## Idea di fondo

$$\boxed{n>2}$$

$$\boxed{2^x=\sum_{i=0}^{x}\binom{x}{i}} \Longrightarrow 2^{\binom{n}{2}} = \overbrace{\boxed{\binom{\binom{n}{2}}{0}+\dots+\binom{\binom{n}{2}}{n-2}}}^{\text{mai connessi}} + \overbrace{\boxed{\binom{\binom{n}{2}}{n-1}+\dots+\binom{\binom{n}{2}}{\binom{n-1}{2}}}}^{\text{alcuni connessi}} + \overbrace{\boxed{\binom{\binom{n}{2}}{\binom{n-1}{2}+1}+\dots+\binom{\binom{n}{2}}{\binom{n}{2}}}}^{\text{sempre connessi}}$$

Numero di possibili grafi semplici disconnessi con n nodi $= \sum_{i=0}^{n-2}\binom{\binom{n}{2}}{i} + \underbrace{p(n)}_{\downarrow} \left(\text{con } p(n)\le \sum_{i=n-1}^{\binom{n-1}{2}}\binom{\binom{n}{2}}{i}\right)$

Numero di possibili grafi disconnessi con n nodi e almeno n-1 archi

## Ho ricondotto il problema alla determinazione di p(n)

## Definizioni

Sia $e(n,k) = \begin{cases} \text{se } k\le 2 & 1 \\ \text{altrimenti:} & \binom{\binom{n}{2}}{k} - \sum_{(x_1,\dots,x_k)\in S}(x_1,\dots,x_k)_n^n \end{cases}$

il numero di possibili grafi connessi con n nodi e k archi

con $S=\left\{(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{N}^k \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1+\dots+x_k=n \\ k>1 \end{array}\right\}$

S è l'insieme di tutte le possibili sequenze di componenti connesse del grafo

Sia $(x_1,\dots,x_k)_{k_1}^{k_2} = \left(\sum_{(y_1,\dots,y_k)\in T}\prod_{i=1}^{k} e(x_i,y_i)\right)\cdot H(x_1,\dots,x_k)$

il numero di possibili grafi con un numero di archi compreso tra k1 e k2 e con k componenti connesse, la i-esima con Xi nodi

con $T=\left\{(y_1,\dots,y_k)\in\mathbb{N}^k \;\middle|\; \begin{array}{ll} k_1\le y_1+\dots+y_k\le k_2 & \\ k_i\ge x_i-1 & \forall i\in[1,k] \\ k_i\le\binom{x_i}{2} & \forall i\in[1,k] \end{array}\right\}$

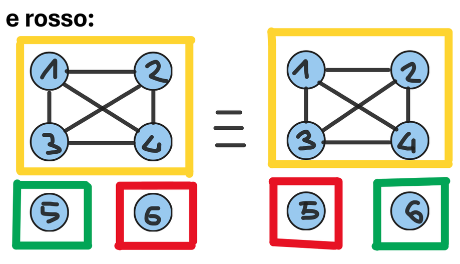
T è l'insieme di tutte le possibili assegnazioni di numero di archi per ciascuna componente connessa, in rispetto dei limiti k1 e k2, del minimo numero di archi necessari per permettere la connessione della componente e del massimo numero di archi ammessi dalla componente

Sia $H(x_1,\dots,x_k) = \dfrac{\prod_{i=1}^{k}\binom{\sum_{j=i}^{k}x_j}{x_i}}{\boxed{\prod_{x_i=\dots=x_{i+k}}(k+1)!}}$

il numero di possibili configurazioni delle componenti connesse X1,...,Xn del grafo

Elimino i duplicati dovuti alle ripetizioni nella sequenza X1,...,Xk

Ad esempio nella sequenza $(4,1,1)$ si hanno, per ogni scelta dei 4 nodi gialli, una scelta ridondante dei due nodi verde e rosso:




A questo punto esprimo p(n) così:

$$p(n) = \sum_{(x_1,\dots,x_k)\in S}(x_1,\dots,x_k)_{n-1}^{\sum_{i=1}^{k}\binom{x_i}{2}}$$

## Esempio n=7

Numero di possibili grafi semplici disconnessi con n nodi $= \sum_{i=0}^{5}\binom{21}{i} + p(7)$

$$p(7) = (6,1)_6^{15} + (5,2)_6^{11} + (5,1,1)_6^{10} + (4,3)_6^{9} + (4,2,1)_6^{7} + (4,1,1,1)_6^{6} + (3,3,1)_6^{6}$$

$$(6,1)_6^{15} = \left(e(6,6)\cdot \cancel{e(1,0)}^{=1} + \dots + e(6,15)\cdot\cancel{e(1,0)}^{=1}\right)\cdot H(6,1)^{=\binom{7}{6}}$$

$$\| $$

$$\binom{15}{6} - \left[(5,1)_6^{6} + (4,2)_6^{6} + (4,1,1)_6^{6} + (3,3)_6^{6}\right]$$

$$\|$$

$$\left(e(5,6)\cdot\cancel{e(1,0)}^{=1}\right)\cdot H(5,1)^{=\binom{6}{5}}$$

$$\|$$

$$\binom{10}{6} - \left[(4,1)_6^{6}\right]$$

$$\|$$

$$\left(e(4,6)\cdot\cancel{e(1,0)}^{=1}\right) H(4,1)^{=\binom{5}{4}}$$

$$\|$$

$$\binom{6}{6} - \left[\emptyset\right] = 1$$