

# Solução numérica de equações diferenciais funcionais do tipo neutro e aplicações

Kaique M. M. Oliveira

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
departamento de computação e matemática



Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Rolnik Artioli

13 de Novembro de 2024

- 1 Introdução
- 2 Revisão de EDO
- 3 Regularidade, existência e unicidade das EDRs
  - Introdução às EDRs e EDRNs
  - Propagação de
- Descontinuidades
  - Desaparecimento do Retardo
  - Retardos Limitados e Ilimitados
  - Existência e unicidade
- 4 Métodos Numéricos Contínuos
  - Métodos discretos para EDOs
- Extensão Contínua
- Ordem dos métodos
- Teorema de convergência
- 5 Métodos Contínuos para EDRs
  - Adaptando o método das EDOs
  - Algoritmo para EDRs
  - Teorema de convergência
  - O Modelo SIR
  - SIR com retardo?
- 6 Referências

# Introdução

## Definição 1 (Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs))

Uma *Equação Diferencial Ordinária (EDO) de Primeira Ordem* é definida como.

$$y'(t) = g(t, y(t)) \quad (1)$$

para  $g : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Um *Problema de Valor Inicial (PVI)* para EDOs é dado por

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (2)$$

para algum valor inicial  $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^{d+1}$ .

- Uma função  $\gamma : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^d$  é dita *solução* do PVI se  $\gamma$  é diferenciável e se satisfaz 2.

## Definição 2 (Equações Diferenciais com Retardo (EDRs))

Uma *Equação Diferencial com Retardo (EDR)* é dada por

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))), \quad (3)$$

para  $p > 0$ ,  $f : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\tau : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, p]$ . Um *Problema Inicial (PI)* para EDRs é dado por

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))) & t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t) = \phi(t) & t_0 - p \leq t \leq t_0, \end{cases} \quad (4)$$

para alguma função inicial  $\phi : [t_0 - p, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

- A função retardo  $\tau$  é positiva e pode ser constante, depender do tempo ou do estado.
- Uma função  $\gamma : [t_0 - p, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^d$  é chamada de *solução* para o PI se  $\gamma$  for contínua em  $[t_0 - p, t_f]$ , diferenciável em  $[t_0, t_f]$  e satisfaz (4).

### Definição 3 (Equações Diferenciais do tipo Neutro com Retardo)

Uma *Equação Diferencial do tipo Neutro com Retardo (EDRN)* é dada por

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t))), y'(t - \sigma(t, y(t)))), \quad (5)$$

para  $f : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\tau : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, p]$ ,  
 $\sigma : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, p]$ . Um PI para EDRNs é dado por

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t))), y'(t - \sigma(t, y(t)))), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t) = \phi(t), & t_0 - p \leq t \leq t_0, \end{cases} \quad (6)$$

para alguma função inicial  $\phi : [t_0 - p, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

- $\tau$  e  $\sigma$  são retardos positivos.
- Uma função  $\gamma : [t_0 - p, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^d$  é chamada de *solução* para o PI se  $\gamma$  for contínua em  $[t_0 - p, t_f]$ , diferenciável em  $[t_0, t_f]$  e satisfaz (6).

# Introdução

## Observações

- Assim como EDOs, EDRs e EDRNs são difíceis de resolver analiticamente.
- Para propósitos aplicados, métodos numéricos são preferíveis.
- Difícil acesso aos softwares de solução.

## Objetivos

- Estudar EDRs e EDRNs, com enfoque numérico.
- Implementação no python.

# Revisão de EDO

## Definição 4 (Condição de Lipschitz)

Diz-se que uma função  $g : D = [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  satisfaz uma condição de *Lipschitz* em relação a variável  $y$  no conjunto  $D$  se, e somente se,

$$\|g(t, y_1) - g(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|, \quad (7)$$

para todo  $(t, y_1), (t, y_2) \in D$  para alguma constante  $L > 0$ .

## Teorema 1 (Existência e Unicidade)

Considere o PVI (2). Se  $g$  for contínua e satisfaz a condição de Lipschitz na variável  $y$  no conjunto  $D$ , então existe uma única solução  $y(t)$  em  $[t_0, t_f]$  de (2)

## Definição 5 (Problema bem posto)

O PVI (2) é dito ser um *problema bem posto* se

- Existe uma única solução  $y(t)$  para o PVI.
- Existem  $\epsilon_0 > 0$  e  $k > 0$  tais que, para qualquer  $\epsilon$  sendo  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  o *problema perturbado*

$$\begin{cases} z'(t) = g(t, z(t)) + \delta(t), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ z(t_0) = \alpha + \delta_0, \end{cases}$$

possui uma solução única  $z(t)$  que satisfaz

$$|z(t) - y(t)| < k\epsilon, \quad \forall t \in [t_0, t_f],$$

para toda função contínua  $\delta$  tal que  $|\delta(t)| \leq \epsilon, \forall t \in [t_0, t_f]$  e todo  $|\delta_0| < \epsilon$ .



# Revisão EDO

- Métodos numéricos introduzem erro.
- Para garantir a convergência, métodos numéricos são aplicados sobre PVI bem postos.

## Teorema 2 (Problema bem posto)

*Considere o PVI (2). Se  $g$  satisfaz as condições do Teorema de Existência e Unicidade 1, então o problema (2) é bem posto.*

## Exemplo 1: Propagação de descontinuidades

Considere a equação

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1), & t \geq 0, \\ y(t) = \phi(t) = 1, & t \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

O resolveremos pelo método dos passos.

- Para todo  $t \in [0, 1]$ , tem-se que  $t-1 \in [-1, 0]$ , logo, o PI (8) se reduz ao seguinte PVI

$$\begin{cases} y'(t) = -\phi(t-1) = -1, & t \in [0, 1], \\ y(0) = \phi(0) = 1. \end{cases}$$

Cuja solução é única e dada por  $y_1(t) = 1 - t$  em  $[0, 1]$ .

- Repetindo o passo anterior, tem-se  $\forall t \in [1, 2], t-1 \in [0, 1]$ , logo o PI (8) se reduz ao seguinte PVI

$$\begin{cases} y'(t) = -y_1(t-1) = t-2, & t \in [1, 2], \\ y(1) = y_1(1) = 0 \end{cases}$$

- Cuja solução é única e dada por  $y_2(t) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3)$
- Repetindo este processo, o PI se reduz a um PVI nos intervalos  $[i, i + 1], i = 1, 2, \dots$ , cuja solução existe e é única.

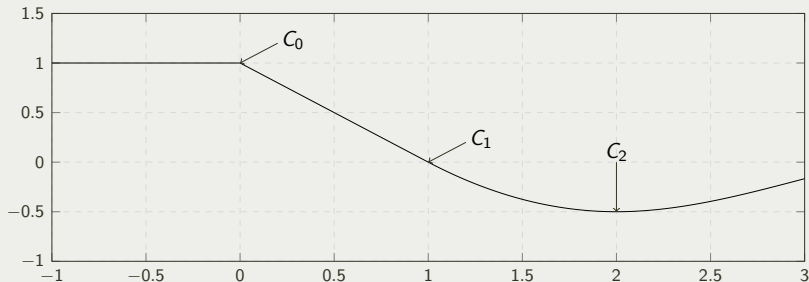


Figura: Representação do nível e localização dos pontos de descontinuidade da solução de (8)

## Exemplo 1: Propagação de descontinuidades

Reconsideremos a equação

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1), & t \geq 0, \\ y(t) = \phi(t) = 1, & t \leq 0. \end{cases} \quad (9)$$

- $y'$  tem uma descontinuidade no 0 já que

$$y'(0)^- = 0 \neq -1 = -y(-1) = y'(0)^+,$$

mas  $y'$  é contínua para todo  $t > 0$ .

- $y''(t)$  tem uma descontinuidade no 1 já que

$$y''(t) = -y'(t-1)$$

mas  $y''(t)$  é contínua para todo  $t > 1$ .

## Exemplo 2: Falta de injetividade entre valores iniciais e soluções

Considere a equação

$$\begin{cases} y'(t) = y(t-1)(y(t)-1), & t \geq 0, \\ y(t) = \phi(t), & t \leq 0, \end{cases} \quad (10)$$

para qualquer  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  tal que  $\phi(0) = 1$ .

- Observe que  $y(t) = 1$  é sempre solução.
- A injetividade entre valores iniciais e soluções é violada.
- Como veremos no teorema 5, isso ocorre porque a função  $f(t, y, x) = x(y-1)$  não satisfaz a condição de Lipschitz nas variáveis  $y$  e  $x$ .
- Para tanto, precisamos estender a definição 7.

## Exemplo 2 (Continuação)

### Definição 6 (Condição de Lipschitz)

Uma função  $f : \overline{D} = [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  é dita que satisfaz a condição **Lipschitz** em relação às variáveis  $y$  e  $x$  no conjunto  $\overline{D}$  se, e somente se,

$$\|f(t, y_1, x_2) - f(t, y_2, x_2)\| \leq L(\|y_1 - y_2\| - \|x_1 - x_2\|), \quad (11)$$

para todo  $(t, y_1, x_1), (t, y_2, x_2) \in \overline{D}$  e para alguma constante  $L > 0$ .

- Considere os pontos  $(0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  e  $(0, 0, \frac{1}{n})$ , então

$$\left\| f\left(0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) - f\left(0, 0, \frac{1}{n}\right) \right\| = \left\| \frac{1}{n} \right\| = \left| \frac{1}{n} \right| \left( \left\| \frac{1}{n} - 0 \right\| - \left\| \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right\| \right).$$

- Como  $\left| \frac{1}{n} \right| \rightarrow \infty$ , então  $f(t, y, x) = x(y - 1)$  não satisfaz a definição 6.

## Exemplo 3: Propagação de Descontinuidades (EDRs)

Considere a equação

$$\begin{cases} y'(t) = -y'(t-1), & t \geq 0, \\ y(t) = t, & t \leq 0. \end{cases} \quad (12)$$

- $y'$  tem uma descontinuidade no 0, já que

$$y'(0)^- = 1 \neq -1 = -y'(-1) = y'(0)^+,$$

- Como  $y'(t) = -y'(t-1)$ , então a descontinuidade se propaga em  $y'$  para todo  $t = 2, 3, \dots$

## Exemplo 3. Continuação

- Utilizando o método dos passos em (12), é possível mostrar por indução que a seguinte função é solução

$$y(t) = \begin{cases} -t + 2k, & t \in [2k, 2k + 1], \quad k = 0, 1, \dots \\ t - 2k, & t \in [2k - 1, 2k], \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

- Cuja gráfico é dado por



Figura: Gráfico da solução de (12)



# Propagação de descontinuidades

Nesta seção, generalizaremos alguns dos conceitos dos exemplos já apresentados, e além.

- Para simplificar a notação, introduziremos a seguintes funções.

$$\alpha(t) = t - \tau(t, y(t)) \quad \text{e} \quad \beta(t) = t - \sigma(t, y(t)),$$

os quais são chamados de *argumentos desviados*.

- Note que  $\alpha(t) \leq t$  e  $\beta(t) \leq t$ .
- Partiremos do caso escalar de (4), ou seja,  $y(t) \in \mathbb{R}$ .
- Também consideraremos que  $\alpha(t)$  depende apenas do tempo.

## Propagação de Descontinuidades

- Suponha que  $\alpha(t) \leq t_0$  para algum intervalo em  $[t_0, t_f]$  e que  $y(t)$  tem uma descontinuidade em sua primeira derivada no ponto  $t_0$ , ou seja,

$$y'(t_0)^- = \phi'(t_0)^- \neq f(t_0, \phi(t_0), \phi(\alpha(t_0))) = y'(t_0)^+$$

- Se  $f$ ,  $\phi$  e  $\alpha$  forem contínuas, então  $y'(t)$  é também contínua para todo  $t > t_0$ .
- Se  $f$ ,  $\phi$  e  $\alpha$  forem diferenciáveis, então  $y''(t)$  existe para qualquer  $t$ , exceto, talvez, nos pontos  $\xi_{1,i} > t_0$  que são raízes da equação

$$\alpha(t) = t_0,$$

sendo  $i$  referente às múltiplas da raízes.

# Propagação de Descontinuidades

- Suponha que  $\alpha(\xi_{1,i}) = t_0$  e que  $\alpha'(\xi_{1,i}) \neq 0$ , pela regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} y''(t)^\pm &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t), y(\alpha(t))) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t), y(\alpha(t)))y'(t) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x}(t, y(t), y(\alpha(t)))y'(\alpha(t))^\pm \alpha'(t), \end{aligned} \tag{13}$$

- Como assumimos que  $\phi'(t_0)^- \neq y'(t_0)^+$ , então não existe  $y''(\xi_{1,i})^- \neq y''(\xi_{1,i})^+$  e, portanto,  $y''$  tem uma descontinuidade em  $\xi_{1,i}$ .
- De forma análoga, é possível mostrar que as descontinuidades se propagam para  $y'''$  nos pontos  $\xi_{2,i}$  tais que  $\alpha(\xi_{2,i}) = \xi_{1,i}$ , e assim sucessivamente.

## Descontinuidades primárias

- Cada  $\xi_{k,i}$  gera uma descontinuidade em  $y^{(k+1)}$ . Estes pontos são chamados de *descontinuidades primárias de  $k$ -ésimo nível*.
- Note que, conforme o nível das descontinuidades primárias aumentam, também aumenta a suavidade da solução, como descrito por Neves e Feldstein em [1] na forma do seguinte teorema.

### Teorema 3 (Suavização para EDRs)

*Se  $\xi_{j,i}$  é um ponto de descontinuidade primária onde a função  $y(t)$  tem derivadas contínuas até a ordem  $\omega - 1$ , então  $y(t)$  é continuamente diferenciável no ponto propagado  $\xi_{j+1,k}$  pelo menos até a ordem  $z \cdot \omega$ , desde que  $\xi_{j+1,k}$  seja uma raiz de  $\alpha(t) = \xi_{j,i}$  com multiplicidade ímpar  $z$ .*

# Descontinuidades principais

Dentre as descontinuidades primárias, um tipo delas se destaca em importância.

## Definição 7

Seja  $\bar{\xi}_0 = t_0$  definido como uma *descontinuidade principal de nível 0*. Indutivamente, uma *descontinuidade principal de nível  $(k+1)$*  é a menor raiz  $\bar{\xi}_{k+1}$  de

$$\alpha(t) = \bar{\xi}_k$$

com multiplicidade ímpar, sendo  $\bar{\xi}_k$  uma *descontinuidade principal de nível  $(k)$*

- Note que  $\alpha(t) \leq \bar{\xi}_k$ ,  $\forall t \in [\bar{\xi}_k, \bar{\xi}_{k+1}]$  e todo  $k$
- Logo, a EDR (4) se reduz a uma EDO nos intervalos  $[\bar{\xi}_k, \bar{\xi}_{k+1}]$ .

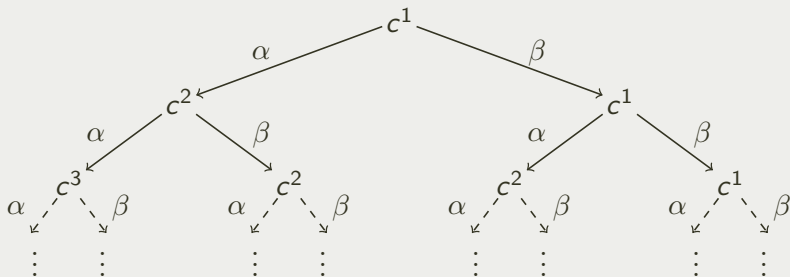
# Propagação de Descontinuidades

- A suavização que pode ocorrer com as EDRs, em geral, não ocorre para EDRNs.
- Suponha que  $y'$  tem um ponto de descontinuidade em  $t_0$  para a equação 6;
- Suponha que exista  $\bar{\xi}_{1,i} > t_0$  tal que  $\beta(\bar{\xi}_{1,i}) = t_0$ . Caso

$$f(\bar{\xi}_{1,i}, y(\bar{\xi}_{1,i}), y(\alpha(\bar{\xi}_{1,i})), \phi'(t_0)^-) \neq f(\bar{\xi}_{1,i}, y(\bar{\xi}_{1,i}), y(\alpha(\bar{\xi}_{1,i})), y'(t_0)^+), \quad (14)$$

Então  $\bar{\xi}_{1,i}$  é uma descontinuidade em  $y'$

- Observe que cada uma destas descontinuidades podem gerar mais descontinuidades através da função  $\alpha$  ou  $\beta$ . Como Segue na próxima ilustração.



- Em geral, a suavização das solução de EDRNs não pode ser garantida.
- No entanto, o seguinte teorema abaixo é foi encontrado por Neves e Thompson [?] que garante a suavização das EDRNs tais que  $\tau = \sigma$  e que

$$\phi'(t_0)^- = y'(t_0)^+ = f(t_0, \phi(t_0), \phi(\alpha(t_0)), \phi'(\alpha(t_0)))$$

#### Teorema 4 (Suavização para EDRNs)

*Se  $\xi_{j,i}$  é um ponto de descontinuidade primário onde a função  $y(t)$  possui derivadas contínuas até a ordem  $\omega - 1$ , então  $y(t)$  é continuamente diferenciável no ponto propagado  $\xi_{j+1,k}$  pelo menos até a ordem  $z \cdot (\omega - 1)$ , desde que  $\xi_{j+1,k}$  seja uma raiz de (2.1.5) com multiplicidade ímpar  $z$ .*



## Desaparecimento do Retardo

- Diz-se que o retardo desaparece caso  $\alpha(t) = t$  para algum  $t$ , ou seja, nos pontos fixos de  $\alpha$ .
- Neste caso, as descontinuidades se acumulam a esquerda do ponto fixo, como visto na Proposição 1 abaixo.
- Considere, como hipótese para a Proposição 1, que  $f, \phi, \alpha$  e  $\beta$  sejam  $C^\infty$  nos seus respectivos domínios.

### Proposição 1

*Seja  $\xi > t_0$  único ponto fixo de  $\alpha$  em  $[t_0, \xi]$ , ou seja, não existe outro  $\xi$  neste intervalo tal que  $\alpha(\xi) = \xi$ . Suponha que exista alguma descontinuidade primária  $\xi_{k,i} < \xi$  de grau  $k$  tal que  $\alpha(\xi_{k,i}) < \xi_{k,i}$ . Então, para qualquer vizinhança a esquerda de  $\xi$ , existem infinitos pontos de descontinuidade nesta vizinhança.*

# Desaparecimento do Retardo

## Demonstração.

- Como  $\alpha$  é contínua, e como  $\alpha(\xi_{k,i}) \leq \xi_{k,i} \leq \alpha(\xi)$ , temos que, pelo teorema do valor intermediário, existe  $\xi_{k+1,j} \in (\xi_{k,i}, \xi)$  tal que  $\alpha(\xi_{k+1,j}) = \xi_{k,i}$ .
- Continuando este processo, podemos criar a sequência monotonicamente crescente  $s = \{\xi_{k,i}, \xi_{k+1,j}, \dots\}$  limitada superiormente por  $\xi$ .
- Para simplificar a notação, denotaremos esta sequência por  $s = \{s_1, s_2, \dots\}$ , observe que  $\alpha(s_{k+1}) = s_k$  para todo  $k = 1, 2, \dots$ .
- Pelo teorema da convergência monótona, temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sup_{n \geq 1} s_n \leq \xi$ . Logo, nós temos

$$\sup_{n \geq 1} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(s_{n+1}) = \alpha(\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1}) = \alpha\left(\sup_{n \geq 1} s_n\right).$$

# Desaparecimento do Retardo

## Demonstração ...Continuação.

⋮

• Como  $\xi$  é único ponto fixo em  $[t_0, \xi]$  por hipótese, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \xi$ . Portanto, existem infinitos pontos de descontinuidade em qualquer vizinhança a esquerda de  $\xi$ . □

• Para evitar este problema, a seguinte hipótese sobre  $\alpha$  é introduzida.

### Hipótese 1

Existe uma constante  $\tau_0 > 0$  tal que  $\tau(t) = t - \alpha(t) > \tau_0$  para todo  $t \in [t_0, t_f]$ .

# Desaparecimento do Retardo

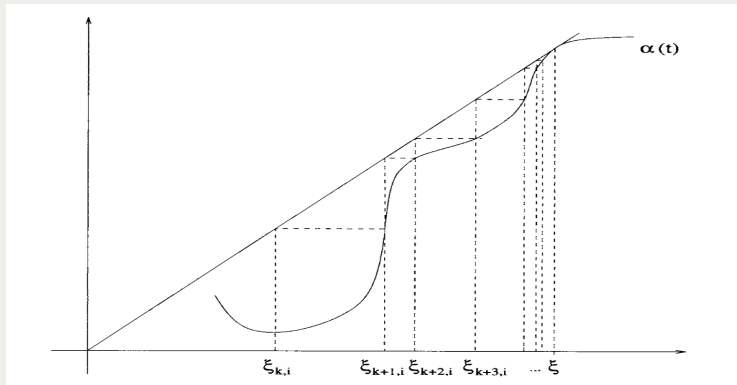


Figura: Desaparecimento do Retardo (Ainda vou montar minha própria imagem)

# Retardos Limitados e Ilimitados

## Retardos Limitados

- Caso o retardo seja limitado, a suavização da solução como visto no teorema 3, não ocorre.
- Para mostrar tanto, suponha que exista algum  $M > 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) \leq M$ .
- Suponha que  $\xi_{k,i}$  seja uma descontinuidade primária em  $[M, +\infty)$ , então  $\alpha(t) < M < \xi_{k,j}$  para todo  $t > M$ , logo não existe  $\xi_{k+1,i}$  que satisfaz  $\alpha(\xi_{k+1,i}) = \xi_{k,j}$ .
- Segue uma ilustração deste fenômeno.

## Retardos Limitados e Ilimitados

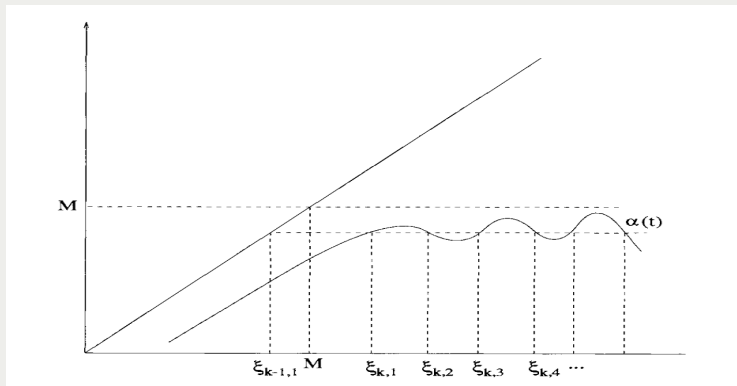


Figura: Retardo limitado (Ainda vou montar minha própria imagem)

# Retardos Limitados e Ilimitados

- Para garantir a suavização das soluções, a função  $\alpha$  deve satisfazer as seguintes duas hipóteses.

## Hipótese 2

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = +\infty.$$

## Hipótese 3

Existe uma constante  $\tau_1 > 0$  tal que  $\tau(t) = t - \alpha(t) \leq \tau_1$  para todo  $t \in [t_0, t_f]$ .

- abaixo, segue uma figura ilustrativa dessas três hipóteses em ação.

## Retardos Limitados e Ilimitados

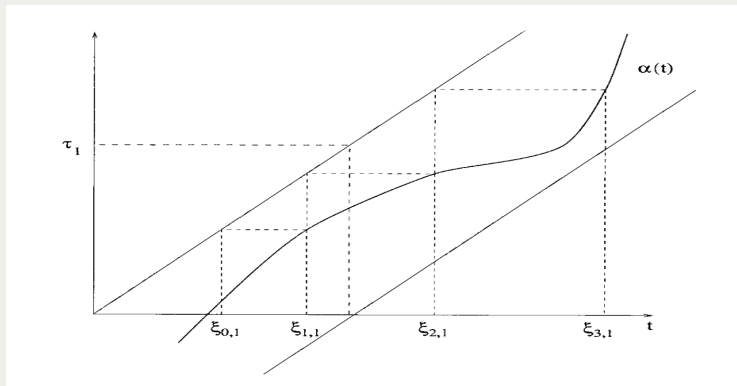


Figura: Hipóteses 1, 2 e 3 (Ainda vou montar a minha)



## Teorema 5 (Existência e unicidade para EDRs)

Considere a equação (4), ou seja,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t))))), & t \geq t_0 \\ y(t) = \phi(t), & t \leq t_0 \end{cases}$$

Sejam  $U \subseteq \mathbb{R}^d$  e  $V \subseteq \mathbb{R}^d$  vizinhanças de  $\phi(t_0)$  e  $\phi(t_0 - \tau(t_0, \phi(t_0)))$ , respectivamente, e suponha que a função  $f(t, u, v)$  seja contínua em relação a  $t$  e Lipschitz contínua em relação a  $u$  e  $v$  em  $[t_0, t_0 + h] \times U \times V$  para algum  $h > 0$ . Além disso, suponha que a função inicial  $\phi(t)$  seja Lipschitz contínua para  $t \leq t_0$  e que a função de retardo  $\tau(t, y) \geq 0$  seja contínua em relação a  $t$  e Lipschitz contínua em relação a  $y$  em  $[t_0, t_0 + h] \times U$ . Então o problema 4 tem uma única solução em  $[t_0, t_0 + \delta)$  para algum  $\delta > 0$  e esta solução depende continuamente dos dados iniciais.

# Métodos discretos para EDOs

- Para  $n = 0, \dots, N - 1$ , seja  $\Delta = \{t_0, \dots, t_N = t_f\}$  uma malha e  $h_{n+1} = t_{n+1} - t_n$  os passos.

## Definição 8

Um método numérico para resolver o PVI (2) é chamado de **método de k-passos** se ele satisfaz

$$y_{n+1} = \alpha_{n,1}y_n + \dots + \alpha_{n,k}y_{n-k+1} + h_{n+1}\Phi(y_n, \dots, y_{n-k+1}; g, \Delta_n), \quad (15)$$

para  $n \geq k - 1$  e para  $\Delta_n = \{t_{n-k+1}, \dots, t_n, t_{n+1}\}$ .

- A função  $\Phi$  é chamada de função incremento.
- Os valores  $y_0, \dots, y_k$  são os valores iniciais.

# Métodos discretos para EDOs

- Caso  $k = 1$ , temos os chamados métodos de passo único, como o método de Euler

$$y_{n+1} = y_n + h_n g(t_n, y_n)$$

- Caso  $k > 1$ , temos os métodos multipasse. Um exemplo de um método multipasso é o método de Adams–Bashforth de 2 passos, o qual é definido por

$$y_n = y_{n-1} + \frac{3}{2} h g(t_{n-1}, y_{n-1}) - \frac{1}{2} h g(t_{n-2}, y_{n-2}),$$

e inicializado por algum método de passo único, como o método do ponto médio descrito abaixo

$$y_n = y_{n-1} + h g \left( t_{n-1} + \frac{1}{2} h, y_{n-1} + \frac{1}{2} h g(t_{n-1}, y_{n-1}) \right).$$

# Métodos discretos para EDOs

## Suposição 1

Quanto a função incremento  $\Phi$ , as seguintes suposições são feitas:

1.  $\Phi$  satisfaz uma condição Lipschitz em relação às variáveis  $y$  com constante de Lipschitz  $Q_g$ .

2. Existem  $h_g > 0$  e  $\gamma_g > 0$  tal que  $\Phi$  possui uma dependência contínua de  $g$  com relação a norma do supremo no conjunto  $U_n = [t_{n-k+1}, t_{n+1}] \times \mathbb{R}^d$ , onde  $h_{n-k+2}, \dots, h_{n+1} \leq h_g(L)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \|\Phi(y_n, \dots, y_{n-k+1}; \tilde{g}, \Delta_n) - \Phi(y_n, \dots, y_{n-k+1}; g, \Delta_n)\| \\ \leq \gamma_g \sup_{t, y \in U_n} \|\tilde{g}(t, y) - g(t, y)\| \end{aligned} \quad (16)$$

para todo  $\tilde{g} \in C^0([t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ .

# Extensão Contínua

## Definição 9 (Extensão contínua)

Uma **extensão contínua**, ou uma **interpolante** do método (15) é uma função polinomial  $\eta(t)$  definida por partes nos intervalos  $[t_n, t_{n+1}]$  baseada em valores calculados pelo método definidos em  $[t_{n-i_n}, t_{n+j_n+1}]$ , para  $i_n, j_n \geq 0$ .

$$\eta(t_n + \theta h_{n+1}) = \beta_{n,1}(\theta)y_{n+j_n} + \cdots + \beta_{n,j_n+i_n+1}(\theta)y_{n-i_n} + h_{n+1}\Psi(y_{n+j_n}, \dots, y_{n-i_n}; \theta, g, \Delta'_n), \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad (17)$$

para  $\Delta'_n = \{t_{n-i_n}, \dots, t_{n+j_n}, t_{n+j_n+1}\}$ , onde  $\eta$  satisfaz a seguinte condição de continuidade

$$\eta(t_n) = y_n \quad \text{e} \quad \eta(t_{n+1}) = y_{n+1} \quad (18)$$

## Extensão Contínua

Note que

- Caso  $i_n = j_n = 0$ , a interpolação ocorre baseada nos valores em  $[t_n, t_{n+1}]$ . Tal caso é chamado de *interpolação de passo único*. Caso isso não ocorra, temos uma interpolação de múltiplos passos.
- Caso  $j_n > 0$ , o interpolante (17) não pode ser calculado simultaneamente com o método (15), devendo esperá-lo atingir o passo  $t_{n+j_n+1}$  para poder ser calculado.

Um método numérico discreto para EDOs acompanhado de uma extensão contínua é chamado um *método numérico contínuo para EDOs*.

## Extensão Contínua

- A função  $\Psi$  é também chamada de função incremento.
- Para garantir a condição de continuidade de  $\eta$ , normalmente são consideradas as seguintes hipóteses

$$\beta_{n,j}(0) = \begin{cases} 1 & \text{para } j = 1 + j_n, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\Psi(y_{n+j_n}, \dots, y_{n-i_n}; 0, g, \Delta'_n) = 0$$

$$\beta_{n,j}(1) = \begin{cases} \alpha_{n,j-j_n} & \text{para } 1 + j_n \leq j \leq k + j_n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\Psi(y_{n+j_n}, \dots, y_{n-i_n}; 1, g, \Delta'_n) = \Phi(y_n, \dots, y_{n-k+1}; g, \Delta_n).$$

- Para  $\theta = 1$ , a equação (17) se reduz à (15).

# Extensão Contínua

## Suposição 2

Quanto a função incremento  $\Psi$ , as seguintes suposições são feitas:

1.  $\Psi$  satisfaz uma condição Lipschitz em relação às variáveis  $y$  com constante de Lipschitz  $Q_g$ .

2. Existem  $h'_g > 0$  e  $\gamma'_g > 0$  tal que  $\Phi$  possui uma dependência contínua de  $g$  com relação a norma do supremo no conjunto

$U'_n = [t_{n-i_n}, t_{n+j_n+1}] \times \mathbb{R}^d$ , onde  $h_{n-i_n+1}, \dots, h_{n+j_n+1} \leq h'_g(L)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \|\Psi(y_{n+j_n}, \dots, y_{n-i_n}; \tilde{g}, \Delta'_n) - \Psi(y_{n+j_n}, \dots, y_{n-i_n}; g, \Delta'_n)\| \\ \leq \gamma'_g \sup_{t, y \in U'_n} \|\tilde{g}(t, y) - g(t, y)\| \end{aligned} \quad (19)$$

para todo  $\tilde{g} \in C^0([t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ .



## Ordem dos métodos

### Definição 10 (Ordem Local de um método discreto)

Um método discreto (15) é consistente e de ordem  $p \geq 1$  é o menor inteiro tal que, para toda função  $g \in C^p$  e para todos os pontos da malha tem-se que

$$\|z_{n+1}(t_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1}\| = \mathcal{O}(h_{n+1}^{p+1}), \quad (20)$$

uniformemente com respeito a  $y_n^*$  em qualquer conjunto limitado de  $R^d$  e para  $n = 0, \dots, N-1$ , onde  $z_{n+1}(t)$  é solução do problema local

$$\begin{cases} z'_{n+1}(t) = g(t, z_{n+1}(t)), & t_n \leq t \leq t_{n+1}, \\ z(t_n) = y_n^*, & t \leq t_0, \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \text{para} \quad \tilde{y}_{n+1} &= \alpha_{n,1} z_{n+1}(t_n) + \dots + \alpha_{n,k} z_{n+1}(t_{n-k+1}) \\ &+ h_{n+1} \Phi(z_{n+1}(t_n), \dots, z_{n+1}(t_{n-k+1}); g, \Delta_n). \end{aligned} \quad (22)$$

## Ordem dos métodos

### Definição 11 (Ordem Local do interpolante)

Um interpolante (17) é consistente e de ordem  $q \geq 1$  se

$$\max_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} \|z_{n+1}(t) - \tilde{\eta}_{n+1}(t)\| = \mathcal{O}(h_{n+1}^{q+1}), \quad (23)$$

para

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(t_n + \theta h_{n+1}) &= \beta_{n,1}(\theta) z_{n+1}(t_{n+j_n}) + \cdots + \beta_{n,j_n+i_n+1}(\theta) z_{n+1}(t_{n-i_n}) \\ &+ h_{n+1} \Psi(z_{n+1}(t_{n+j_n}), \dots, z_{n+1}(t_{n-i_n}); \theta, g, \Delta'_n) \end{aligned} \quad (24)$$

## Ordem dos métodos

- Seja  $h = \max_{1 \leq n \leq N} h_n$ .

### Definição 12 (Ordem Global de um Método Discreto)

Um método discreto (15) tem ordem global  $p$ , se

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|y(t_n) - y_n\| = \mathcal{O}(h^p), \quad (25)$$

### Definição 13 (Ordem Global de um Interpolante)

Um interpolante (17) tem ordem global  $p$ , se

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_f} \|y(t) - \eta(t)\| = \mathcal{O}(h^p). \quad (26)$$

## Apêndice

### Definição 14 (Norma induzida de matrizes)

Seja  $K$  o corpo dos reais ou dos complexos e sejam  $\|\cdot\|_\alpha$  e  $\|\cdot\|_\beta$  normas em  $K^n$  e  $K^m$ , respectivamente. A norma  $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$  em  $K^{m \times n}$  é chamada de *norma induzida* se

$$\|A\|_{\alpha,\beta} = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|_\beta}{\|x\|_\alpha} : x \in K^n \setminus \{0\} \right\}.$$

Normalmente, a notação a acima é reduzida simplesmente a

$$\|A\|_{\alpha,\beta} = \sup_{\|x\|_\alpha=1} \|Ax\|_\beta.$$

# Apêndice

## Definição 15 (Produto de Kronecker)

Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes quaisquer nos espaços vetoriais  $K^{m,n}$ ,  $m, n \geq 0$  e  $B \in K^{p,q}$ ,  $r, s \geq 0$  para  $K = \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ). O *produto Kronecker* entre  $A$  e  $B$  é dado pela função  $\otimes : K^{m,n} \times K^{p,q} \rightarrow (K^{pm \times qn})$  definida notação por blocos

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \dots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \dots & a_{2,n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & a_{m,2}B & \dots & a_{m,n}B \end{bmatrix},$$

## Teorema 6 (Convergência dos Métodos para EDOs)

Considere o método (15) de ordem  $p \geq 1$  e, para cada  $n$ , seja

$$C_n = \begin{bmatrix} \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,k-1} & \alpha_{n,k} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Caso

• Existe uma norma  $\|\cdot\|_*$  em  $\mathbb{R}^k$ , independente de  $n$  e da malha  $\Delta$ , tal que, para a norma induzida da matriz, a seguinte condição de estabilidade é satisfeita.

$$\|C_n\|_* \leq 1. \quad (27)$$

- A função  $g$  de (2) é  $C^p$  contínua;
- Os valores iniciais  $y_0, \dots, y_{k-1}$  aproxima a solução exata com ordem  $p$ .

Então, o método discreto (15) é convergente e de ordem global  $p$  em  $[t_0, t_f]$ , já o interpolante, de ordem (17)  $q' = \min\{p, q + 1\}$ .

## Teorema: Demonstração

- Como o método discreto (15) tem ordem  $p$ , então

$$y(t_{n+1}) = \alpha_{n,1}y(t_n) + \cdots + \alpha_{n,k}y(t_{n-k+1}) \\ + h_{n+1}\Phi(y(t_n), \dots, y(t_{n-k+1}); g, \Delta_n) + \epsilon_{n+1} \quad (28)$$

com

$$\|\epsilon_{n+1}\| \leq ch_{n+1}^{p+1}, \quad (29)$$

para alguma constante  $c > 0$  e para todo  $n = k - 1, \dots, N - 1$ .

- Para os mesmos  $n$ , introduziremos a seguinte notação por blocos

$$\mathbf{y}_n = [y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k+1}]^T, \\ \mathbf{y}(t_n) = [y(t_n), y(t_{n-1}), \dots, y(t_{n-k+1})]^T.$$

## Teorema: Demonstração

- Note que  $\mathbf{y}_n, \mathbf{y}(t_n) \in \mathbb{R}^{kd}$ . Agora, defina  $C_n$  por

$$C_n = C_n \otimes I_d.$$

- Então que  $C_n$  é uma matriz  $(dk) \times (dk)$  dada por

$$C_n = \begin{bmatrix} \alpha_{n,1} I_d & \alpha_{n,2} I_d & \dots & \alpha_{n,k-1} I_d & \alpha_{n,k} I_d \\ I_d & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_d & 0 \end{bmatrix}.$$



## Teorema: Demonstração

• Devemos mostrar que  $\mathcal{C}_n$  herda a propriedade de estabilidade (27). Para tanto, considere  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{kd}$  qualquer. Pela notação de blocos, podemos representar  $\mathbf{x}$  por  $k$  blocos de vetores  $x_1, \dots, x_k$  em  $\mathbb{R}^d$ , ou seja,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(d)})^T \\ (x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_2^{(d)})^T \\ \vdots \\ (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_k^{(d)})^T \end{bmatrix}.$$

## Teorema: Demonstração

• A norma que utilizaremos para trabalhar em  $\mathbb{R}^{kd}$  será a norma do máximo definida como

$$\|\mathbf{x}\| = \max_{1 \leq i \leq d} \|x^{(i)}\|_*, \quad (30)$$

onde cada  $x^{(i)}$  é o vetor  $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_k^{(i)})^T \in \mathbb{R}^k$ .

• Para  $\mathcal{C}_n$  satisfaz (27), ou seja,  $\|\mathcal{C}_n\| \leq 1$ , basta mostrar que  $\|\mathcal{C}_n \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|$ . Para tanto, teremos

$$\mathcal{C}_n \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha_{n,1} I_d & \alpha_{n,2} I_d & \dots & \alpha_{n,k-1} I_d & \alpha_{n,k} I_d \\ I_d & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{n,1} x_1 + \dots + \alpha_{n,k} x_k \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{bmatrix}$$

## Teorema: Continuação

- Observe que, para todo  $1 \leq j \leq d$ , o vetor coluna do lado direito da igualdade acima é dado por

$$\begin{bmatrix} \alpha_{n,1}x_1^{(j)} + \cdots + \alpha_{n,k}x_k^{(j)} \\ x_1^{(j)} \\ x_2^{(j)} \\ \vdots \\ x_{k-1}^{(j)} \end{bmatrix} = C_n x^{(j)}.$$

- Pela propriedade da estabilidade (27) sobre  $C_n$ , temos que  $\|C_n x^{(j)}\|_* \leq \|x^{(j)}\|_*$ .
- Finalmente, como  $\|C_n \mathbf{x}\| \leq \|x^{(j)}\|_*$  para todo  $1 \leq j \leq d$ , então  $\|C_n \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|$  e  $C_n$  satisfaz a propriedade.

## Teorema: Continuação

- Pela notação de blocos, temos que  $y(t_n) - y_n$  é equivalente a

$$\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}_{n+1} = \mathcal{C}_n (\mathbf{y}(t_n) - \mathbf{y}_n) + h_{n+1} \Gamma_n + E_{n+1}, \quad n = k-1, \dots, N-1, \quad (31)$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= (\Phi(\mathbf{y}(t_n); g, \Delta_n) - \Phi(\mathbf{y}_n; g, \Delta_n), 0, \dots, 0)^T, \\ E_{n+1} &= (\epsilon_{n+1}, 0, \dots, 0)^T, \end{aligned}$$

sendo  $0$  o vetor nulo em  $\mathbb{R}^d$ .

- Aplicando a norma  $\|\cdot\|$  em ambos os lados de (31) e utilizando da propriedade de estabilidade de  $\mathcal{C}_n$ , obtemos

## Teorema: Continuação

$$\|y(t_{n+1}) - y_{n+1}\| \leq \|y(t_n) - y_n\| + h_{n+1} \|\Gamma_n\| + \|E_{n+1}\|,$$

para todo  $n = k - 1, \dots, N - 1$ .

- Utilizando da propriedade da equivalência das normas em espaços de dimensão finita, obtemos

$$\begin{aligned} \|E_{n+1}\| &= \max_{1 \leq i \leq d} \|(e_{n+1}^{(i)}, 0, \dots, 0)\|_* \leq \max_{1 \leq i \leq d} (k_1 \|(e_{n+1}^{(i)}, 0, \dots, 0)\|_\infty) \\ &\leq k_1 \max_{1 \leq i \leq d} |e_{n+1}^{(i)}| \leq k_1 \|e_{n+1}\|_\infty \\ &\leq k_1 k_2 \|e_{n+1}\| \leq k_1 k_2 c h_{n+1}^{p+1} \leq k_1 k_2 c h_{n+1} h^p, \end{aligned}$$

para algum  $k_1, k_2 > 0$  e para  $h = \max_{1 \leq n \leq N} h_n$ .

## Teorema: Continuação

- Quanto ao restante da normas, pela continuidade Lipschitz da função incremento  $\Phi$  em relação aos argumentos  $y$  na norma  $\|\cdot\|$  em  $\mathbb{R}^d$  e, novamente, pela propriedade de equivalência das normas, junto com (29), existe uma constante  $Q > 0$  tal que, para  $c' = k_1 k_2$  e para todo  $n = k - 1, \dots, N - 1$ , temos

$$\|\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}_{n+1}\| \leq (1 + h_{n+1}Q) \|\mathbf{y}(t_n) - \mathbf{y}_n\| + c' h_{n+1} h^p.$$

- Observe que  $1 + h_j Q \leq e^{h_j Q}$  para todo  $j$ , assim, continuando a relação de recorrência, obtemos

## Teorema: Continuação

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}_{n+1}\| &\leq \overbrace{h_{n+1}^Q \dots e^{h_k Q} \|\mathbf{y}(t_{k-1}) - \mathbf{y}_{k-1}\|}^{(*)} \\ &\quad + \underbrace{c' h^p (h_{n+1} + e^{h_{n+1} Q} h_n + \dots + e^{(h_{n+1} \dots h_{k+1}) Q} h_k)}_{(**)}. \end{aligned}$$

• Quanto a  $(*)$ , observe que, como  $h_k + \dots h_{n+1} \leq t_f - t_0$ ,  
 então

$$\begin{aligned} e^{h_{n+1} Q} \dots e^{h_k Q} \|\mathbf{y}(t_{k-1}) - \mathbf{y}_{k-1}\| &= e^{Q(h_{n+1} + \dots + h_k)} \|\mathbf{y}(t_{k-1}) - \mathbf{y}_{k-1}\| \\ &\leq e^{Q(t_f - t_0)} \|\mathbf{y}(t_{k-1}) - \mathbf{y}_{k-1}\|, \end{aligned}$$

## Teorema: Continuação

- Quando a  $(\star\star)$ , temos que

$$h_{n+1} + e^{h_{n+1}Q} h_n + \dots + e^{(h_{n+1} \dots h_{k+1})Q} h_k = \sum_{r=k}^{n+1} e^{(Q \sum_{s=r+1}^{n+1} h_s)} h_r$$

$$\leq \int_{t_0}^{t_f} e^{Q(t_f-t)} dt = \frac{e^{Q(t_f-t_0)} - 1}{Q}$$

- Por fim, concluímos o resultado da convergência discreta com a relação final

$$\|y(t_{n+1}) - y_{n+1}\| \leq e^{Q(t_f-t_0)} \|y(t_{k-1}) - y_{k-1}\| + \frac{e^{Q(t_f-t_0)} - 1}{Q} c' h^p$$



## Teorema: Continuação

• Quanto ao resultado de ordem uniforme global, suponha novamente  $y_n^* = y(t_n)$  em (21), de modo que (24) fornece

$$\begin{aligned} y(t_n + \theta h_{n+1}) = & \beta_{n,1}(\theta)y(t_{n+j_n}) + \dots + \beta_{n,j_n+i_n+1}(\theta)y(t_{n-i_n}) \\ & + h_{n+1}\Psi(y(t_{n+j_n}), \dots, y(t_{n-i_n}); \theta, g, \Delta'_n) + \epsilon_{n+1}(\theta) \end{aligned} \quad (32)$$

• Sendo  $\max_{0 \leq \theta \leq 1} \|\epsilon_{n+1}(\theta)\| \leq \mathcal{O}(h_{n+1}^{q+1})$  para todo  $n = 1, \dots, N-1$ , de acordo com a definição (23). Logo

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} \max_{0 \leq \theta \leq 1} \|\epsilon_{n+1}(\theta)\| = \mathcal{O}(h^{q+1}) \quad (33)$$

## Teorema: Continuação

• Subtraindo (17) de (32), utilizando da estimativa já demonstrada (23) e a da estimativa (33), junto com a suposição de que os termos  $\beta_{n,i}(\theta)$  são limitados uniformemente e de que a função incremento  $\Psi$  é Lipschitz continua em relação aos argumentos  $y$ , obtemos

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} \max_{0 \leq \theta \leq 1} \|y(t_n + \theta h_{n+1}) - \eta(t_n + \theta h_{n+1})\| \leq O(h^p) + O(h^{q+1})$$

Concluindo o teorema.

## Métodos Contínuos para EDRs

Utilizando do método dos passos, generalizaremos os métodos contínuos para EDOs para EDRs

- Considere o PI de EDRs (4), ou seja,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t))))), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t) = \phi(t), & t_0 - p \leq t \leq t_0, \end{cases} \quad (34)$$

- Considere uma malha  $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_N = t_f\}$
- Durante o  $n$ -ésimo passo, uma aproximação  $y_n$  é obtida em  $t_n$ , o próximo passo ( $n + 1$ ) consiste em resolver, pelo método 15, a equação

## Métodos Contínuos para EDRs

$$\begin{cases} w'_{n+1}(t) = f(t, w_{n+1}(t), x(t - \tau(t, w_{n+1}(t))))), & t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ w_{n+1}(t_n) = y_n \end{cases} \quad (35)$$

onde

$$x(s) = \begin{cases} \phi(s) & \text{para } s \leq t_0 \\ \eta(s) & \text{para } t_0 \leq s \leq t_n \\ w_{n+1}(s) & \text{para } t_n \leq s \leq t_{n+1} \end{cases}$$

e  $\eta(t)$  é o interpolante dado por 17.

- Quanto a equação (35), temos os seguintes casos:

## Métodos Contínuos para EDRs

Se  $s = t - \tau(t, w_{n+1}(t)) \leq t_n$  para todo  $t \in [t_n, t_{n+1}]$ , então, neste intervalo

- $x(s)$  é igual ao interpolante  $\eta(s)$ .
- O problema local (35) se reduz a uma EDO.
- A solução local  $w_{n+1}(t)$  é então aproximada pelo método discreto (15) e a aproximação de  $w_{n+1}(t_{n+1})$  é definida como  $y_{n+1}$ .

Se  $s = t - \tau(t, w_{n+1}(t)) > t_n$  para algum  $t \in [t_n, t_{n+1}]$ , então

- O valor  $x(s)$  é igual a  $w_{n+1}(s)$  e é desconhecido. Portanto, (34) não pode mais ser visto como uma EDO.
- No entanto,  $x(s)$  ainda é aproximado pelo interpolante  $\eta(t)$  no intervalo subjacente  $[t_n, t_{n+1}]$ , implicitamente definido por (17) com  $j_n = 0$ , ou seja, por

## Métodos Contínuos para EDRs

$$\begin{aligned}\eta(t_n + \theta h_{n+1}) = & \beta_{n,1}(\theta)y_{n+j_n} + \cdots + \beta_{n,j_n+i_n+1}(\theta)y_{n-i_n} \\ & + h_{n+1}\Psi(y_{n+j_n}, \dots, y_{n-i_n}; \theta, g_\eta, \Delta'_n),\end{aligned}\quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

(36)

onde

$$g_\eta(t, y) = f(t, y, \eta(t - \tau(t, y)))$$

- Observe que o uso da extensão contínua torna o método implícito, mesmo que o método discreto usado seja explícito. Este fenômeno é chamado de *sobreposição* (do inglês: *overlapping*).

# Métodos Contínuos para EDRs

---

Algoritmo para resolver EDRs dependendo do tempo sem desaparecimento do retardo

---

1. Localize todos os pontos de descontinuidade principais e os pontos de descontinuidade de ordem  $\leq p$ . A

$$\xi_1, \dots, \xi_s (< t_f)$$

e defina  $\xi_0 = t_0$ ,  $\xi_{s+1} = t_f$ .

2. Resolva a equação

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t), \phi(t - \tau(t))), & \xi_0 \leq t \leq \xi_1, \\ z(\xi_0) = \phi(\xi_0), \end{cases}$$

usando qualquer método discreto para EDO.

3. **Para**  $\{i = 1\}$  **até**  $s$  **faça:**

- Calcule e armazene a extensão contínua  $\eta(t)$   
para  $t \in [\xi_{i-1}, \xi_i]$ ;
- Resolva a equação

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t), \eta(t - \tau(t))), & \xi_i \leq t \leq \xi_{i+1}, \\ z(\xi_i) = \eta(\xi_i), \end{cases}$$

usando o mesmo método discreto para EDOs.

4. **Fim do Para.**

5. **Fim.**

# Métodos Contínuos para EDRs

## Teorema 7 (Convergência dos métodos contínuos para EDRs sem desaparecimento de retardo)

*Quanto a EDR dependendo do tempo sem desaparecimento do retardo, considere*

- *As funções  $f, \tau$  e  $\phi$  são  $C^p$ -contínuas nos seus respectivos domínios e  $\tau$  satisfaz a hipótese 1.*
- *A malha  $\Delta$  contém todos os pontos de descontinuidade de ordem  $\leq p$ .*
- *Um método contínuo satisfazendo as hipóteses do Teorema 6.*
- *Para cada  $n$ ,  $[t_{n-i_n}, t_{n+1}] \subseteq [\xi_i, \xi_{i+1}]$  para algum  $i$ .*

*Então, o método resultante tem ordem global discreta e uniforme  $q' = \min\{p, q + q\}$ .*



## E o grude?

Os próximos slides do modelo SIR eu não sei o que fazer

# Modelo de Kermack e McKendrick

## Modelo SIR

- $s, i, r :=$  Percentual de Susceptíveis, Infectados e Removidos;
- $\beta, \gamma :=$  Taxa média de Contato e de Remoção por tempo;
- O modelo é dado por 
$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -\beta is; \\ \frac{di}{dt} = \beta is - \gamma i; \text{ onde } s + i + r = 1; \\ \frac{dr}{dt} = \gamma i. \end{cases}$$
- Note que a taxa de infecção é homogênea, ou seja, a chance de um indivíduo infectado contaminar outra pessoa é sempre a mesma, independente da pessoa.
- Soluções analíticas para o modelo são difíceis de encontrar, o que não nos impede de tirar conclusões importantes sobre o comportamento do modelo.

# Modelo de Kermack e McKendrick

## Número Básico de Reprodução

- Suponha que a população suscetível seja 1. O Número Básico de Reprodução  $R_0$  é o número médio de pessoas que a doença é transmitida antes da pessoa ser imunizada. Note que, se  $R_0 > 1$  a doença cresce, já se  $R_0 < 1$ , a doença decresce. O limiar epidemiológico é definido quando  $R_0 = 1$ .
- No modelo SIR, a doença cresce quando  $\frac{di}{dt} > 0$ . Supondo que  $s = 1$  obtemos

$$0 < \frac{di}{dt} = \beta i s - \gamma i \iff 0 < \beta i - \gamma i \iff i < \frac{\beta}{\gamma} i \iff 0 < \frac{\beta}{\gamma}$$

ou seja,  $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$  denota o início da epidemia.

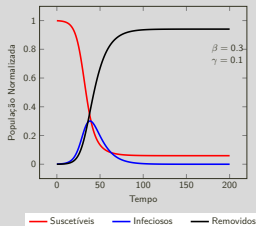
# Modelo de Kermack e McKendrick

## Tamanho da Epidemia

- O tamanho da epidemia no modelo SIR nunca é igual a 1 independente se  $R_0 \gg 1$  (onde  $R_0 < \infty$ ), ou seja

$$s_\infty = 1 - r_\infty > 0, \quad \forall R_0 \in \mathbb{R}.$$

A demonstração deste fato é envolvida, eis um modelo visual interativo para exploração: [geogebra](#)



# SIR com retardo?

falar sobre

## Referências



K. W. Neves and A. Feldstein,  
Characterization of jump discontinuities for state dependent  
delay differential equations.  
*Journal of Mathematical Analysis and Applications*,  
56:689-707, 1976.  
[https://api.semanticscholar.org/CorpusID:  
121097839](https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121097839).

## Referências



K. W. Neves and A. Feldstein,  
Characterization of jump discontinuities for state dependent  
delay differential equations.  
*Journal of Mathematical Analysis and Applications*,  
56(3):689-707, 1976.  
[https://doi.org/10.1016/0022-247X\(76\)90033-0](https://doi.org/10.1016/0022-247X(76)90033-0).



A. Bellen and M. Zennaro,  
*Numerical Methods for Delay Differential Equations*.  
Oxford University Press, 2003.  
[https://doi.org/10.1093/acprof:  
oso/9780198506546.001.0001](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198506546.001.0001).

## Referências



M. E. J. Newman,  
Spread of epidemic disease on networks.  
*Phys. Rev. E*, 66(1):016128, 2002.



M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts,  
Random graphs with arbitrary degree distributions and their  
applications.  
*Phys. Rev. E*, 64(2):026118, 2001.



M. E. J. Newman  
*Networks*.  
Oxford University Press, 2018.