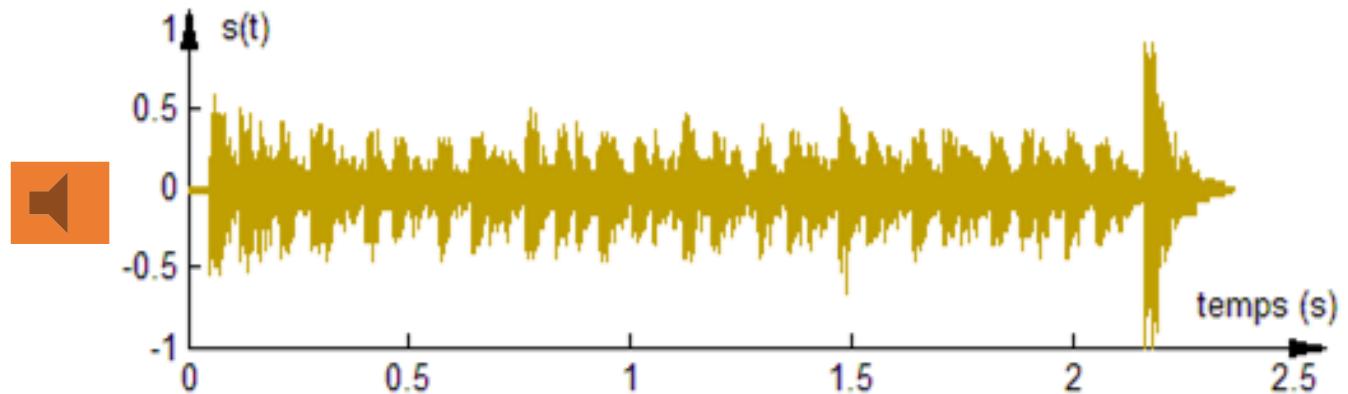
on considère aussi spectre d'amplitude et spectre de phase

$$X(f) = |X(f)| \cdot e^{j\varphi(f)}$$

avec

$$\begin{cases} |X(f)| = \sqrt{\mathcal{R}e(X(f))^2 + \mathcal{I}m(X(f))^2} \\ \varphi(f) = \arctg \left( \frac{\mathcal{I}m(X(f))}{\mathcal{R}e(X(f))} \right) \end{cases}$$





- Propriétés

- Linéarité

$$x_1(t) + x_2(t) \xrightarrow{F} X_1(f) + X_2(f)$$

$$\xleftarrow{F^{-1}}$$

- Symétrie

$$x(-t) \xrightarrow{F} X(-f)$$

$$\xleftarrow{F^{-1}}$$

- Changement d'échelle

$$x(at) \xrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X(\frac{f}{a})$$

$$\xleftarrow{F^{-1}}$$

## ■ Conjugaison

$$x^*(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-f)$$
$$\xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$

## ■ Dualité

$$X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(-f)$$
$$\xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$

## ■ Translation

$$x(t - \theta) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-2\pi j f \theta} X(f)$$
$$\xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$

$$e^{2\pi j f_0 t} x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f - f_0)$$
$$\xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$

## ■ Modulation temporelle

$$x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} [X(f - f_0) + X(f + f_0)]$$
$$\xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$

$$x(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{-j}{2} [X(f - f_0) - X(f + f_0)]$$
$$\xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$

## Dérivation

$$\begin{array}{ccc} \frac{dx(t)}{dt} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & 2\pi j f \cdot X(f) \\ & \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} & \\ \frac{d^n x(t)}{dt^n} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & (2\pi j f)^n \cdot X(f) \\ & \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} & \\ t \cdot x(t) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -\frac{1}{2\pi j} \frac{dX(f)}{df} \\ & \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} & \end{array}$$

## Convolution

$$\begin{array}{ccc} x(t) * y(t) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & X(f) \cdot Y(f) \\ & \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} & \\ x(t) \cdot y(t) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & X(f) * Y(f) \\ & \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} & \end{array}$$

## ■ Parité

$x(t)$  réelle paire

$$\xrightarrow{F} \xleftarrow{F^{-1}}$$

$X(f)$  réelle paire

$x(t)$  réelle impaire

$$\xrightarrow{F} \xleftarrow{F^{-1}}$$

$X(f)$  imaginaire impaire

$x(t)$  imaginaire paire

$$\xrightarrow{F} \xleftarrow{F^{-1}}$$

$X(f)$  imaginaire paire

$x(t)$  imaginaire impaire

$$\xrightarrow{F} \xleftarrow{F^{-1}}$$

$X(f)$  réelle impaire

## ■ Valeur initiale

$$x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f).df$$

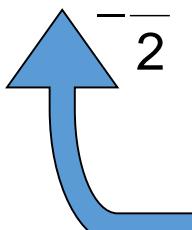
$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).dt$$

- Fonctions périodiques ( $\rightarrow$  séries de Fourier)

$x(t)$  périodique de période  $T=1/f_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{2\pi j n f_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \cdot \delta(f - n f_0) \\ \text{avec } C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-2\pi j n f_0 t} dt \end{array} \right.$$

$\xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}}$

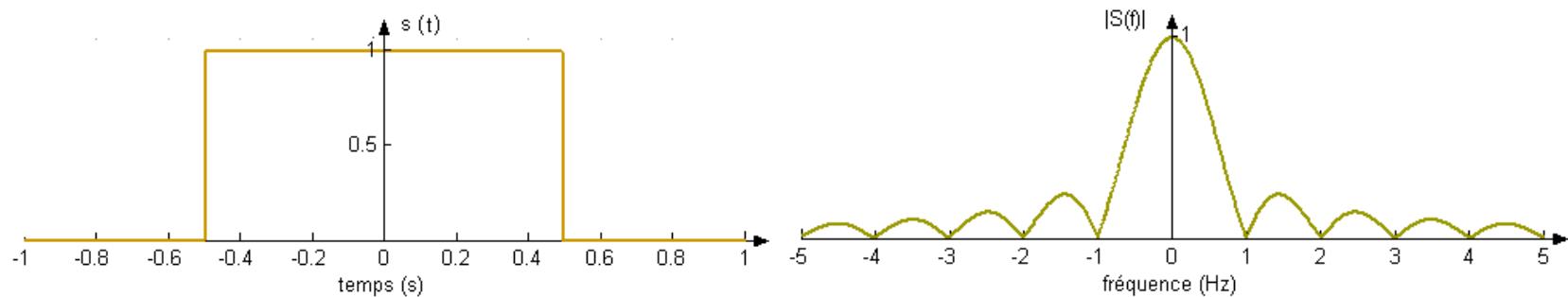


facteur  $1/T$  par rapport à la transformée de Fourier des signaux d'énergie finie

# Transformées des fonctions usuelles

- porte unité

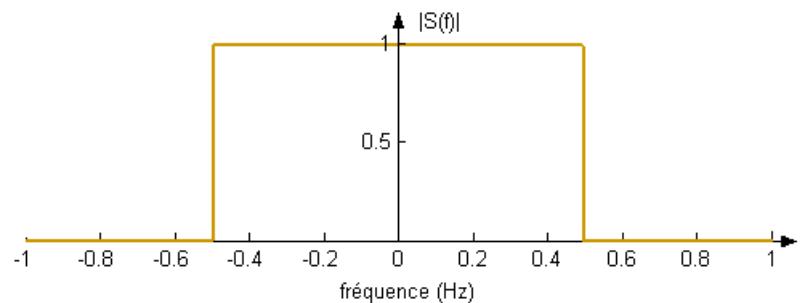
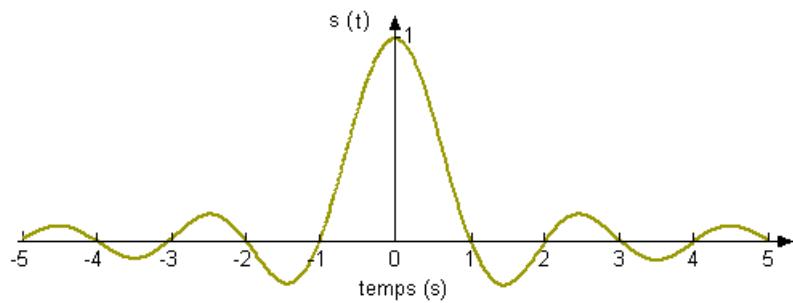
$$\Pi(t) \xrightarrow{F} \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = \text{sinc}(f)$$
$$\xleftarrow{F^{-1}}$$



# Transformées des fonctions usuelles

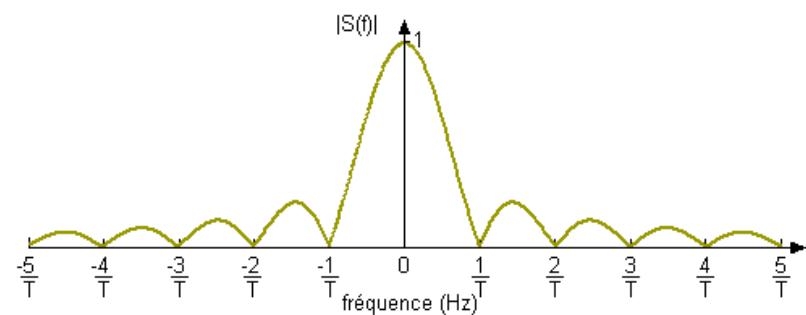
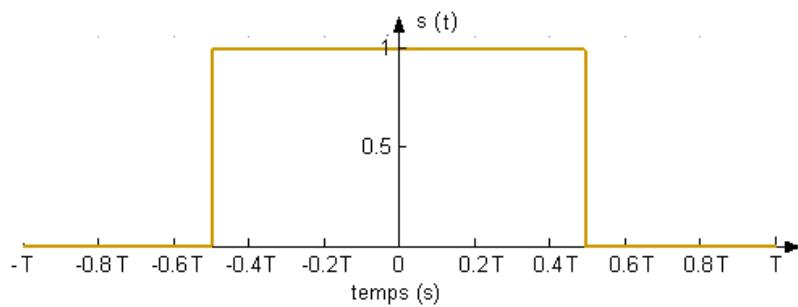
- Sinus cardinal

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \Pi(f) \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$



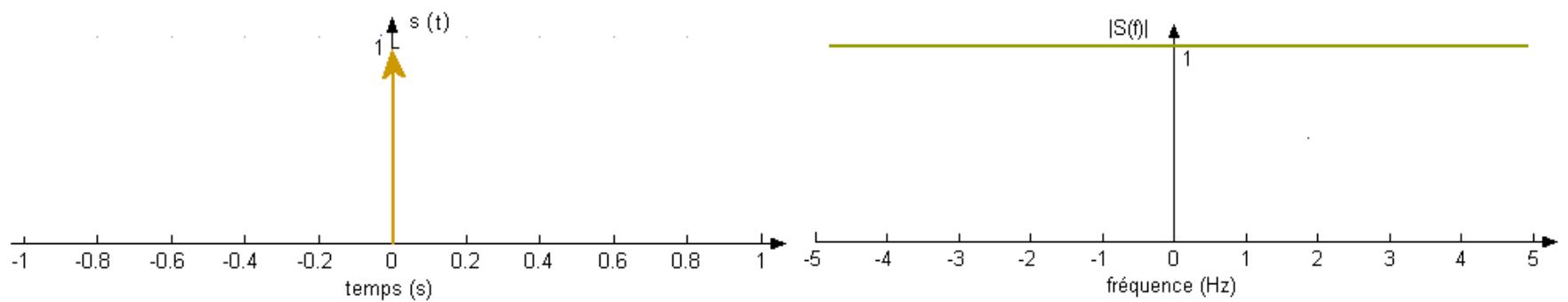
- porte de largeur  $T$

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow[F]{F^{-1}} T \frac{\sin(\pi Tf)}{\pi Tf} = T \cdot \text{sinc}(Tf)$$



- Impulsion de Dirac

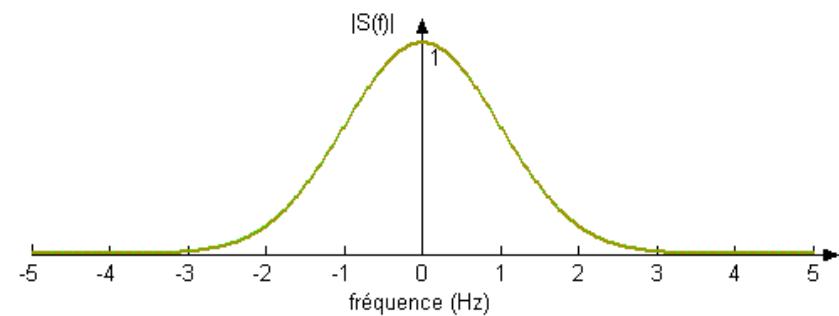
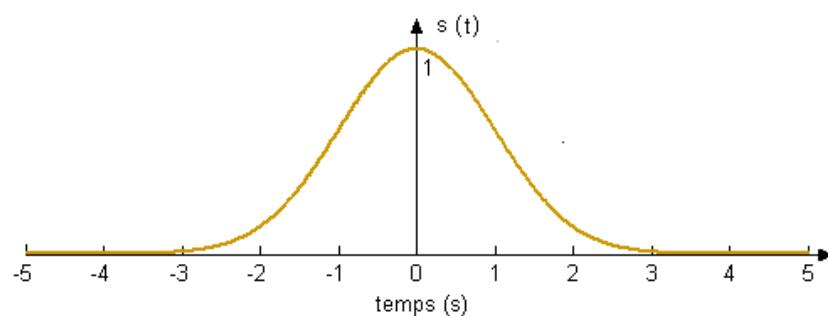
$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \quad \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$



- Gaussienne

$$e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\pi f^2}$$

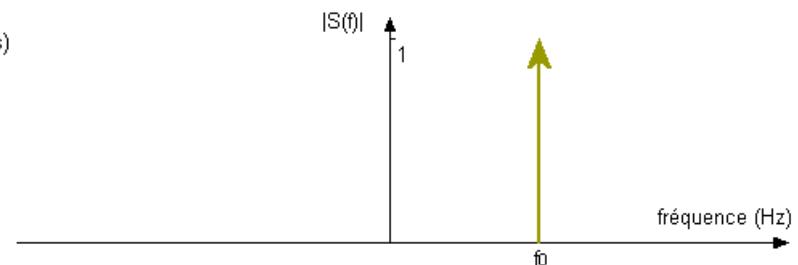
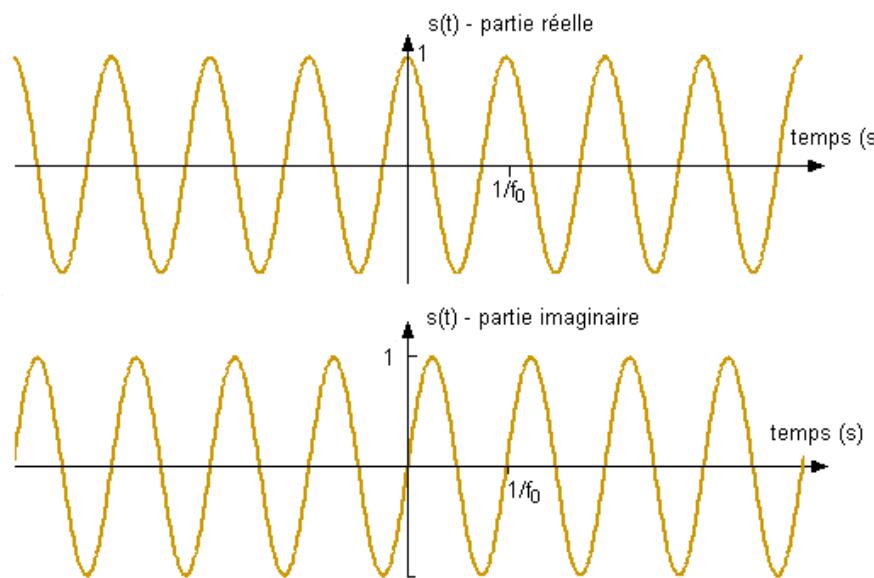
$$\xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$



## • Exponentielle complexe

$$e^{2\pi j f_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta(f - f_0)$$

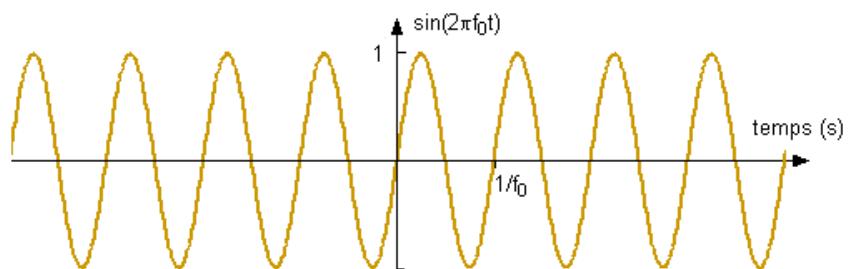
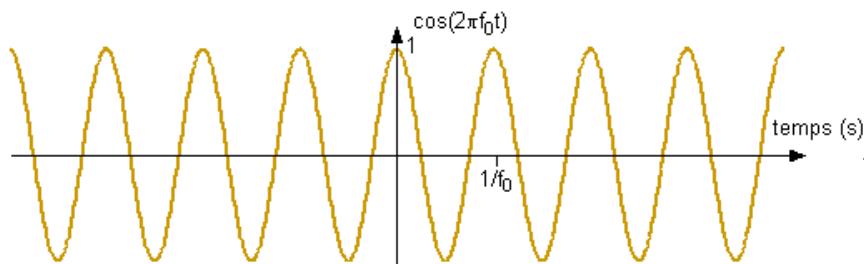
$$\xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$



## • Fonctions harmoniques

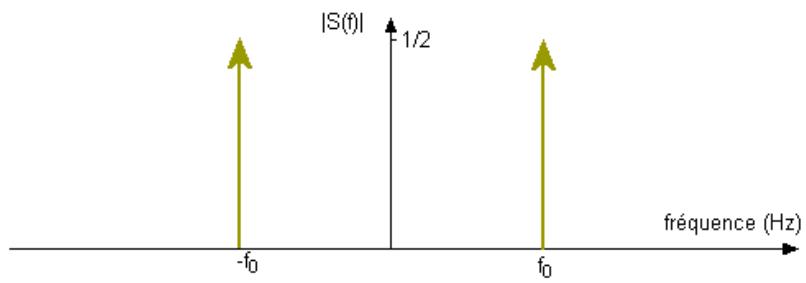
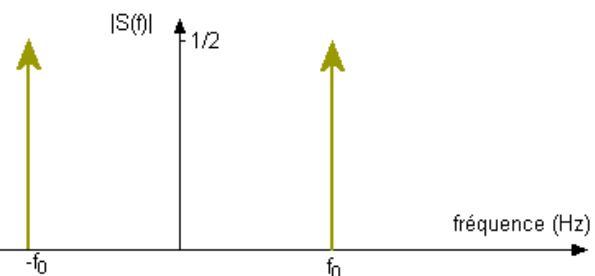
$$\cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$



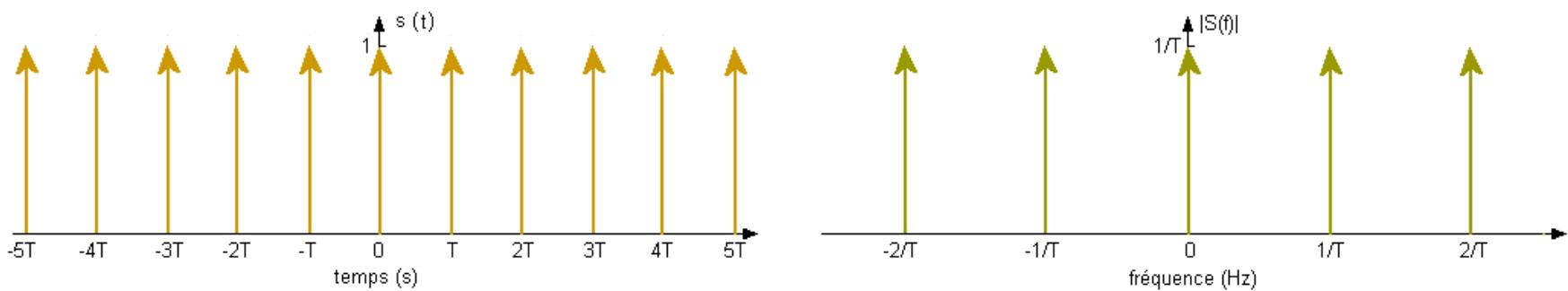
$$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$\frac{-j}{2} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$



## • Peigne de Dirac

$$\underline{\Pi}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{T} \underline{\Pi}_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T})$$



# Transformée de Fourier des signaux à valeur moyenne non nulle

Les signaux de puissance finie ne satisfont pas les critères de convergence de la TF  
 $x(t) = x_0(t) + \bar{x}$       avec     $\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t).dt$

$$X(f) = X_0(f) + \bar{x} \cdot \delta(f)$$

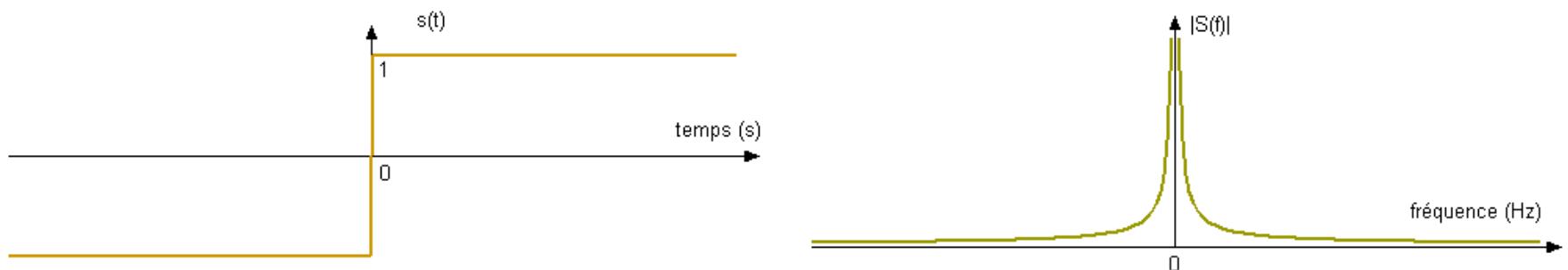
Or       $\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx_0(t)}{dt}$       et       $\mathcal{F}\left[\frac{dx_0(t)}{dt}\right] = 2\pi j f \cdot X_0(f)$



$$X(f) = \frac{1}{2\pi j f} \mathcal{F}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] + \bar{x} \cdot \delta(f)$$

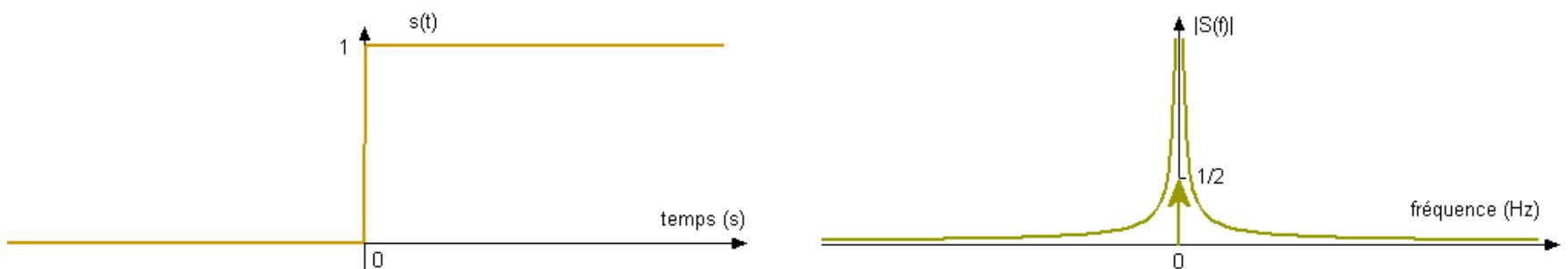
- Application: fonction signe

$$\text{sgn}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{-j}{\pi f}$$
$$\xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$



- Application: échelon unité

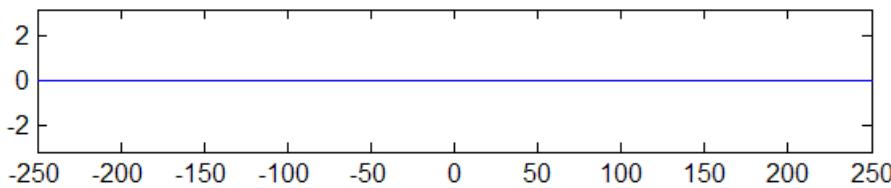
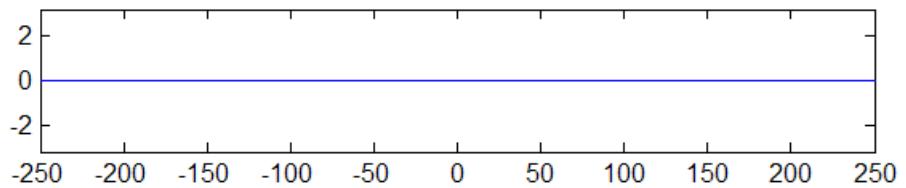
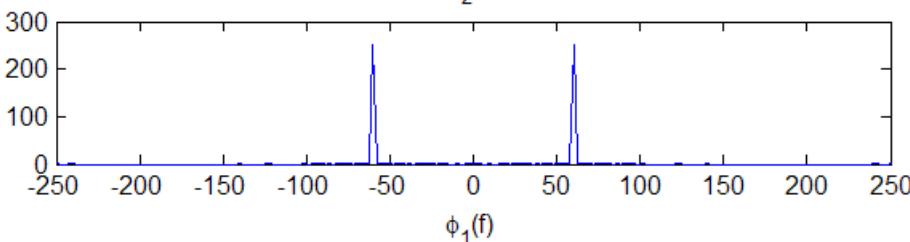
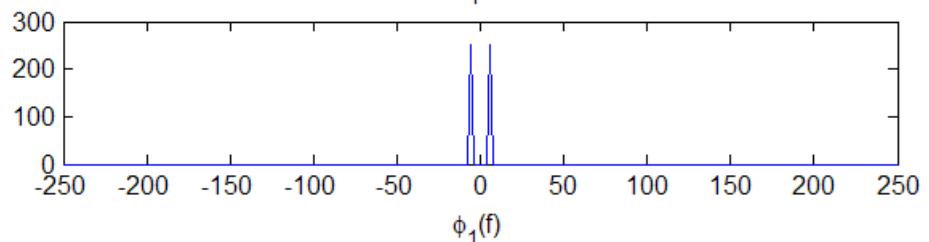
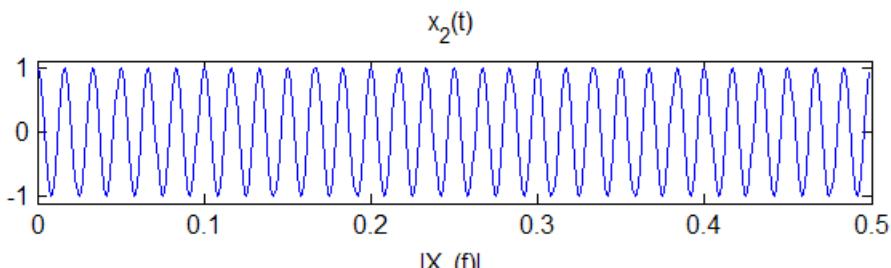
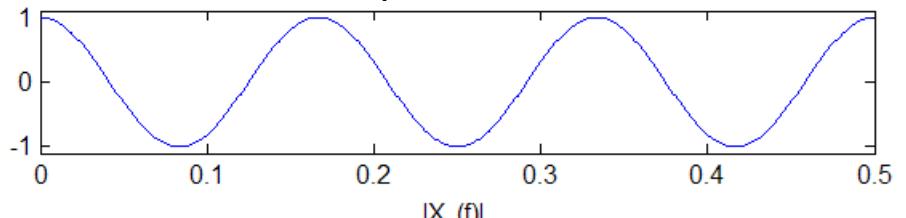
$$u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{-j}{2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f)$$



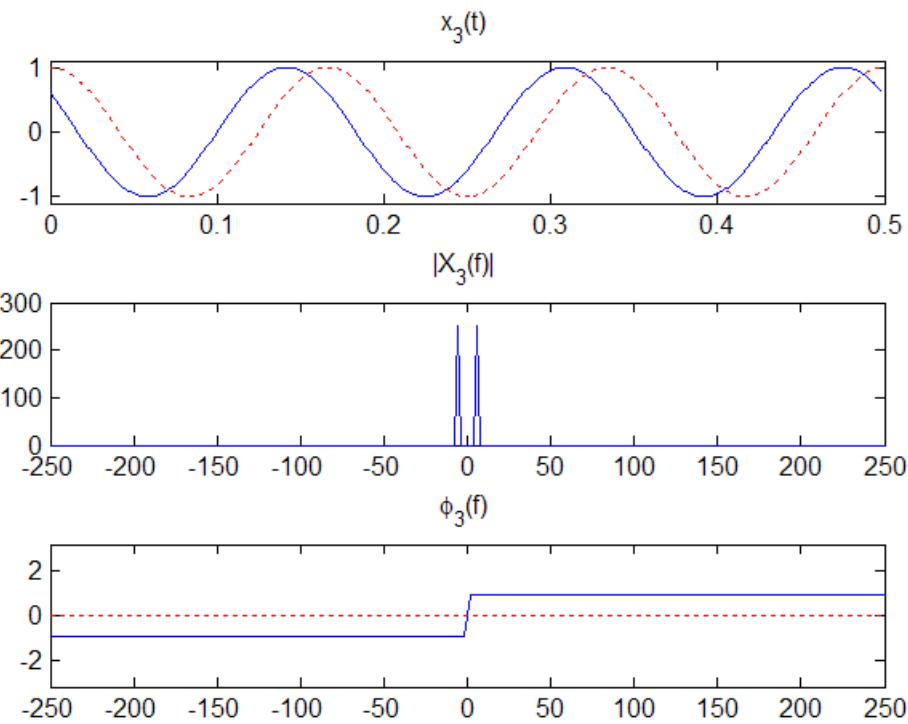
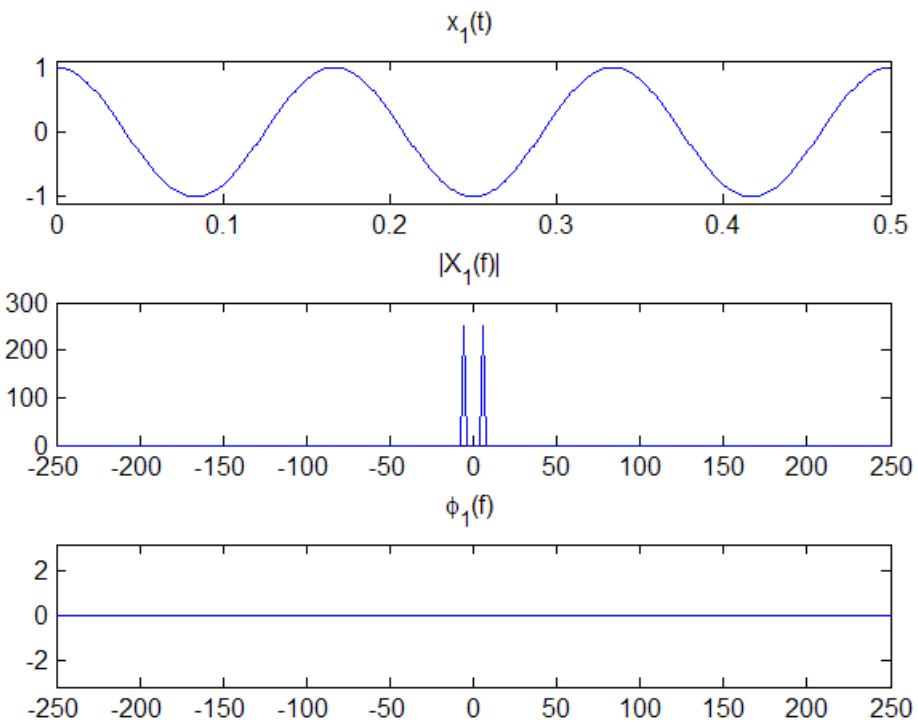
# Interprétation de la transformée de Fourier

- Fréquence

→ Rapidité des variations



- Phase  
→localisation



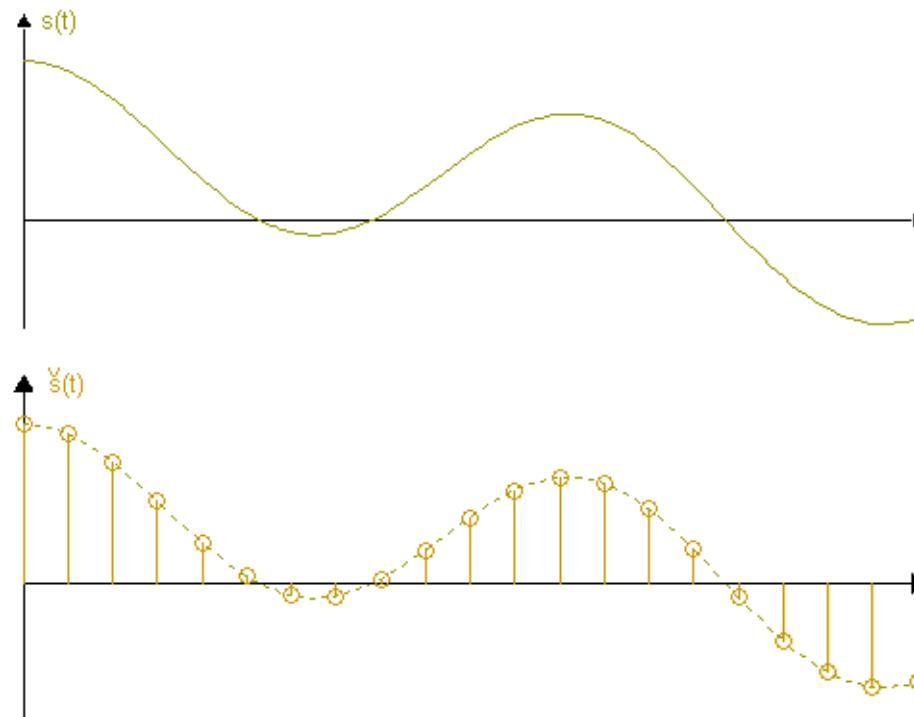
# Echantillonnage

- Echantillonnage et repliement spectral
- Filtres anti-repliement
- Restitution
- Echantillonnage fréquentiel

# Echantillonnage

- Hypothèse

- Echantillonnage idéal  $\rightarrow$  durées d'observation infiniment brèves



Echantillonnage à la fréquence  $F_e = 1/T_e \Leftrightarrow$  multiplication du signal par un peigne de Dirac

- Signal échantillonné :  $\check{s}(t)$

$$\check{s}(t) = s(t) \cdot \underline{\underline{1}}_{T_e}(t)$$

$$\check{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \delta(t - kT_e)$$

- En fréquence

$$\check{S}(f) = S(f) * \frac{1}{T_e} \underline{\underline{1}}_{T_e}(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S(f) * \delta(f - \frac{m}{T_e}) = \frac{1}{T_e} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S(f - \frac{m}{T_e})$$

→ on observe une périodisation du spectre du signal

$$\check{S}(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} S(f - \frac{m}{T_e})$$

• **hypothèse :**

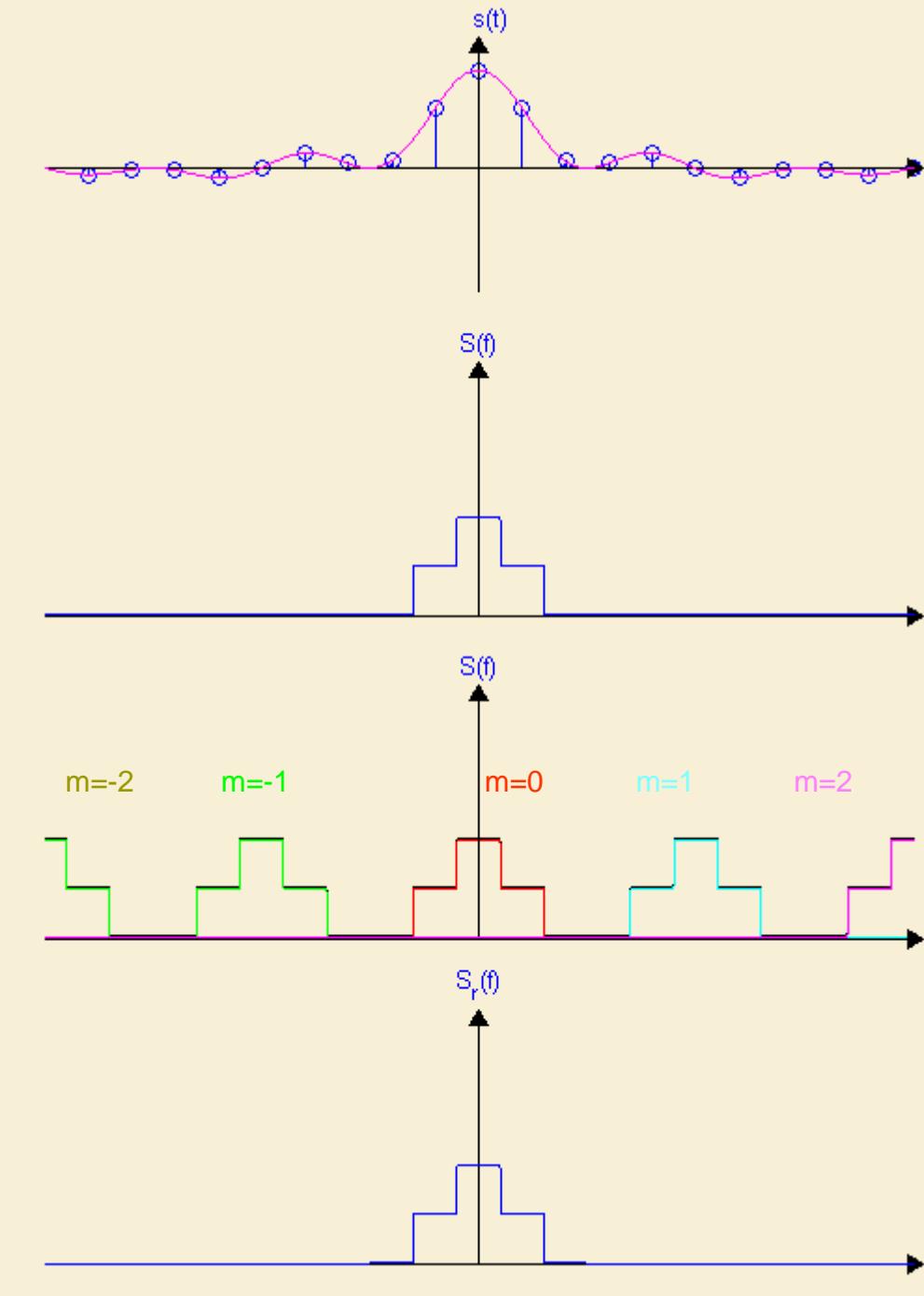
$S(f)$  est nul pour  $|f| > F_M$

→  $s(t)$  est un signal à bande limitée

si  $F_e > 2 F_M$

→ pas de déformation du spectre

→ pas de perte d'information

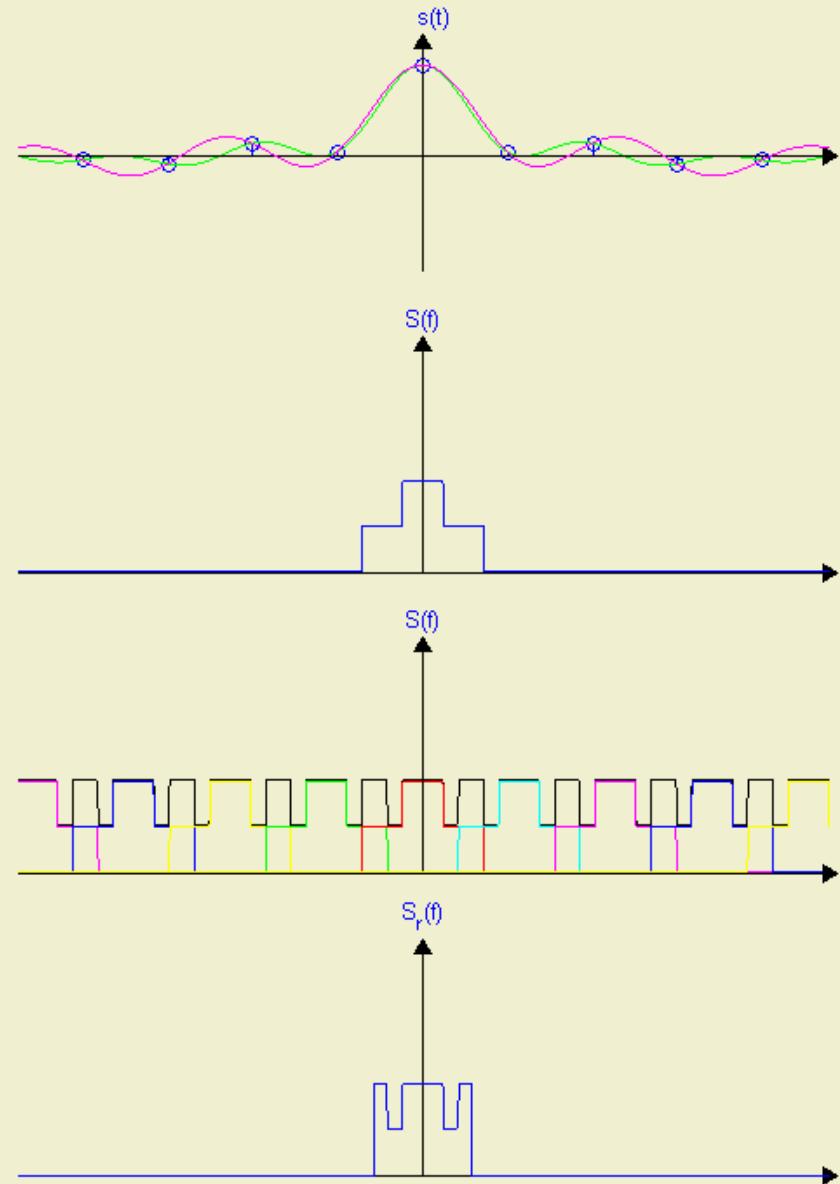


si  $F_e < 2 F_M$

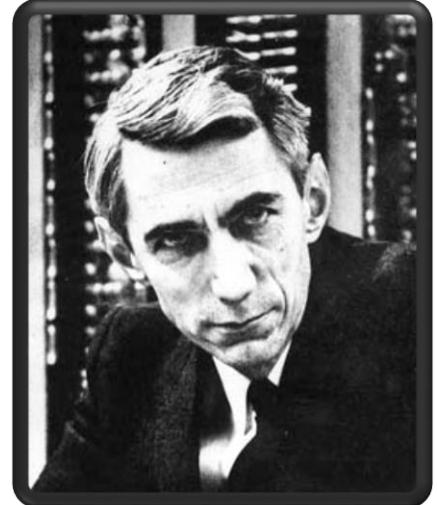
- superposition des différentes répliques
- distorsion
- **repliement spectral ou "aliasing"**



L'échantillonnage est non réversible,  
on ne peut retrouver le signal initial



- Théorème de Shannon  
(1949)

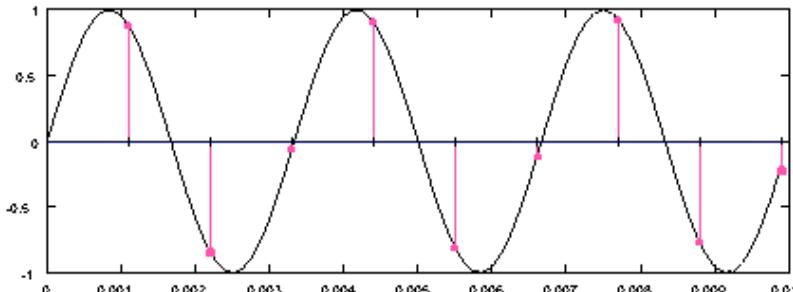


Claude Elwood Shannon  
1916 - 2001

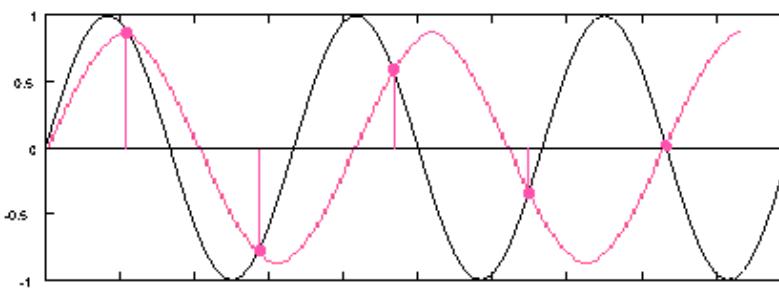
Pour que l'échantillonnage ne déforme pas le spectre du signal, il faut que la fréquence d'échantillonnage  $F_e$  soit supérieure à deux fois la fréquence maximale contenue dans le signal, soit :

$$F_e > 2 F_M$$

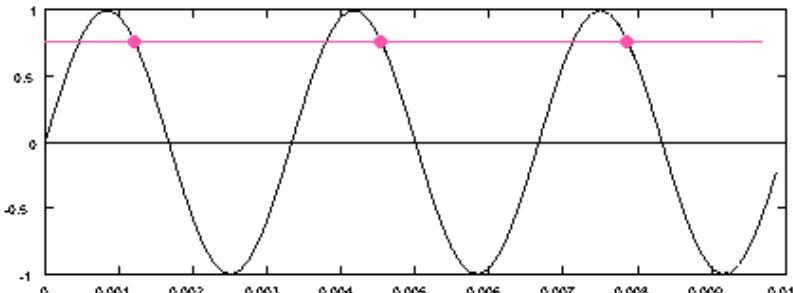
# Exemples de distorsions dues au repliement spectral



Echantillonnage correct

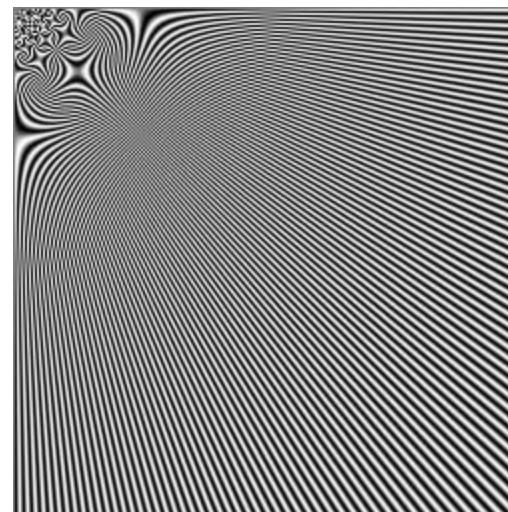
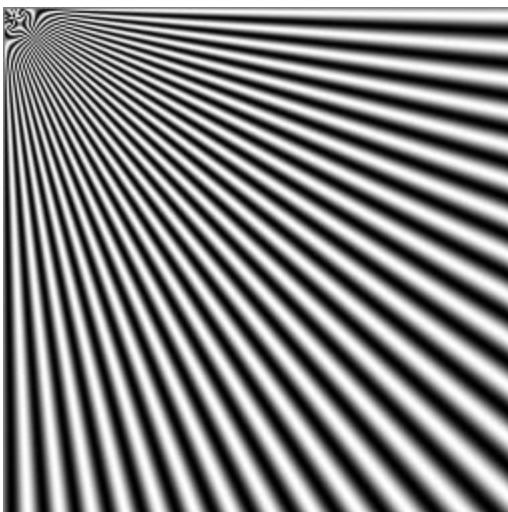
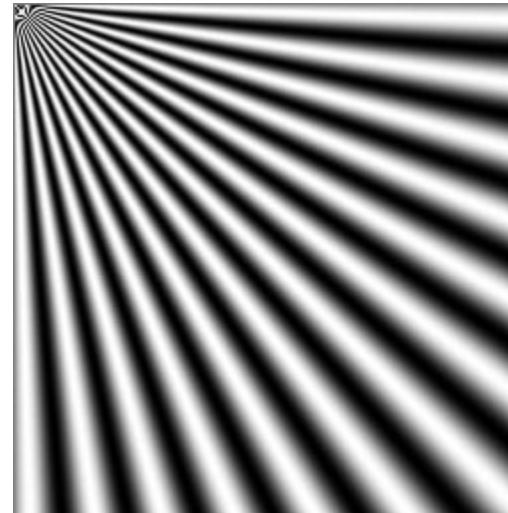
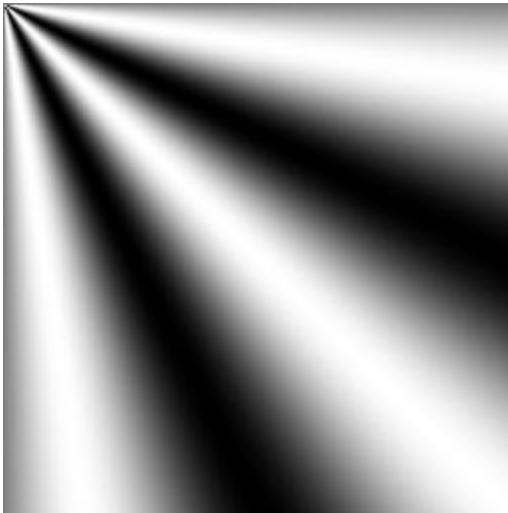


Echantillonnage avec distorsion



Cas particulier  $F_e = f_0$

## Exemples de distorsions dues au repliement spectral en 2D : effets de Moiré



# Exemples de distorsions dues au repliement spectral



Sous-  
échantillonnage



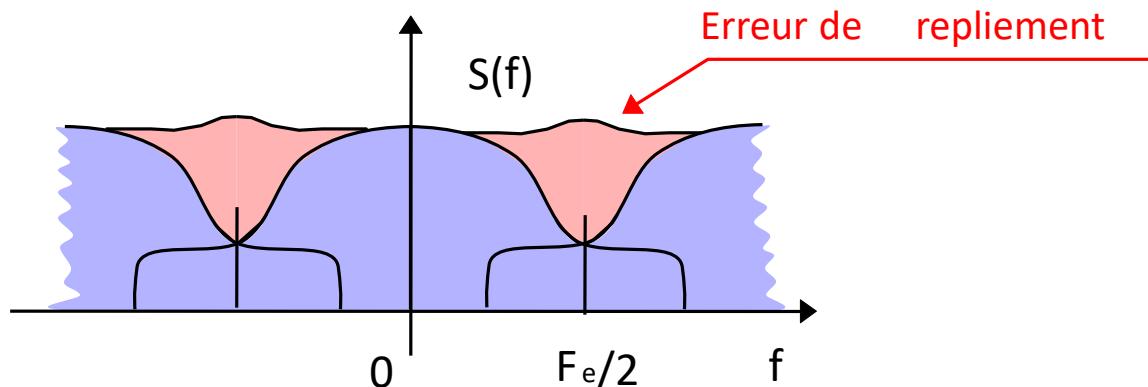
# Filtres anti-repliement

## *Remarques*

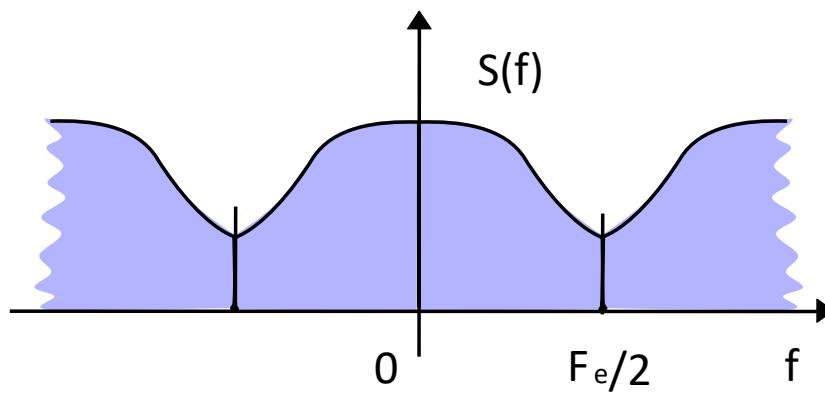
- la bande passante du signal à échantillonner n'est pas toujours connue a priori
- le signal contient souvent un bruit large bande

→ il est prudent de filtrer le signal avant sa numérisation.

- Échantillonnage sans filtre anti-repliement



- Échantillonnage avec préfiltrage

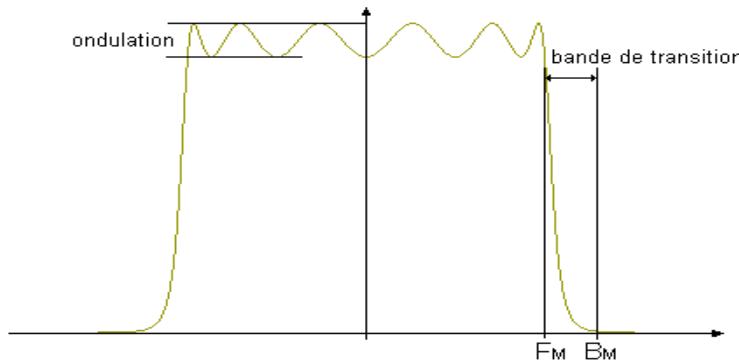


## • Filtre anti-repliement idéal

$$\Pi\left(\frac{f}{F_e}\right) \rightarrow \text{réponse impulsionnelle } F_e \text{sinc}(t \cdot F_e)$$

$\rightarrow$  irréalisable : non causal

## • Filtre réel



Il faudra donc échantillonner au minimum à  $F_e = 2 \cdot B_M > 2F_M$

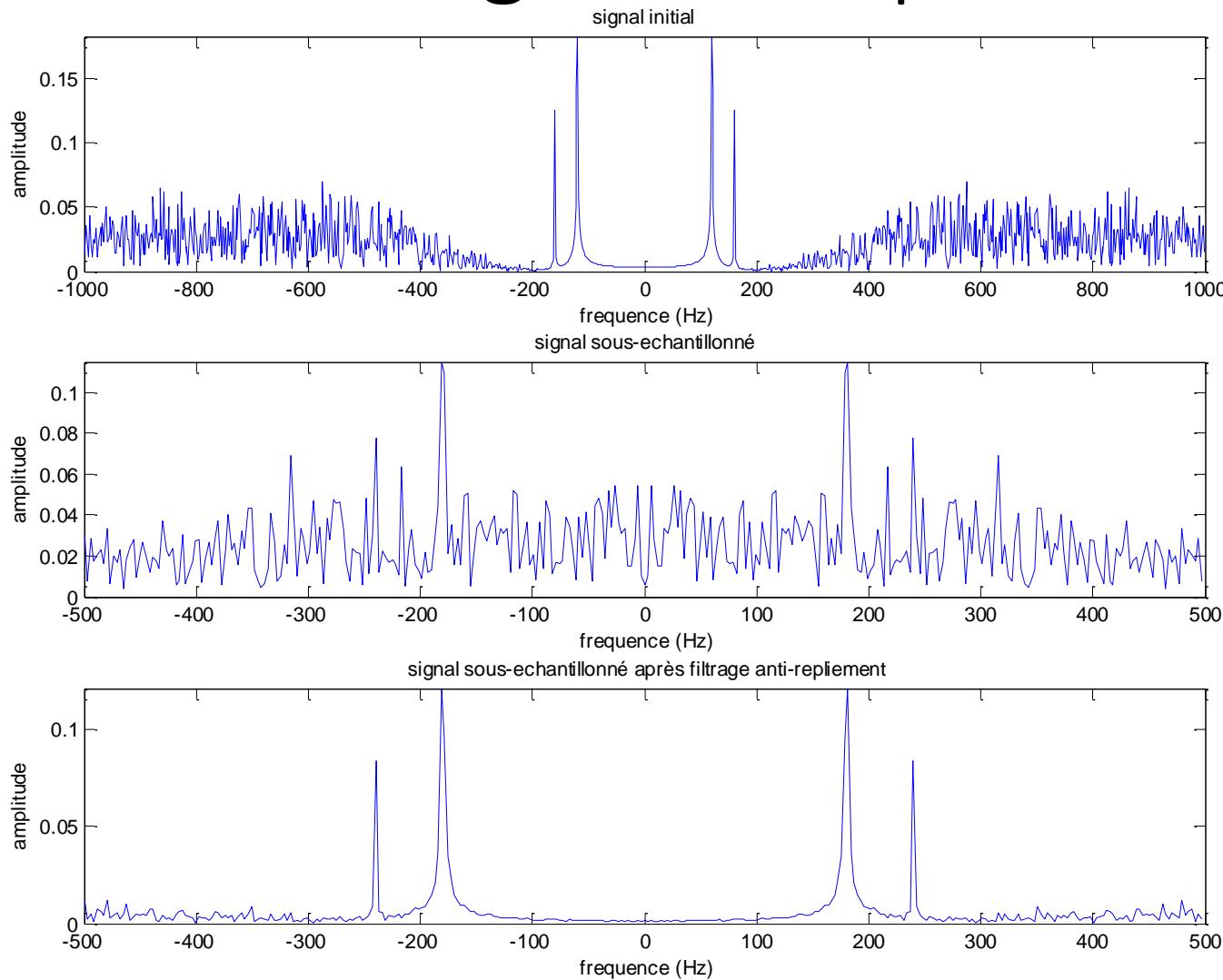
La largeur de la bande de transition dépend du choix du filtre

**Critères :**

- ondulation résiduelle dans la bande passante,
- largeur de la bande de transition,
- atténuation en dehors de la bande passante.

$\rightarrow$  filtres de Butterworth, Tchebycheff, filtres elliptiques de Cauer...

# Effets du filtrage anti-repliement



# Effets du filtrage anti-repliement



sous-échantillonnage sans préfiltrage



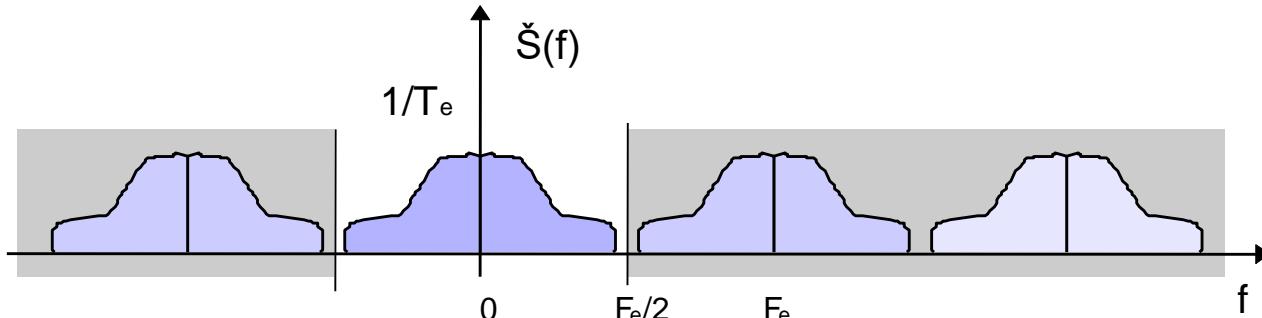
sous-échantillonnage avec préfiltrage

# Restitution

*Hypothèse* : échantillonnage sans repliement

On multiplie  $\check{S}(f)$  par le filtre passe-bas idéal  $\rightarrow$  on retrouve

$$\frac{1}{T_e} S(f)$$



$$\frac{1}{T_e} S(f) = \hat{S}(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{F_e}\right)$$

$$S(f) = \frac{1}{F_e} \hat{S}(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{F_e}\right)$$

- En temporel :

$$s(t) = \frac{1}{F_e} \check{s}(t) * F_e \cdot \text{sinc}(t \cdot F_e)$$

Or, le signal est échantillonné pour  $t = kT_e = \frac{k}{F_e}$ , donc

$$\check{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s\left(\frac{k}{F_e}\right) \cdot \delta\left(t - \frac{k}{F_e}\right)$$

donc

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s\left(\frac{k}{F_e}\right) \cdot \delta\left(t - \frac{k}{F_e}\right) * \text{sinc}(t \cdot F_e)$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s\left(\frac{k}{F_e}\right) \cdot \text{sinc}\left[F_e \cdot \left(t - \frac{k}{F_e}\right)\right]$$

Formule d'interpolation de Shannon

- inapplicable en pratique  
correspond à un filtre de restitution dont la réponse impulsionnelle est :

$$\text{sinc}\left[F_e \cdot \left(t - \frac{k}{F_e}\right)\right]$$

→ restitution avec des filtres dont la réponse impulsionnelle est limitée dans le temps.

### Valeurs du signal entre $kT_e$ et $(k+1)T_e$

- à partir de l'échantillon  $kT_e$  et des  $m$  échantillons précédents  
→ extrapolateur d'ordre  $m$
- à partir de  $m+1$  échantillons dont certains sont postérieurs à l'instant  $kT_e$  → interpolateur d'ordre  $m$  (non causal)

- Restitution par opérateur linéaire

Le filtre cardinal idéal est remplacé par un filtre passe-bas appelé filtre de lissage.

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \bar{s}\left(\frac{k}{F_e}\right) \cdot g\left(t - \frac{k}{F_e}\right)$$

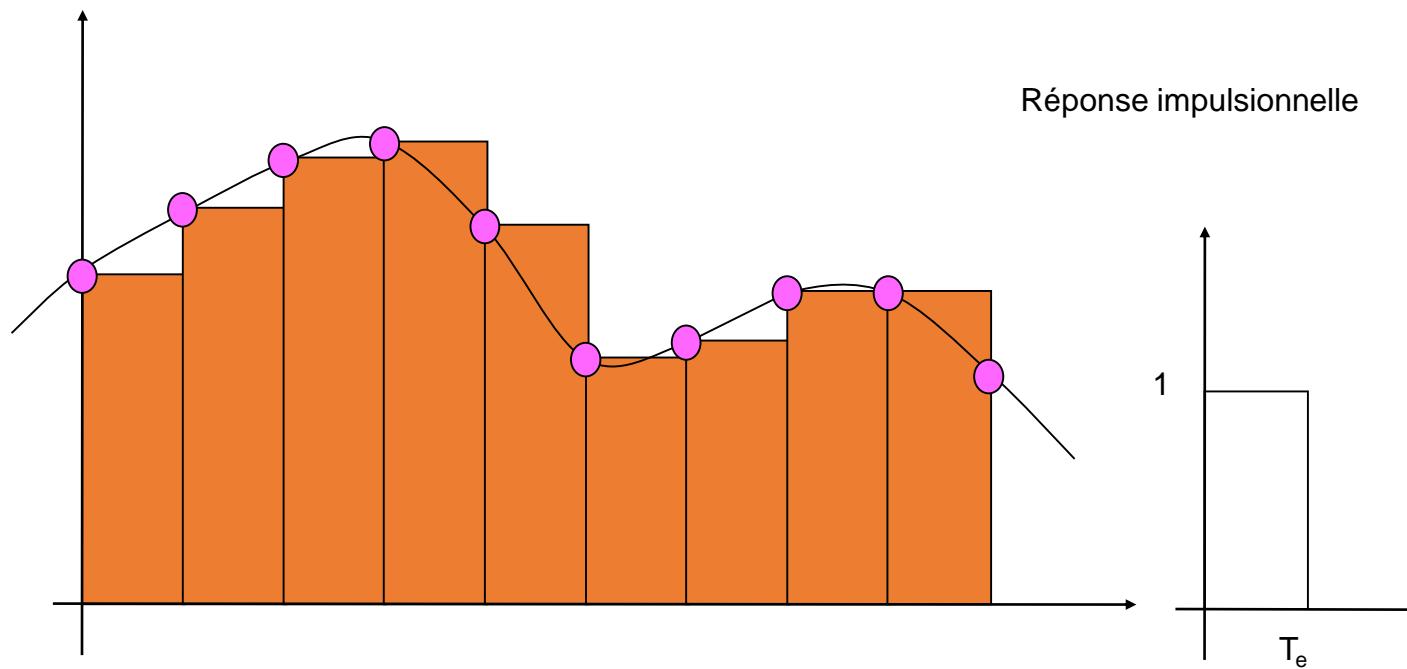
avec  $g(t)$ : réponse impulsionnelle du filtre de restitution

- Restitution par approximation polynomiale

On approche le signal par un polynôme de degré  $m$  passant par  $m+1$  échantillons (méthode de Lagrange).

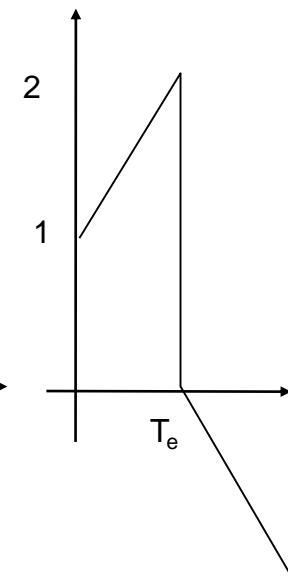
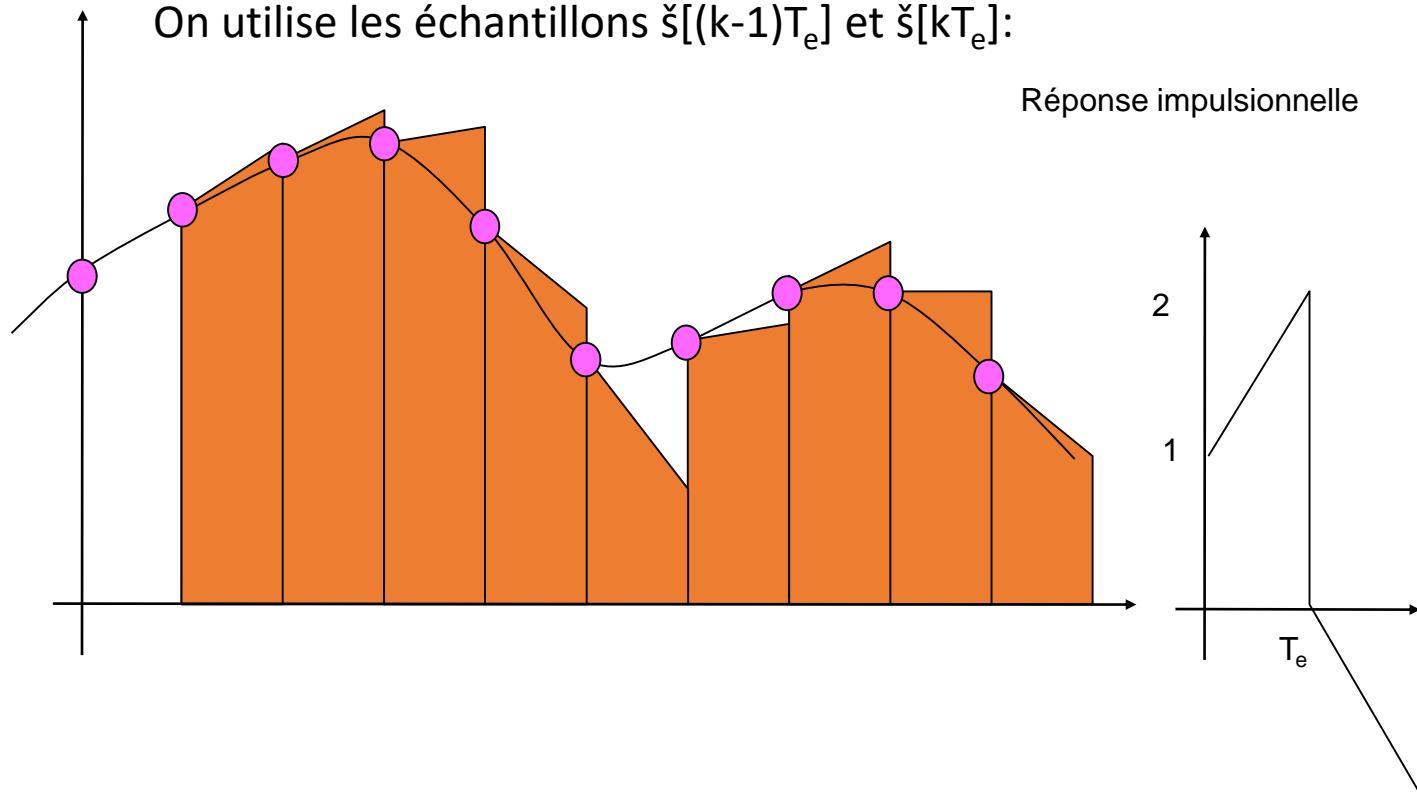
# Exemples

- extrapolateur d'ordre 0



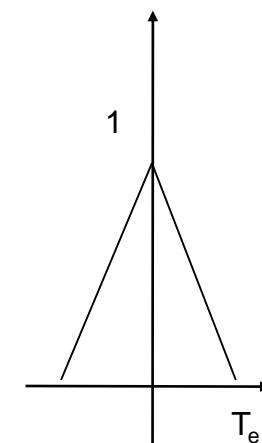
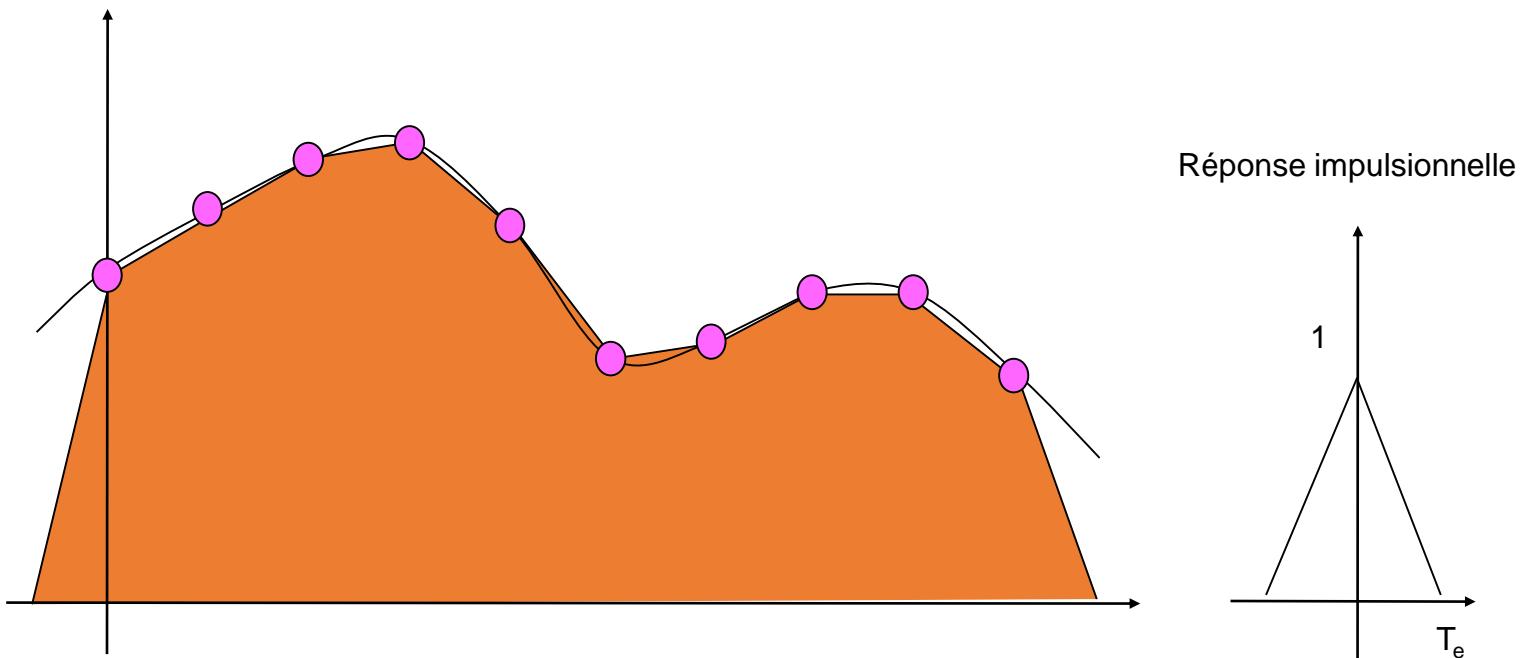
- extrapolateur d'ordre 1

On utilise les échantillons  $\check{s}[(k-1)T_e]$  et  $\check{s}[kT_e]$ :



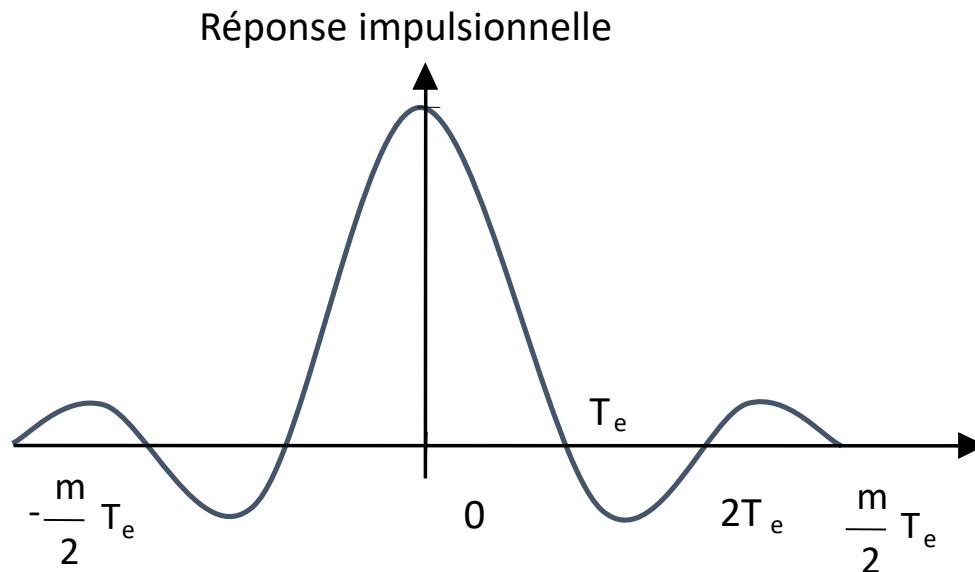
- interpolateur d'ordre 1

On utilise les échantillons  $\check{s}[kT_e]$  et  $\check{s}[(k+1)T_e]$ :



- version tronquée de l'interpolateur idéal

On utilise les échantillons  $s[(k - m/2)T_e]$  à  $s[(k+m/2)T_e]$ :



# Restitution et filtrage anti-repliement

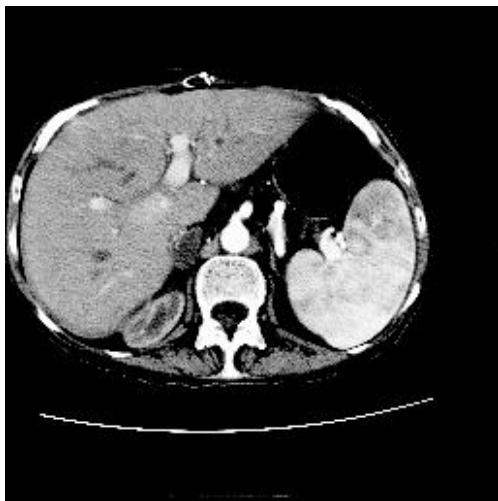
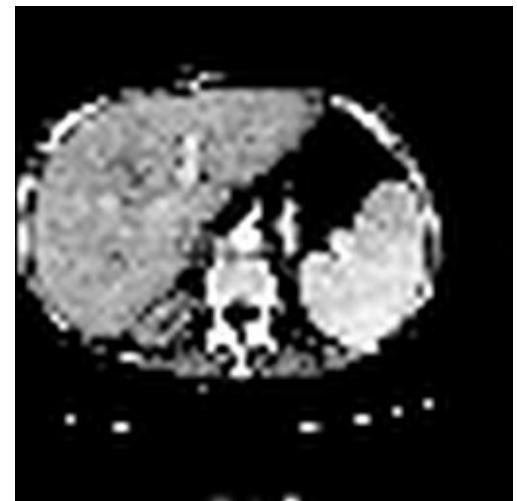


image initiale



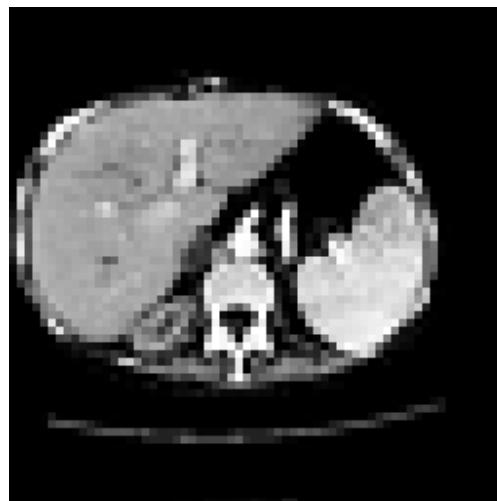
sous-échantillonnage sans préfiltrage  
(zoom)



restitution par spline cubique



préfiltrage anti-repliement



sous-échantillonnage avec préfiltrage  
(zoom)



restitution par spline cubique

# Echantillonnage du spectre d'un signal

$x(t)$  signal  $\rightarrow X(f)$  spectre

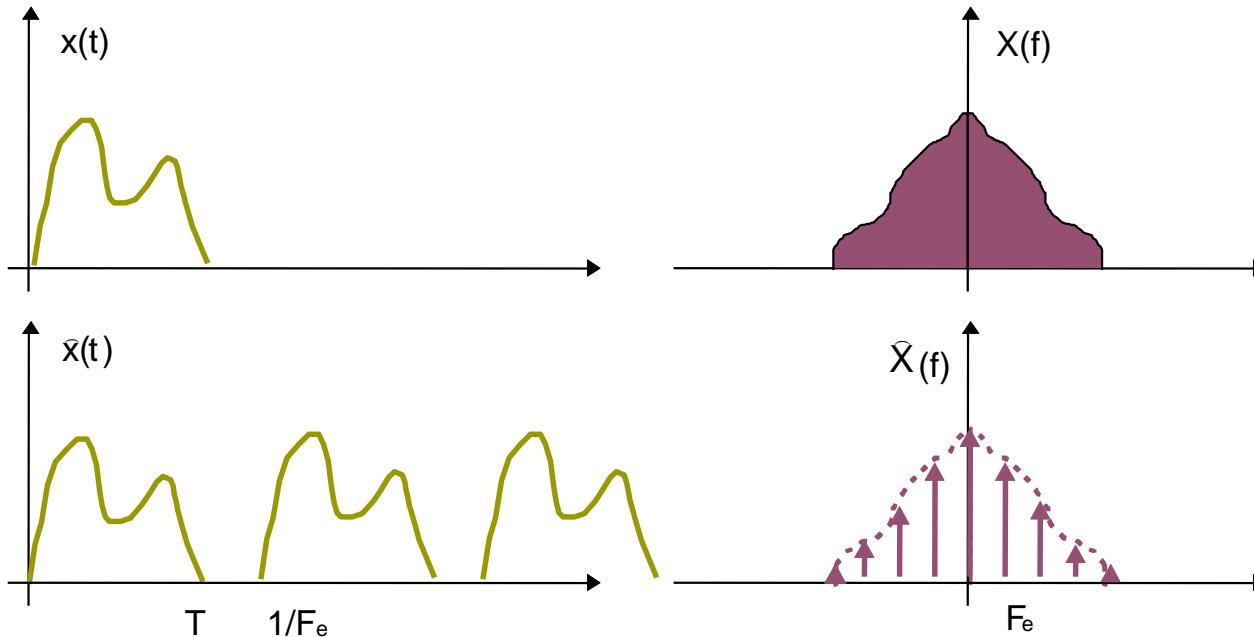
- Echantillonnage fréquentiel de  $X(f)$

$$\breve{X}(f) = X(f) \cdot F_e \cdot \underline{\mathbb{I}}|_{F_e}(f)$$

- conséquence sur le signal:

$$\breve{x}(t) = x(t) * \underline{\mathbb{I}}|_{\frac{1}{F_e}}(t)$$

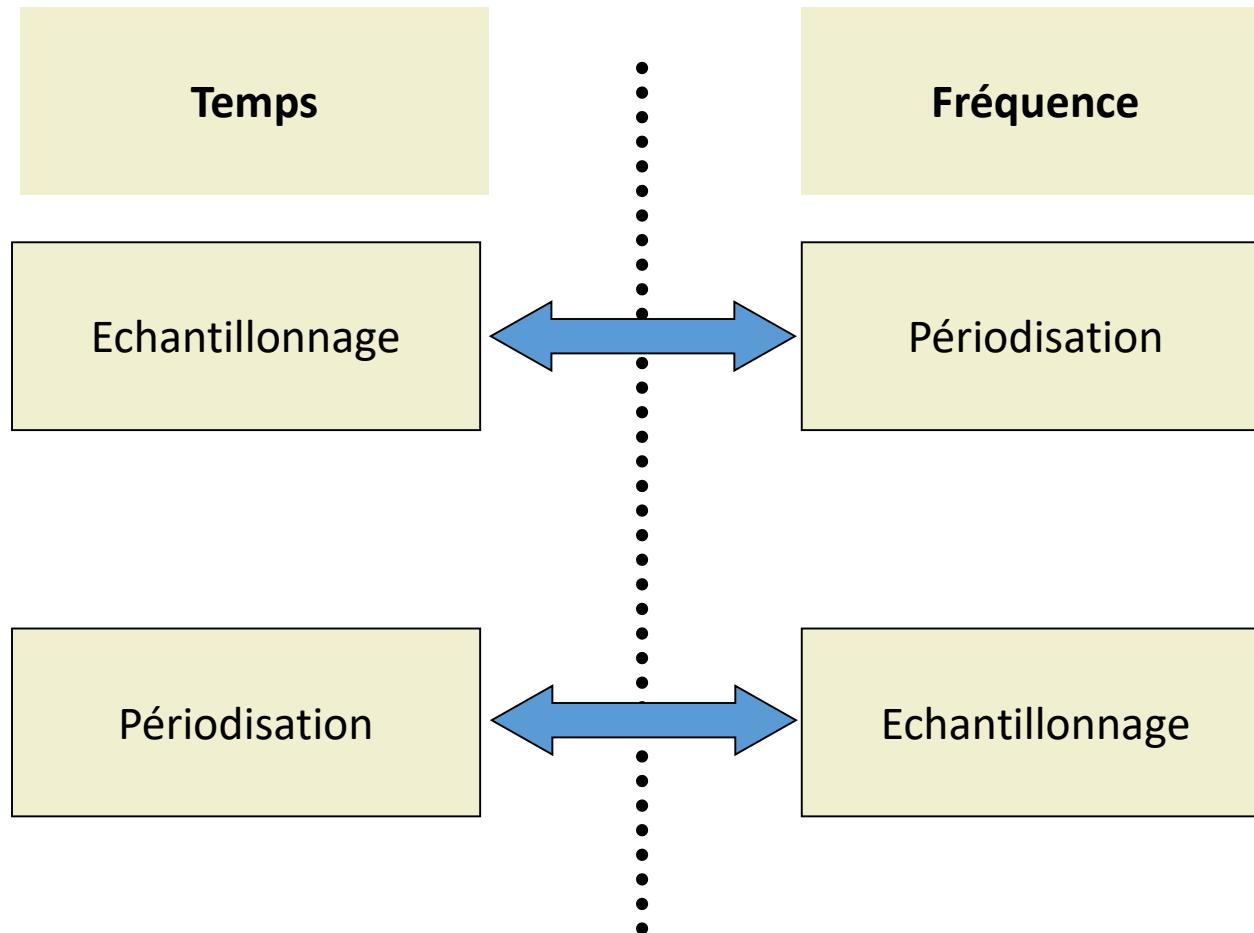
$\rightarrow$  périodisation à la période  $1/F_e$  du signal



Soit  $T$  la durée finie du signal.

La condition de non recouvrement est:  $\frac{1}{F_e} > T$

# Conclusion



# Transformée de Fourier discrète

- Discrétisation de la transformée de Fourier
- Propriétés de la transformée de Fourier discrète
- TFD pour les signaux de durée illimitée

# Transformée de Fourier d'un signal discret

Soit un signal échantillonné  $\check{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e)$

Sa transformée de Fourier est

$$\check{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \check{x}(t) \cdot e^{-2\pi jft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e) \cdot e^{-2\pi jft} dt$$

$$\check{X}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(kT_e) \cdot e^{-2\pi jfkT_e} \delta(t - kT_e) dt$$

$$\boxed{\check{X}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \cdot e^{-2\pi jfkT_e}}$$

$\check{X}(f)$  est périodique de période  $F_e = \frac{1}{T_e}$

$$\check{X}(f + F_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \cdot e^{-2\pi jfkT_e} \cdot e^{-2\pi j \frac{1}{T_e} kT_e} = \check{X}(f)$$

- Transformation inverse

- $\check{X}(f)$  étant périodique, elle peut être décomposée en série de Fourier

$$\begin{cases} \check{X}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \cdot e^{-2\pi jfkT_e} \\ C_k = \frac{1}{F_e} \int_{-F_e/2}^{F_e/2} \check{X}(f) \cdot e^{2\pi jfkT_e} df \end{cases} \quad \check{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \cdot \delta(t - kT_e)$$

d'où

$$x(kT_e) = C_k = \frac{1}{F_e} \int_{-F_e/2}^{F_e/2} \check{X}(f) \cdot e^{2\pi jfkT_e} df$$

- Remarque
    - l'intégrale peut également se calculer sur n'importe quel intervalle  $[f_0, f_0 + F_e]$
  - Difficultés
    - $f$  est une variable continue, donc pas adaptée à un traitement numérique
    - le calcul de  $\bar{x}(f)$  fait intervenir une infinité de termes  $x(kT_e)$
- il faut discréteriser  $f$  et limiter la durée du signal  $x(kT_e)$

# Discrétisation de la fréquence

- On pose  $f = n \cdot \Delta f$
- $\tilde{x}(f)$  étant périodique, de période  $F_e$ , on calculera N échantillons sur une période, d'où:

$$\Delta f = \frac{F_e}{N} = \frac{1}{N \cdot T_e}$$

- On peut donc approcher la formule de calcul des  $x(kT_e)$  par une somme discrète sur N points

$$x(kT_e) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n \cdot \Delta f) \cdot e^{2\pi j n \Delta f k T_e}$$

$$x(kT_e) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n \cdot \Delta f) \cdot e^{2\pi j \frac{nk}{N}}$$

- Remarque

Passage à une variable discrète pour  $f$



échantillonnage du spectre  $\tilde{X}(f)$

→ périodisation du signal temporel de période

$$1/\Delta f = N/F_e = N \cdot T_e$$

$$x((k+N)T_e) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n \cdot \Delta f) \cdot e^{2\pi j \frac{n(k+N)}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n \cdot \Delta f) \cdot e^{2\pi j \frac{nk}{N}} \cdot e^{2\pi j n}$$

$$x((k + N)T_e) = x(kT_e)$$

Si la durée du signal temporel est limitée à  $N T_e$ , la discréttisation se fait sans distorsion du signal

# Transformée de Fourier Discrète

→ forme finale de la transformée de Fourier discrète (TFD) pour un signal discret comportant N échantillons pris à des intervalles réguliers  $k.T_e$  :

- $x(k)$  : échantillon n° $k$  correspondant au temps  $t=kT_e$
- $X(n)$  : échantillon n° $n$  du spectre pour la fréquence

$$f = n \cdot \Delta f = \frac{n}{N \cdot T_e}$$

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-2\pi j \frac{nk}{N}}$$

pour  $0 < n \leq N-1$

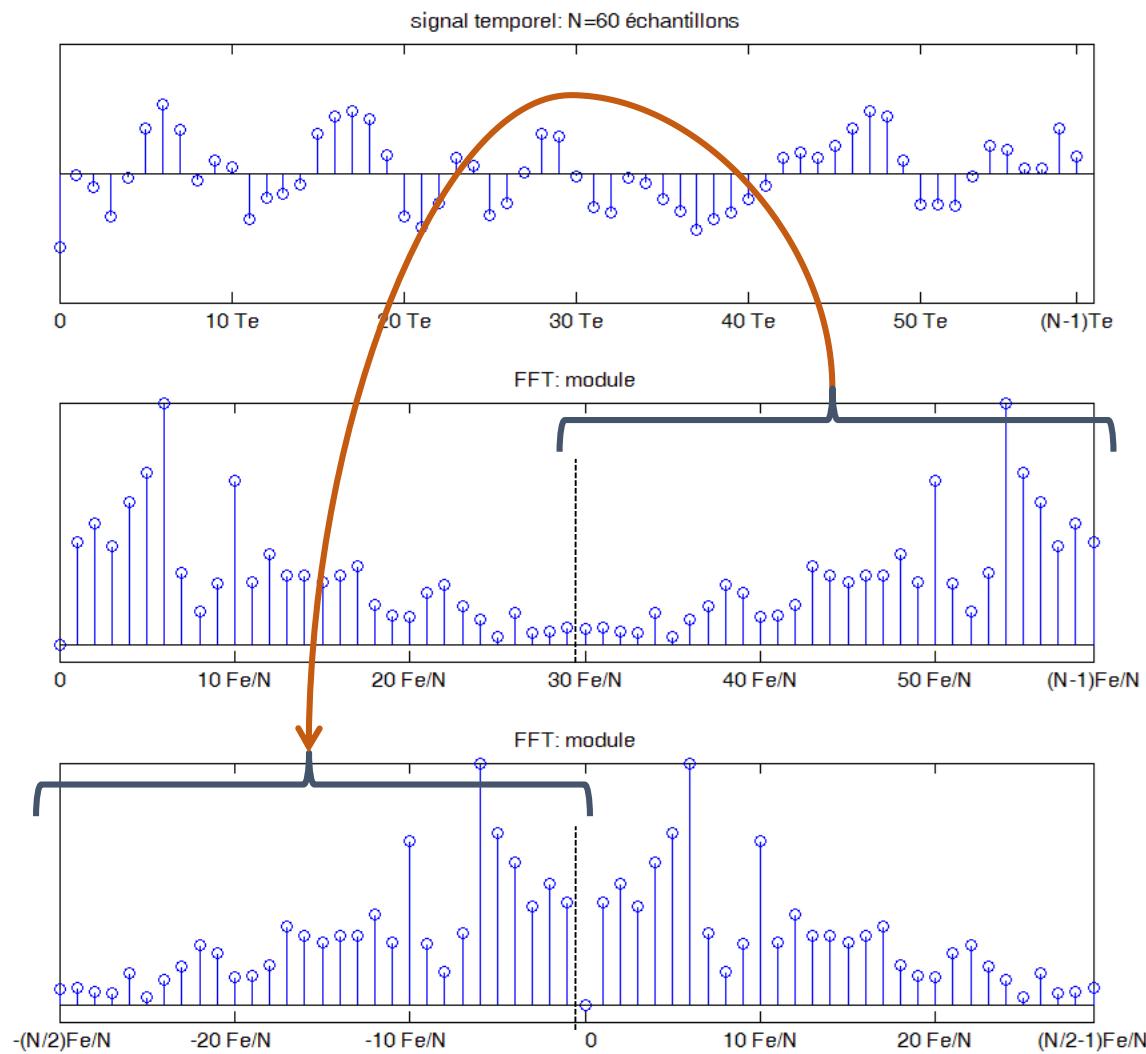
**TFD**

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \cdot e^{2\pi j \frac{nk}{N}}$$

pour  $0 < k \leq N-1$

**TFDI**

# Transformée de Fourier Discrète (TFD)



- Remarque
  - S'applique à un signal de durée  $NT_e$ , mais aussi au cas d'un signal périodique de période  $NT_e$
  - Dans ce cas, la relation est valable pour n'importe quelle valeur de  $k$ . La périodicité du signal fait qu'il n'y a pas de problème de repliement lors de la discrétisation de  $X(f)$ .

# Propriétés de la TFD

- Linéarité

$x(k)$  et  $y(k)$  suites périodiques de même période  $N$

Soient  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{TFD}[v(k) = \mu x(k) + \lambda y(k)] = \mu \cdot \text{TFD}[x(k)] + \lambda \cdot \text{TFD}[y(k)]$$

- Translation

$$\begin{array}{ccc} x(k - k_0) & \xrightarrow{\text{TFD}} & X(n) \cdot e^{-2\pi j \frac{nk_0}{N}} \\ X(n - n_0) & \xrightarrow{\text{TFDI}} & x(k) \cdot e^{2\pi j \frac{kn_0}{N}} \end{array}$$

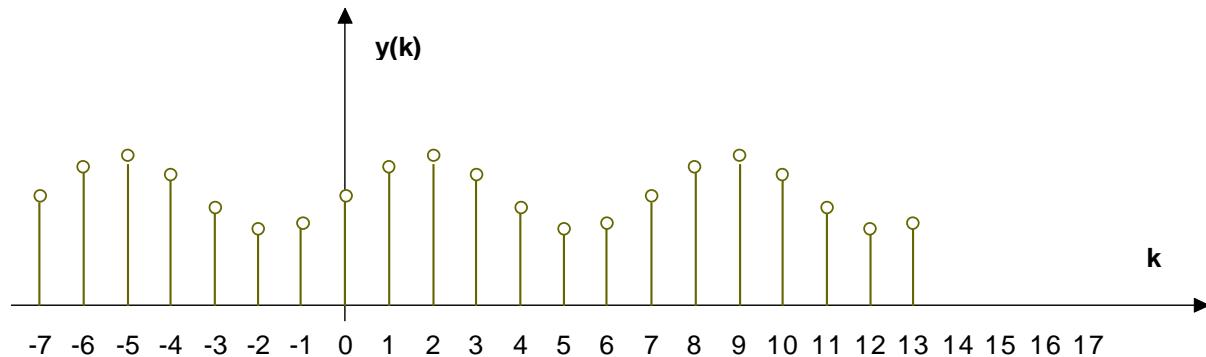
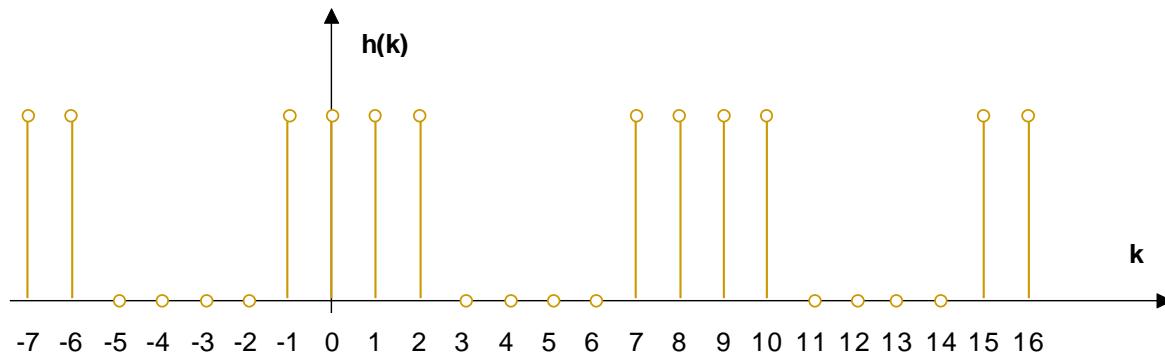
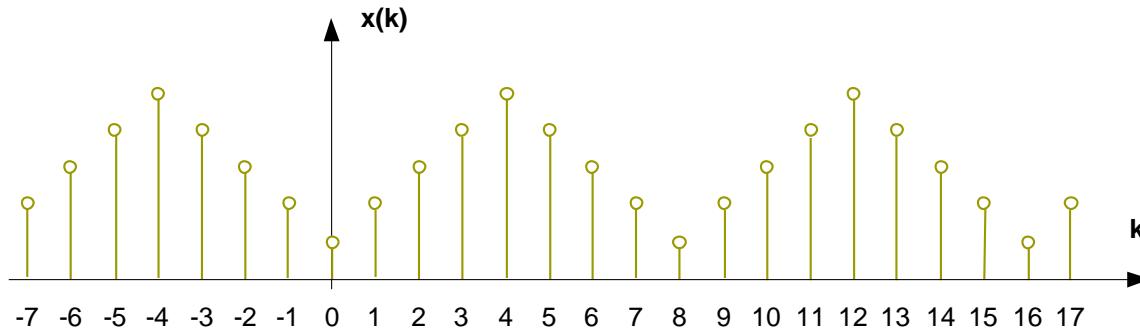
- Produit de convolution
  - Convolution périodique

$x(k)$  et  $h(k)$  : signaux périodiques de même période  $N$ .  
→ leur produit de convolution est un signal également périodique de période  $N$

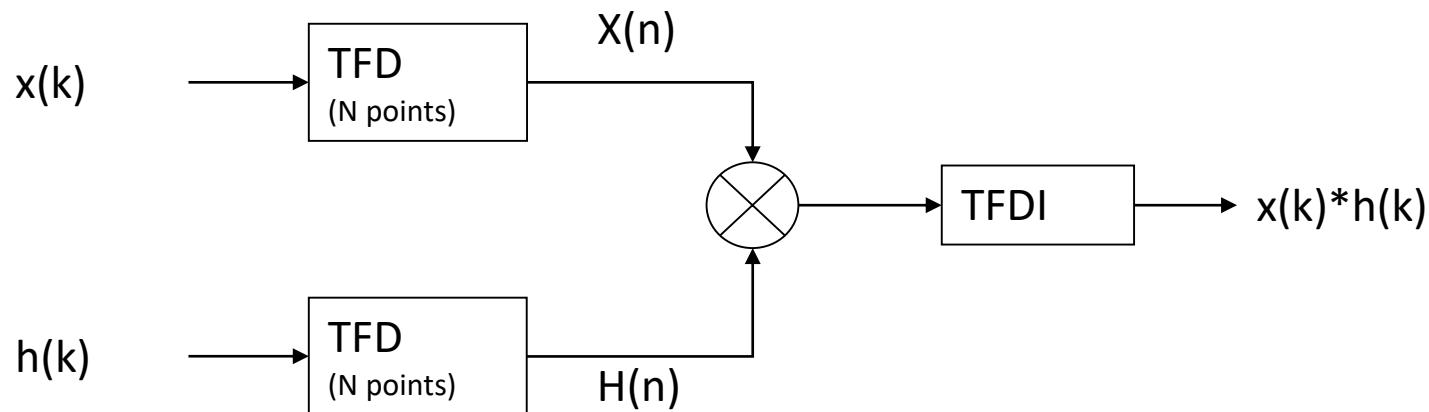
$$y(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \cdot h(k - l)$$

Dans le domaine fréquentiel, on obtient pour la TFD :

$$Y(n) = X(n) \cdot H(n)$$



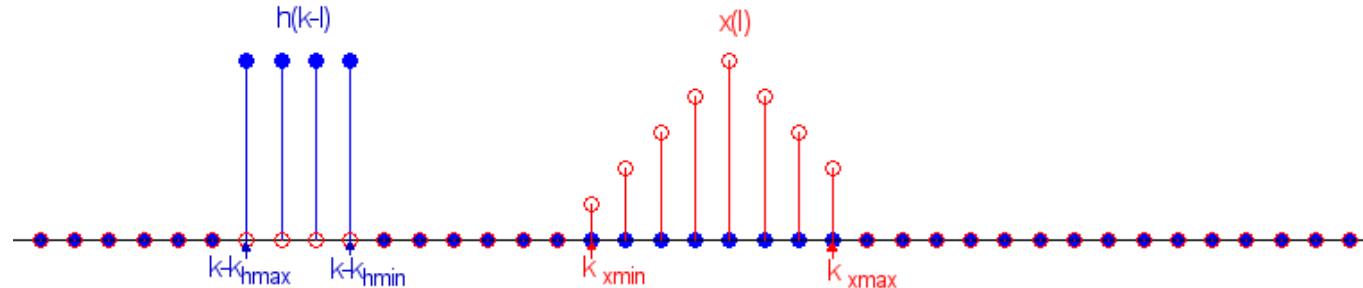
- Calcul de la convolution par TFD



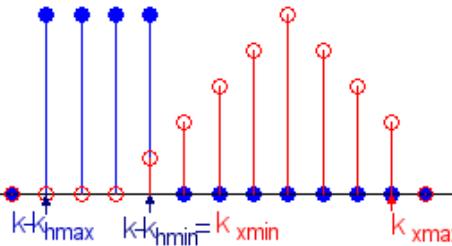
## • Cas des signaux de durée limitée

Soit  $N_x$  la durée du signal  $x(k)$  pour  $k=k_{x\min}..k_{x\max}$   $\rightarrow N_x = k_{x\max} - k_{x\min} + 1$

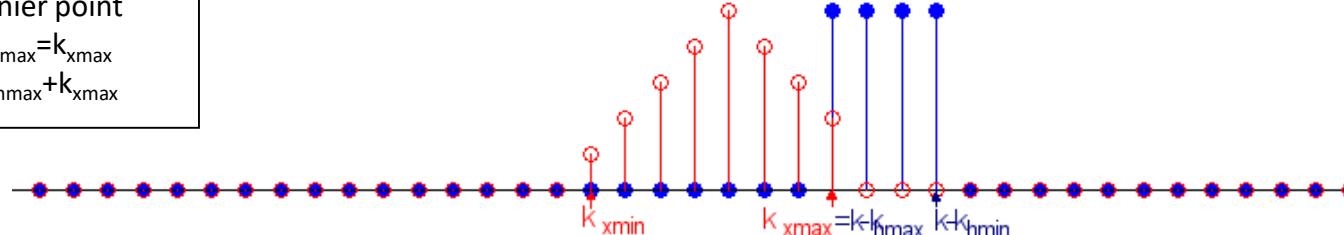
et  $N_h$  la durée du signal  $h(k)$  pour  $k=k_{h\min}..k_{h\max}$   $\rightarrow N_h = k_{h\max} - k_{h\min} + 1$



Premier point  
 $k - k_{h\min} = k_{x\min}$   
 $k = k_{h\min} + k_{x\min}$



Dernier point  
 $k - k_{h\max} = k_{x\max}$   
 $k = k_{h\max} + k_{x\max}$



→  $k$  varie de  $k_{h\min} + k_{x\min}$  à  $k_{h\max} + k_{x\max}$

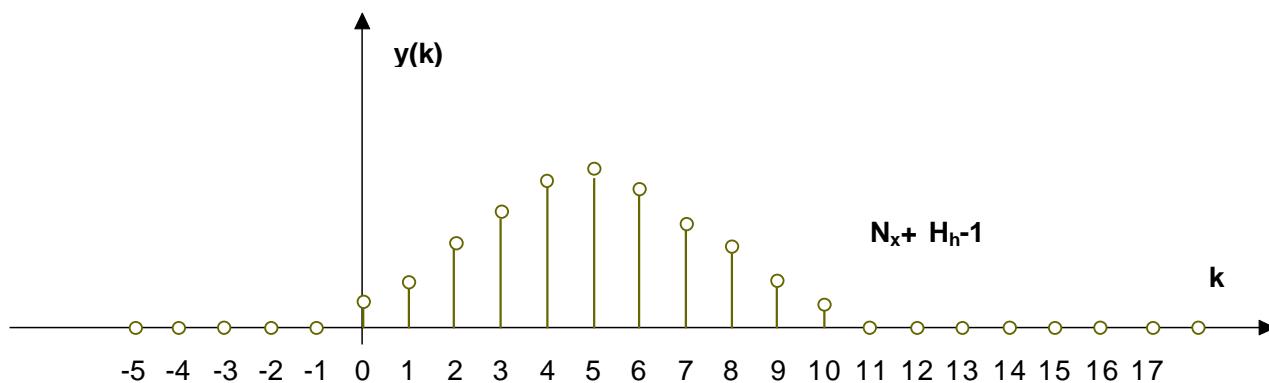
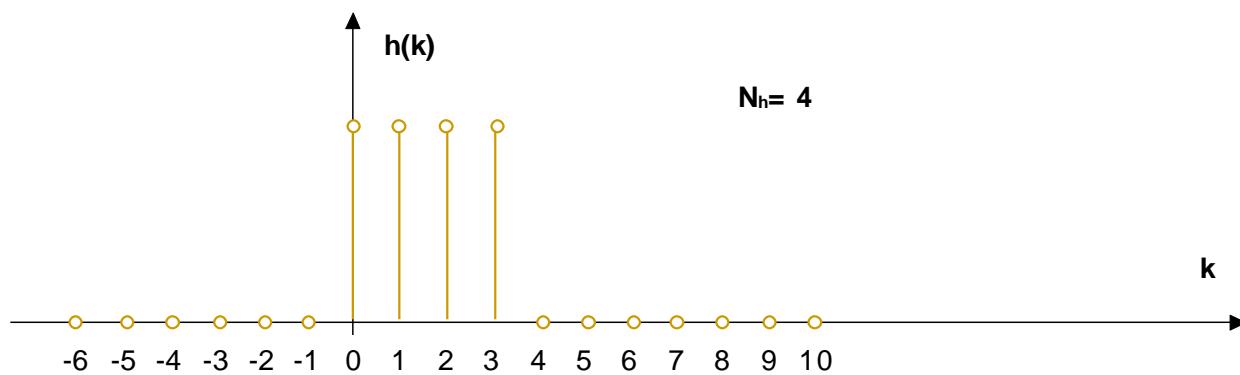
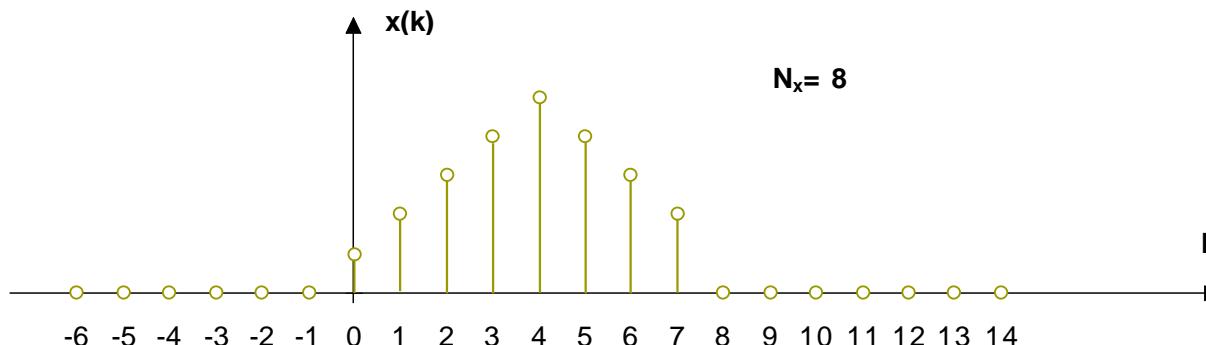
Nombre de points :

$$N_y = k_{h\max} + k_{x\max} - (k_{h\min} + k_{x\min}) + 1 = N_x + N_h - 1 \text{ points}$$

→ Le produit de convolution est un signal de durée limitée

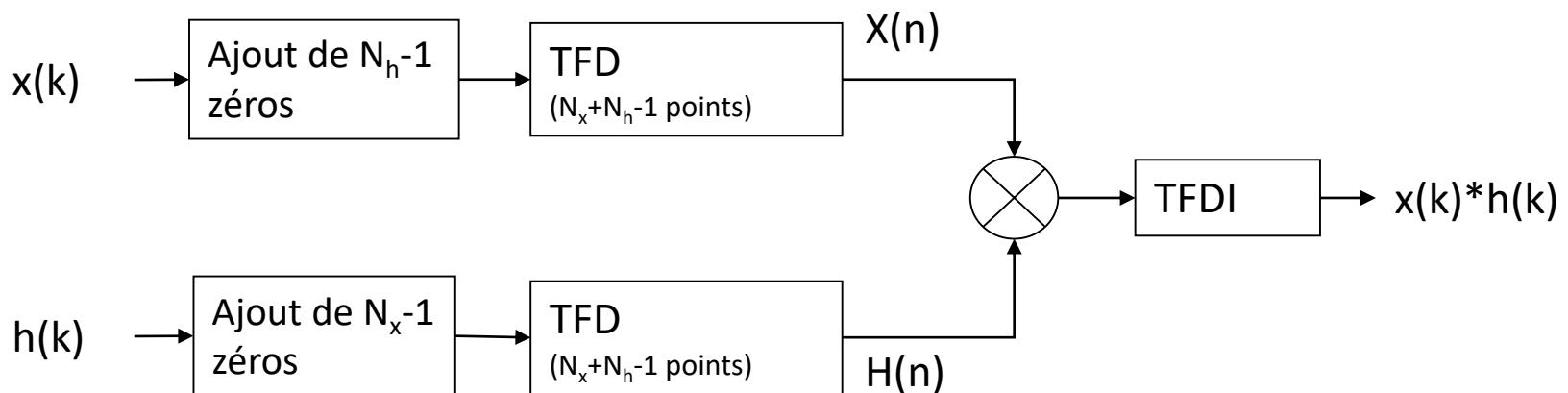
$$N_x + N_h - 1$$

→ Une durée  $N_x$  (ou  $N_h$ ) n'est pas suffisante pour représenter le produit de convolution, sans recouvrement



- Calcul de la convolution par TFD

Il n'est pas possible de calculer ce produit en utilisant une TFD de longueur  $N_x$ . Le recouvrement peut être évité si l'on prolonge les deux signaux par des échantillons nuls jusqu'à la durée  $N_x + N_h - 1$



- Convolution fréquentielle

Soient  $x(k)$  et  $h(k)$ , deux suites périodiques de même période  $N$ .

→ Le produit de ces signaux est un signal également périodique de même période  $N$ .

$$y(k) = x(k).h(k)$$

En appliquant la TFD, on obtient :

$$Y(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m).H(n - m)$$

→ produit de convolution

Également valable pour le produit de convolution de deux signaux de durée limitée de même durée  $N$ .

- Corrélation

- signaux périodiques

$x(k)$  et  $y(k)$  signaux réels périodiques de même période  $N$ .

→ Leur fonction d'intercorrélation, calculée sur une période est :

$$\varphi_{xy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \cdot y(l+k)$$

Dans le domaine fréquentiel:

$$\Phi_{xy}(n) = \frac{1}{N} X^*(n) \cdot Y(n)$$

→ Densité spectrale de puissance

- signaux de durée finie :

la fonction d'intercorrélation est donnée par :

$$\varphi_{xy}(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \cdot y(l+k) \quad (\text{signaux d'énergie finie})$$

$$\Phi_{xy}(n) = X^*(n) \cdot Y(n)$$

→ Densité spectrale d'énergie

- Remarque :

si  $N_x$  et  $N_y$  sont les durées des signaux  $x(k)$  et  $y(k)$ , la durée de la fonction d'intercorrélation est  $N_x + N_y - 1$ .

→ si l'on veut éviter les phénomènes de recouvrement, il faut prolonger les signaux par des échantillons nuls jusqu'à une durée  $N_x + N_y - 1$ .

# Transformée de Fourier discrète pour les signaux de durée illimitée

La TFD suppose des signaux périodiques ou de durée limitée, définis par N échantillons.

→ Pour un signal de durée illimitée, la TFD ne peut être définie que de façon approximative en limitant la durée du signal

- Fenêtre rectangulaire

→ multiplication par une fenêtre rectangulaire de N échantillons  $\Pi_N(k)$

Il est nécessaire de choisir correctement :

- la position de la fenêtre par rapport au signal (pour conserver les échantillons de plus forte amplitude)
- la valeur de N

On se ramène alors à l'étude d'un signal de durée limitée  $x_N(k)$  :

$$x_N(k) = x(k) \cdot \Pi_N(k)$$

- Hypothèses

- $\Pi_N(k)$  centré en 0
- N impair

- Effet de la limitation de durée :

Le spectre du signal tronqué s'obtient par convolution de  $X(f)$  avec le spectre de  $\Pi_N(k)$

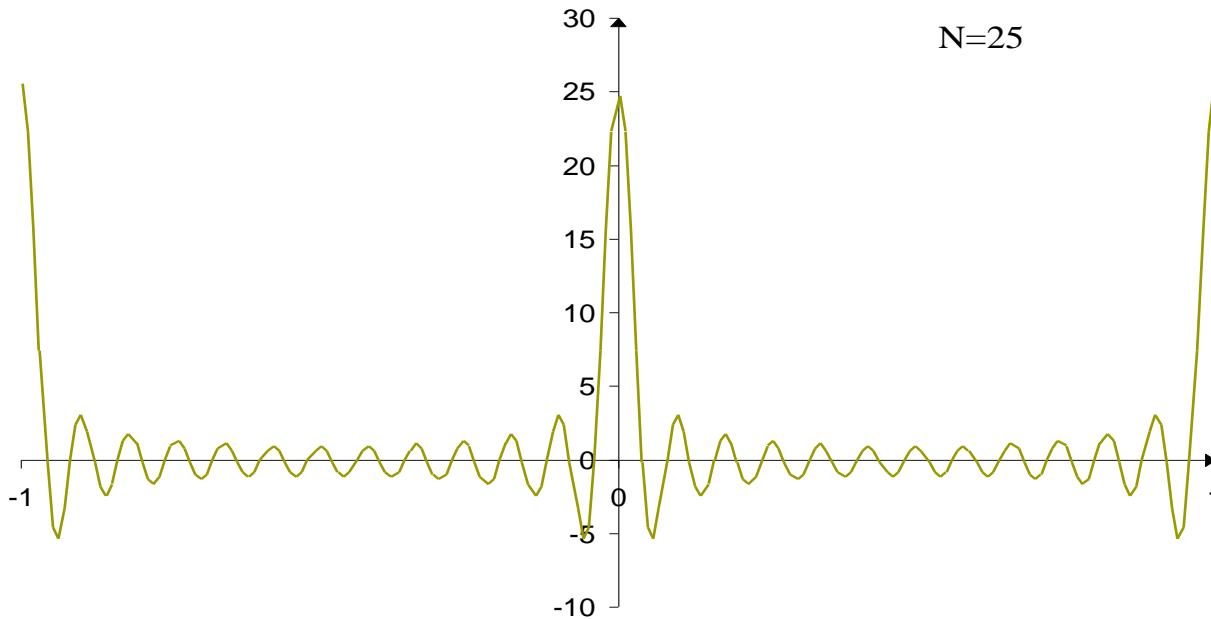
$\Pi_N(k)$  étant un signal à support limité, sa TFD existe

Les échantillons de  $X_N(n)$  sont une approximation des échantillons de  $X_N(f)$

→ La qualité de l'approximation est fonction de  $\mathcal{F}[\Pi_N(k)]$

$$\mathcal{F}[\Pi_N(k)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi_N(k) \cdot e^{-2\pi jfk}$$

$$\mathcal{F}[\Pi_N(k)] = \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{-2\pi jfk} = \frac{\sin(\pi fN)}{\sin(\pi f)}$$



- pic central de largeur  $2/N$  et lobes secondaires d'amplitude décroissante.  
Nul pour les multiples de  $1/N$ , non entiers.
- Apparition d'oscillations, plus particulièrement autour des discontinuités : phénomène de Gibbs

# Représentation des images

# Représentation spatiale

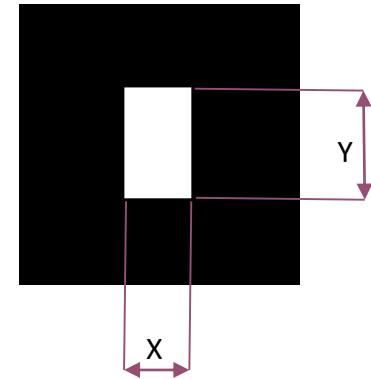
- Représentation déterministe

image continue :  $f(x,y) \rightarrow$  fonctions de deux (ou plus) variables d'espace

image numérique :  $f(k,l)$  continues ou discrètes

**Exemple :**  $\Pi_{XY}(x,y) = \Pi\left(\frac{x}{X}\right) \cdot \Pi\left(\frac{y}{Y}\right)$   
avec

$$\Pi\left(\frac{x}{X}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{X}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



- Représentation statistique

$f(x,y)$  ou  $f(k,l) \rightarrow$  variable aléatoire

→ Paramètres statistiques usuels

# Représentation fréquentielle

- Transformée de Fourier continue
  - Représentation de l'image sur une base de fonctions exponentielles complexes

- Cas mono-dimensionnel

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \cdot e^{2\pi j u x} du \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-2\pi j u x} dx$$

- Cas bidimensionnel

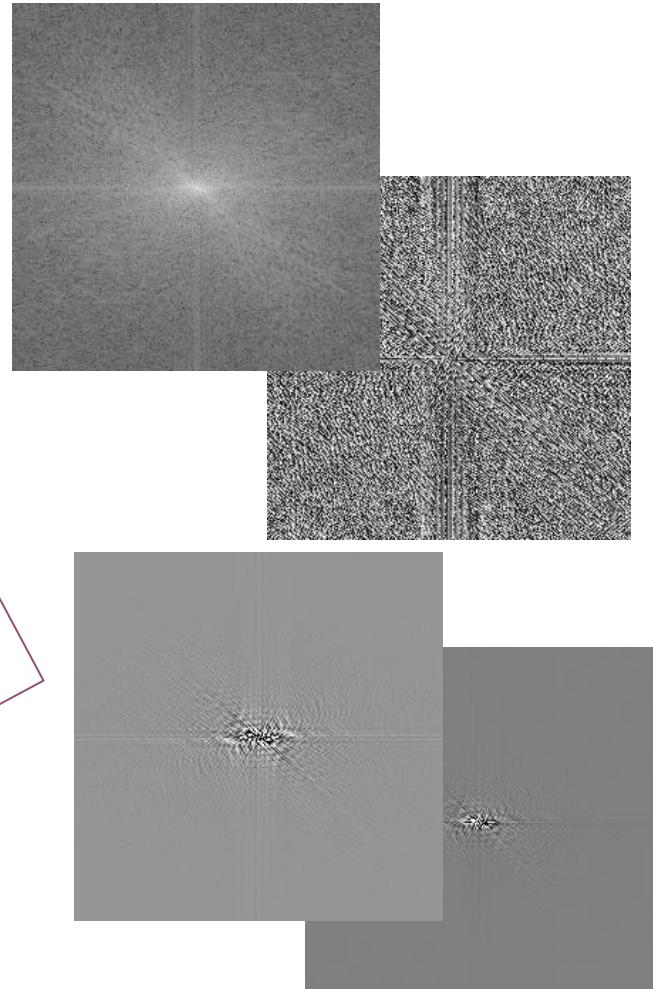
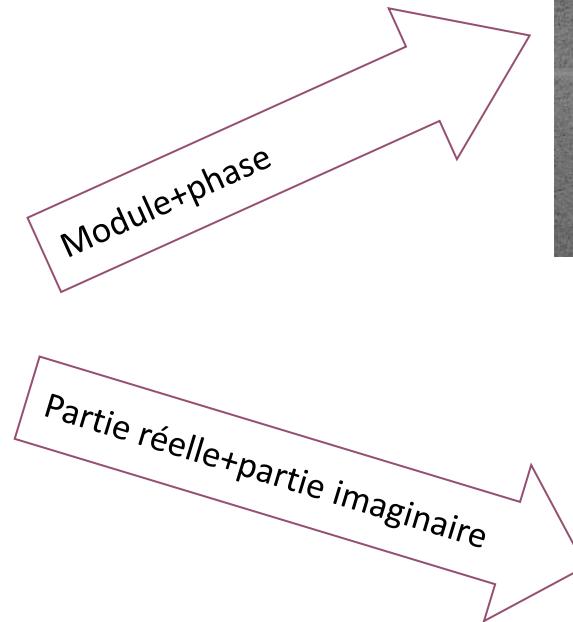
$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) \cdot e^{2\pi j(ux + vy)} du dv \quad \xrightarrow{\mathcal{F}_2} \quad F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot e^{-2\pi j(ux + vy)} dx dy$$

# Représentation fréquentielle

## Remarque

La transformée de Fourier est généralement complexe

## Exemple



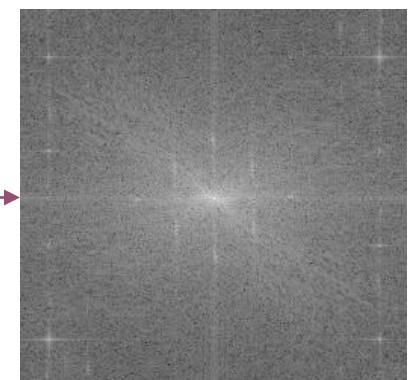
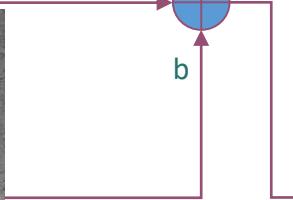
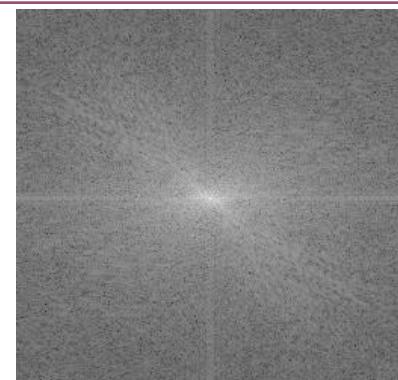
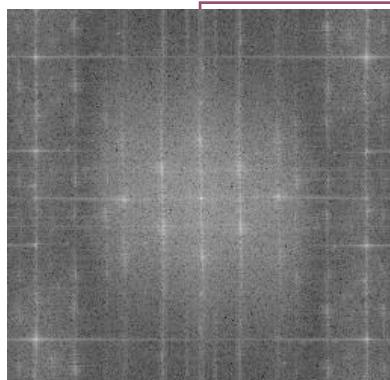
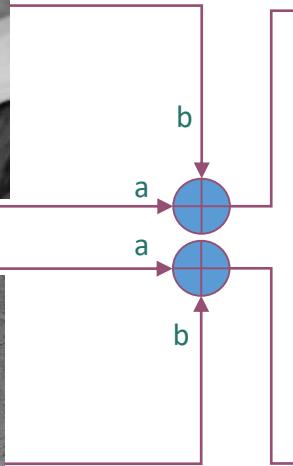
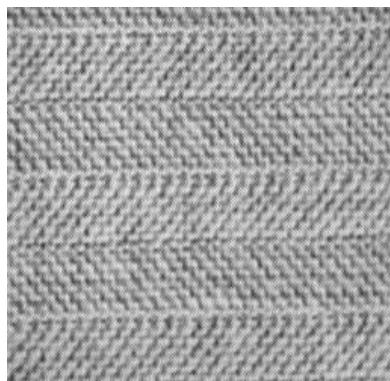
# Représentation fréquentielle

- Propriétés

- Linéarité  $\mathcal{F}[f(x, y)] = F(u, v)$

$$\mathcal{F}[g(x, y)] = G(u, v)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[a f(x, y) + b g(x, y)] = a F(u, v) + b G(u, v)$$



module

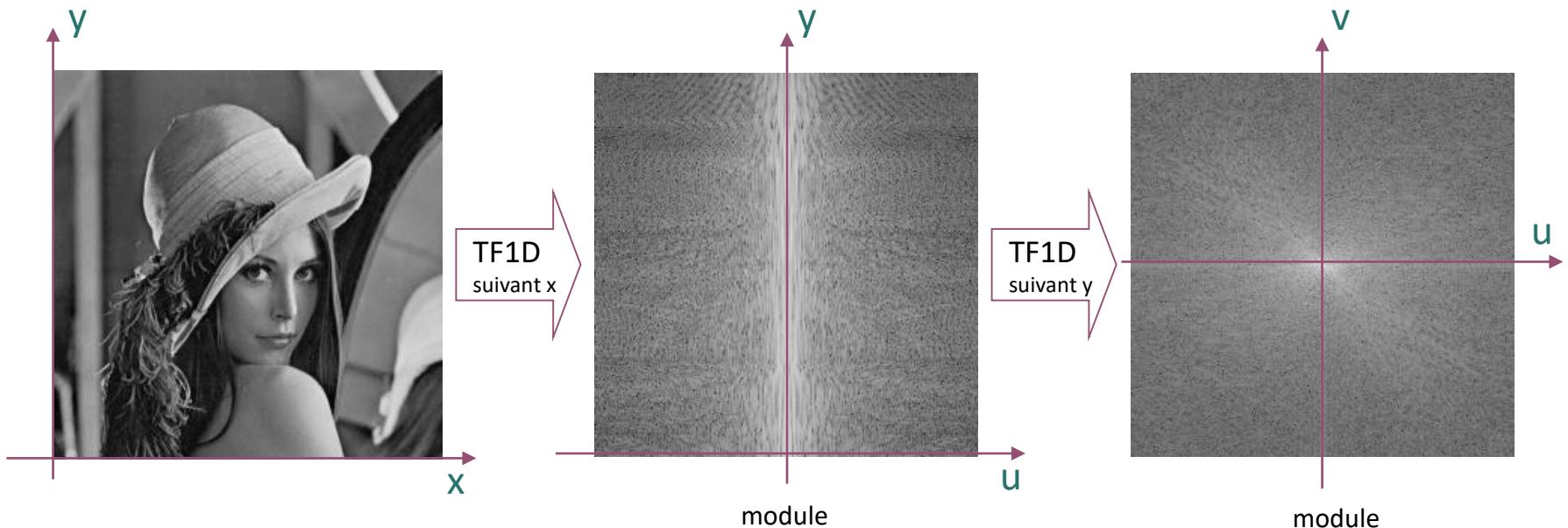
# Représentation fréquentielle

- Propriétés

- Séparabilité

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot e^{-2\pi j(ux+vy)} dx dy$$

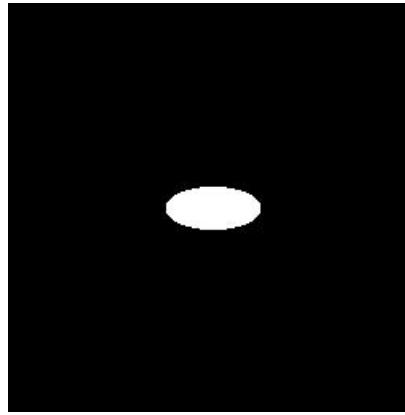
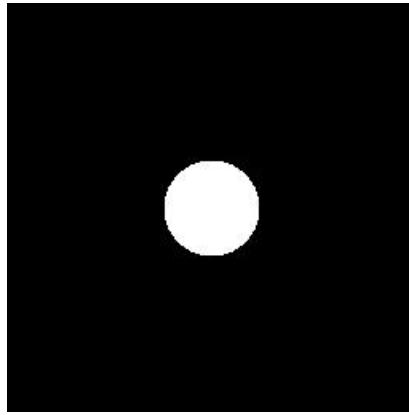
$$F(u, v) = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot e^{-2\pi jux} dx \right] \cdot e^{-2\pi jvy} dy \right]$$



# Représentation fréquentielle

- Propriétés

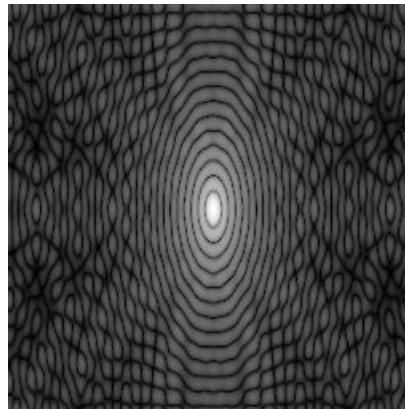
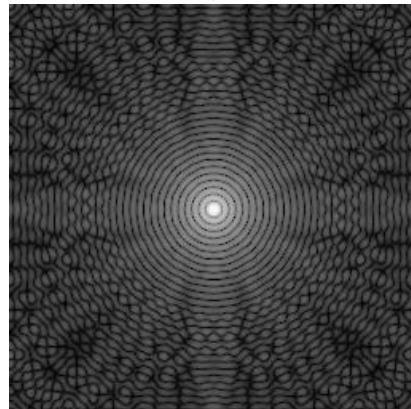
- changement d'échelle  $\mathcal{F}[f(ax, by)] = \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$



TF

TF

module



# Représentation fréquentielle

- Propriétés

- Décalage

$$\mathcal{F}[f(x - x_0, y - y_0)] = e^{-2\pi j(ux_0 + vy_0)} F(u, v)$$

- Conjugaison

$$\mathcal{F}[f^*(x, y)] = F^*(-u, -v)$$

- Convolution

$$\mathcal{F}[f(x, y) * g(x, y)] = F(u, v) \cdot G(u, v)$$

$$\mathcal{F}[f(x, y) \cdot g(x, y)] = F(u, v) * G(u, v)$$

- Conservation du produit scalaire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot g^*(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) \cdot G^*(u, v) du dv$$

# Représentation fréquentielle

- Transformée de Fourier discrète
  - Cas mono-dimensionnel

$$f(k) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} F(m) \cdot e^{2\pi j \frac{mk}{M}} \quad \xrightarrow{\text{TFD}} \quad F(m) = \sum_{k=0}^{M-1} f(k) \cdot e^{-2\pi j \frac{mk}{M}}$$

- Cas bidimensionnel

$$f(k, l) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(m, n) \cdot e^{2\pi j \left( \frac{mk}{M} + \frac{nl}{N} \right)} \quad \xrightarrow{\text{TFD}} \quad F(m, n) = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} f(k, l) \cdot e^{-2\pi j \left( \frac{mk}{M} + \frac{nl}{N} \right)}$$

# Représentation fréquentielle

- Transformée de Fourier discrète unitaire

- Cas mono-dimensionnel

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} F(m) \cdot e^{2\pi j \frac{mk}{M}}$$
$$F(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=0}^{M-1} f(k) \cdot e^{-2\pi j \frac{mk}{M}}$$

$\xrightarrow{\text{TFD}}$        $\xleftarrow{\text{TFDI}}$

- Cas bidimensionnel

$$f(k, l) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} F(m, n) \cdot e^{2\pi j \left( \frac{mk}{M} + \frac{nl}{N} \right)}$$
$$F(m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} f(k, l) \cdot e^{-2\pi j \left( \frac{mk}{M} + \frac{nl}{N} \right)}$$

$\xrightarrow{\text{TFD}}$        $\xleftarrow{\text{TFDI}}$

# Représentation fréquentielle

- Propriétés

- Séparabilité

$$F(m, n) = \sum_{l=0}^{N-1} \left[ \sum_{k=0}^{M-1} f(k, l) \cdot e^{-2\pi j \frac{mk}{M}} \right] \cdot e^{-2\pi j \frac{nl}{N}}$$

- Linéarité

$$\text{TFD}[f(k, l)] = F(m, n)$$

$$\text{TFD}[g(k, l)] = G(m, n)$$

$$\Rightarrow \text{TFD}[a f(k, l) + b g(k, l)] = a F(m, n) + b G(m, n)$$

- Décalage

$$\text{TFD}[f(k - k_0, l - l_0)] = e^{-2\pi j \left( \frac{mk_0}{M} + \frac{nl_0}{N} \right)} F(m, n)$$

# Représentation fréquentielle

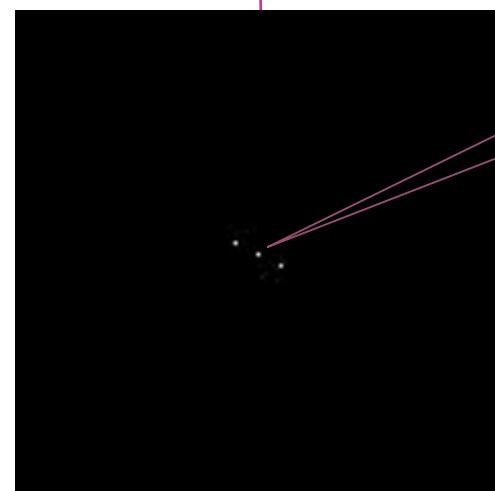
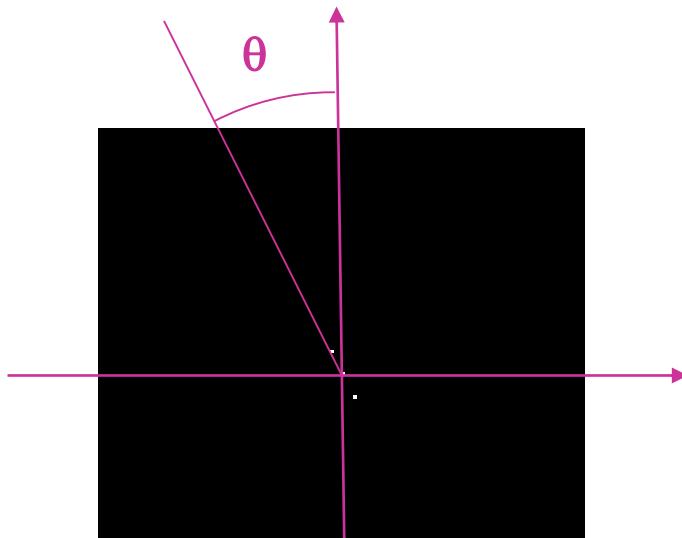
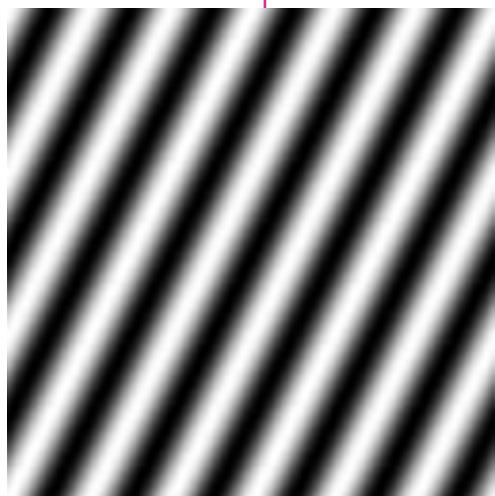
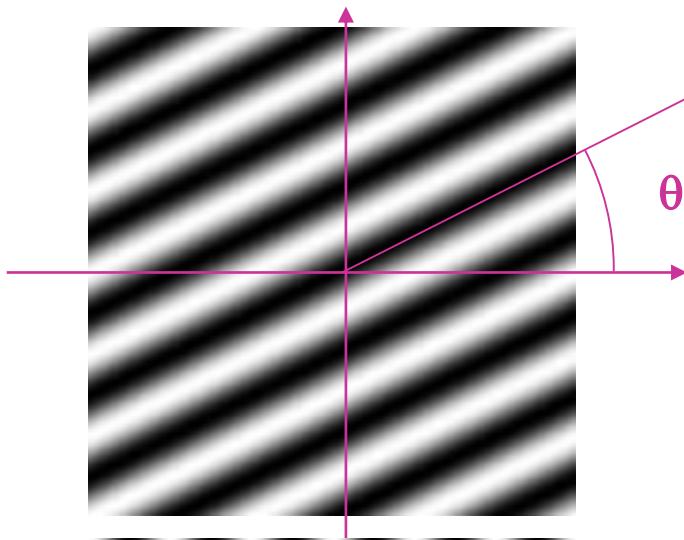
- Propriétés
  - Convolution

$$\text{TFD}[f(k,l) * g(k,l)] = F(m,n) \cdot G(m,n)$$

$$\text{TFD}[f(k,l) \cdot g(k,l)] = F(m,n) * G(m,n)$$

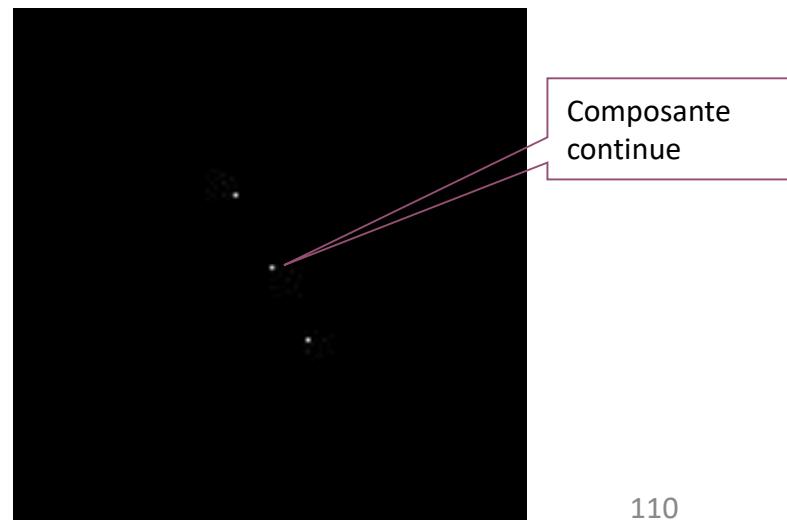
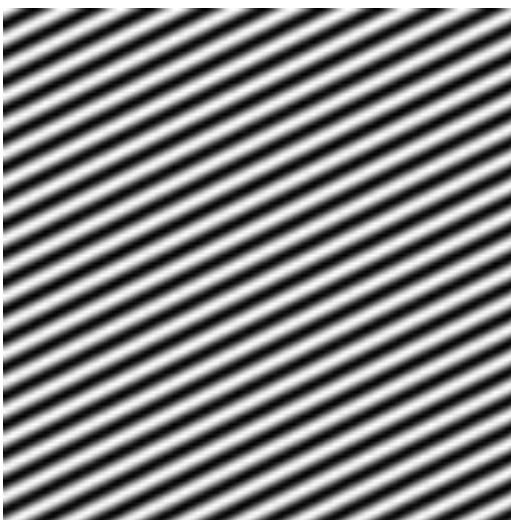
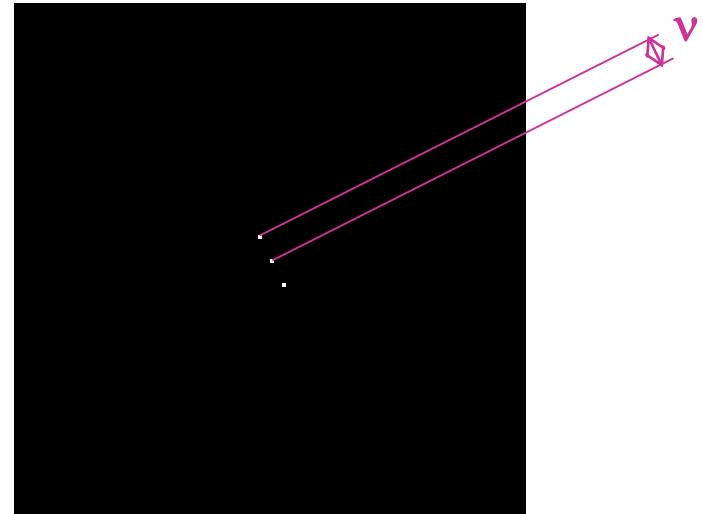
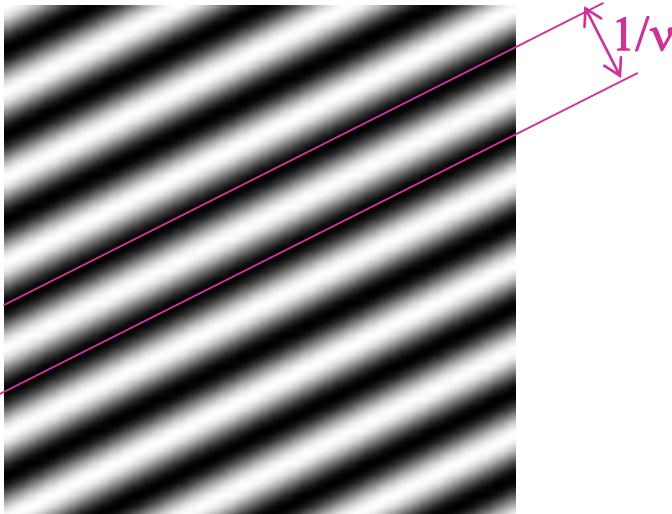
*! problèmes des bords*

- Interprétation
  - Module : orientation

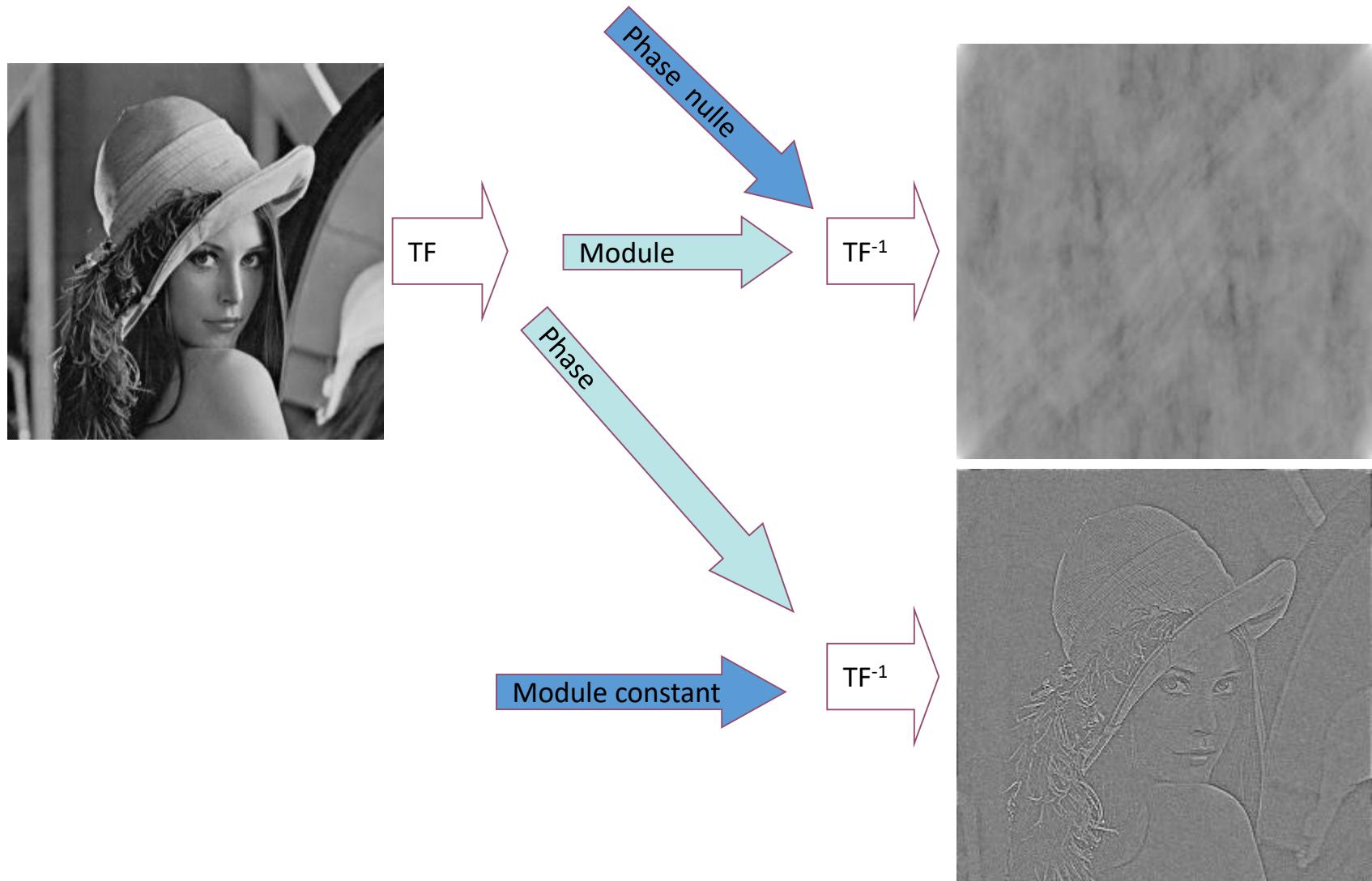


Composante  
continue

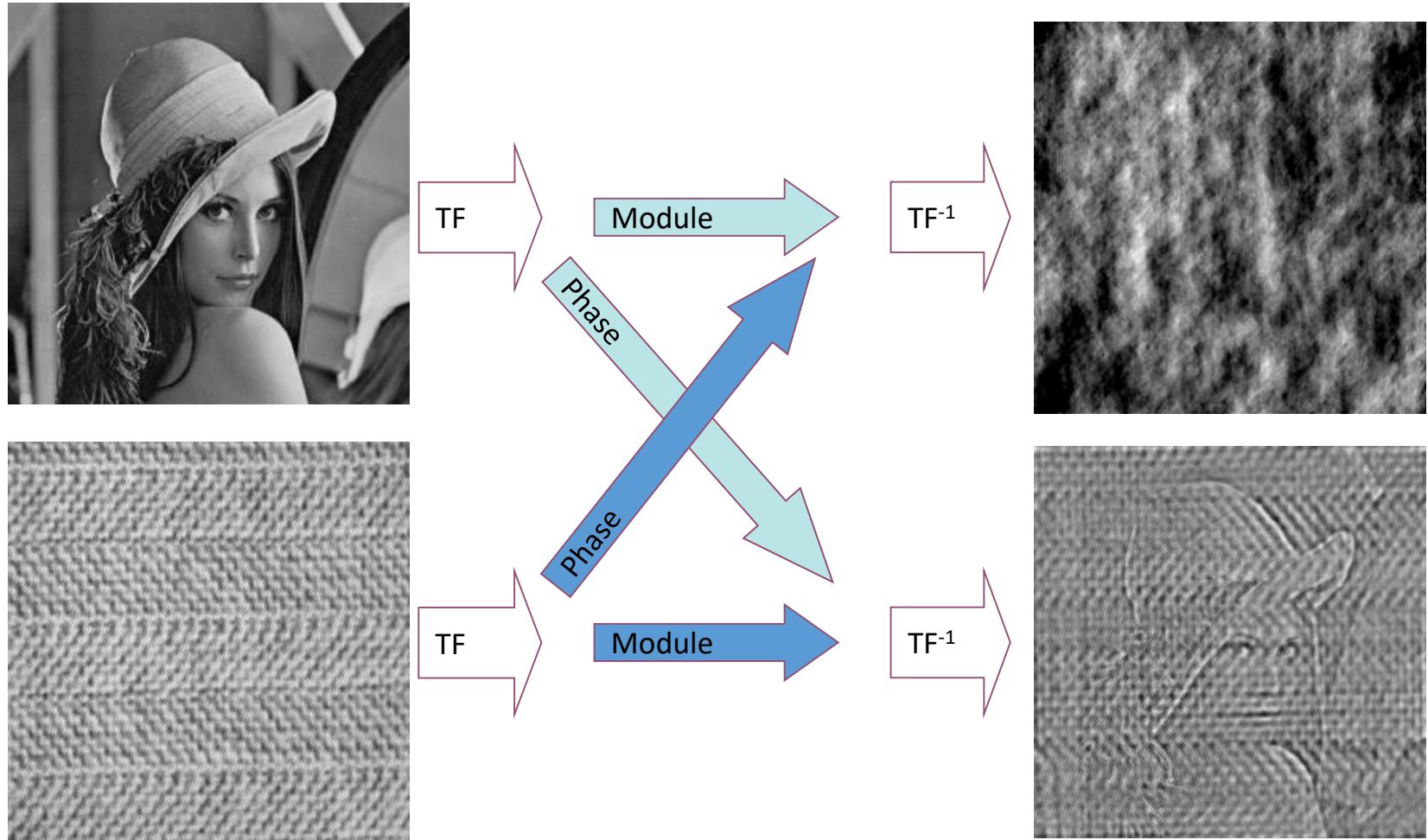
- Module : fréquence



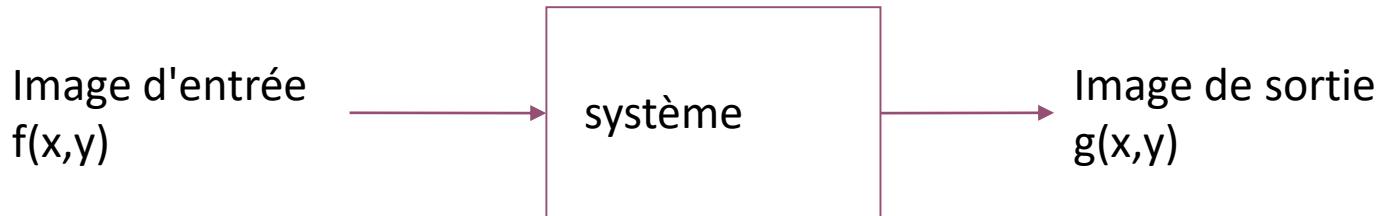
- Phase : localisation



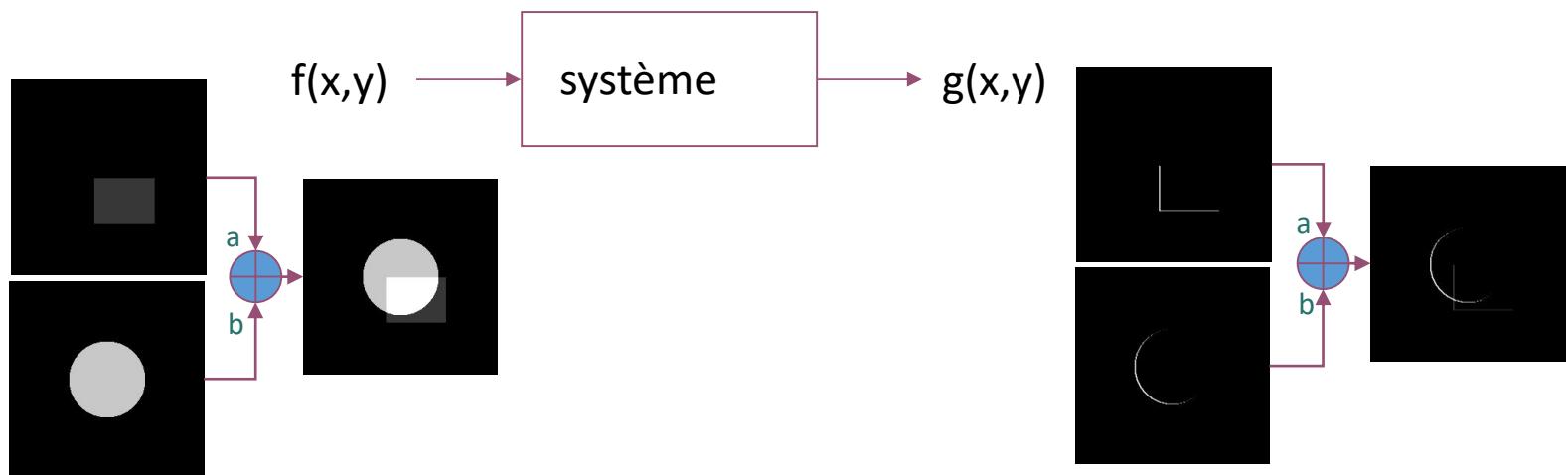
- Phase : localisation



# Systèmes bidimensionnels

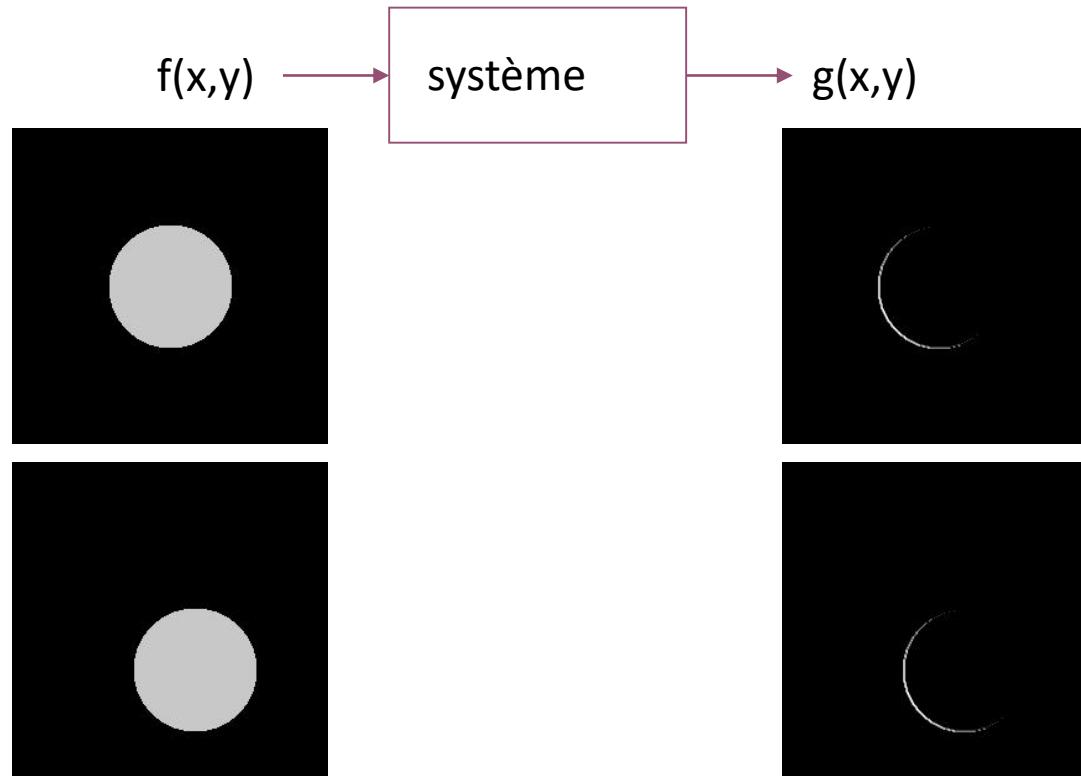


- Système linéaire



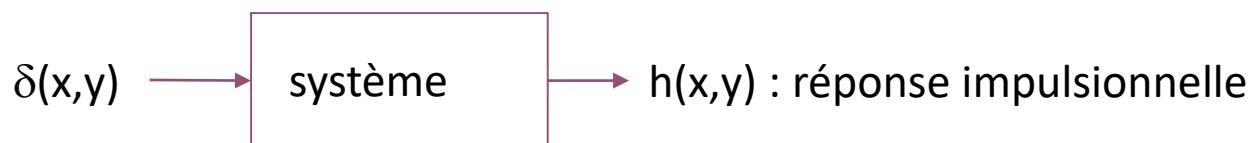
$$\forall a, b \quad \begin{cases} f_1(x,y) \rightarrow g_1(x,y) \\ f_2(x,y) \rightarrow g_2(x,y) \end{cases} \Rightarrow a f_1(x,y) + b f_2(x,y) \rightarrow a g_1(x,y) + b g_2(x,y)$$

- Système invariant



$$f(x,y) \rightarrow g(x,y) \Rightarrow f(x - x_0, y - y_0) \rightarrow g(x - x_0, y - y_0)$$

- Réponse impulsionnelle (PSF : Point Spread Function)  
→ réponse à une impulsion de Dirac



Si le système est linéaire et invariant, sa réponse à une entrée  $f(x,y)$  est :

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x', y').h(x - x', y - y').dx'.dy'$$

produit de convolution bidimensionnel

- Interprétation du produit de convolution

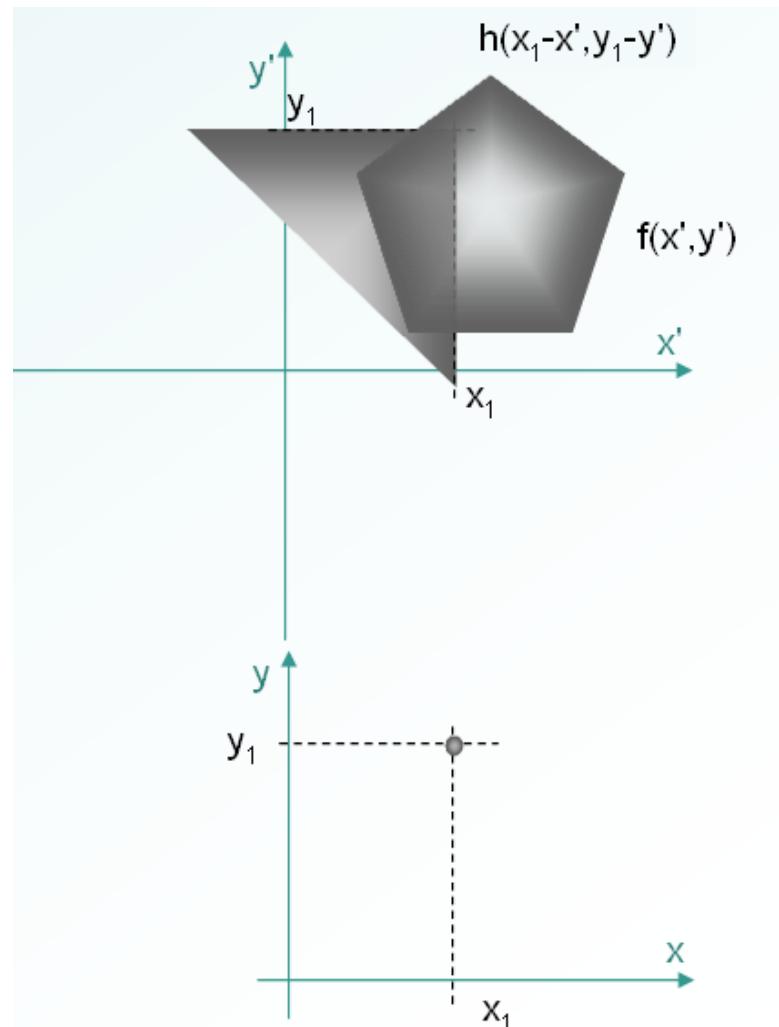
$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x', y').h(x - x', y - y').dx'.dy'$$

- retournement de  $h$
- translation en  $(x_1, y_1)$
- produit point à point avec  $f(x', y')$
- intégration

→ résultat au point  $(x_1, y_1)$

- translation en  $(x_2, y_2)$
- produit point à point avec  $f(x', y')$
- intégration

→ résultat au point  $(x_2, y_2)$



- Propriétés du produit de convolution
  - commutativité  

$$h(x,y) * g(x,y) = g(x,y) * h(x,y)$$
  - associativité  

$$[f_1(x,y) * f_2(x,y)] * f_3(x,y) = f_1(x,y) * [f_2(x,y) * f_3(x,y)]$$
  - linéarité  

$$[a f_1(x,y) + b f_2(x,y)] * g(x,y) = a f_1(x,y) * g(x,y) + b f_2(x,y) * g(x,y)$$

### **remarque**

Le support de  $f(x,y) * h(x,y)$  est plus grand que l'image originale  
 → problèmes de bord

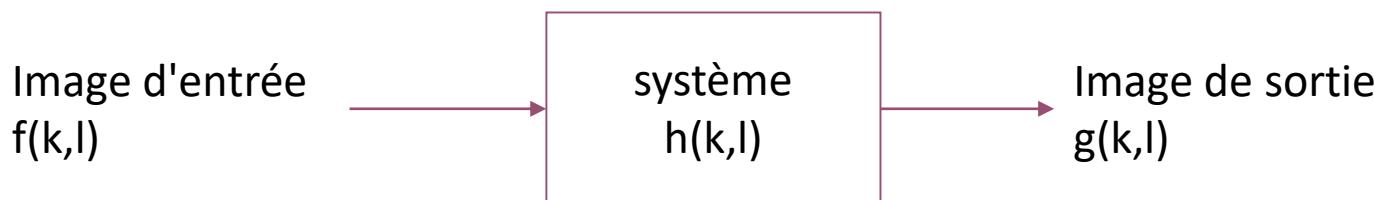
- Domaine fréquentiel

$$g(x,y) = f(x,y) * h(x,y) \quad \rightarrow \quad G(u,v) = F(u,v) \cdot H(u,v)$$

→ produit simple dans le domaine fréquentiel

$H(u,v)$  est appelée fonction de transfert du système

# Systèmes discrets



- produit de convolution discret

$$g(k, l) = f(k, l) * h(k, l) = \sum_m \sum_n f(m, n) \cdot h(k - m, l - n)$$

# Systèmes discrets

$\frac{1}{16}$	1	2	1
2	4	2	
1	2	1	

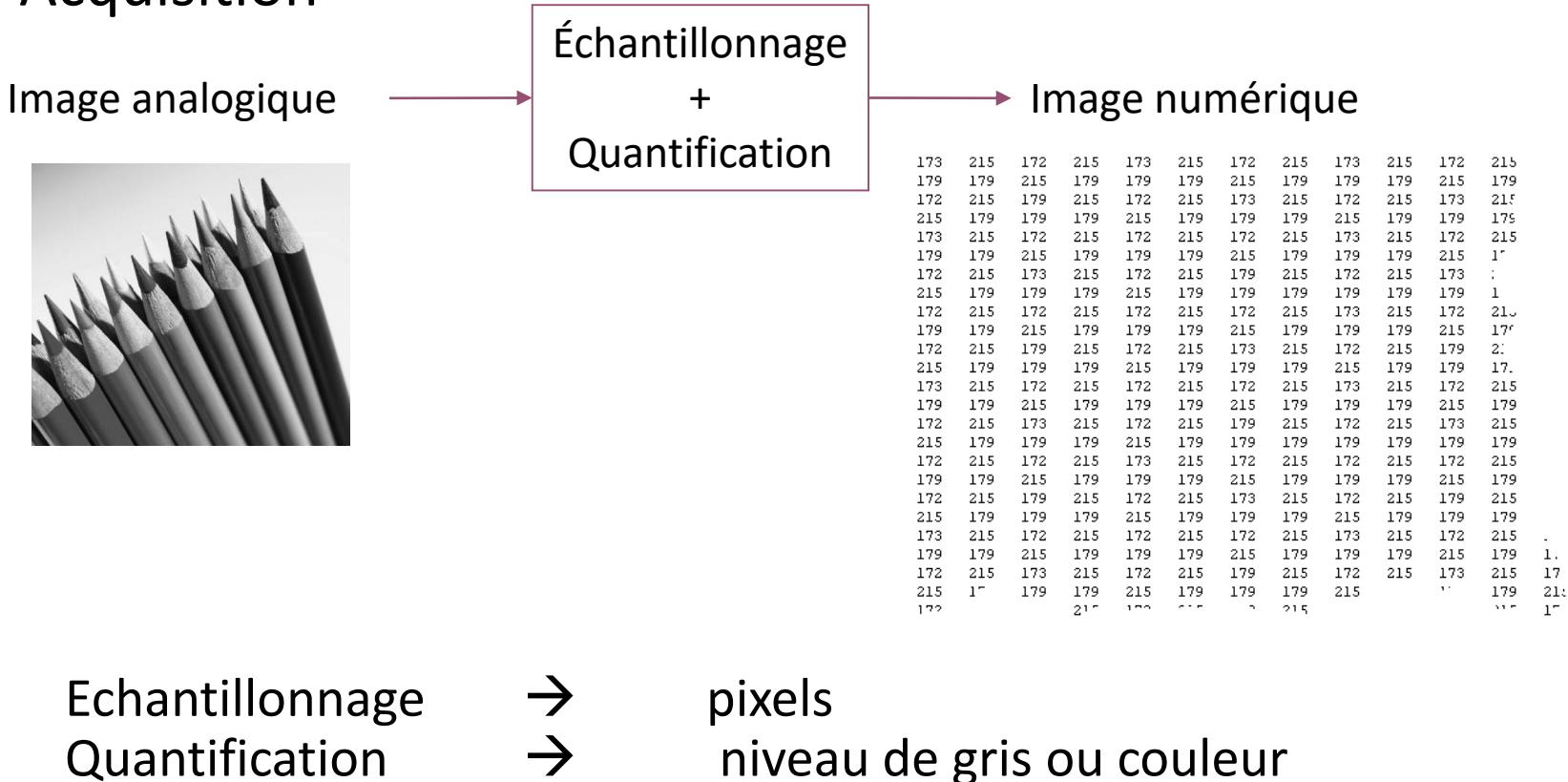
$$\frac{1}{16} \cdot (204 \cdot 1 + 255 \cdot 2 + 207 \cdot 1 + 160 \cdot 2 + 130 \cdot 4 + 171 \cdot 2 + 100 \cdot 1 + 154 \cdot 2 + 160 \cdot 1)$$

204	255	207	118	109	133	174	139
160	130	171	166	127	151	186	145
100	154	160	118	186	174	142	112
169	112	106	160	192	109	77	59
136	136	171	216	189	94	65	44
171	171	201	213	130	83	80	62
142	169	207	174	136	100	88	77
97	145	189	163	124	97	68	74

	166	165	149	142	153	157
	139	144	150	159	153	133
	134	140	163	166	130	92
	148	166	184	161	109	72
	168	188	187	146	101	76
	166	186	173	134	100	82

# Images numériques

- Acquisition

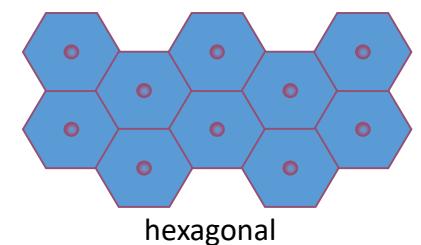
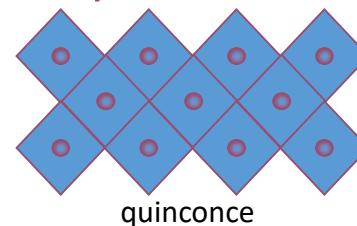
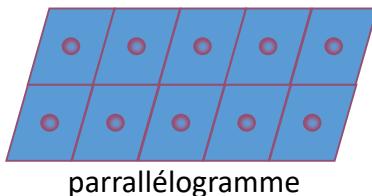
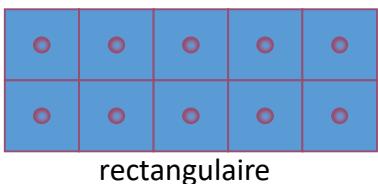


# Echantillonnage

- Problème
  - Choix des fréquences d'échantillonnage (**résolution spatiale, taille des images, temps de traitement**)



- Tessellation (**forme des pixels**)



# Echantillonnage

- Echantillonnage théorique  
→ multiplication par une brosse de Dirac

$$\underline{\Pi}_{\Delta x \Delta y}(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - m\Delta x, y - n\Delta y)$$

→ image échantillonnée

$$\check{f}(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot \delta(x - m\Delta x, y - n\Delta y)$$

- Conséquence dans le domaine fréquentiel

$$\mathcal{F}\left[\underline{\Pi}_{\Delta x \Delta y}(x, y)\right] = \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{\Delta y} \underline{\Pi}_{\Delta x \Delta y}(x, y) = \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{\Delta y} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(u - \frac{k}{\Delta x}, v - \frac{l}{\Delta y})$$

d'où  $\check{F}(u, v) = F(u, v) * \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{\Delta y} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(u - \frac{k}{\Delta x}, v - \frac{l}{\Delta y})$

$$\check{F}(u, v) = \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{\Delta y} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F(u - \frac{k}{\Delta x}, v - \frac{l}{\Delta y})$$

→ double périodisation du spectre en u et v.

# Echantillonnage

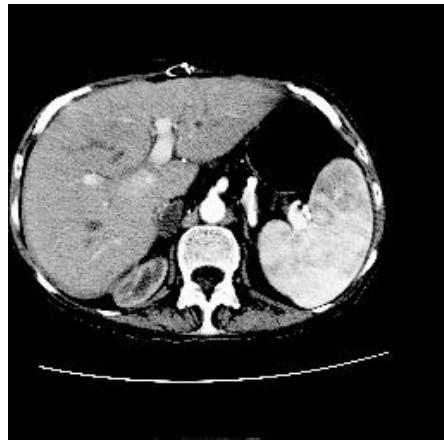
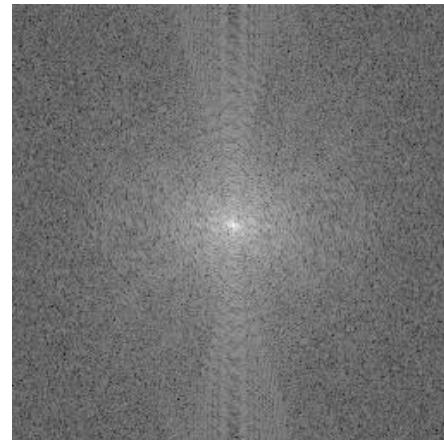


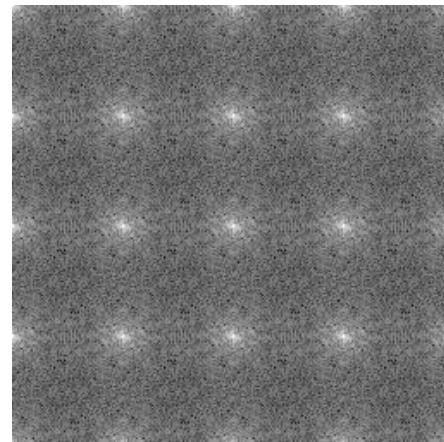
image initiale



spectre d'amplitude



zoom sur l'image échantillonnée



spectre d'amplitude de l'image échantillonnée

# Echantillonnage

- *hypothèse*

le spectre est à bande limitée bornée par  $u_{\max}$  et par  $v_{\max}$

→  $|F(u,v)|=0$  pour  $|u|>u_{\max}$  et  $|v|>v_{\max}$

→ le spectre est entièrement contenu dans un rectangle de côté  $2u_{\max} \quad 2v_{\max}$

$\Delta x$  et  $\Delta y$  trop grands → recouvrement des différentes répliques des spectres

→ repliement spectral ou « aliasing »

fréquences de Shannon  
ou de Nyquist.

$$\text{limite } \frac{1}{\Delta x} < 2u_{\max} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\Delta y} < 2v_{\max}$$

Les erreurs de repliement ne peuvent pas être supprimées par filtrage ultérieur.

# Echantillonnage

Si  $\Delta x$  et  $\Delta y$  respectent la condition de Shannon :

$$\frac{1}{\Delta x} > 2u_{\max} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\Delta y} > 2v_{\max}$$

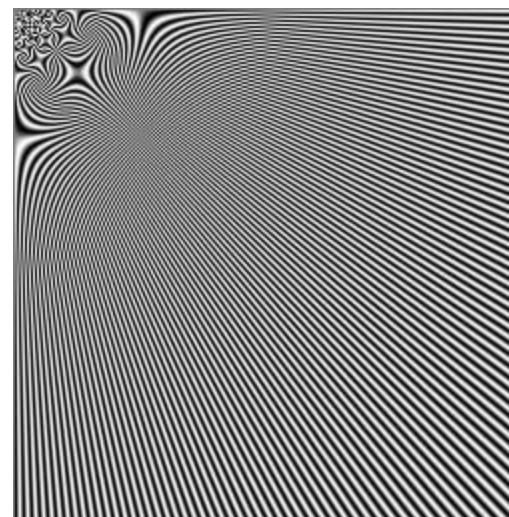
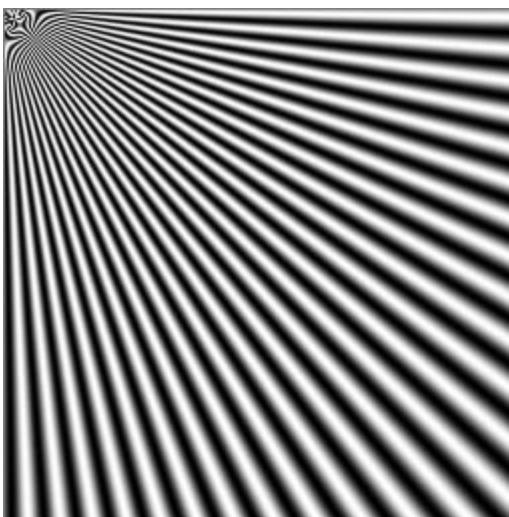
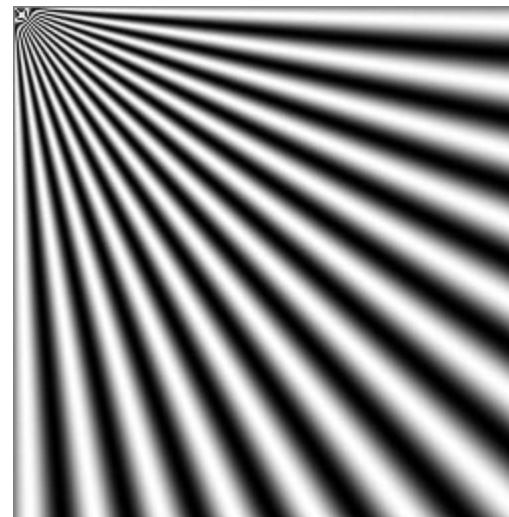
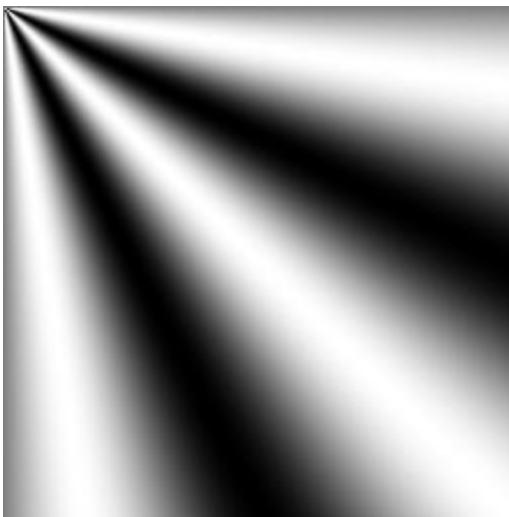
toute l'information est conservée

Si le spectre n'est pas à bande limitée, il y a forcément perte d'information par repliement spectral

- Conséquence du repliement spectral : effets de Moiré

# Echantillonnage

## Effets de Moiré



# Restitution

- Restitution par filtrage passe-bas

$$F_r(u, v) = \tilde{F}(u, v) \cdot R(u, v)$$

$R(u, v)$  filtre de restitution

Filtre idéal :  $R(u, v) = \prod \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{\Delta y} (u, v) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$  (filtre cardinal idéal)

- Image reconstruite

$$f_r(x, y) = \tilde{f}(x, y) * \text{sinc}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \text{sinc}\left(\frac{y}{\Delta y}\right)$$

$$f_r(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(m \cdot \Delta x, n \cdot \Delta y) \cdot \delta(x - m \cdot \Delta x, y - n \cdot \Delta y) * \text{sinc}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \text{sinc}\left(\frac{y}{\Delta y}\right)$$

$$f_r(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(m \cdot \Delta x, n \cdot \Delta y) \cdot \text{sinc}\left(\frac{x}{\Delta x} - m\right) \text{sinc}\left(\frac{y}{\Delta y} - n\right)$$

formule d'interpolation de Shannon

## exemples de fonctions de restitution utilisées en pratique

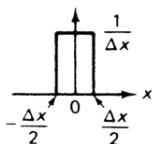
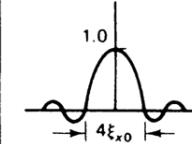
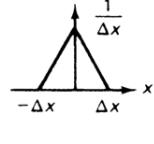
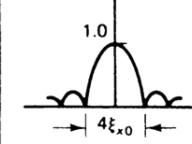
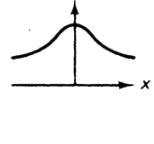
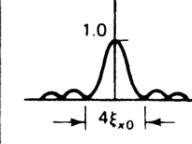
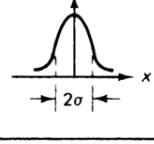
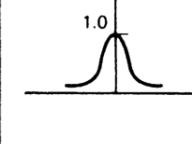
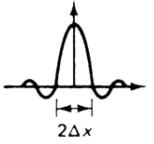
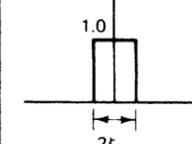
One dimensional interpolation function	Diagram	Definition $p(x)$	Two-dimensional interpolation function $p_d(x, y) = p(x)p(y)$	Frequency response $P_d(\xi_1, \xi_2)$	$P_d(\xi_1, 0)$
Rectangle (zero-order hold) ZOH $p_o(x)$		$\frac{1}{\Delta x} \text{rect}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)$	$p_o(x)p_o(y)$	$\text{sinc}\left(\frac{\xi_1}{2\xi_{x0}}\right)\text{sinc}\left(\frac{\xi_2}{2\xi_{y0}}\right)$	
Triangle (first-order hold) FOH $p_1(x)$		$\frac{1}{\Delta x} \text{tri}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)$ $p_o(x) \odot p_o(x)$	$p_1(x)p_1(y)$	$\left[\text{sinc}\left(\frac{\xi_1}{2\xi_{x0}}\right)\text{sinc}\left(\frac{\xi_2}{2\xi_{y0}}\right)\right]^2$	
$n$ th-order hold $n = 2$ , quadratic $n = 3$ , cubic splines $p_n(x)$		$p_o(x) \odot \dots \odot p_o(x)$ $n$ convolutions	$p_n(x)p_n(y)$	$\left[\text{sinc}\left(\frac{\xi_1}{\xi_{x0}}\right)\text{sinc}\left(\frac{\xi_2}{\xi_{y0}}\right)\right]^{n+1}$	
Gaussian $p_g(x)$		$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]$	$\frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}\right]$	$\exp[-2\pi^2\sigma^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)]$	
Sinc		$\frac{1}{\Delta x} \text{sinc}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)$	$\frac{1}{\Delta x \Delta y} \text{sinc}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \text{sinc}\left(\frac{y}{\Delta y}\right)$	$\text{rect}\left(\frac{\xi_1}{2\xi_{x0}}\right) \text{rect}\left(\frac{\xi_2}{2\xi_{y0}}\right)$	

Image interpolation functions;  $\xi_{x0} = \frac{1}{2\Delta x}$ ,  $\xi_{y0} = \frac{1}{2\Delta y}$ .

# Restitution



image initiale



image restituée par extrapolateur  
d'ordre 0



image restituée par filtrage idéal



image restituée par interpolateur  
linéaire

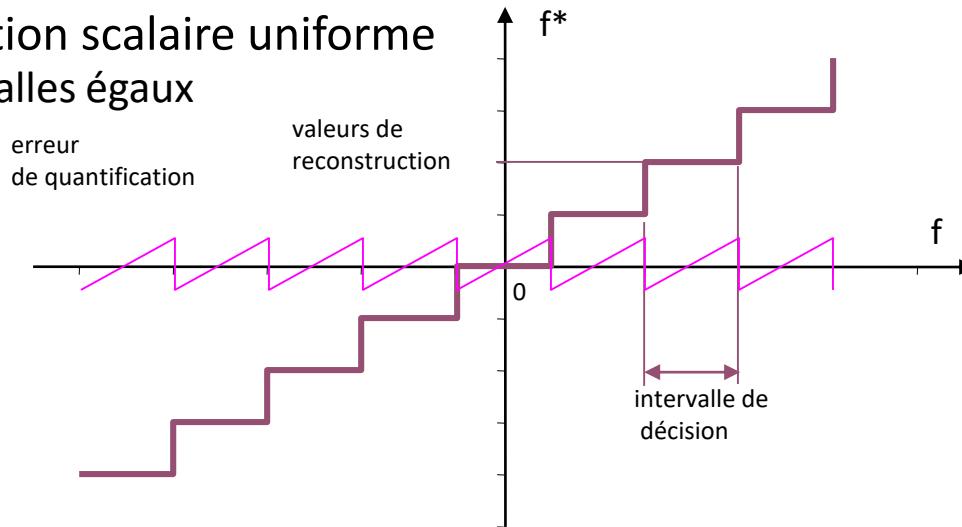


Image restituée avec préfiltrage anti-repliement  
avant échantillonnage

# Quantification

variable continue  $f \rightarrow$  variable discrète  $f^*$

- quantification scalaire uniforme  
→ intervalles égaux



- quantification non uniforme  
exemple : pas de quantification fonction de l'amplitude du signal
- quantification optimale  
→ minimisation de l'erreur de quantification

# Représentation des Images

- Formats d'images

- images **monochromes** ou **en niveaux de gris**

représentées par une fonction  $f(x,y)$  qui traduit une certaine grandeur (intensité lumineuse par exemple) du point  $(x,y)$ . L'image numérisée correspondante sera constituée d'un unique tableau de nombres  $f(k,l)$ .

La quantification se fait le plus souvent sur 8 bits (256 niveaux) parfois sur 12 ou 16 bits

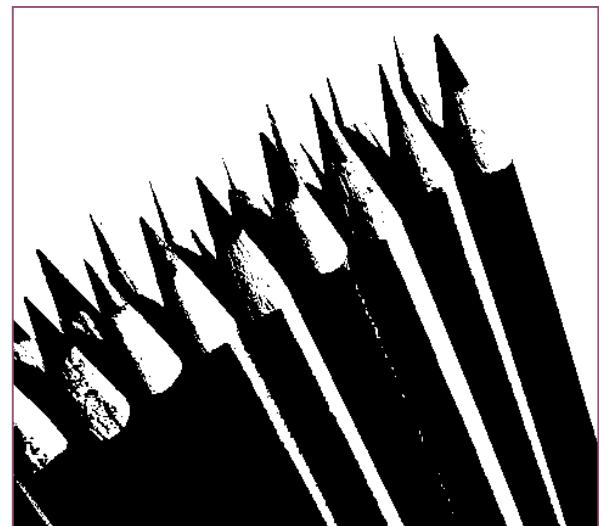
Un cas particulier correspond aux images *binaires* pour lesquelles 2 valeurs seulement sont permises pour  $f(k,l)$ , souvent 0 (noir) et 1 (blanc).



8 bits



4 bits



1 bit

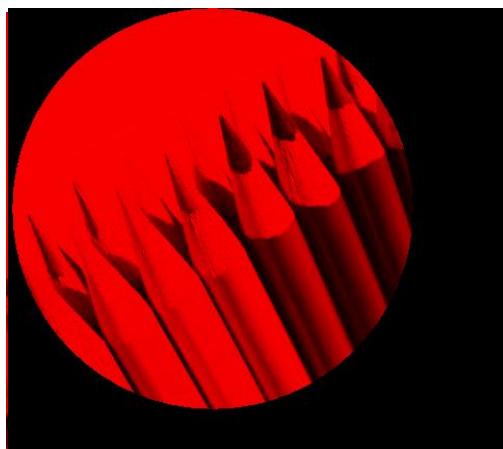
# Représentation des Images

- Formats d'images

- images *trichromes* (ou images couleur)

Une couleur quelconque peut être synthétisée par l'utilisation de 3 couleurs de base. Une image couleur est en pratique trichrome et est représentée par 3 fonctions  $f_1(k,l)$ ,  $f_2(k,l)$ , et  $f_3(k,l)$ .

Le plus souvent, la quantification se fait sur 8 bits par primaire soit 16 millions de couleurs



+

+

# Représentation des Images

- Formats d'images

- les images ***multi-spectrales*** :

Généralisation du cas précédent, conduisant à n tableaux de nombres. Pour la restitution, on peut visualiser chaque composante séparément en monochrome (ou en fausses couleurs), ou affecter une couleur à chaque bande spectrale et faire la synthèse. Les couleurs résultantes n'ont pas de réalité physique.



Vraies couleurs



Fausses couleurs

Proche infra-rouge → rouge  
Rouge → vert  
Vert → bleu

(source: ign: J-P. Souchon & C. Thom)

# Représentation des Images

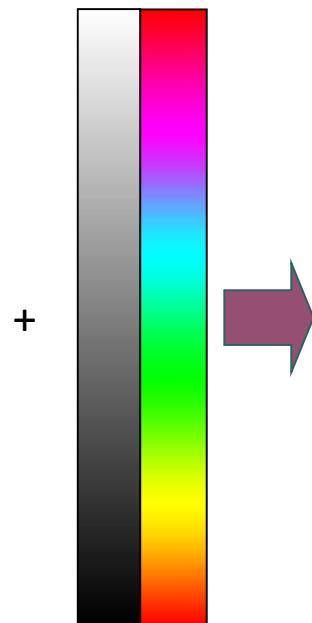
- Formats d'images
  - Les images en *fausses couleurs*

Représentations colorées d'images monochromes ou multi-spectrales

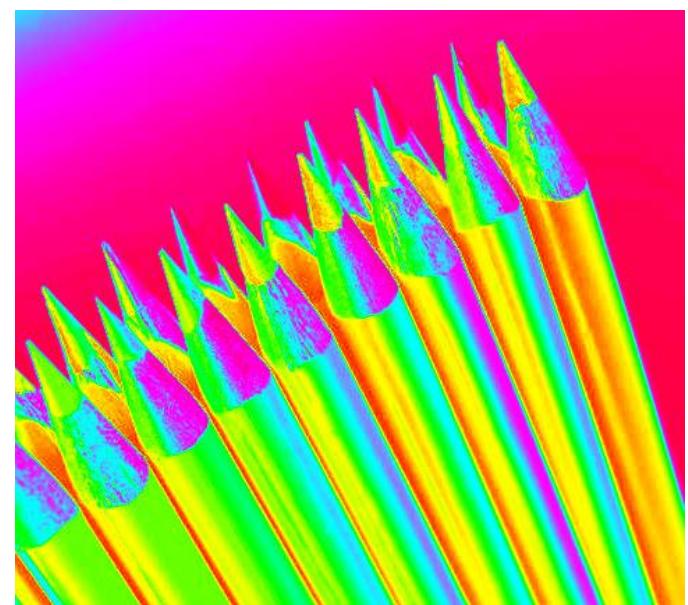
→ meilleure lisibilité



*Image monochrome*



*Palette (LUT)*



*image en fausses couleurs*

# Représentation des Images

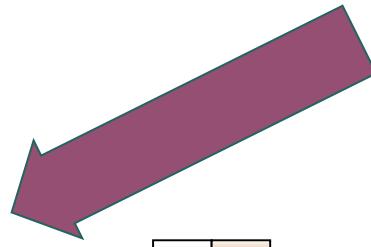
- Formats d'images

- Les images en **couleurs indexées**

Réduction des trois bandes RVB à une image sur 8 bits associée à une palette de 256 couleurs



Image sur 8 bits



+



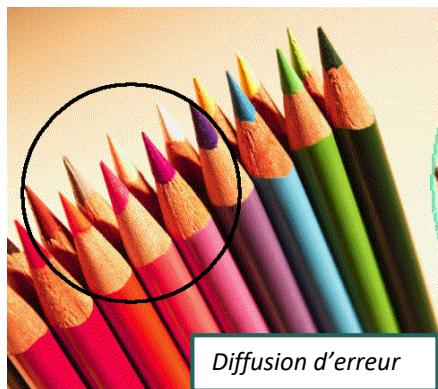
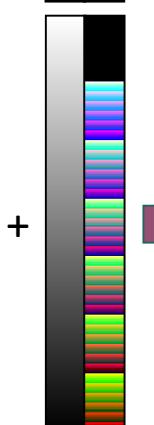
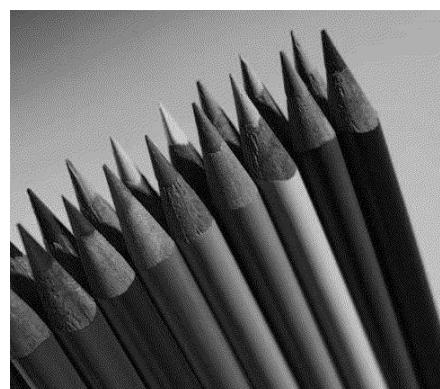
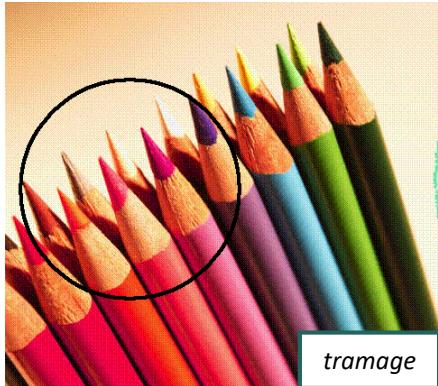
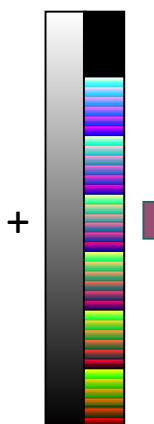
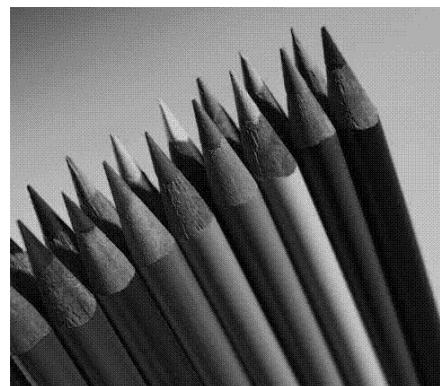
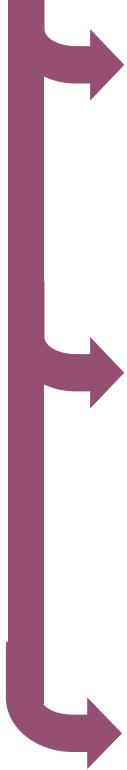
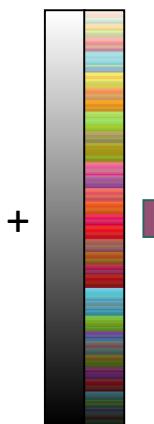
image en couleurs indexées



Vraies couleurs



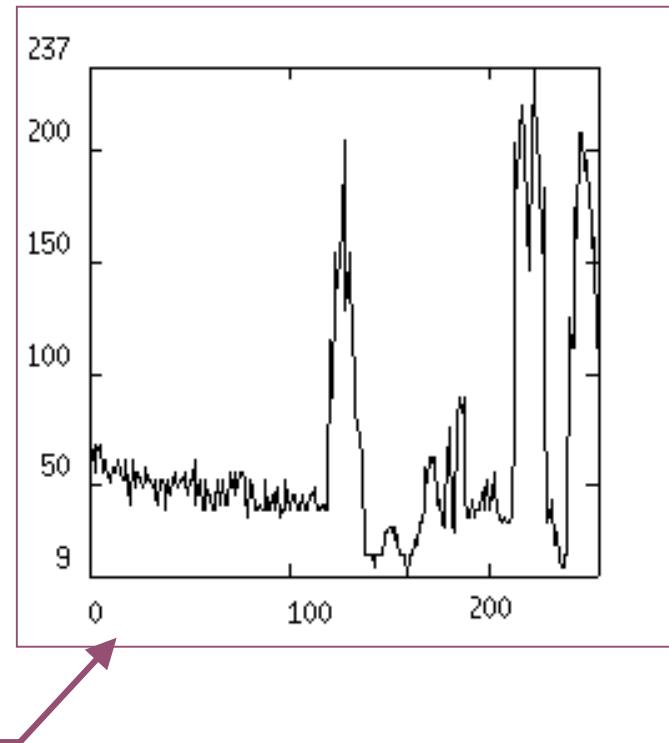
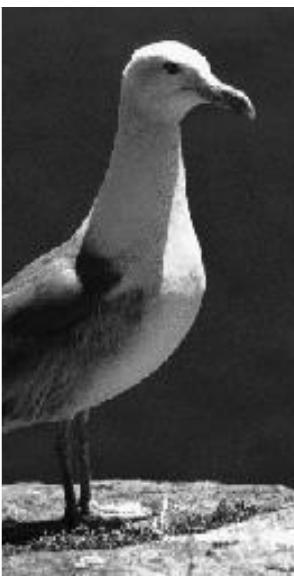
Vraies couleurs



# Traitements de base

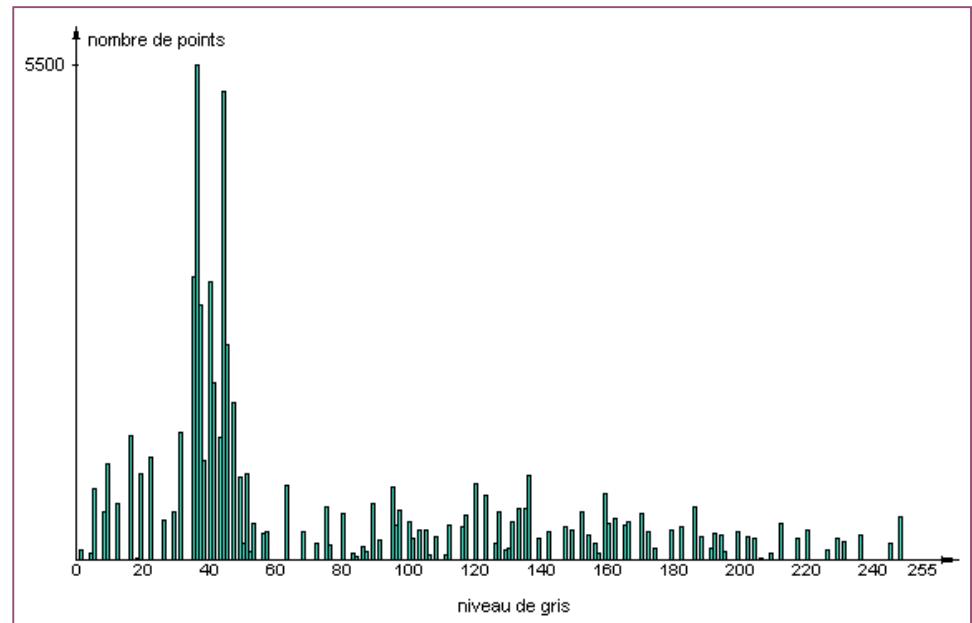
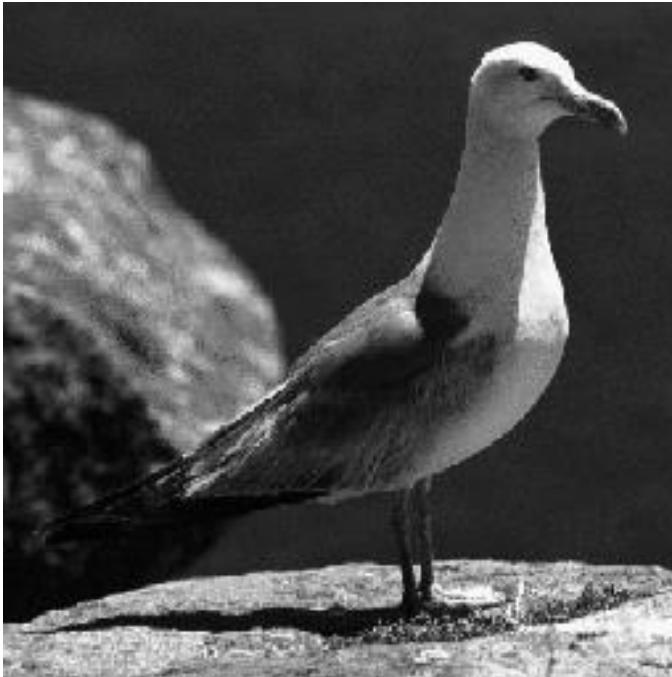
# Descripteurs

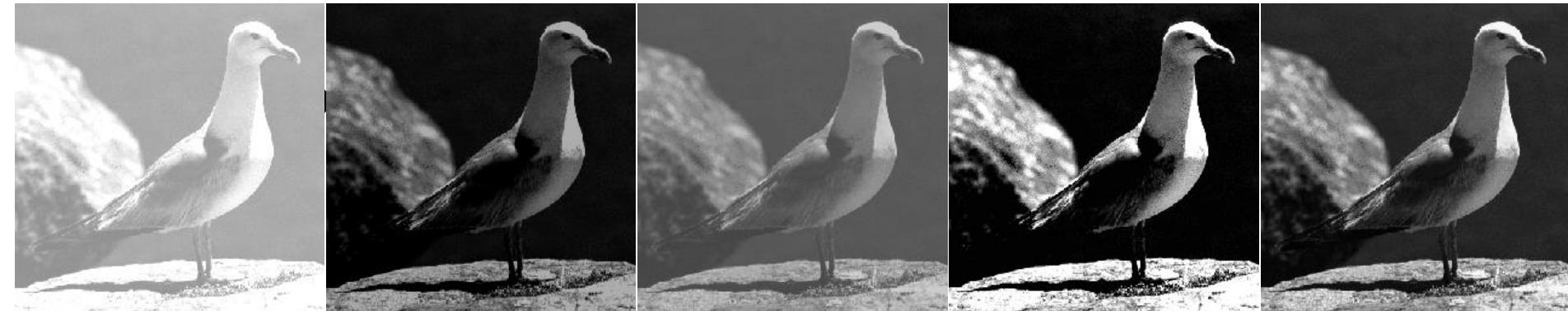
- Profil de densité



# Descripteurs

- Histogramme
  - nombre de points dont le niveau de gris est égal à un niveau donné





Surexposition ➡

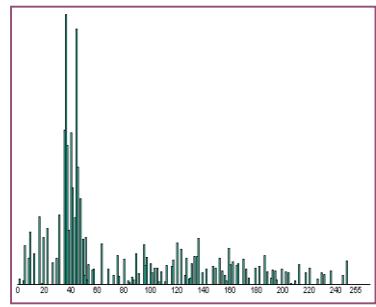
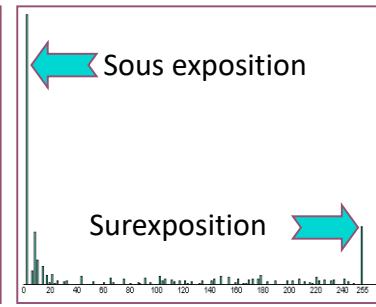
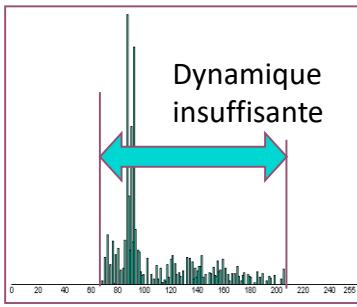
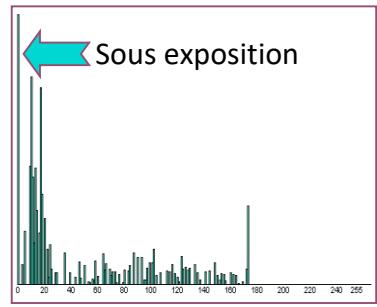
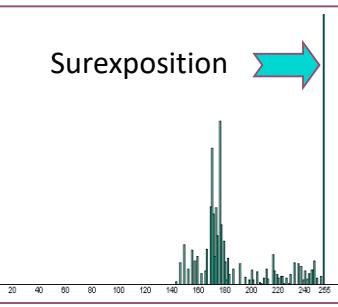
⬅ Sous exposition

Dynamique insuffisante

⬅ Sous exposition

➡ Surexposition

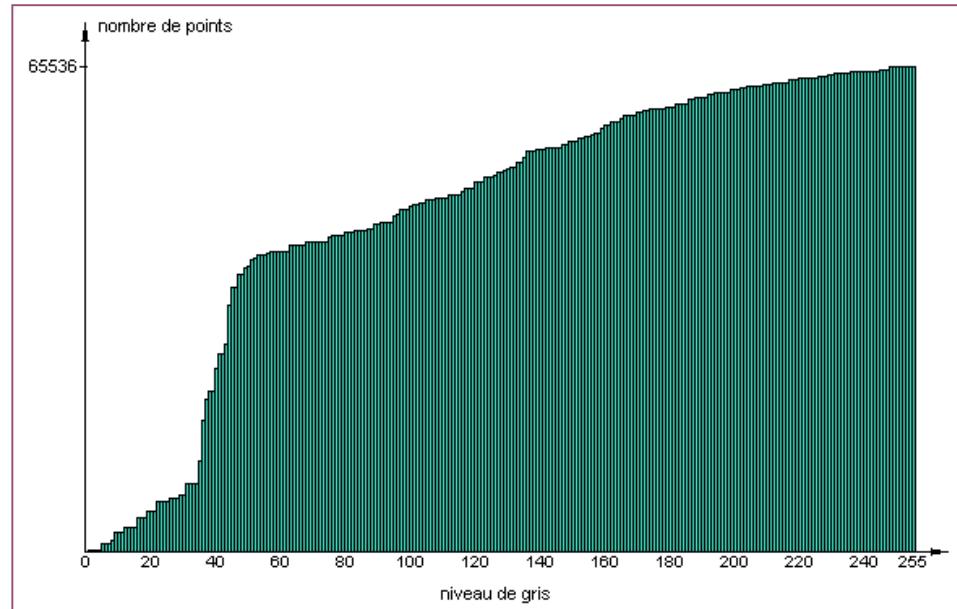
Idéal



# Descripteurs

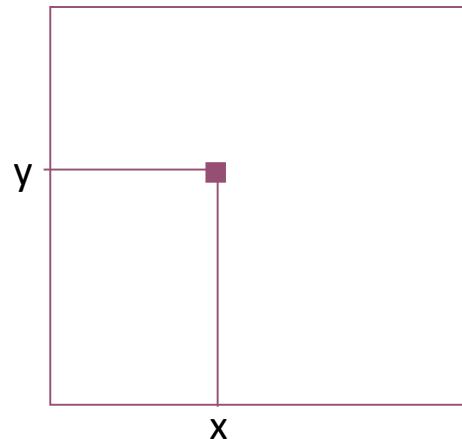
- Histogramme cumulé

→ nombre de points dont le niveau de gris est inférieur ou égal à un niveau donné

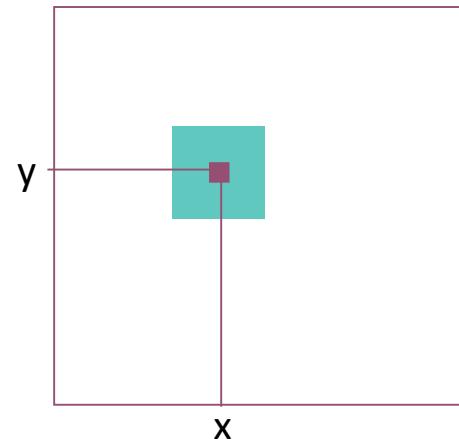


# Traitements d'amélioration d'image

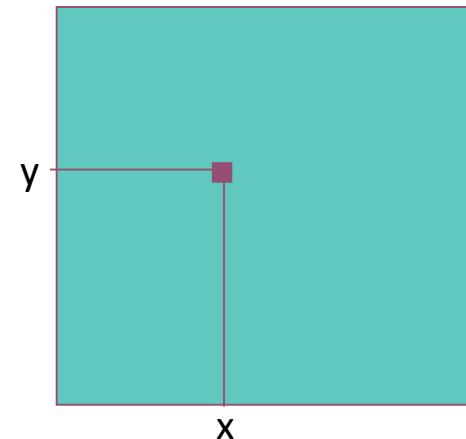
- Types de traitements



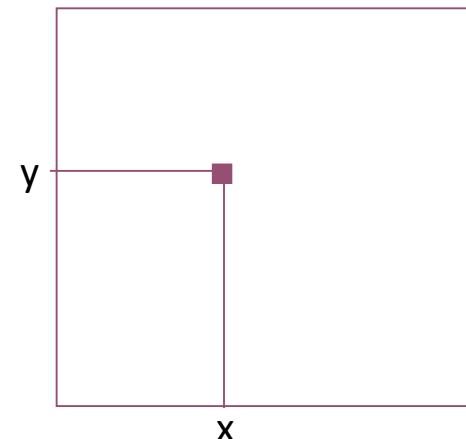
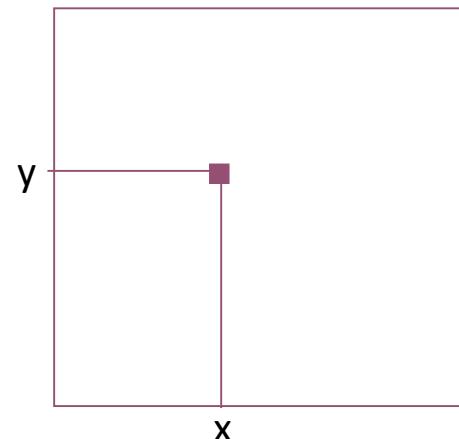
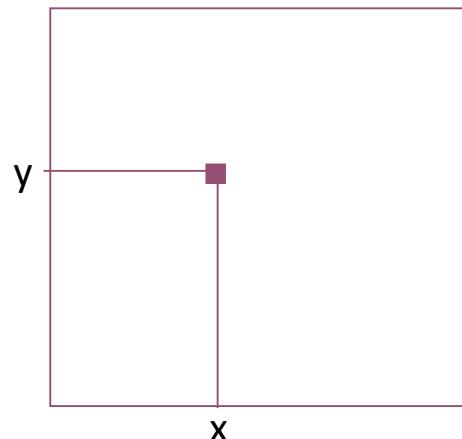
Ponctuel



Local



Global

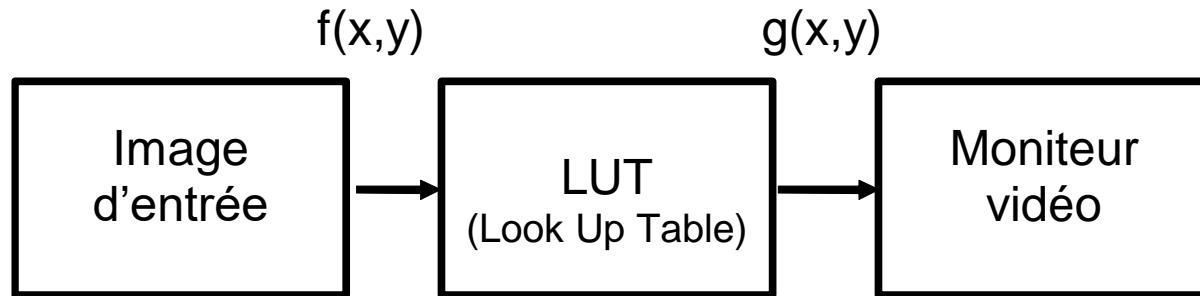


# Opérations ponctuelles

→ Transformation du type

$$g(x,y) = h[f(x,y)]$$

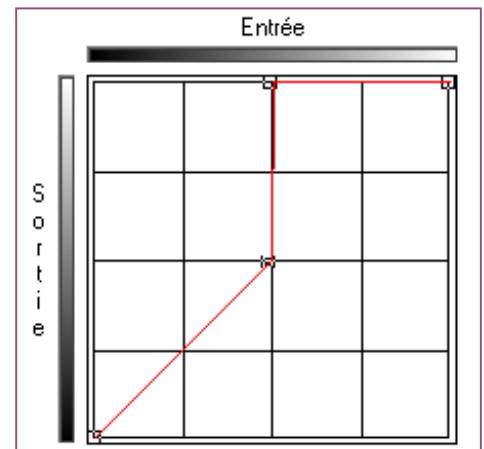
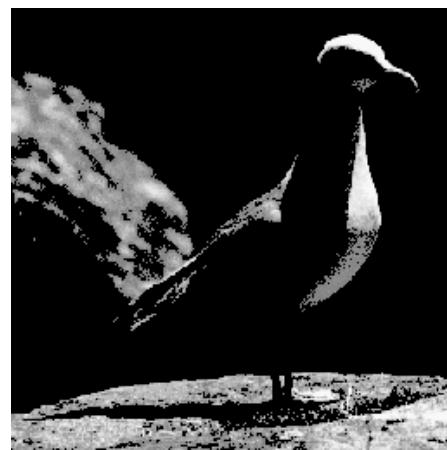
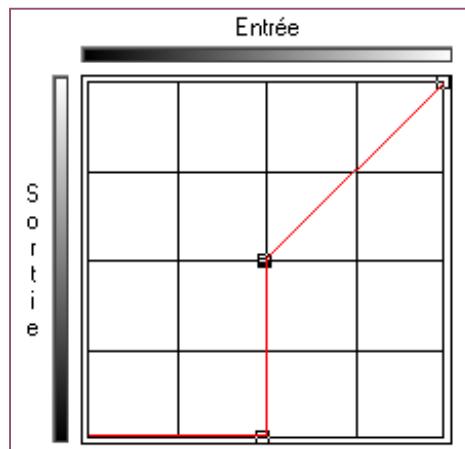
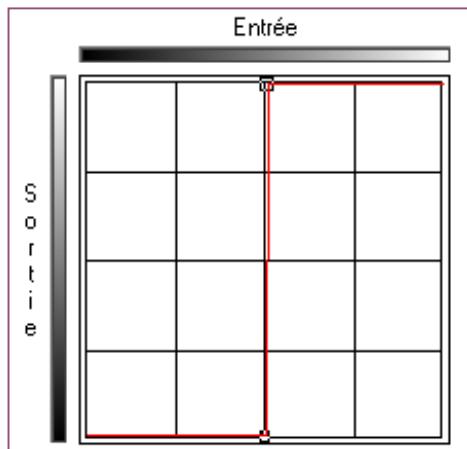
h: loi linéaire ou non, identique sur toute l'image



→ Transformations qui agissent sur le contraste et la dynamique de l'image

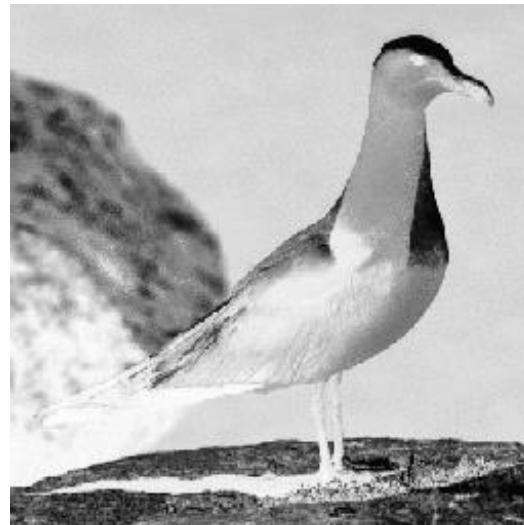
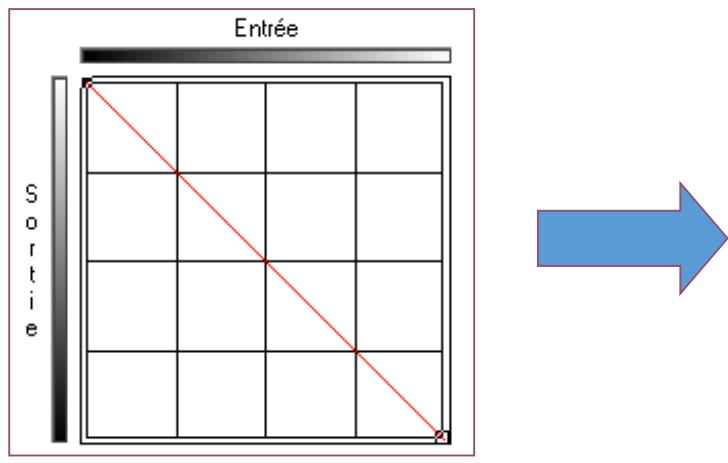
# Opérations ponctuelles

- Seuillages - binarisation



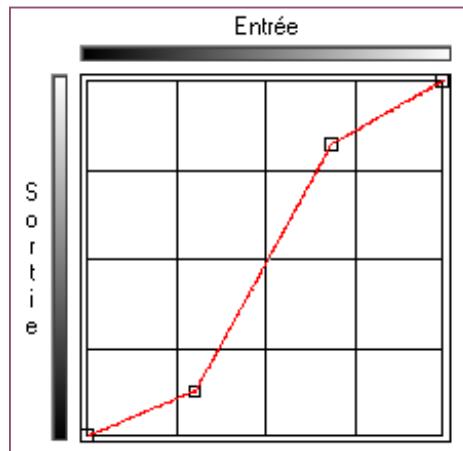
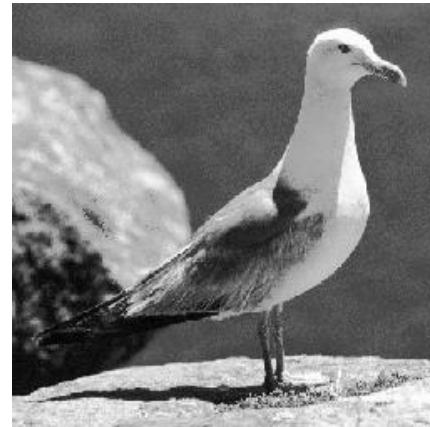
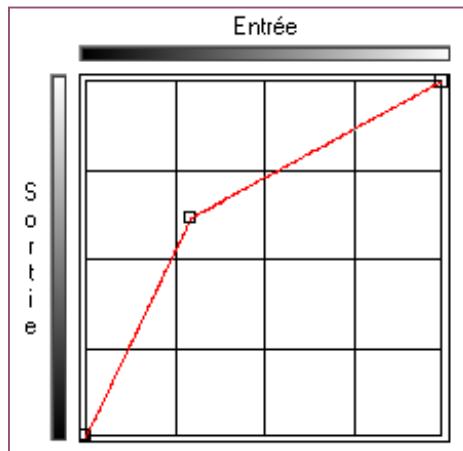
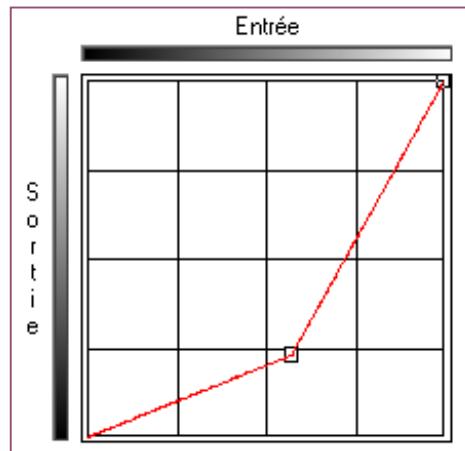
# Opérations ponctuelles

- Inversion positif-négatif



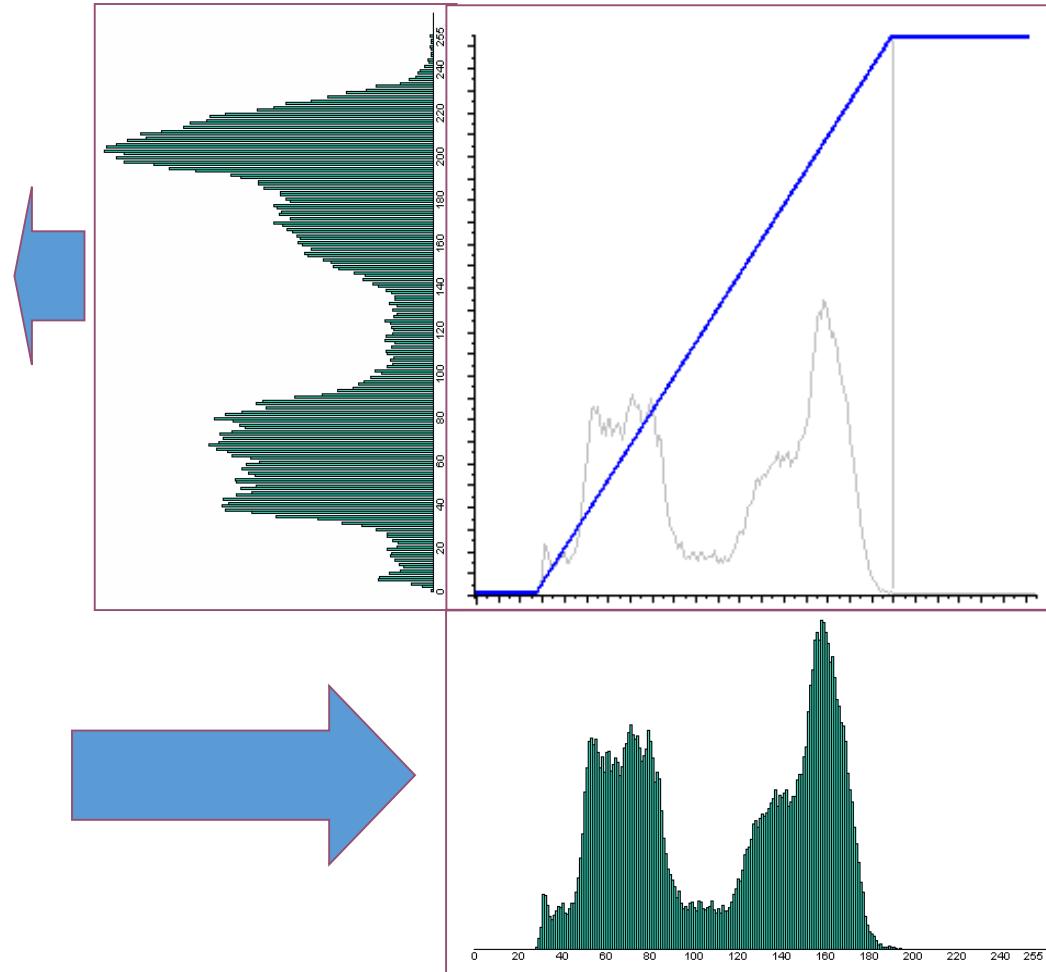
# Opérations ponctuelles

- Renforcement du contraste



# Opérations ponctuelles

- Recadrage linéaire du contraste



# Opérations ponctuelles

- Egalisation d'histogramme

- obtention d'un histogramme globalement plat
- histogramme cumulé linéaire
- entropie maximale

$f(x,y)$  : image d'entrée

$g(x,y)$  : image de sortie → On cherche une relation

$$g(x,y) = h[f(x,y)]$$

telle que l'histogramme de  $g$  soit plat en moyenne

# Opérations ponctuelles

$i$  : niveau de gris

$\Delta_f^i$  intervalle correspondant au niveau  $i$  dans l'image d'entrée

$p_{fi}$  nombre d'échantillons dans ce niveau

$\Delta_g^i$  l'intervalle correspondant dans l'image résultat

$p_{gi}$  nombre d'échantillons

$N^2 \leftarrow$  nombre de points

$Q \leftarrow$  nombre de niveaux

correspondance en probabilité :  $\Delta_f^i p_{fi} = \Delta_g^i p_{gi}$

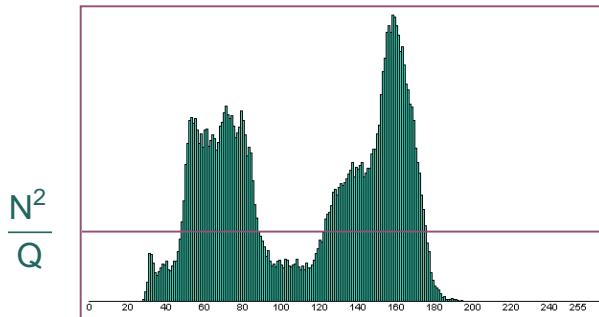
Histogramme plat  $\rightarrow p_{gi} = \text{constante} =$

$$\Delta_g^i = \frac{p_{fi} \cdot \Delta_f^i \cdot Q}{N^2}$$

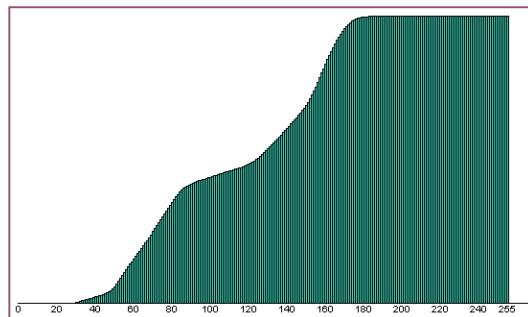
d'où

# Opérations ponctuelles

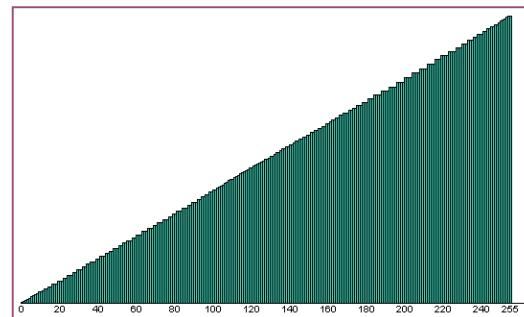
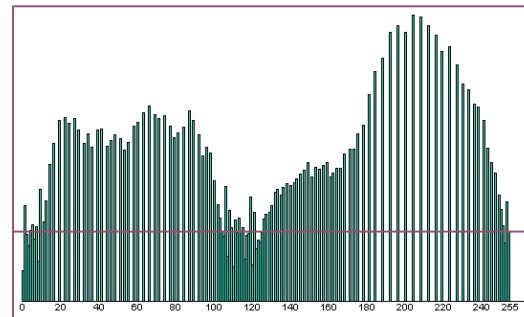
- Exemple



histogrammes



histogrammes  
cumulés

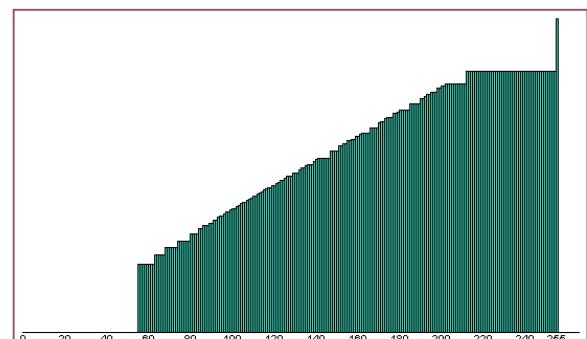
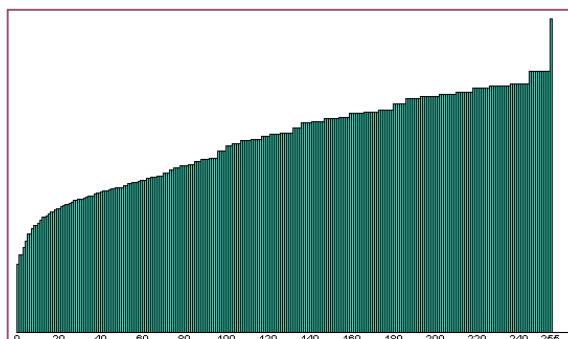
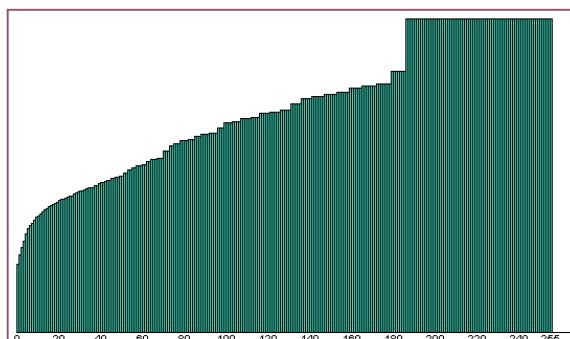
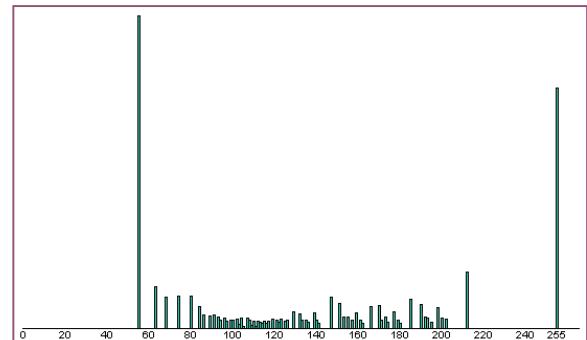
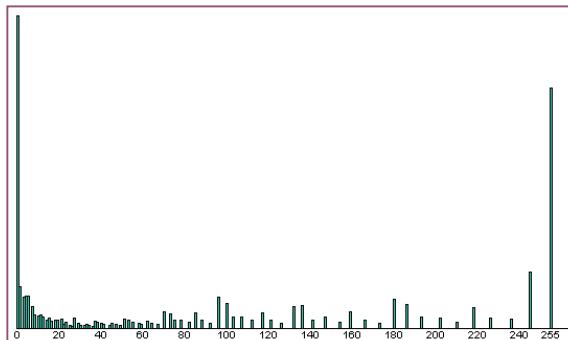
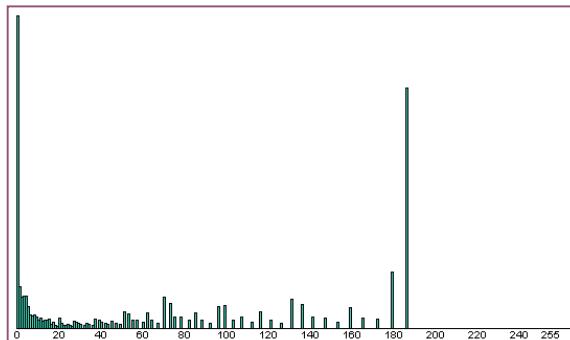


- Exemple

recadrage



égalisation



# Opérations locales

- Filtrage linéaire

$$g(k, l) = f(k, l) * h(k, l) = \sum_m \sum_n f(m, n) \cdot h(k - m, l - n)$$

Réponse impulsionnelle de taille réduite → opération locale sur un petit voisinage de  $(k, l)$

# Opérations locales

$\frac{1}{16}$	1	2	1
2	4	2	
1	2	1	

$$\frac{1}{16} \times (204 * 1 + 255 * 2 + 207 * 1 + 160 * 2 + 130 * 4 + 171 * 2 + 100 * 1 + 154 * 2 + 160 * 1)$$

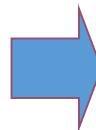
204	255	207	118	109	133	174	139
160	130	171	166	127	151	186	145
100	154	160	118	186	174	142	112
169	112	106	160	192	109	77	59
136	136	171	216	189	94	65	44
171	171	201	213	130	83	80	62
142	169	207	174	136	100	88	77
97	145	189	163	124	97	68	74

	166	165	149	142	153	157
	139	144	150	159	153	133
	134	140	163	166	130	92
	148	166	184	161	109	72
	168	188	187	146	101	76
	166	186	173	134	100	82

# Opérations locales

- Masques types
  - Moyenneur 3x3

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



# Opérations locales

- Lissage avec pondération centrale

$$\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

→ filtrage passe-bas

- rehaussement de contour

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

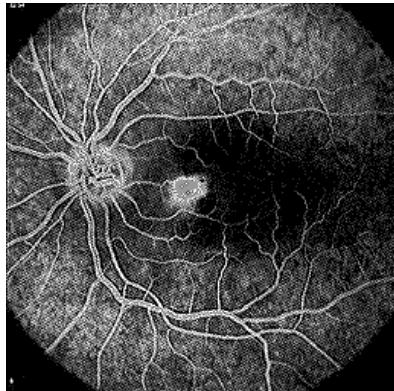


image rehaussée

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

=



image initiale

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

+

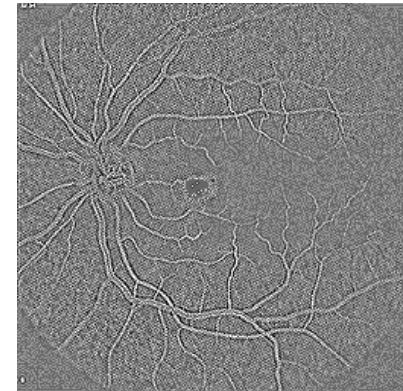


image filtrée passe-haut

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Opérations locales

- **Filtrage d'ordre**

→ combinaison linéaire des pixels du voisinage réarrangés par ordre croissant

$V_{k,l}$  : voisinage de  $L$  points autour du point  $(k,l)$

tri →  $f^{(1)} \leq f^{(2)} \leq \dots f^{(p)} \dots \leq f^{(L)}$

$$g(k,l) = \sum_{p=1}^L C_p \cdot f^{(p)}$$

- **Filtre médian**  $\begin{cases} C_{\frac{L+1}{2}} = 1 \\ C_p = 0 \quad \text{pour} \quad p \neq \frac{L+1}{2} \end{cases}$

# Opérations locales

243	216	243	248	232	216	237
170	255	215	215	215	214	215
191	192	215	191	192	176	192
215	255	255	170	170	175	191
249	215	215	216	215	255	215
243	255	243	255	226	215	255
243	232	249	255	215	254	255

243 216 243 170 255 215 181 192 215

tri

170 181 192 215 215 216 243 243 255

médiane

	215	215	215	215	215
	215	215	215	191	192
	215	215	215	191	192
	243	243	216	215	215
	243	243	226	226	226



Image originale



Moyenneur 5x5



Médian 5x5

# Opérations globales

- Filtrage fréquentiel

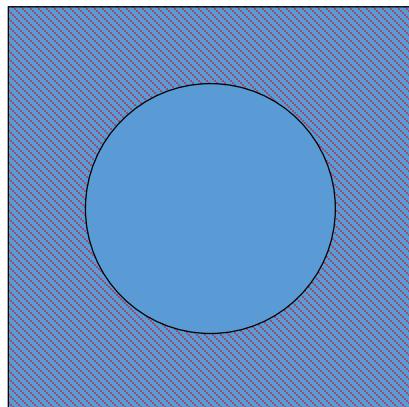
- Domaine spatial :

$$\text{filtrage} = \text{convolution} \quad \rightarrow \quad g(x,y) = f(x,y) * h(x,y)$$

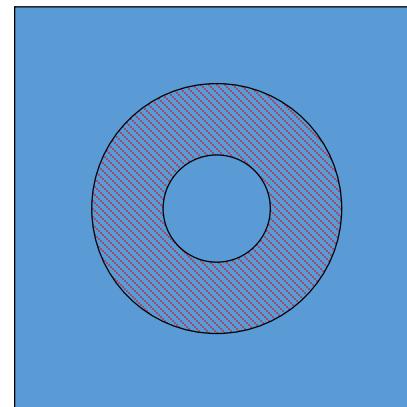
- Domaine fréquentiel :

$$\text{multiplication} \quad G(u,v) = F(u,v) \cdot H(u,v)$$

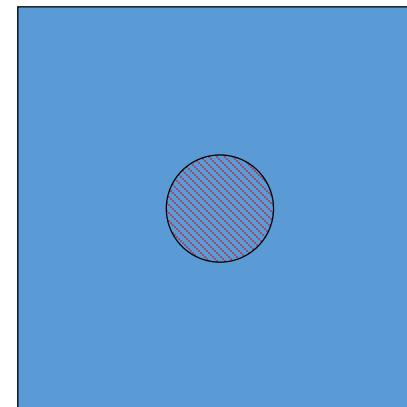
→ sélection de certaines composantes fréquentielles à partir d'un masque zonal



Passe-bas



Coupe-bande



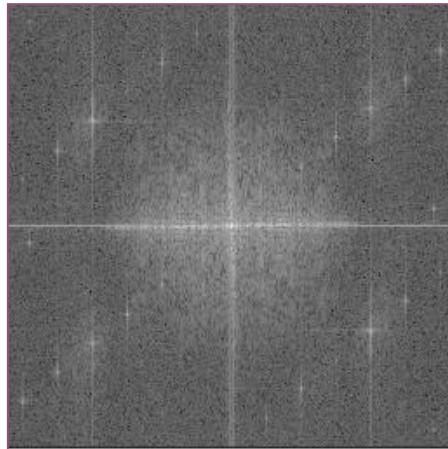
Passe-haut

# Opérations globales

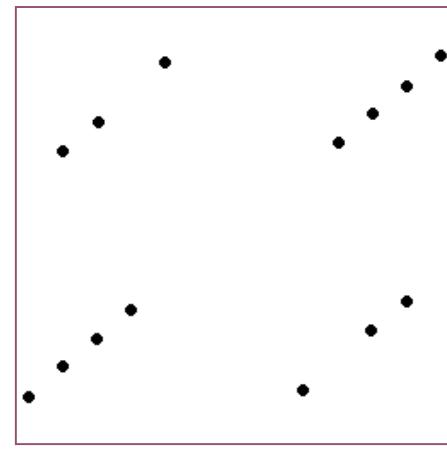
- Exemple



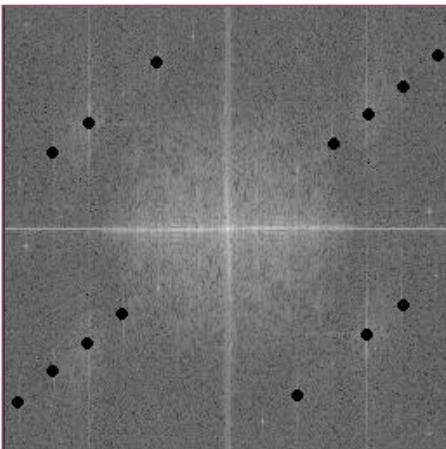
Image initiale



Spectre d'amplitude



Masque



Spectre d'amplitude filtré



Image filtrée

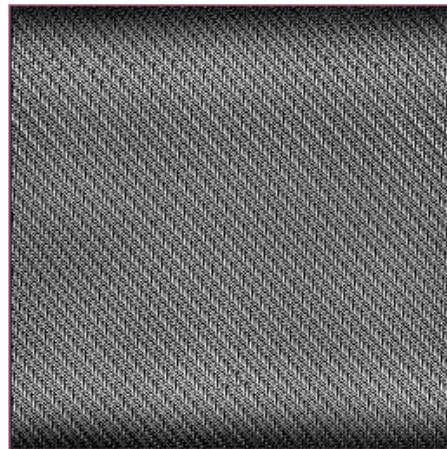


Image différence

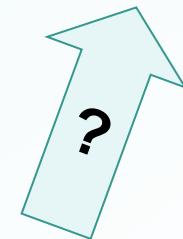
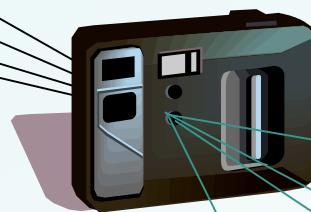
## Traitement d'image

# Techniques de restauration d'image

F. Denis, F. Dupont

# Problématique

## ■ Dégradations de l'image



# Problématique

## ■ Dégradations de l'image

- Acquisition

- Mauvaise mise au point
- Mouvement objet ↔ système d'acquisition
- Distorsions géométriques
- Bruit des capteurs
- Perturbations (atmosphériques, ....)

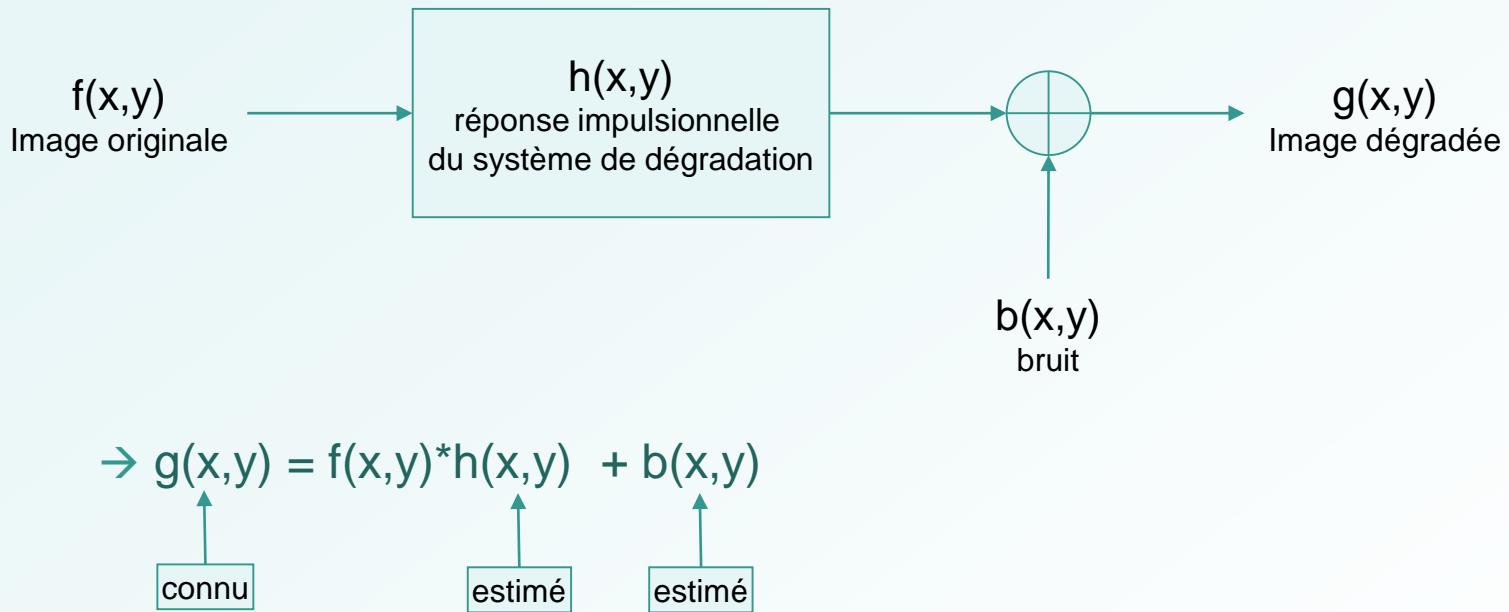
- Changement de support

- Reproduction
- Transmission
- Mémorisation

→ Compensation des dégradations = Restauration

# Problématique

→ Modélisation par un système linéaire invariant



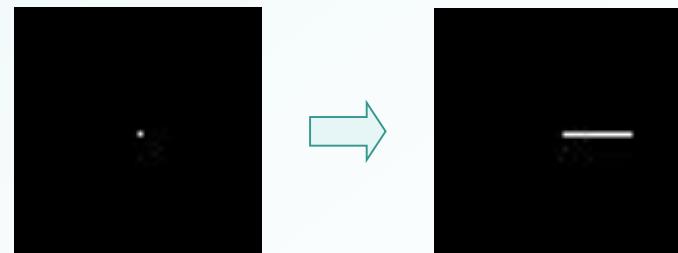
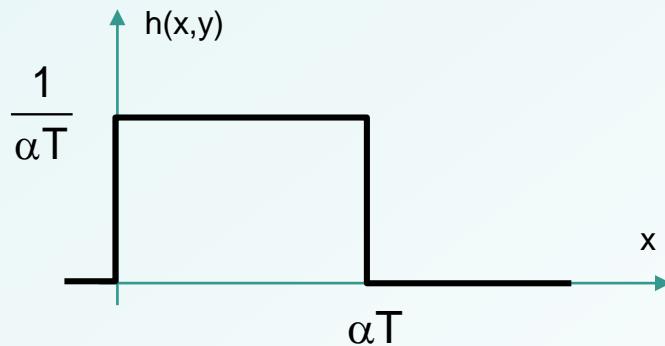
→ nécessité de modéliser les dégradations

# Exemple de dégradations

- Mouvement de caméra

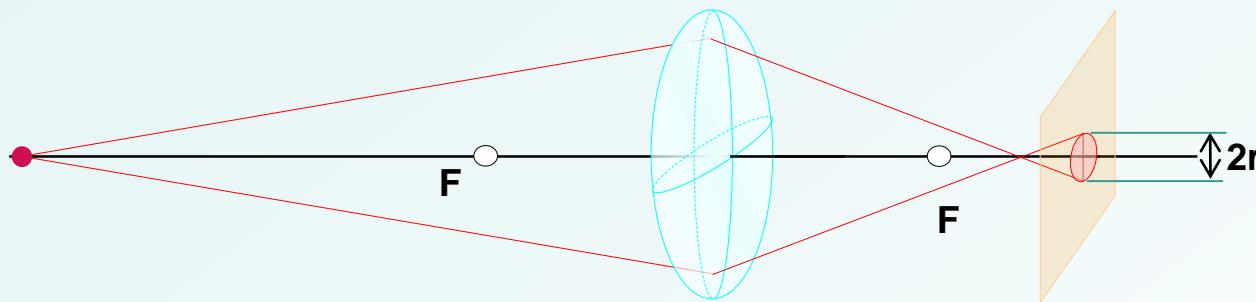
➤ Hypothèses:      déplacement selon x  
                          temps d'exposition: T  
                          vitesse de déplacement:  $\alpha$

→ pendant la durée de l'acquisition, un point s'est déplacé de  $\alpha T$ .



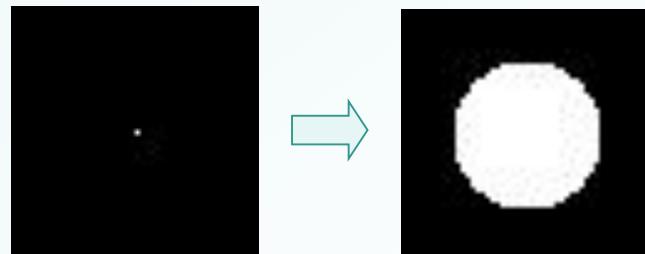
$$h(x, y) = \frac{1}{\alpha T} \Pi\left(\frac{x}{\alpha T} - \frac{1}{2}\right) \cdot \delta(y)$$

# Défocalisation



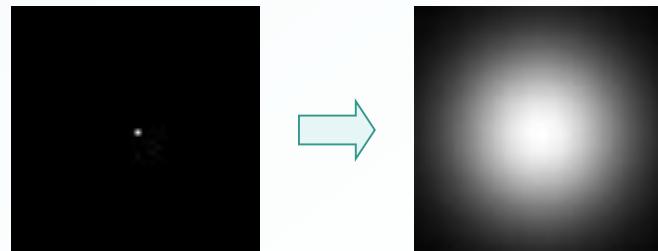
$$h(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x^2 + y^2 \leq r^2 \\ 0 & \text{pour } x^2 + y^2 > r^2 \end{cases}$$

$r$  : paramètre d'ouverture <



# Turbulences atmosphériques

$$h(x, y) = e^{-\pi\alpha^2(x^2+y^2)}$$



# Restauration par filtrage inverse

## ■ Filtrage inverse

- Hypothèse

Système convolutif, **sans bruit additif.**

$$g(x,y) = f(x,y) * h(x,y)$$

→ Dans le domaine spectral

$$G(u,v) = F(u,v) \cdot H(u,v)$$

→

$$F(u,v) = \frac{G(u,v)}{H(u,v)}$$

→  $F(u,v)$  s'obtient en divisant  $G(u,v)$  par  $H(u,v)$

→ L'image est filtrée par un filtre de réponse impulsionnelle  $\frac{1}{H(u,v)}$

$f(x,y)$  est ensuite obtenue par transformation de Fourier inverse



Problème si  $H(u,v) = 0$

# Restauration par filtrage inverse

## ■ Filtrage pseudo-inverse

Pour stabiliser le filtrage, on utilise un filtre de restauration

$$\begin{cases} H_r(u,v) = \frac{1}{H(u,v)} & \text{si } H(u,v) > \varepsilon \\ H_r(u,v) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$H_r(u,v)$  : inverse généralisé de  $H$

# Restauration par filtrage inverse

## ■ Modèle avec bruit additif

$$g(x,y) = f(x,y) * h(x,y) + b(x,y)$$

$$\rightarrow G(u,v) = F(u,v) \cdot H(u,v) + B(u,v) \rightarrow F(u,v) = \frac{G(u,v) - B(u,v)}{H(u,v)}$$

→ Pour les faibles valeurs de  $G(u,v)$ , le terme  $\frac{B(u,v)}{H(u,v)}$  peut être prépondérant

→ On limite la restauration aux fréquences pour lesquelles le rapport signal/bruit est élevé

$$\begin{cases} H'(u,v) = \frac{1}{H(u,v)} & \text{pour } u^2 + v^2 \leq \rho^2 \\ H'(u,v) = 1 & \text{pour } u^2 + v^2 > \rho^2 \end{cases}$$

$\rho$ : fréquence au-delà de laquelle le bruit est dominant

# Restauration par filtrage inverse

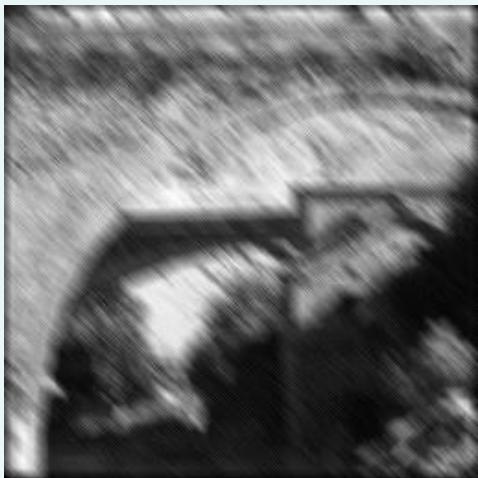
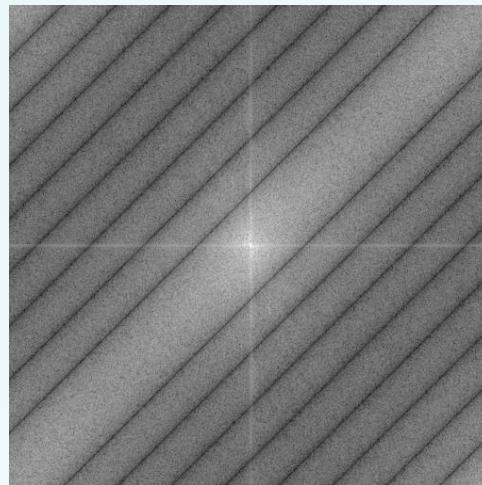
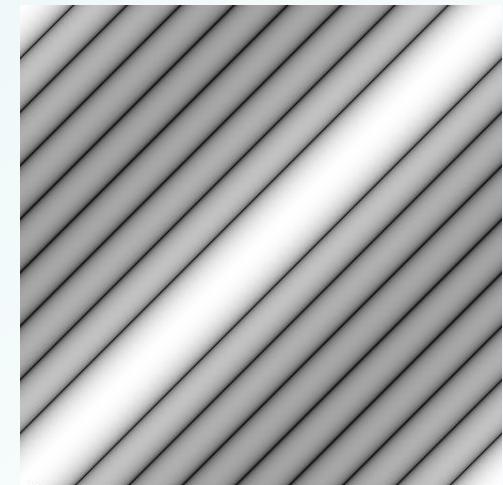


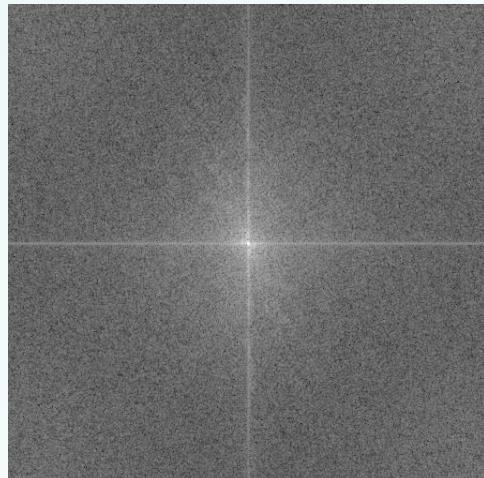
Image dégradée



Spectre d'amplitude



Spectre d'amplitude de la dégradation



Spectre filtré

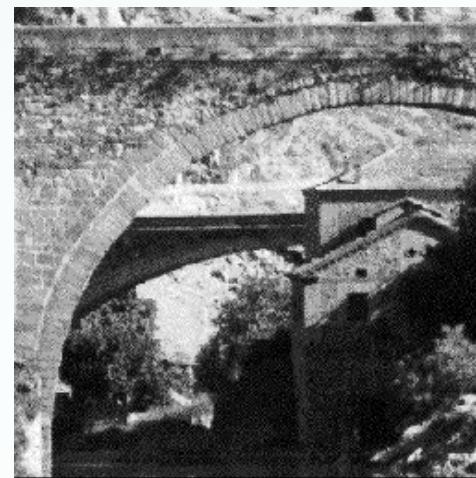


Image restaurée

# Restauration par filtrage de Wiener

- Recherche d'une estimation  $\hat{f}(x, y)$  de  $f(x, y)$  qui minimise, au sens statistique, l'erreur quadratique moyenne

$$\sigma^2 = E\left[\left(\hat{f}(x, y) - f(x, y)\right)^2\right]$$

- réponse du filtre de Wiener obtenu sous ces conditions

$$H(u, v) = \frac{H^*(u, v) \cdot S_f(u, v)}{S_f(u, v) \cdot |H(u, v)|^2 + S_b(u, v)}$$

$S_f(u, v)$ : densité spectrale de puissance de l'image idéale  
 $S_b(u, v)$ : densité spectrale de puissance du bruit

$$\hat{f}(x, y) = F^{-1}\left[\hat{F}(u, v)\right] = F^{-1}\left[\frac{G(u, v) \cdot H^*(u, v) \cdot S_f(u, v)}{S_f(u, v) \cdot |H(u, v)|^2 + S_b(u, v)}\right]$$

$$\hat{f}(x, y) = F^{-1}\left[\frac{G(u, v) \cdot |H(u, v)|^2}{H(u, v) \cdot \left\{ |H(u, v)|^2 + \frac{S_b(u, v)}{S_f(u, v)} \right\}}\right]$$

# Restauration par filtrage de Wiener

- Remarque

➤ Si l'image n'est pas bruitée ,  $S_b(u,v) = 0$

$$\hat{f}(x, y) = \mathbf{F}^{-1} \left[ \frac{G(u, v)}{H(u, v)} \right]$$

→ On retrouve la formule du filtrage inverse

# Lissage de Wiener

s'il n'y a pas de distorsion, mais seulement du bruit  $H(u,v) = 1$

$$H_r(u,v) = \frac{S_f(u,v)}{S_f(u,v) + S_b(u,v)}$$

$$S_{sb}(u,v) = \frac{S_f(u,v)}{S_b(u,v)} \quad \text{rapport signal / bruit}$$

$$H_r(u,v) = \frac{\frac{S_f(u,v)}{S_b(u,v)}}{\frac{S_f(u,v)}{S_b(u,v)} + 1} = \frac{S_{sb}(u,v)}{S_{sb}(u,v) + 1}$$

- lorsque  $S_{sb}(u,v)$  est grand,  $H'(u,v) \approx 1$
- lorsque  $S_{sb}(u,v) \ll 1$ ,  $H'(u,v) \approx S_{sb}(u,v)$

# Techniques de « Inpainting »

Rappel restauration

$$g = f^*h + b$$

$g$  = image observée

$f$  = image d'origine

$h$  = dégradation, ici opérateur de masquage

-> l'information est perdue sur un domaine D

$b$  = bruit



Problème mal posé, une infinité de solution

$$\inf_U J(u) = \inf_U \int_{\Omega} (\Re u(x) - f(x))^2 d\Omega + \lambda \int_{\Omega} \Psi(\|\nabla u(x)\|) d\Omega$$

**Terme d'attache aux données      Terme de régularisation**

$$\Re u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in D \\ u(x) & \text{si } x \notin D \end{cases}$$

- On cherche  $u$  tel que  $\Re u$  soit proche de  $f$
- Avec un terme de régularité ( $\lambda > 0$ )

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\Re^* f - 2\Re^* \Re u + \lambda \operatorname{div}\left(\frac{\Psi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|} \nabla u\right)$$

**Summer:** the season between spring and autumn comprising in the northern hemisphere usually the months of June, July and August, or as reckoned astronomically extending from June solstice to September equinox (Merriam-Webster Dictionary). Soon, the leaves will start to fall and it will be autumn.

Trees will not look as beautiful. Then, winter will come and snow will dress New York in white. Spring will follow and everything will repeat again.

**Summer:** the season between spring and autumn comprising in the northern hemisphere usually the months of June, July and August, or as reckoned astronomically extending from June solstice to September equinox (Merriam-Webster Dictionary). Soon, the leaves will start to fall and it will be autumn.

Trees will not look as beautiful. Then, winter will come and snow will dress New York in white. Spring will follow and everything will repeat again.

**Summer:** the season between spring and autumn comprising in the northern hemisphere usually the months of June, July and August, or as reckoned astronomically extending from June solstice to September equinox (Merriam-Webster Dictionary). Soon, the leaves will start to fall and it will be autumn.

Trees will not look as beautiful. Then, winter will come and snow will dress New York in white. Spring will follow and everything will repeat again.

**Summer:** the season between spring and autumn comprising in the northern hemisphere usually the months of June, July and August, or as reckoned astronomically extending from June solstice to September equinox (Merriam-





