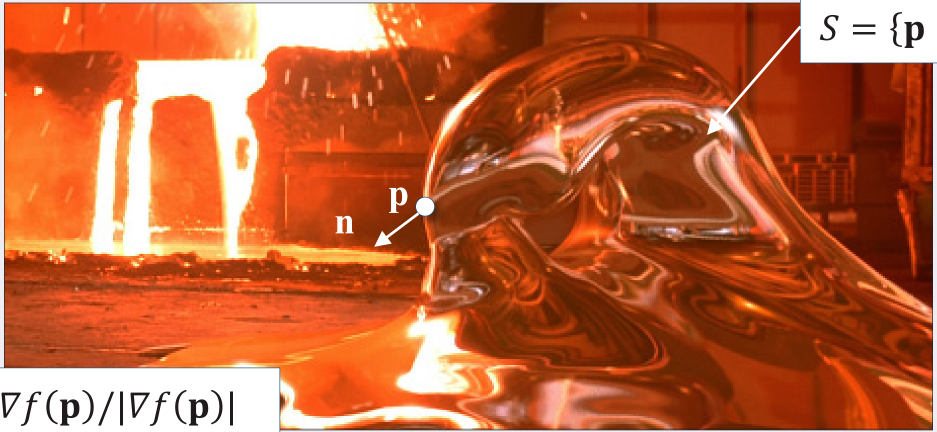
Computer Graphics

From mathematics …

$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$$



$$\mathbf{n} = -\nabla f(\mathbf{p})/|\nabla f(\mathbf{p})|$$

… to the screen

E. Galin
Université Lyon 1

Computer Graphics

Core

Modeling

Ray Tracing

Meshing

Introduction

Introduction

Définition

Les surfaces implicites sont un modèle volumique

Représentation adaptée à la modélisation de volumes de géométrie et de topologie changeante

$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$$

Variété de formes
Modèle compact

Détection de S


Terminator 2 Judgment day


Terminator 2 Judgment day

Modélisation	Animation	Visualisation
Contrôle de forme Raccordements	Habillage de particules Contrôle de mouvement	Intersection $\Delta \cap S$ Approximation de S

LIRIS CNRS
Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Computer Graphics

Mathematics

Définition

Définition

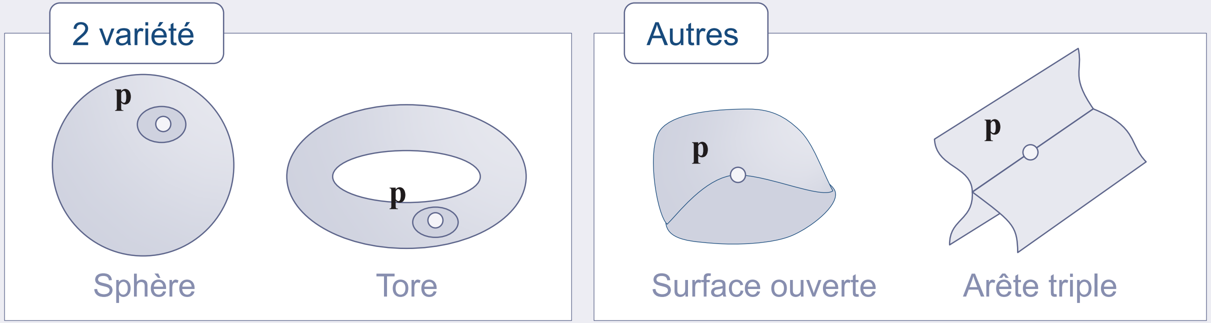
Caractérisation indirecte de la surface $S = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0\}$

Propriétés

Les surfaces implicites sont des formes géométriques à 2 dimensions dans $\mathbf{R}^3$

Une surfaces implicite est une 2 variété

Le voisinage autour de tout point $\mathbf{p}$ de S est équivalent à un disque



Surfaces Eulériennes

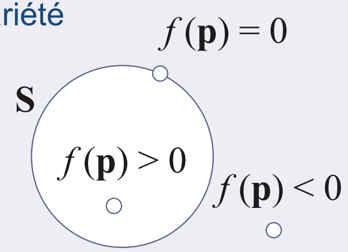
Formule d'Euler pour les maillages $V - E + F = 2 - 2H$

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Propriétés

Théorème des fonctions implicites

Si 0 est une valeur régulière de f, alors la surface implicite $f^{-1}(0)$ est une 2 variété



Théorème de séparation

Une 2 variété sépare $\mathbf{R}^3$ en une surface $\mathbf{S}$ et 2 régions connexes $\mathbf{E}^-$ et $\mathbf{E}^+$
$\mathbf{E}^-$ finie dans la surface $\mathbf{S}$ et $\mathbf{E}^+$ infinie dehors

$$f(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2$$

Convention intérieur extérieur différente selon les modèles

$f(\mathbf{p}) > 0$ | $f(\mathbf{p}) < 0$

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

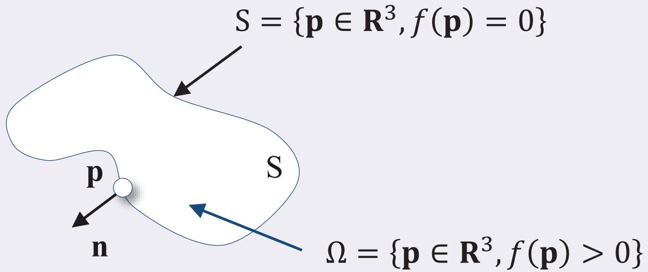
Propriétés

Définition et propriétés

Intérieur de la surface

Gradient

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

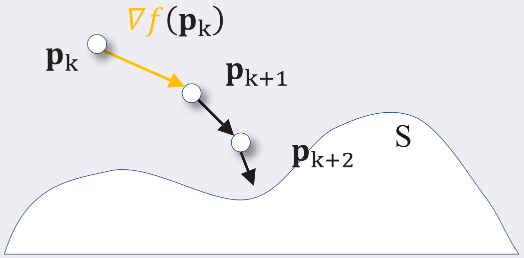


Approximation numérique d'une dérivée

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x+\varepsilon, y, z) - f(x-\varepsilon, y, z)}{2\varepsilon}$$

Normale à la surface

$$\forall \mathbf{p} \in S, \mathbf{n} = -\nabla f(\mathbf{p}) / |\nabla f(\mathbf{p})|$$



Suivi de gradient

Projection d'un point sur la surface

$$\boxed{\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + \varepsilon \nabla o f(\mathbf{p}_k)}$$

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Propriétés

Matrice Hessienne

Matrice carrée $\mathbf{H}\,(f)$ des dérivées partielles secondes

$$\mathbf{H}(f) = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\mathbf{H}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{H}$ définie et symétrique pour f de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^3$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f(x+\varepsilon, y, z) - 2f(x, y, z) + f(x-\varepsilon, y, z)}{2\varepsilon}$$

Applications

Nature des points critiques de la fonction f (annulation de ∇f)

Un point critique $\mathbf{p}$ de f est dégénéré si $\det \mathbf{H}\big(f(\mathbf{p})\big) = 0$

Classification par analyse du signe des valeurs propres de $\mathbf{H}(f)$

$\mathbf{H}(f)$ définie positive, la fonction f atteint un minimum local

$\mathbf{H}(f)$ définie négative, la fonction f atteint un maximum local

$\mathbf{H}(f)$ a des valeurs propres positives et négatives : point col

LIRIS cnrs
Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Courbure

La courbure se déduit de la matrice $\mathbf{H}$ de f

$$k_G = \frac{\nabla f \, \mathbf{H}^* \, \nabla f^t - |\nabla f|^2 t(\mathbf{H})}{|\nabla f|^4}$$

$$k_M = \frac{\nabla f \, \mathbf{H} \, \nabla f^t - |\nabla f|^2 t(\mathbf{H})}{2|\nabla f|^3}$$

$\mathbf{H}^*$ matrice des cofacteurs ou co-matrice

$t(\mathbf{H})$ trace de $\mathbf{H}$

R. Goldman. Curvature formulas for implicit curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*. **22**, 632–658, 2005

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Fonctions Lipschitziennes

Définition

La fonction f doit être au moins de classe C^0 (les classes C^1 ou C^2 sont plus régulières)
f est Lipschitzienne si et seulement si

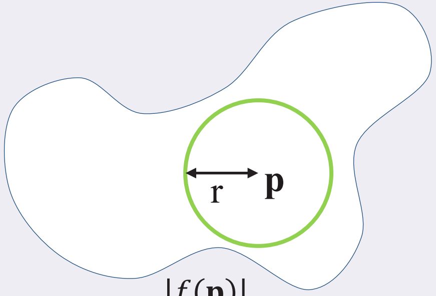
$$\exists \lambda > 0 \ \ \forall (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbf{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3 \ |f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{q})| < \lambda |\mathbf{p} - \mathbf{q}\,|$$

Critère d'exclusion [Hart1996]
Soit f une fonction λ –Lipschitzienne, alors $\forall\ \mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$

$$B(\mathbf{p}, f(\mathbf{p})/\lambda) \cap S = \emptyset$$

Boule de centre $\mathbf{p}$

Rayon $\mathrm{f}(\mathbf{p})/\lambda$



$$\frac{|f(\mathbf{p})|}{\lambda} > r$$

J. Hart. Sphere Tracing: A Geometric Method for the Anti aliased Ray Tracing of Implicit Surfaces, *The Visual Computer*, **12**(10), 1996

Université Claude Bernard Lyon 1
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

Supplementary material

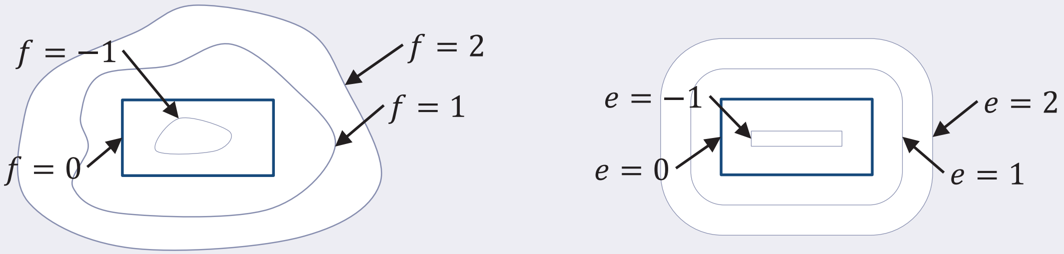
Scalar Fields

Interpretation of scalar fields

In general, the signed function f is not the Euclidean distance to the surface S

If f is λ −Lipschitz, then f/λ is a **lower** signed **Euclidean distance bound** to S [Hart1996]

$$\forall \mathbf{p} \in \mathbf{R}^3 \ |f(\mathbf{p})|/\lambda < e(\mathbf{p}) \text{ with } e(\mathbf{p}) = d(\mathbf{p}, S)$$



Euclidean distance

If f is the signed Euclidean distance to the surface S, then $|\nabla f(\mathbf{p})| = 1$

Eikonal equation

Therefore, is 1 −Lipschitz

J. Hart. Sphere Tracing: A Geometric Method for the Antialiased Ray Tracing of Implicit Surfaces. *The Visual Computer* **12**(10), 527-545,1996.

Université Claude Bernard Lyon 1

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin