



UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Cuarto informe de Prácticas Pre-Profesionales



ESTUDIANTE : QUEVEDO LÓPEZ MARTÍN ANTONIO

TEMA : APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

CURSO : CÁLCULO INTEGRAL

FACULTAD : CIENCIAS

DOCENTE TUTOR : LIC. JUAN PANTA COBEÑAS

2019 - I

Índice

1. Trabajo, presión y fuerza de fluidos. Momento y Centro de masa	1
1.1. Introducción	1
1.2. Construcción de una integral	1
2. Presión y fuerza de fluidos	4
2.1. Introducción	4
2.2. Fuerza y peso	4
2.3. Fuerza ejercida por un fluido	4
3. Centro de masa	6
3.1. Introducción	6
3.2. Sistemas unidimensionales	6

1. Trabajo, presión y fuerza de fluidos. Momento y Centro de masa

1.1. Introducción

En física una fuerza constante F mueve un objeto a una distancia d en la misma dirección de la fuerza por lo que el trabajo realizado se define como:

$$W = F \cdot d \quad (1)$$

Unidades	Sist.	SI	cgs
Fuerza	libra (lb)	Newton	dina
Distanca	pie (pie)	metro	centimetro (cm)
Trabajo	pie-libra (pie-lb)	Newton-metro (Joule)	dina-centimetro (ergio)

Recordar:

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dinas} = 0,2247 \text{ lb}$$

$$1 \text{ pie} = 1 \text{ lb} = 1,356 \text{ joules} = 1,356 \cdot 10^7 \text{ ergios}$$

1.2. Construcción de una integral

Si $F(x)$ representa a una fuerza variable que actúa sobre un intervalo $[a, b]$ entonces el trabajo no es simplemente la ec. (1). Debemos hacer una partición "p"

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

$$W = F \cdot d$$

$$W_k = F(x_k^*) \Delta x_k \Rightarrow \sum_{k=1}^n W_k = F(x_1^*) \Delta x_1 + F(x_2^*) \Delta x_2 + \dots + F(x_n^*) \Delta x_n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n = F(x_k^*) \Delta x_k$$

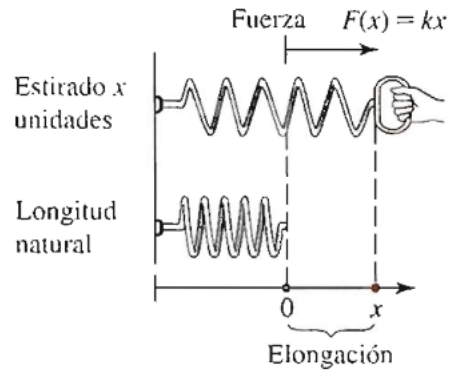
$$W = \lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n F(x_k^*) \Delta x_k$$

Por lo que:

Sea F continua sobre el intervalo $[a, b]$, y sea $F(x)$ la fuerza de un número x en el intervalo entonces:

Trabajo: W realizado por la fuerza para mover un objeto de a a b es:

$$W = \int_a^b F(x) dx \quad (2)$$



Si F es constante, $F(x) = k, \forall x$ en el intervalo, entonces (2), se convierte:

$$W = \int_a^b F(x) dx \rightarrow W = \int_a^b k dx \Rightarrow W = kx \Big|_a^b$$

$$W = k(b - a)$$

$$W = kb - ka$$

Ejemplo. Para estirar un resorte de 50 cm se requiere una fuerza de 130 N. Encuentre el trabajo realizado para estirar el resorte 20 cm más allá de su longitud natural (sin estirar).

Solución

$$50 \text{ cm} = \text{distancia (cgs)}$$

$$50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}$$

Pero:

$$W = F(x)$$

$$F(x) = kx$$

$$F(x) = k\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$130 \text{ N} = k\left(\frac{1}{2} \text{ m}\right)$$

$$260 \text{ N m} = k$$

$$F = 260x$$

Luego el trabajo realizado para estirar el resorte 20 cm más allá se hará:

$$x = 20 \text{ cm} \rightarrow x = \frac{1}{5} \text{ m}$$

$$W = \int_0^{1/5} F(x) \, dx$$

$$W = \int_0^{1/5} 260x \, dx$$

$$W = \left. \frac{260}{2}x \right|_0^{1/5}$$

$$W = 130((1/5)^2 - 0^2)$$

$$W = 130\left(\frac{1}{25}\right)$$

$$W = 5,2 \text{ joule}$$

2. Presión y fuerza de fluidos

2.1. Introducción

Todo el mundo ha experimentado que se le *tapan los oídos*, e incluso dolor en los oídos cuando desciende un avión (o un elevador) o cuando bucea hacia el fondo de una piscina.

Estas sensaciones molestas en los oídos se deben a un incremento de la presión ejercida por el aire o el agua sobre mecanismos en el oído medio.

El aire y el agua son el ejemplo de fluidos. En esta sección se mostrará la forma en la que la integral definida puede usarse para encontrar la fuerza ejercida por un fluido.

2.2. Fuerza y peso

Suponga que en una placa horizontal plana se sumerge en un fluido como agua. La fuerza ejercida por el fluido exactamente arriba de la placa se denomina la Fuerza del fluido.

$$F = (\text{Fuerza por unidad de área})(\text{Área de superficie})$$

$$F = P \cdot A$$

Se sabe que:

$$P = \frac{F}{A} \rightarrow F = P \cdot A$$

Sea:

ρ (denota peso específico del fluido, peso por unidad de volumen)

A (el área de la placa horizontal, sumergida hasta la profundidad " h ")

Entonces la presión " P " del fluido sobre la placa puede expresarse en términos de ρ .

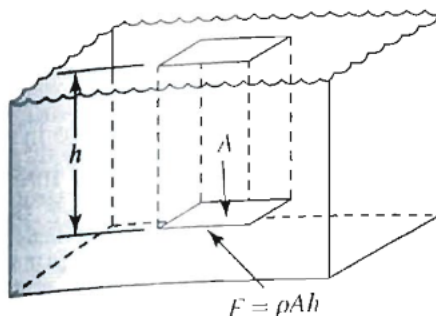
$$P = (\text{peso por unidad de volumen})(\text{profundidad})$$

$$P = \rho \cdot h$$

Entonces la fuerza del fluido será:

$$F = (\text{presión del fluido})(\text{área de la superficie})$$

$$F = \rho \cdot A$$

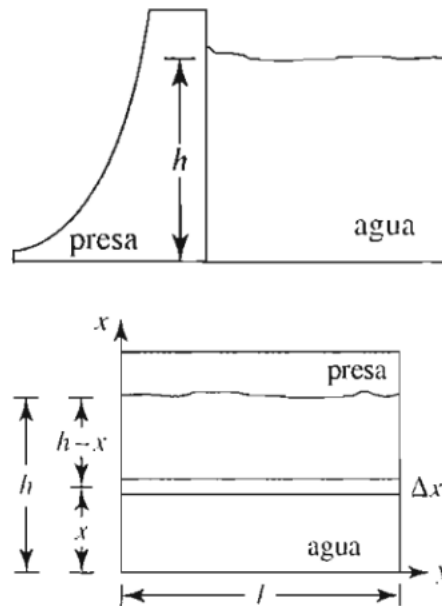


2.3. Fuerza ejercida por un fluido

Sea ρ el peso específico de un fluido. Sea $W(x)$ una función continua sobre $[a, b]$ que describe el ancho de una placa sumergida verticalmente a una profundidad x . La fuerza F ejercida por el fluido sobre un lado de la placa sumergida.

$$F = \int_a^b \rho x W(x) dx$$

Ejemplo Una presa tiene una cara rectangular vertical. Encuentra la fuerza ejercida por el agua contra la cara vertical de la presa si la profundidad del agua es h pies y su ancho mide l pies



$$\rho(\text{peso específico del agua})=62.43 \text{ lb f/pie}^3$$

Solución

En el intervalo $[0, h]$ se divide en n subintervalos.

$$F_k = (62,4)(h - k)(L\Delta x)$$

$h - x$: profundidad

$L\Delta x$: área del elemento rectangular

$$W = \frac{260}{2}x \Big|_0^{1/5}$$

Y al sumar estas aproximaciones y tomar lím cuando $p \rightarrow 0$ se llega a:

$$F = \int_0^h 62,4L(h - x) dx$$

$$F = 4Lhx \Big|_0^h - \frac{62,4}{2}Lx^2 \Big|_0^h$$

$$F = 62,4Lh(h) - \frac{62,4}{2}L(h^2 - 0^2)$$

$$F = 62,4Lh^2 - 31,2Lh^2$$

$$F = 31,2Lh^2$$

3. Centro de masa

3.1. Introducción

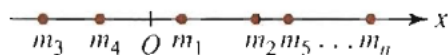
En esta sección consideramos otra aplicación de la física. Usamos la integral definida para encontrar el centro de masa de barras y regiones planas.

3.2. Sistemas unidimensionales

Si x denota la distancia dirigida del origen O a una masa " m ", se dice que el producto $m \cdot x$ es el momento de masa. Respecto al origen.

Cantidad	Sist.	SI	egs
masa	slug	kilogramo	gramo
momento de masa	slug-pie	kilogramo	gramo centim.

Para n masas m_1, m_2, \dots, m_n a distancias dirigidas x_1, x_2, \dots, x_n , respectivamente a partir de O .



$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{k=1}^n m_k$$

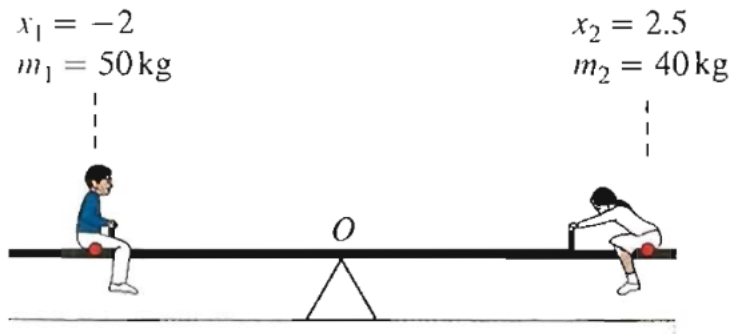
$$M_0 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n = \sum_{k=1}^n m_k x_k$$

es la masa total del sistema.

$$\sum_{k=1}^n M_k (x_k - \bar{x}) = 0$$

$$\sum_{k=1}^n m_k x_k - \sum_{k=1}^n m_k \bar{x} = 0$$

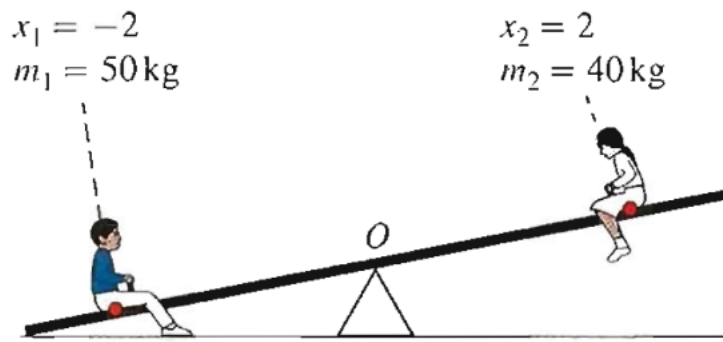
$$\sum_{k=1}^n m_k x_k - \bar{x} \sum_{k=1}^n m_k = 0$$



$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$$

$$50 \text{ kg}(-2) + 40(2,5) = 0$$

Está en equilibrio



$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$$

$$50 \text{ kg}(-2) + 40 \text{ kg}(2) = 0$$

No está en equilibrio

Ojo al despejar:

$$\sum_{k=1}^n m_k (x_k - \bar{x}) = 0$$

$$\sum_{k=1}^n m_k x_k - \bar{x} \sum_{k=1}^n m_k = 0$$

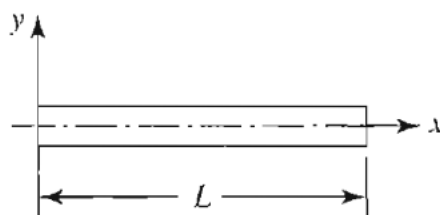
$$\sum_{k=1}^n m_k x_k = \bar{x} \sum_{k=1}^n m_k$$

$$\frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k} = \bar{x}$$

$$\frac{M_0}{m} = \bar{x}$$

Construcción de la integral Ahora se considerará el problema de encontrar el centro de masa de una barra de longitud "L" que tiene una densidad lineal variable ρ (masa/longitud unitaria, se mide en slug/pie, kg/m, g/cm)

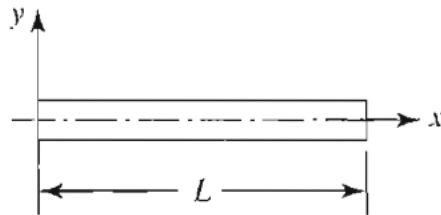
Se supone que la barra coincide con el eje X sobre el intervalo $[0, L]$



La densidad $\rho(x)$ es una función continua. El centro de masa está dado por:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L \rho(x) dx}{\int_0^L \rho(x) dx}$$

Ejemplo Una barra de 16cm de largo tiene densidad lineal, medida en g/cm, dada por $\rho(x) = \sqrt{x}$ $0 \leq x \leq 16$. Encuentre su centro de masa:



Solución

En gramos, la masa de la barra:

$$M_0 = \int_0^L x \rho(x) dx$$

$$m = \int_0^L \rho(x) dx$$

$$\bar{x} = \frac{M_0}{m}$$

Calculando:

$$M_0 = \int_0^{16} x \sqrt{x} dx$$

$$M_0 = \int_0^{16} x^{3/2} dx$$

$$M_0 = \frac{2}{5} x^{5/2}$$

$$M_0 = \frac{2}{5} (\sqrt{16^5})$$

$$M_0 = \frac{2}{5} (1024)$$

$$M_0 = \frac{2048}{5}$$

$$m = \int_0^{16} \sqrt{x} \, dx$$

$$m = \left. \frac{2}{3} x^{3/2} \right|_0^{16}$$

$$m = \frac{2}{3} (\sqrt{16^3})$$

$$m = \frac{2}{3} (64)$$

$$m = \frac{128}{3}$$

El centro de masa de la barra es:

$$\bar{x} = \frac{\frac{2048}{5}}{\frac{128}{3}} = 9,6 \frac{\text{gr}}{\text{cm}}$$

$$\bar{x} = 9,6 \frac{\text{gr}}{\text{cm}} = 0,96 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Referencias

- [1] Espinoza, E. (2008). *Análisis matemático II*. Segunda Edición. Perú: Editorial de la Biblioteca Nacional del Perú.