Solução numérica de equações diferenciais funcionais do tipo neutro e aplicações

Kaique M. M. Oliveira

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
departamento de computação e matemática

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Rolnik Artioli

13 de Novembro de 2024

Sumário

Introdução

Definição 1 (Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs))

Uma *Equação Diferencial Ordinária (EDO) de Primeira Ordem* é definida como.

$$y'(t) = g(t, y(t)) \tag{1}$$

para $g : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Um *Problema de Valor Inicial (PVI)* para EDOs é dado por

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{2}$$

para algum valor inicial $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^{d+1}$.

- Uma função $\gamma : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^d$ é dita *solução* do PVI se γ é diferenciável e se satisfaz 2.

Definição 2 (Equações Diferenciais com Retardo (EDRs))

Uma *Equação Diferencial com Retardo (EDR)* é dada por

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))), \tag{3}$$

para $p > 0$, $f : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\tau : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \to [0, p]$. Um *Problema Inicial (PI)* para EDRs é dado por

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t) = \phi(t), \quad t_0 - p \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{4}$$

para alguma função inicial $\phi : [t_0 - p, t_0] \to \mathbb{R}^d$.

- A função retardo τ é positiva e pode ser constante, depender do tempo ou do estado.
- Uma função $\gamma : [t_0 - p, t_f] \to \mathbb{R}^d$ é chamada de *solução* para o PI se γ for contínua em $[t_0 - p, t_f]$, diferenciável em $[t_0, t_f]$ e satisfaz (4).

Definição 3 (Equações Diferenciais do tipo Neutro com Retardo)

Uma *Equação Diferencial do tipo Neutro com Retardo (EDRN)* é dada por

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t))), y'(t - \sigma(t, y(t)))), \tag{5}$$

para $f : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\tau : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \to [0, p]$, $\sigma : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \to [0, p]$. Um PI para EDRNs é dado por

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t))), y'(t - \sigma(t, y(t)))), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t) = \phi(t), \qquad t_0 - p \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{6}$$

para alguma função inicial $\phi : [t_0 - p, t_0] \to \mathbb{R}^d$.

- τ e σ são retardos positivos.
- Uma função $\gamma : [t_0 - p, t_f] \to \mathbb{R}^d$ é chamada de *solução* para o PI se γ for contínua em $[t_0 - p, t_f]$, diferenciável em $[t_0, t_f]$ e satisfaz (6).

Introdução

Observações

- Assim como EDOs, EDRs e EDRNs são difíceis de resolver analiticamente.
- Para propósitos aplicados, métodos numéricos são preferíveis.
- Difícil acesso aos softwares de solução.

Objetivos

- Estudar EDRs e EDRNs, com enfoque numérico.
- Implementação no python.

Revisão de EDO

Definição 4 (Condição de Lipschitz)

Diz-se que uma função $g : D = [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ satisfaz uma condição de *Lipschitz* em relação a variável y no conjunto D se, e somente se,

$$\|g(t, y_1) - g(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|, \tag{7}$$

para todo $(t, y_1), (t, y_2) \in D$ para alguma constante $L > 0$.

Teorema 1 (Existência e Unicidade)

Considere o PVI (2). Se g for contínua e satisfaz a condição de Lipschitz na variável y no conjunto D, então existe uma única solução $y(t)$ em $[t_0, t_f]$ de (2)

Definição 5 (Problema bem posto)

O PVI (2) é dito ser um *problema bem posto* se

- Existe uma única solução $y(t)$ para o PVI.
- Existem $\epsilon_0 > 0$ e $k > 0$ tais que, para qualquer ϵ sendo $0 < \epsilon < \epsilon_0$ o *problema perturbado*

$$\begin{cases} z'(t) = g(t, z(t)) + \delta(t), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ z(t_0) = \alpha + \delta_0, \end{cases}$$

possui uma solução única $z(t)$ que satisfaz

$$|z(t) - y(t)| < k\epsilon, \qquad \forall t \in [t_0, t_f],$$

para toda função contínua δ tal que $|\delta(t)| \leq \epsilon, \forall t \in [t_0, t_f]$ e todo $|\delta_0| < \epsilon$.

Revisão EDO

- Métodos numéricos introduzem erro.
- Para garantir a convergência, métodos numéricos são aplicados sobre PVIs bem postos.

Teorema 2 (Problema bem posto)

Considere o PVI (2). Se g satisfaz as condições do Teorema de Existência e Unicidade 1, então o problema (2) é bem posto.

Exemplo 1: Propagação de descontinuidades

Considere a equação

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1), & t \geq 0, \\ y(t) = \phi(t) = 1, & t \leq 0. \end{cases} \tag{8}$$

O resolveremos pelo método dos passos.

- Para todo $t \in [0,1]$, tem-se que $t-1 \in [-1,0]$, logo, o PI (8) se reduz ao seguinte PVI
$$\begin{cases} y'(t) = -\phi(t-1) = -1, & t \in [0,1], \\ y(0) = \phi(0) = 1. \end{cases}$$
Cuja solução é única e dada por $y_1(t) = 1 - t$ em $[0,1]$.
- Repetindo o passo anterior, tem-se $\forall t \in [1,2], t-1 \in [0,1]$, logo o PI (8) se reduz ao seguinte PVI
$$\begin{cases} y'(t) = -y_1(t-1) = t-2, & t \in [1,2], \\ y(1) = y_1(1) = 0 \end{cases}$$
Cuja solução é única e dada por $y_2(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 4t + 3)$

- Repetindo este processo, o PI se reduz a um PVI nos intervalos $[i, i+1], i = 1, 2, \dots,$ cuja solução existe e é única.

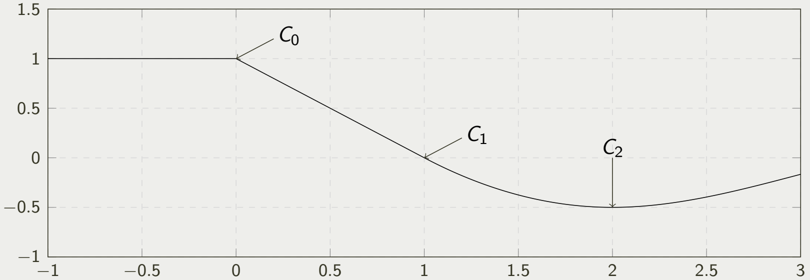


Figura: Representação do nível e localização dos pontos de descontinuidade da solução de (8)

Exemplo 1: Propagação de descontinuidades

Reconsideremos a equação

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1), & t \geq 0, \\ y(t) = \phi(t) = 1, & t \leq 0. \end{cases} \tag{9}$$

- y' é contínua para todo $t > 0$ mas tem uma descontinuidade no 0 já que

$$y'(0)^{-} = 0 \neq -1 = -y(-1) = y'(0)^{+},$$

- $y''(t)$ é contínua para todo $t > 1$ mas tem uma descontinuidade no 1 já que

$$y''(t) = -y'(t-1) \tag{10}$$

  mas $y''(t)$ é contínua para todo $t > 1$.
- É possível mostrar por indução que (10) implica que $y^{(n+1)}$ é contínua em todo $t > n$ mas tem uma descontinuidade em n já que

$$y^{(n+1)}(t) = (-1)^n y'(t-n), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Exemplo 2: Falta de injetividade entre valores iniciais e soluções

Considere a equação

$$\begin{cases} y'(t) = y(t-1)(y(t)-1), & t \geq 0, \\ y(t) = \phi(t), & t \leq 0, \end{cases} \tag{11}$$

para qualquer $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ tal que $\phi(0) = 1$.

- Observe que $y(t) = 1$ é sempre solução.
- A injetividade entre valores iniciais e soluções é violada.
- Como veremos no teorema 3, isso ocorre porque a função $f(t, y, x) = x(y-1)$ não satisfaz a condição de Lipschitz nas variáveis y e x.
- Para tanto, precisamos extender a definição 7.

Exemplo 2 (Continuação)

Definição 6 (Condição de Lipschitz)

Uma função $f : \overline{D} = [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ é dita que satisfaz a condição **Lipschitz** em relação às variáveis y e x no conjunto $\overline{D}$ se, e somente se,

$$\|f(t, y_1, x_2) - f(t, y_2, x_2)\| \leq L(\|y_1 - y_2\| - \|x_1 - x_2\|), \tag{12}$$

para todo $(t, y_1, x_1), (t, y_2, x_2) \in \overline{D}$ e para alguma constante $L > 0$.

- Considere os pontos $(0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ e $(0, 0, \frac{1}{n})$, então
$$\left\|f\left(0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) - f\left(0, 0, \frac{1}{n}\right)\right\| = \left\|\frac{1}{n}^2\right\| = \left|\frac{1}{n}\right| \left(\left\|\frac{1}{n} - 0\right\| - \left\|\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right\|\right).$$
- Como $|\frac{1}{n}| \to \infty$, então $f(t, y, x) = x(y-1)$ não satisfaz a definição 6.

Exemplo 3: Propagação de Descontinuidades (EDRNs)

Considere a equação

$$\begin{cases} y'(t) = -y'(t-1), & t \geq 0, \\ y(t) = t, & t \leq 0. \end{cases} \tag{13}$$

- y' tem uma descontinuidade no 0, já que

$$y'(0)^{-} = 1 \neq -1 = -y'(-1) = y'(0)^{+},$$

- Como $y'(t) = -y'(t-1)$, então a descontinuidade se propaga em y' para todo $t = 2, 3, \ldots$.

Exemplo 3. Continuação

- Utilizando o método dos passos em (13), é possível mostrar por indução que a seguinte função é solução

$$y(t) = \begin{cases} -t + 2k, & t \in [2k, 2k+1], \quad k = 0, 1, \dots \\ t - 2k, & t \in [2k-1, 2k], \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

- Cuja gráfico é dado por

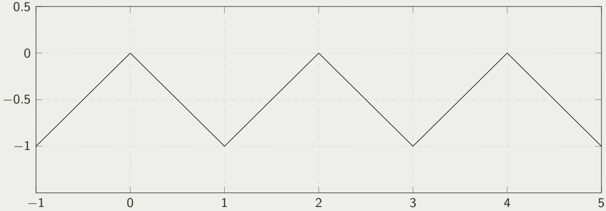


Figura: Gráfico da solução de (13)

Propagação de descontinuidades

Nesta seção, generalizaremos alguns dos conceitos dos exemplos já apresentados, e além.

- Para simplificar a notação, introduziremos a seguintes funções.

$$\alpha(t) = t - \tau(t, y(t)) \qquad \text{e} \qquad \beta(t) = t - \sigma(t, y(t)),$$

  os quais são chamados de *argumentos desviados*.
- Note que $\alpha(t) \leq t$ e $\beta(t) \leq t$.
- Partiremos do caso escalar de (4), ou seja, $y(t) \in \mathbb{R}$.
- Também consideraremos que $\alpha(t)$ depende apenas do tempo.

Propagação de Descontinuidades

- Suponha que $\alpha(t) \leq t_0$ para algum intervalo em $[t_0, t_f]$ e que $y(t)$ tem uma descontinuidade em sua primeira derivada no ponto t_0, ou seja,

$$y'(t_0)^- = \phi'(t_0)^- \neq f(t_0, \phi(t_0), \phi(\alpha(t_0))) = y'(t_0)^+$$

- Se f, ϕ e α forem contínuas, então $y'(t)$ é também contínua para todo $t > t_0$.
- Se f, ϕ e α forem diferenciáveis, então $y''(t)$ existe para qualquer t, exceto, talvez, nos pontos $\xi_{1,i} > t_0$ que são raízes da equação

$$\alpha(t) = t_0,$$

sendo i referente às multiplas da raizes.

Propagação de Descontinuidades

- Suponha que $\alpha(\xi_{1,i}) = t_0$ e que $\alpha'(\xi_{1,i}) \neq 0$, pela regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} y''(t)^{\pm} =& \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t), y(\alpha(t))) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t), y(\alpha(t)))y'(t) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(t, y(t), y(\alpha(t)))y'(\alpha(t))^{\pm}\alpha'(t), \end{aligned} \tag{14}$$

- Logo, $y''(\xi_{1,i})^- \neq y''(\xi_{1,i})^+$ já que

$$y'(\alpha(t_0))^- = \phi'(t_0)^- \neq y'(t_0)^+ = y'(\alpha(t_0))^+$$

- De forma análoga, é possível mostrar que as descontinuidades se propagam para y''' nos pontos $\xi_{2,i}$ tais que $\alpha(\xi_{2,i}) = \xi_{1,i}$, e assim sucessivamente.

Descontinuidades principais

Dentre as descontinuidades primárias, um tipo delas se destaca em importância.

Definição 7

Seja $\bar{\xi}_0 = t_0$ definido como uma *descontinuidade principal de nível 0*. Indutivamente, uma *descontinuidade principal de nível (k+1)* é a menor raiz $\bar{\xi}_{k+1}$ de

$$\alpha(t) = \bar{\xi}_k$$

com multiplicidade ímpar, sendo $\bar{\xi}_k$ uma *descontinuidade principal de nível (k)*

- Note que $\alpha(t) \leq \bar{\xi}_k, \quad \forall t \in \left[\bar{\xi}_k, \bar{\xi}_{k+1}\right]$ e todo k
- Logo, a EDR (4) se reduz a uma EDO nos intervalos $\left[\bar{\xi}_k, \bar{\xi}_{k+1}\right]$.

Propagação de Descontinuidades

- A suavização que pode ocorrer com as EDRs, em geral, não ocorre para EDRNs.
- Suponha que y' tem um ponto de descontinuidade em t_0 para a equação 6;
- Suponha que exista $\bar{\xi}_{1,i} > t_0$ tal que $\beta(\bar{\xi}_{1,i}) = t_0$. Caso

$$\begin{aligned} y'(\bar{\xi}_{1,i})^- &= f(\bar{\xi}_{1,i}, y(\bar{\xi}_{1,i}), y(\alpha(\bar{\xi}_{1,i})), \phi'(t_0)^-) \\ &\neq f(\bar{\xi}_{1,i}, y(\bar{\xi}_{1,i}), y(\alpha(\bar{\xi}_{1,i})), y'(t_0)^+) = y'(\bar{\xi}_{1,i})^+ \end{aligned} \tag{15}$$

Então $\bar{\xi}_{1,i}$ é uma descontínuidade em y'

- Observe que cada uma destas descontinuidades podem gerar mais discontinuidades através da função α ou β. Como Segue na próxima ilustração.

Propagação de Descontinuidades

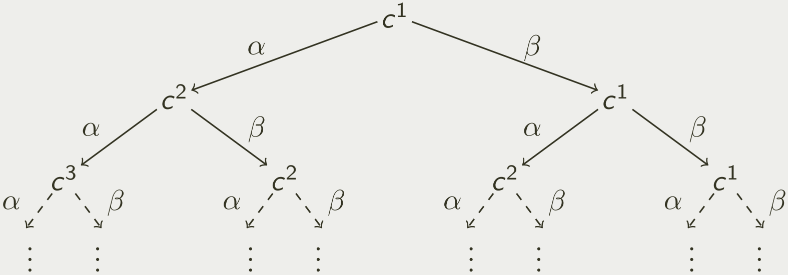


Figura: árvore que representa a propagação de descontinuidades nas derivadas das solução do problema (6) a partir de uma descontinuidade primária de nível zero.

Desaparecimento do Retardo

• Diz-se que o retardo desaparece caso $\alpha(t) = t$ para algum t, ou seja, nos pontos fixos de α.

• Considere, como hipótese para a Proposição 1, que f, ϕ, α e β sejam C^∞ nos seus respectivos domínios.

Proposição 1

- *Suponha que* f, ϕ, α *e* β *sejam* C^∞ *nos seus respectivos domínios.*
- *Seja* $\xi > t_0$ *único ponto fixo de* α *em* $[t_0, \xi]$.
- *Suponha que exista alguma descontinuidade primária* $\xi_k < \xi$ *de grau* k.

Então, para qualquer vizinhança a esquerda de ξ, *existem infinitos pontos de descontinuidade nesta vizinhança.*

Desaparecimento do Retardo

Demonstração.

• Como α é contínua, e como $\alpha(\xi_k) \leq \xi_k \leq \alpha(\xi)$, temos que, pelo teorema do valor intermediário, existe $\xi_{k+1} \in (\xi_k, \xi)$ tal que $\alpha(\xi_{k+1}) = \xi_k$.
• Continuando este processo, podemos criar a sequência monotonicamente crescente $\{\xi_k, \xi_{k+1}, ...\}$ limitada superiormente por ξ.
• Pelo teorema da convergência monótona, temos que $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \sup_{n\geq 1} \xi_n \leq \xi$. Logo, nós temos

$$\sup_{n\geq 1} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \alpha(\xi_{n+1}) = \alpha(lim_{n\to\infty}\xi_{n+1}) = \alpha\left(\sup_{n\geq 1} \xi_n\right).$$

• Como ξ é único ponto fixo em $[t_0, \xi]$ por hípotese, então $\lim_{n\to\infty} s_n = \xi$. Portanto, existem infinitos pontos de descontinuidade em qualquer vizinhança a esquerda de ξ.

$\square$

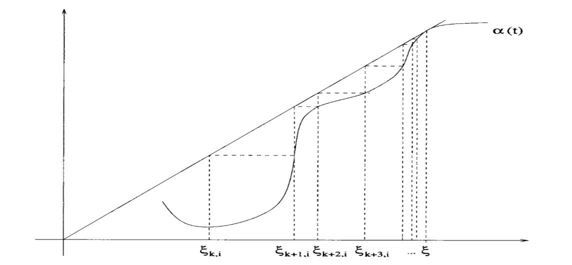


Figura: Desaparecimento do Retardo (texto)

- Para evitar este problema, a seguinte hipótese é introduzida.

Hipótese 1

Existe uma constante $\tau_0 > 0$ tal que $\tau(t) = t - \alpha(t) > \tau_0$ para todo $t \in [t_0, t_f]$.

Retardos Limitados e Ilimitados

- Caso o retardo seja limitado, a suavização da solução como visto no teorema ??, não ocorre.
- Para mostrar tanto, supoha que exista algum $M > 0$ tal que $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) \leq M$.
- Suponha que $\xi_{k,i}$ seja uma descontinuidade primária em $[M, +\infty)$, então $\alpha(t) < M < \xi_{k,j}$ para todo $t > M$, logo não existe $\xi_{k+1,i}$ que satisfaz $\alpha(\xi_{k+1,i}) = \xi_{k,j}$.

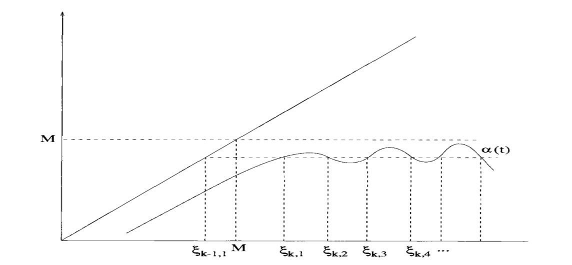


Figura: Retardo limitado (texto)

Retardos Limitados e Ilimitados

- Para garantir a suavização das soluções, a função α deve setisfazer as seguintes duas hipóteses.

Hipótese 2

$\lim_{t \to +\infty} \alpha(t) = +\infty$.

Hipótese 3

Existe uma constante $\tau_1 > 0$ tal que $\tau(t) = t - \alpha(t) \leq \tau_1$ para todo $t \in [t_0, t_f]$.

- abaixo, segue uma figura ilustrativa dessas três hipóteses em ação.

Retardos Limitados e Ilimitados

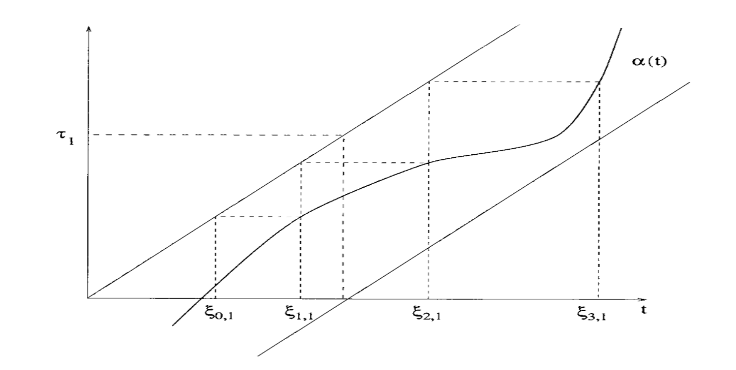


Figura: Hipóteses 1, 2 e 3 (Ainda vou montar a minha)

Teorema 3 (Existência e unicidade para EDRs)

Considere a equação (4), ou seja,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))), & t \geq t_0 \\ y(t) = \phi(t), & t \leq t_0 \end{cases}$$

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^d$ *e* $V \subseteq \mathbb{R}^d$ *vizinhanças de* $\phi(t_0)$ *e* $\phi(t_0 - \tau(t_0, \phi(t_0)))$*, respectivamente, e suponha que a função* $f(t, u, v)$ *seja contínua em relação a* t *e Lipschitz contínua em relação a* u *e* v *em* $[t_0, t_0 + h] \times U \times V$ *para algum* $h > 0$*. Além disso, suponha que a função inicial* $\phi(t)$ *seja Lipschitz contínua para* $t \leq t_0$ *e que a função de retardo* $\tau(t, y) \geq 0$ *seja contínua em relação a* t *e Lipschitz contínua em relação a* y *em* $[t_0, t_0 + h] \times U$*. Então o problema 4 tem uma única solução em* $[t_0, t_0 + \delta)$ *para algum* $\delta > 0$ *e esta solução depende continuamente dos dados iniciais.*

Métodos discretos para EDOs

- Para $n = 0, ..., N-1$, seja $\Delta = \{t_0, ..., t_N = t_f\}$ uma malha e $h_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ os passos.

Definição 8

Um método numérico para resolver o PVI (2) é chamado de **método de k-passos** se ele satisfaz

$$y_{n+1} = \alpha_{n,1} y_n + ... + \alpha_{n,k} y_{n-k+1} + h_{n+1} \Phi(y_n, ..., y_{n-k+1}; g, \Delta_n), \quad (16)$$

para $n \geq k-1$ e para $\Delta_n = \{t_{n-k+1}, ..., t_n, t_{n+1}\}$.

- A função Φ é chamada de função incremento.
- Os valores $y_0, ..., y_k$ são os valores iniciais.
- A solução numérica discreta é $\{y_n\}_{n=0}^{N}$, onde $y_n \approx y(t_n)$.

Métodos discretos para EDOs

• Caso $k = 1$, temos os chamados métodos de passo único, como o método de Euler (convergência $\mathcal{O}(h)$ para $h = \max_{n\geq 1} h_n$)

$$y_{n+1} = y_n + h_n g(t_n, y_n)$$

• Caso $k > 1$, temos os métodos multipasso. Um exemplo de um método multipasso é o método de Adams–Bashforth de 2 passos (convergência $\mathcal{O}(h^2)$) , o qual é definido por

$$y_{n+1} = y_n + \frac{3}{2}h_{n+1}g(t_n, y_n) - \frac{1}{2}h_n g(t_{n-1}, y_{n-1}),$$

e inicializado por algum método de passo único, como o método do ponto médio (convergência $\mathcal{O}(h^2)$) descrito abaixo

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1}g\left(t_n + \tfrac{1}{2}h_{n+1}, y_n + \tfrac{1}{2}h_n g(t_n, y_n)\right).$$

Métodos discretos para EDOs

Suposição 1

Quanto a função incremento Φ, as seguintes suposições são feitas:

1. Φ satisfaz uma condição Lipschitz em relação às variáveis y com constante de Lipschitz Q_g.

2. Existem $h_g > 0$ e $\gamma_g > 0$ tal que que Φ possui uma dependência contínua de g com relação a norma do supremo no conjunto $U_n = [t_{n-k+1}, t_{n+1}] \times \mathbb{R}^d$, onde $h_{n-k+2}, \ldots, h_{n+1} \leq h_g(L)$, ou seja,

$$\begin{aligned} &\|\Phi(y_n, ..., y_{n-k+1}; \tilde{g}, \Delta_n) - \Phi(y_n, ..., y_{n-k+1}; g, \Delta_n)\| \\ &\qquad \leq \gamma_g \sup_{t,y \in U_n} \|\tilde{g}(t,y) - g(t,y)\| \end{aligned} \tag{17}$$

para todo $\tilde{g} \in C^0([t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.

Extensão Contínua

Definição 9 (Extensão contínua)

Uma **extensão contínua**, ou uma **interpolante** do método (16) é uma função polinomial $\eta(t)$ definida por partes nos intervalos $[t_n, t_{n+1}]$ baseada em valores calculados pelo método definidos em $[t_{n-i_n}, t_{n+j_n+1}]$, para $i_n, j_n \geq 0$.

$$\begin{aligned}\eta(t_n + \theta h_{n+1}) =& \beta_{n,1}(\theta) y_{n+j_n} + \cdots + \beta_{n,j_n+i_n+1}(\theta) y_{n-i_n} \\ &+ h_{n+1}\Psi(y_{n+j_n}, \ldots, y_{n-i_n}; \theta, g, \Delta'_n), \qquad 0 \leq \theta \leq 1,\end{aligned} \tag{18}$$

para $\Delta'_n = \{t_{n-i_n}, \ldots, t_{n+j_n}, t_{n+j_n+1}\}$, onde η satisfaz a seguinte condição de continuidade

$$\eta(t_n) = y_n \qquad \text{e} \qquad \eta(t_{n+1}) = y_{n+1} \tag{19}$$

Extensão Contínua

Note que

- Caso $i_n = j_n = 0$, a interpolação ocorre baseada nos valores em $[t_n, t_{n+1}]$. Tal caso é chamado de *interpolação de passo único*. Caso isso não ocorra, temos uma interpolação de múltiplos passos.
- Caso $j_n > 0$, o interpolante (18) não pode ser calculado simultâneamente com o método (16), devendo esperá-lo atingir o passo t_{n+j_n+1} para poder ser calculado.

Um método numérico discreto para EDOs acompanhado de uma extensão contínua é chamado um *método numérico contínuo para EDOs*.

Extensão Contínua

- A função Ψ é também chamada de função incremento.
- Para garantir a condição de continuidade de η, normalmente são consideradas as seguintes hipóteses

$$\beta_{n,j}(0) = \begin{cases} 1 & \text{para } j = 1 + j_n, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\Psi\left(y_{n+j_n}, \ldots, y_{n-i_n}; 0, g, \Delta_n'\right) = 0$$

$$\beta_{n,j}(1) = \begin{cases} \alpha_{n,j-j_n} \text{ para } 1 + j_n \leq j \leq k + j_n \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$\Psi\left(y_{n+j_n}, \ldots, y_{n-i_n}; 1, g, \Delta_n'\right) = \Phi\left(y_n, \ldots, y_{n-k+1}; g, \Delta_n\right).$$

- Para $\theta = 1$, a equação (18) se reduz à (16).

Extensão Contínua

Suposição 2

Quanto a função incremento Ψ, as seguintes suposições são feitas:

1. Ψ satisfaz uma condição Lipschitz em relação às variáveis y com constante de Lipschitz Q_g.

2. Existem $h'_g > 0$ e $\gamma'_g > 0$ tal que que Φ possui uma dependência contínua de g com relação a norma do supremo no conjunto $U'_n = [t_{n-i_n}, t_{n+j_n+1}] \times \mathbb{R}^d$, onde $h_{n-i_n+1}, \ldots, h_{n+j_n+1} \leq h'_g(L)$, ou seja,

$$\begin{aligned}\|\Psi(y_{n+jn}, ..., y_{n-i_n}; \tilde{g}, \Delta'_n) - \Psi(y_{n+jn}, ..., y_{n-i_n}; g, \Delta'_n)\| \\ \leq \gamma'_g \sup_{t,y \in U'_n} \|\tilde{g}(t,y) - g(t,y)\|\end{aligned} \tag{20}$$

para todo $\tilde{g} \in C^0([t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.

Ordem dos métodos

Definição 10 (Ordem Local de um método discreto)

Um método discreto (16) é consistente e de ordem $p \geq 1$ é o menor inteiro tal que, para toda função $g \in C^p$ e para todos os pontos da malha tem-se que

$$\|z_{n+1}(t_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1}\| = \mathcal{O}(h_{n+1}^{p+1}), \tag{21}$$

uniformemente com respeito a y_n^* em qualquer conjunto limitado de R^d e para $n = 0, ..., N-1$, onde $z_{n+1}(t)$ é solução do problema local

$$\begin{cases} z'_{n+1}(t) = g(t, z_{n+1}(t)), & t_n \leq t \leq t_{n+1}, \\ z(t_n) = y_n^*, & t \leq t_0, \end{cases} \tag{22}$$

$$\text{para} \qquad \begin{aligned} \tilde{y}_{n+1} &= \alpha_{n,1} z_{n+1}(t_n) + \cdots + \alpha_{n,k} z_{n+1}(t_{n-k+1}) \\ &+ h_{n+1} \Phi(z_{n+1}(t_n), \ldots, z_{n+1}(t_{n-k+1}); g, \Delta_n). \end{aligned} \tag{23}$$

Ordem dos métodos

Definição 11 (Ordem Local do interpolante)

Um interpolante (18) é consistente e de ordem $q \geq 1$ se

$$\max_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} \|z_{n+1}(t) - \tilde{\eta}_{n+1}(t)\| = \mathcal{O}(h_{n+1}^{q+1}), \tag{24}$$

para

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(t_n + \theta h_{n+1}) = {} & \beta_{n,1}(\theta) z_{n+1}(t_{n+j_n}) + \cdots + \beta_{n,j_n+i_n+1}(\theta) z_{n+1}(t_{n-i_n}) \\ & + h_{n+1} \Psi(z_{n+1}(t_{n+j_n}), \ldots, z_{n+1}(t_{n-i_n}); \theta, g, \Delta'_n) \end{aligned} \tag{25}$$

Ordem dos métodos

- Seja $h = \max_{1\leq n\leq N} h_n$.

Definição 12 (Ordem Global de um Método Discreto)

Um método discreto (16) tem ordem global p, se

$$\max_{1\leq n\leq N} \|y(t_n) - y_n\| = \mathcal{O}(h^p), \tag{26}$$

Definição 13 (Ordem Global de um Interpolante)

Um interpolante (18) tem ordem global p, se

$$\max_{t_0-r\leq t\leq t_f} \|y(t) - \eta(t)\| = \mathcal{O}(h^p). \tag{27}$$

Preliminares para o teorema de convergência

Definição 14 (Norma induzida de matrizes)

Seja K o corpo dos reais ou dos complexos e sejam $\|\cdot\|_\alpha$ e $\|\cdot\|_\beta$ normas em K^n e K^m, respectivamente. A norma $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ em $K^{m\times n}$ é chamada de *norma induzida* se

$$\|A\|_{\alpha,\beta} = \sup\left\{\frac{\|Ax\|_\beta}{\|x\|_\alpha} : x \in K^n \setminus \{0\}\right\}.$$

Normalmente, a notação a acima é reduzida simplesmente a

$$\|A\|_{\alpha,\beta} = \sup_{\|x\|_\alpha = 1} \|Ax\|_\beta.$$

Preliminares para o teorema de convergência

Definição 15 (Produto de Kronecker)

Sejam A e B duas matrizes quaisquer nos espaços vetorias $K^{m,n}, m, n \geq 0$ e $B \in K^{p,q}, r, s \geq 0$ para $K = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). O *produto Kronecker* entre A e B é dado pela função $\otimes : K^{m,n} \times K^{p,q} \to (K^{pm \times qn})$ definida notação por blocos

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \dots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \dots & a_{2,n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & a_{m,2}B & \dots & a_{m,n}B \end{bmatrix},$$

Teorema 4 (Convergência dos Métodos para EDOs)

Considere o método (16) de ordem $p \geq 1$ e, para cada n, seja

$$C_n = \begin{bmatrix} \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,k-1} & \alpha_{n,k} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Caso

- *Existe uma norma $\|\cdot\|_*$ em $\mathbb{R}^k$, independente de n e da malha Δ, tal que, para a norma induzida da matriz, a seguinte condição de estabilidade é satisfeita.*

$$\|C_n\|_* \leq 1. \tag{28}$$

- *A função g de (2) é C^p contínua;*
- *Os valores iniciais $y_0, \cdots, y_{k-1}$ aproxima a solução exata com ordem p.*

Então, o método discreto (16) é convergente e de ordem global p em $[t_0, t_f]$, já a extensão contínua (18) é convergente sua ordem global é $q' = \min\{p, q+1\}$.

Teorema: Demonstração

- Como o método discreto (16) tem ordem p, então

$$\begin{aligned} y\left(t_{n+1}\right) =& \alpha_{n,1} y\left(t_n\right) + \cdots + \alpha_{n,k} y\left(t_{n-k+1}\right) \\ & + h_{n+1}\Phi\left(y\left(t_n\right), \ldots, y\left(t_{n-k+1}\right); g, \Delta_n\right) + \epsilon_{n+1} \end{aligned} \tag{29}$$

com

$$\|\epsilon_{n+1}\| \leq c h_{n+1}^{p+1}, \tag{30}$$

para alguma constante $c > 0$ e para todo $n = k-1, \ldots, N-1$.

- Para os mesmos n, introduziremos a seguinte notação por blocos

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_n &= \left[y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k+1}\right]^T, \\ \mathbf{y}(t_n) &= \left[y(t_n), y(t_{n-1}), \ldots, y(t_{n-k+1})\right]^T. \end{aligned}$$

Teorema: Demonstração

- Note que $\mathbf{y}_n, \mathbf{y}(t_n) \in \mathbb{R}^{kd}$. Agora, defina $\mathcal{C}_n$ por

$$\mathcal{C}_n = C_n \otimes I_d.$$

- Então que $\mathcal{C}_n$ é uma matriz $(dk) \times (dk)$ dada por

$$\mathcal{C}_n = \begin{bmatrix} \alpha_{n,1} I_d & \alpha_{n,2} I_d & \dots & \alpha_{n,k-1} I_d & \alpha_{n,k} I_d \\ I_d & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_d & 0 \end{bmatrix}.$$

Teorema: Demonstração

- Devemos mostrar que $\mathcal{C}_n$ herda a propriedade de estabilidade (28). Para tanto, considere $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{kd}$ qualquer. Pela notação de blocos, podemos representar $\mathbf{x}$ por k blocos de vetores $x_1, \ldots, x_k$ em $\mathbb{R}^d$, ou seja,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1^{(1)}, & x_1^{(2)}, & \ldots, & x_1^{(d)})^T \\ (x_2^{(1)}, & x_2^{(2)}, & \ldots, & x_2^{(d)})^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_k^{(1)}, & x_k^{(2)}, & \ldots, & x_k^{(d)})^T \end{bmatrix}.$$

Teorema: Demonstração

- A a norma que utilizaremos para trabalhar em $\mathbb{R}^{kd}$ será a norma do máximo definida como

$$|||\mathbf{x}||| = \max_{1 \leq i \leq d} \|x^{(i)}\|_*, \tag{31}$$

onde cada $x^{(i)}$ é o vetor $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \ldots, x_k^{(i)})^T \in \mathbb{R}^k$.

- Para $\mathcal{C}_n$ satisfaz (28), ou seja, $|||\mathcal{C}_n||| \leq 1$, basta mostrar que $|||\mathcal{C}_n \mathbf{x}||| \leq |||\mathbf{x}|||$. Para tanto, teremos

$$\mathcal{C}_n \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha_{n,1} I_d & \alpha_{n,2} I_d & \ldots & \alpha_{n,k-1} I_d & \alpha_{n,k} I_d \\ I_d & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I_d & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & I_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{n,1} x_1 + \cdots + \alpha_{n,k} x_k \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{bmatrix}$$

Teorema: Continuação

- Observe que, para todo $1 \leq j \leq d$, o vetor coluna do lado direito da igualdade acima é dado por

$$\begin{bmatrix} \alpha_{n,1}x_1^{(j)} + \cdots + \alpha_{n,k}x_k^{(j)} \\ x_1^{(j)} \\ x_2^{(j)} \\ \vdots \\ x_{k-1}^{(j)} \end{bmatrix} = C_n x^{(j)}.$$

- Pela propriedade da estabilidade (28) sobre C_n, temos que $\|C_n x^{(j)}\|_* \leq \|x^{(j)}\|_*$.
- Finalmente, como $|||\mathcal{C}_n \mathbf{x}||| \leq \|x^{(j)}\|_*$ para todo $1 \leq j \leq d$, então $|||\mathcal{C}_n \mathbf{x}||| \leq |||\mathbf{x}|||$ e $\mathcal{C}_n$ satisfaz a propriedade.

Teorema: Continuação

- Pela notação de blocos, temos que $y(t_n) - y_n$ é equivalente a

$$\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}_{n+1} = \mathcal{C}_n(\mathbf{y}(t_n) - \mathbf{y}_n) + h_{n+1}\Gamma_n + E_{n+1}, \quad n = k-1, \ldots, N-1, \tag{32}$$

onde

$$\Gamma_n = \left(\Phi(\mathbf{y}(t_n); g, \Delta_n) - \Phi(\mathbf{y}_n; g, \Delta_n), 0, \ldots, 0\right)^T,$$
$$E_{n+1} = \left(\epsilon_{n+1}, 0, \ldots, 0\right)^T,$$

sendo 0 o vetor nulo em $\mathbb{R}^d$.

- Aplicando a norma $|||\cdot|||$ em ambos os lados de (32) e utilizando da propriedade de estabilidade de $\mathcal{C}_n$, obtemos

Teorema: Continuação

$$|||\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}_{n+1}||| \leq |||\mathbf{y}(t_n) - \mathbf{y}_n||| + h_{n+1}|||\Gamma_n||| + |||E_{n+1}|||,$$

para todo $n = k-1, \ldots, N-1$.

• Utilizando da propriedade da equivalência das normas em espaços de dimensão finita, obtemos

$$\begin{aligned}|||E_{n+1}||| &= \max_{1\leq i\leq d} \|(e_{n+1}^{(i)}, 0, \ldots, 0)\|_* \leq \max_{1\leq i\leq d} (k_1\|(e_{n+1}^{(i)}, 0, \ldots, 0)\|_\infty) \\ &\leq k_1 \max_{1\leq i\leq d} |e_{n+1}^{(i)}| \leq k_1\|e_{n+1}^{(i)}\|_\infty \\ &\leq k_1 k_2\|e_{n+1}\| \leq k_1 k_2 c h_{n+1}^{p+1} \leq k_1 k_2 c h_{n+1} h^p,\end{aligned}$$

para algum $k_1, k_2 > 0$ e para $h = \max_{1\leq n\leq N} h_n$.

Teorema: Continuação

• Quanto ao restante da normas, pela continuidade Lipschitz da função incremento Φ em relação aos argumentos y na norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^d$ e, novamente, pela propriedade de equivalência das normas, junto com (30), existe uma constante $Q > 0$ tal que, para $c' = k_1 k_2$ e para todo $n = k-1, \ldots, N-1$, temos

$$|||\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}_{n+1}||| \leq (1 + h_{n+1}Q)|||\mathbf{y}(t_n) - \mathbf{y}_n||| + c' h_{n+1} h^p.$$

• Observe que $1 + h_j Q \leq e^{h_j Q}$ para todo j, assim, continuando a relação de recorrência, obtemos

Teorema: Continuação

$$\begin{aligned}|||\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}_{n+1}||| \leq\, & \overbrace{e^{h_{n+1}Q} \dots e^{h_k Q} |||\mathbf{y}(t_{k-1}) - \mathbf{y}_{k-1}|||}^{(\star)} \\ & + \underbrace{c' h^p (h_{n+1} + e^{h_{n+1}Q} h_n + \dots + e^{(h_{n+1} \dots h_{k+1})Q} h_k)}_{(\star\star)}.\end{aligned}$$

- Quanto a $(\star)$, observe que, como $h_k + \dots h_{n+1} \leq t_f - t_0$, então

$$\begin{aligned} e^{h_{n+1}Q} \dots e^{h_k Q} |||\mathbf{y}(t_{k-1}) - \mathbf{y}_{k-1}||| &= e^{Q(h_{n+1} + \dots + h_k)} |||\mathbf{y}(t_{k-1}) - \mathbf{y}_{k-1}||| \\ &\leq e^{Q(t_f - t_0)} |||\mathbf{y}(t_{k-1}) - \mathbf{y}_{k-1}|||, \end{aligned}$$

Teorema: Continuação

- Quando a $(\star\star)$, temos que

$$h_{n+1} + e^{h_{n+1}Q} h_n + \cdots + e^{(h_{n+1} \dots h_{k+1})Q} h_k = \sum_{r=k}^{n+1} e^{\left(Q \sum_{s=r+1}^{n+1} h_s\right)} h_r$$

$$\leq \int_{t_0}^{t_f} e^{Q(t_f - t)}\, dt = \frac{e^{Q(t_f - t_0)} - 1}{Q}$$

- Por fim, concluímos o resultado da convergência discreta com a relação final

$$\|\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}_{n+1}\| \leq e^{Q(t_f - t_0)} \|\mathbf{y}(t_{k-1}) - \mathbf{y}_{k-1}\| + \frac{e^{Q(t_f - t_0)} - 1}{Q} c' h^p$$

Teorema: Continuação

- Quanto ao resultado de ordem uniforme global, suponha novamente $y_n^* = y(t_n)$ em (22) , de modo que (25) fornece

$$\begin{aligned} y(t_n + \theta h_{n+1}) =& \beta_{n,1}(\theta) y(t_{n+j_n}) + \ldots + \beta_{n,j_n+i_n+1}(\theta) y(t_{n-i_n}) \\ &+ h_{n+1} \Psi(y(t_{n+j_n}), \ldots, y(t_{n-i_n}); \theta, g, \Delta_n') + \epsilon_{n+1}(\theta) \end{aligned} \tag{33}$$

- Sendo $\max_{0 \leq \theta \leq 1} \|\epsilon_{n+1}(\theta)\| \leq \mathcal{O}(h_{n+1}^{q+1})$ para todo $n = 1, \ldots, N-1$, de acordo coma definição (24). Logo

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} \max_{0 \leq \theta \leq 1} \|\epsilon_{n+1}(\theta)\| = O\left(h^{q+1}\right) \tag{34}$$

Teorema: Continuação

- Subtraindo (18) de (33), utilizando da estimativa já demonstrada (24) e a da estimativa (34), junto com a suposição de que os termos $\beta_{n,i}(\theta)$ são limitados uniformemente e de que a função incremento Ψ é Lipschitz continua em relação aos argumentos y, obtemos

$$\max_{0\leq n\leq N-1}\max_{0\leq\theta\leq 1}\|y\left(t_n+\theta h_{n+1}\right)-\eta\left(t_n+\theta h_{n+1}\right)\|\leq O\left(h^p\right)+O\left(h^{q+1}\right)$$

Concluindo o teorema.

Métodos Contínuos para EDRs

Utilizando do método dos passos, generalizaremos os métodos contínuos para EDOs para EDRs

- Considere o PI de EDRs (4), ou seja,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t) = \phi(t), & t_0 - p \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{35}$$

- Considere uma malha $\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots, t_N = t_f\}$
- Durante o $n-$ésimo passo, uma aproximação y_n é obtida em t_n, o próximo passo $(n+1)$ consiste em resolver, pelo método 16, a equação

Métodos Contínuos para EDRs

$$\begin{cases} w'_{n+1}(t) = f(t, w_{n+1}(t), x(t - \tau(t, w_{n+1}(t)))), & t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ w_{n+1}(t_n) = y_n \end{cases} \tag{36}$$

onde

$$x(s) = \begin{cases} \phi(s) & \text{para } s \leq t_0 \\ \eta(s) & \text{para } t_0 \leq s \leq t_n \\ w_{n+1}(s) & \text{para } t_n \leq s \leq t_{n+1} \end{cases}$$

e $\eta(t)$ é o interpolante dado por 18.

- Se $s = t - \tau\,(t, w_{n+1}(t)) \leq t_n$ para todo $t \in [t_n, t_{n+1}]$, então (36) se reduz a uma EDO.
- Caso contrário, η ainda aproxima $x(s)$ mas de forma implicita.

Métodos Contínuos para EDRs

Se $s = t - \tau(t, w_{n+1}(t)) \leq t_n$ para todo $t \in [t_n, t_{n+1}]$, então, neste intervalo

- $x(s)$ é igual ao interpolante $\eta(s)$.
- O problema local (36) se reduz a uma EDO.
- A solução local $w_{n+1}(t)$ é então aproximada pelo método discreto (16) e a aproximação de $w_{n+1}(t_{n+1})$ é definida como y_{n+1}.

Se $s = t - \tau(t, w_{n+1}(t)) > t_n$ para algum $t \in [t_n, t_{n+1}]$, então

- O valor $x(s)$ é igual a $w_{n+1}(s)$ e é desconhecido. Portanto, (35) não pode mais ser visto como uma EDO.
- No entanto, $x(s)$ ainda é aproximado pelo interpolante $\eta(t)$ no intervalo subjacente $[t_n, t_{n+1}]$, implicitamente definido por (18) com $j_n = 0$, ou seja, por

Métodos Contínuos para EDRs

$$\begin{aligned}\eta(t_n + \theta h_{n+1}) =& \beta_{n,1}(\theta) y_n + \cdots + \beta_{n,j_n+i_n+1}(\theta) y_{n-i_n} \\ &+ h_{n+1}\Psi(y_{n+j_n}, \ldots, y_{n-i_n}; \theta, g_\eta, \Delta'_n), \qquad 0 \leq \theta \leq 1,\end{aligned} \tag{37}$$

onde

$$g_\eta(t, y) = f(t, y, \eta(t - \tau(t, y)))$$

- Observe que o uso da extensão contínua torna o método implicito, mesmo que o método discreto usado seja explicito. Este fenômeno é chamado de *sobreposição* (do inglês: *overlapping*).

Métodos Contínuos para EDRs

Algoritmo para resolver EDRs dependendo do tempo sem desaparecimento do retardo

1. Localize todos os pontos de descontinuidade principais e os pontos de descontinuidade de ordem $\leq p$. A

$$\xi_1, \ldots, \xi_s \, (< t_f)$$

   e defina $\xi_0 = t_0, \xi_{s+1} = t_f$.
2. Resolva a equação

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t), \phi(t - \tau(t))), & \xi_0 \leq t \leq \xi_1, \\ z(\xi_0) = \phi(\xi_0), \end{cases}$$

   usando qualquer método discreto para EDO.
3. **Para** $\{i = 1\}$ **até** s faça:
   - Calcule e armazene a extensão contínua $\eta(t)$ para $t \in \left[\xi_{i-1}, \xi_i\right]$;
   - Resolva a equação

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t), \eta(t - \tau(t))), & \xi_i \leq t \leq \xi_{i+1}, \\ z(\xi_i) = \eta(\xi_i), \end{cases}$$

   usando o mesmo método discreto para EDOs.
4. **Fim do Para**.
5. **Fim**.

Métodos Contínuos para EDRs

Teorema 5 (Convergência dos métodos contínuos para EDRs sem desaparecimento de retardo)

Quanto a EDR dependendo do tempo sem desaparecimento do retardo, considere

- *As funções f, τ e phi são C^p-contínuas nos seus respectivos domínios e τ satisfaz a hipótese 1.*
- *A malha Δ contém todos os pontos de descontinuidade de ordem $\leq p$.*
- *Um método contínuo satisfazendo as hipóteses do Teorema 4.*
- *Para cada n, $[t_{n-i_n}, t_{n+1}] \subseteq [\xi_i, \xi_{i+1}]$ para algum i.*

Então, o método resultante tem ordem global discreta e uniforme $q' = \min\{p, q+q\}$.

O modelo SIR

- $S, I, R :=$ Percentual de Susceptíveis, Infectados e Removidos;
- $\beta, \gamma :=$ Taxa média de Contato e de Remoção por tempo;
- O modelo é dado por $\begin{cases} \frac{ds}{dt} & = -\beta is; \\ \frac{di}{dt} & = \beta is - \gamma i; \\ \frac{dr}{dt} & = \gamma i \gamma. \end{cases}$ onde $S + I + R = 1$;

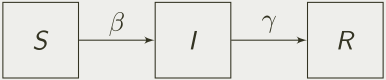
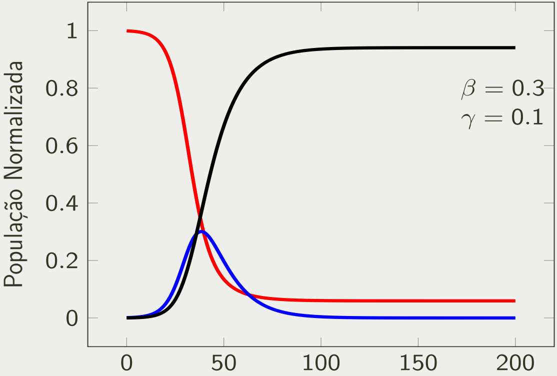


Figura: Diagrama do modelo SIR

Gráfico da solução numérica do modelo SIR

- Modelo no Geogebra

https://www.geogebra.org/classic/pbddxfeh



SIR com retardo?

- $I, S, R :=$ Percentual de "ignorants, spreaders and stiflers".
- $\begin{cases} \frac{dI}{dt} &= -\bar{k}IS, \\ \frac{dS}{dt} &= \lambda\bar{k}IS - \bar{k}S(\gamma S + \eta R) - \delta S, \\ \frac{dR}{dt} &= (1-\lambda)\bar{k}S + \bar{k}S(\gamma S + \eta R) + \delta S. \end{cases}$ onde $I + S + R = 1$;

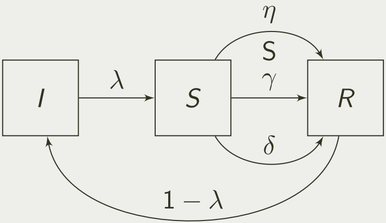


Figura: Diagrama do modelo

Yesterday,
all my troubles seemed so far away
Now it looks as though they're here to stay
Oh, I believe in yesterday.

Referências

K. W. Neves and A. Feldstein,
Characterization of jump discontinuities for state dependent delay differential equations.
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 56:689-707, 1976.
https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121097839.

Referências

K. W. Neves and A. Feldstein,
Characterization of jump discontinuities for state dependent delay differential equations.
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 56(3):689-707, 1976.
https://doi.org/10.1016/0022-247X(76)90033-0.

K. W. Neves and S. Thompson,
Software for the numerical solution of systems of functional differential equations with state-dependent delays.
Applied Numerical Mathematics, 9(3):385-401, 1992.
https://doi.org/10.1016/0168-9274(92)90029-D.

A. Bellen and M. Zennaro,

Referências

M. E. J. Newman,
Spread of epidemic disease on networks.
Phys. Rev. E, 66(1):016128, 2002.

M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts,
Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications.
Phys. Rev. E, 64(2):026118, 2001.

M. E. J. Newman
Networks.
Oxford University Press, 2018.