Como fazer o título caber?

Kaique M. M. Oliveira

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
departamento de computação e matemática

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Rolnik Artioli

13 de Novembro de 2024

Sumário

Introdução

Definição 1 (Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs))

Um *Problema de Valor Inicial (PVI)* para *Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)* é dado por

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

para $g : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ e $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Quanto ao PVI 1, nós temos:

- A primeira equação é a chamada EDO e a segunda, o valor inicial.
- Uma função $\gamma : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^d$ é dita *solução* do PVI se γ é diferenciável e se satisfaz 1.

Introdução

Definição 2 (Condição de Lipschitz)

Diz-se que uma função $g : D = [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ satisfaz uma condição de *Lipschitz* em relação a variável y no conjunto D se, e somente se,

$$\|g(t, y_1) - g(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|, \tag{2}$$

para todo $(t, y_1), (t, y_2) \in D$ para alguma constante $L > 0$.

Teorema 1 (Existência e Unicidade)

Considere o PVI (1). Se g for contínua e satisfazer a condição de Lipschitz na variável y no conjunto D, então existe uma única solução $y(t)$ em $[t_0, t_f]$ de (1)

Definição 3 (Problema bem posto)

O problema de valor inicial (1) é dito ser um *problema bem posto* se

- Existe uma única solução $y(t)$ para o PVI.
- Existem constantes $\epsilon_0 > 0$ e $k > 0$ tais que, para qualquer ϵ sendo $0 < \epsilon < \epsilon_0$ o *problema perturbado*

$$\begin{cases} z'(t) = g(t, z(t)) + \delta(t), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ z(t_0) = \alpha + \delta_0, \end{cases}$$

possui uma solução única $z(t)$ que satisfaz

$$|z(t) - y(t)| < k\epsilon, \qquad \forall t \in [t_0, t_f],$$

para toda função $\delta \in C^0([t_0, t_f], (-\epsilon, \epsilon))$ e todo $|\delta_0| < \epsilon$.

Revisão EDO

Teorema 2 (Problema bem posto)

Considere o PVI (1). Se g satisfaz as condições do Teorema de Existência e Unicidade 1, então o problema (1) é bem posto.

- Equações Diferenciais com Retardo (EDRs) generalizam as EDOs ao levarem em consideração o estado passado da solução na sua equação.
- Seu Problema de Valor Inicial (PI, para evitar confusões) pode ser descrito de forma mais ou menos geral. Utilizaremos a definição utilizada por Bellen e zennaro, que é prática do posto de vista numérico.

Definição 4 (Equações Diferenciais com Retardo (EDRs))

Seja $p > 0$. Um PI para EDRs é dado por

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t) = \phi(t), & t_0 - p \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{3}$$

para $f : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, para $\tau : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \to [0, p]$ e para $\phi : [t_0 - p, t_0] \to \mathbb{R}^d$. Quanto ao PI (3), nós temos:

- A primeira equação do PI é a chamada EDR, já a segunda, o estado inicial.
- Uma função $\gamma : [t_0 - p, t_f] \to \mathbb{R}^d$ é chamada de *solução* para o PI se γ for contínua em $[t_0 - p, t_f]$, diferenciável em $[t_0, t_f]$ e satisfaz (3).
- A função τ é chamada de *retardo* e assumisse que $\tau(t, y(t)) \geq 0$ para todo $t \in [t_0, t_f]$.

Quanto ao retardo $\tau(t, y(t))$, dizemos que

- O retardo depende do estado quando a função τ depende tanto do tempo t, quando do estado y. quanto do estado y
- *O retardo depende do tempo* caso a função retardo τ dependa apenas da tempo t.
- *O retardo é constante* caso τ for constante.

Novos desafios emergem ao fazer a generalização das EDOs para EDRs, sendo necessária uma nova teoria de existência, unicidade e estabilidade das soluções.

Exemplo 1: Propagação de descontinuidades

Considere a equação

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1), & t \geq 0, \\ y(t) = \phi(t) = 1, & t \leq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Observe que

$$y'(0)^- = 0 \neq -1 = -y(-1) = y'(0)^+,$$

o que significa que y' tem uma descontinuidade no 0. Mais ainda, derivando a primeira equação de (4) obtemos

$$y''(t) = -y'(t-1),$$

mostrando que a descontinuidade foi propagada para a segunda derivada de y no ponto 1.

Exemplo 1: Continuação

Mostraremos, por indução, que a equação $y''(t) = -y'(t-1)$ implica na seguinte relação de recorrência

$$y^{(n+1)}(t) = (-1)^n y'(t-n), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Sabemos que a relação é valida para $n = 1$, suponhemos que o resultado para algum $k > 1$, então

$$y^{n+2}(t) = (-1)^n \frac{d}{dt} y'(t-n) = (-1)^{n+1} y'((t-(n+1))$$

Logo, a relação é válida para todo $n \geq 1$ e, de fato, a descontinuidade de $y'(0)$ é propagada para todo $y^{(n+1)}(n)$.

Exemplo 1: Continuação

- A solução do PI (4) $\begin{cases} y'(t) = -y(t-1), & t \geq 0, \\ y(t) = \phi(t) = 1, & t \leq 0. \end{cases}$ existe?
- Observe que, para todo $t \in [0,1]$, tem-se que $t-1 \in [-1,0]$, logo, o PI (4) se reduz ao seguinte PVI

$$\begin{cases} y'(t) = -1, & t \in [0,1], \\ y(0) = \phi(0) = 1. \end{cases}$$

  Cuja solução é única e dada por $y(t) = 1 - t$ em $[0,1]$.
- Repetindo este processo, o PI se reduz a um PVI nos intervalos $[i, i+1], i = 1, 2, \ldots,$ cuja solução existe e é única.
- Este método é chamado de *método dos passos* e é a base para os métodos numéricos para EDRs.

Exemplo 1: Continuação

inaeiudnae GRÁFICO COMENTADO

Exemplo 2: Falta de injetividade entre valores iniciais e soluções

Considere a equação

$$y'(t) = y(t-1)(y(t)-1), \qquad t \geq 0, \tag{5}$$

- Para toda $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ tal que $\phi(0) = 1$, tem-se que $y(t) = 1$ é solução.
- Então a unicidade entre valores iniciais e soluções é violada.
- Como veremos no teorema 3, isso ocorre porque a função $f(t, y, x) = x(y-1)$ não satisfaz a condição de Lipschitz nas variáveis y e x.
- Para tanto, precisamos extender a definição 2.

Exemplo 2 (Continuação)

Definição 5 (Condição de Lipschitz)

Uma função $f : \overline{D} = [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ é dita que satisfaz a condição **Lipschitz** em relação às variáveis y e x no conjunto $\overline{D}$ se, e somente se,

$$\|f(t, y_1, x_2) - f(t, y_2, x_2)\| \leq L(\|y_1 - y_2\| - \|x_1 - x_2\|), \qquad (6)$$

para todo $(t, y_1, x_1), (t, y_2, x_2) \in \overline{D}$ e para alguma constante $L > 0$.

- Considere os pontos $(0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ e $(0, 0, \frac{1}{n})$, então

$$\left\|f\left(0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) - f\left(0, 0, \frac{1}{n}\right)\right\| = \left\|\frac{1}{n}^2\right\| = \left|\frac{1}{n}\right| \left(\left\|\frac{1}{n} - 0\right\| - \left\|\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right\|\right).$$

- Como $|\frac{1}{n}| \to \infty$, então $f(t, y, x) = x(y-1)$ não satisfaz a definição 5.

Definição: Equações Diferenciais do tipo Neutro com Retardo (EDRNs) ??

Definição 6 (Equações Diferenciais do tipo Neutro com Retardo (EDRNs))

Seja $p > 0$. Um PI para EDRNs é dado por

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau(t,y(t))), y'(t-\sigma(t,y(t)))), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t) = \phi(t), \quad t_0 - p \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{7}$$

para $f : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\tau : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \to [0, p]$, $\sigma : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \to [0, p]$ e $\phi : [t_0 - p, t_0] \to \mathbb{R}^d$.

Quanto ao PI (7), tem-se que:

- A primeira equação do PI é a chamada EDRN, já a segunda, o estado inicial.
- Uma função $\gamma : [t_0 - p, t_f] \to \mathbb{R}^d$ é chamada de *solução* para o PI se γ for contínua em $[t_0 - p, t_f]$, diferenciável em $[t_0, t_f]$ e satisfaz (7).
- A função τ é chamada de *retardo* e assumisse que $\tau(t, y(t)) \geq 0$ para todo $t \in [t_0, t_f]$.
- Naturalmente, mais dificuldades são introduzidas ao genearalizar as EDRs. No próximo exemplo, mostra-se que as descontinuidades não se suavizam conforme o tempo aumenta.

Exemplo 3: Propagação de Descontinuidades (EDRs)

Considere a equação

$$\begin{cases} y'(t) = -y'(t-1), & t \geq 0, \\ y(t) = t, & t \leq 0. \end{cases} \tag{8}$$

Como

$$y'(0)^- = 1 \neq -1 = -y'(-1) = y'(0)^+,$$

temos que a a primeira derivada de y tem uma descontinuidade no ponto $t = 0$, mas já que $y'(t) = -y'(t-1)$, então a descontinuidade se propaga em y' para todo $t = 2, 3, \ldots$.

Exemplo 3: Continuação

- Utilizando o método dos passos em (8), é possível mostrar por indução que a seguinte função é solução

$$y(t) = \begin{cases} -t + 2k, & t \in [2k, 2k+1], \quad k = 0, 1, \ldots \\ t - 2k, & t \in [2k-1, 2k], \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

- Cuja gráfico é dado por

gráfico comentado

Teorema 3 (Existência local)

Considere a equação (3), ou seja,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))), & t \geq t_0 \\ y(t) = \phi(t), & t \leq t_0 \end{cases}$$

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^d$ e $V \subseteq \mathbb{R}^d$ vizinhanças de $\phi(t_0)$ e $\phi(t_0 - \tau(t_0, \phi(t_0)))$, respectivamente, e suponha que a função $f(t, u, v)$ seja contínua em relação a t e Lipschitz contínua em relação a u e v em $[t_0, t_0 + h] \times U \times V$ para algum $h > 0$. Além disso, suponha que a função inicial $\phi(t)$ seja Lipschitz contínua para $t \leq t_0$ e que a função de atraso $\tau(t, y) \geq 0$ seja contínua em relação a t e Lipschitz contínua em relação a y em $[t_0, t_0 + h] \times U$. Então o problema 3 tem uma única solução em $[t_0, t_0 + \delta)$ para algum $\delta > 0$ e esta solução depende continuamente dos dados iniciais.

Existência e Regularidade das soluções das Equações com Retardo

- Nesta seção, generalizaremos alguns dos conceitos dos exemplos já apresentados, e além.

Propagação de Descontinuidades

- Para simplificar a notação, introduziremos a seguintes funções.

$$\alpha(t) = t - \tau(t, y(t)) \qquad \text{e} \qquad \beta(t) = t - \sigma(t, y(t)),$$

os quais são chamados de *argumentos deviados*.

- Note que $\alpha(t) \leq t$ e $\beta(t) \leq t$.
- Partiremos do caso escalar de (3), ou seja, $y(t) \in \mathbb{R}$.
- Também consideraremos que $\alpha(t)$ depende apenas do tempo.

$$\vdots$$

Propagação de Descontinuidades

- Suponha que $\alpha(t) \leq t_0$ para algum intervalo em $[t_0, t_f]$ e que $y(t)$ tem uma descontinuidade em sua primeira derivada no ponto t_0, ou seja,

$$y'(t_0)^- = \phi'(t_0)^- \neq f(t_0, \phi(t_0), \phi(\alpha(t_0))) = y'(t_0)^+$$

- Se f, ϕ e α forem contínuas, então $y'(t)$ é também contínua para todo $t > t_0$.
- Se f, ϕ e α forem diferenciáveis, então $y''(t)$ existe para qualquer t, exceto, talvez, nos pontos $\xi_{1,i} > t_0$ que são raízes da equação

$$\alpha(t) = t_0,$$

sendo i referente a multiplicidade da raiz.

Propagação de Descontinuidades

• Suponha que $\alpha(\xi_{1,i}) = t_0$ e que $\alpha'(\xi_{1,i}) \neq 0$, pela regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} y''(t)^{\pm} = & \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t), y(\alpha(t))) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t), y(\alpha(t)))y'(t) \\ & + \frac{\partial f}{\partial x}(t, y(t), y(\alpha(t)))y'(\alpha(t))^{\pm}\alpha'(t), \end{aligned} \tag{9}$$

• Como assumimos que $\phi'(t_0)^{-} \neq y'(t_0)^{+}$, então não existe $y''(\xi_{1,i})^{-} \neq y''(\xi_{1,i})^{+}$ e, portanto, y'' tem uma descontinuidade em $\xi_{1,i}$.
• De forma análoga, é possível mostrar que as descontinuidades se propagam para y''' nos pontos $\xi_{2,i}$ tais que $\alpha(\xi_{2,i}) = \xi_{1,i}$, e assim sucessivamente.

Propagação de Descontinuidades

• Cada $\xi_{k,i}$ gera uma descontinuidade em $y^{(k+1)}$. Estes pontos são chamados de *descontinuidades primárias de k-ésimo nível*.

• Note que, conforme o nível das descontinuidades primárias aumenta, também aumenta a suavidade da solução, como descrito por Neves e Feldstein em [1] na forma do seguinte teorema.

Teorema 4 (Suavização para EDRs)

Se $\xi_{j,i}$ é um ponto de descontinuidade primária onde a função $y(t)$ tem derivadas contínuas até a ordem $\omega - 1$, então $y(t)$ é continuamente diferenciável no ponto propagado $\xi_{j+1,k}$ pelo menos até a ordem $z \cdot \omega$, desde que $\xi_{j+1,k}$ seja uma raiz de $\alpha(t) = \xi_{j,i}$ com multiplicidade ímpar z.

Propagação de Descontinuidades

- Tal suavização, em geral, não ocorre para EDRNs.
- Suponha que y' tem um ponto de descontinuidade em t_0 para a equação 7;
- Suponha que exista $\bar{\xi}_{1,i} > t_0$ tal que $\beta(\bar{\xi}_{1,i}) = t_0$. Caso

$$f(\bar{\xi}_{1,i}, y(\bar{\xi}_{1,i}), y(\alpha(\bar{\xi}_{1,i})), \phi'(t_0)^-) \neq f(\bar{\xi}_{1,i}, y(\bar{\xi}_{1,i}), y(\alpha(\bar{\xi}_{1,i})), y'(t_0)^+), \quad (10)$$

Então $\bar{\xi}_{1,i}$ é uma descontínuidade em y'

- Observe que cada uma destas descontinuidades podem gerar mais discontinuidades através da função α ou β. Como Segue na próxima ilustração.

Propagação de Descontinuidades

Gráfico comentado

• Em geral, a suavização das solução de EDRNs não pode ser garantida.

• No entanto, o seguinte teorema abaixo é foi encontrado por Neves e Thompson [2] que garante a suavização das EDRNs tais que $\tau = \sigma$ e que

$$\phi'(t_0)^- = y'(t_0)^+ = f(t_0, \phi(t_0), \phi(\alpha(t_0), \phi'(\alpha(t_0))))$$

Teorema 5 (Suavização para EDRNs)

Se $\xi_{j,i}$ é um ponto de descontinuidade primário onde a função $y(t)$ possui derivadas contínuas até a ordem $\omega - 1$, então $y(t)$ é continuamente diferenciável no ponto propagado $\xi_{j+1,k}$ pelo menos até a ordem $z \cdot (\omega - 1)$, desde que $\xi_{j+1,k}$ seja uma raiz de (2.1.5) com multiplicidade ímpar z.

Desaparecimento do Retardo

- Diz-se que o retardo desaparece caso $\alpha(t) = t$ para algum t, ou seja, nos pontos fixos de α.
- Neste caso, as descontinuidades se acumulam a esquerda do ponto fixo, como visto na Proposição 1 abaixo.
- Considere, como hipótese para a Proposição 1, que f, ϕ, α e β sejam C^∞ nos seus respectivos domínios.

Proposição 1

Seja $\xi > t_0$ único ponto fixo de α em $[t_0, \xi]$, ou seja, não existe outro ξ neste intervalo tal que $\alpha(\xi) = \xi$. Suponha que exista alguma descontinuidade primária $\xi_{k,i} < \xi$ de grau k tal que $\alpha(\xi_{k,i}) < \xi_{k,i}$. Então, para qualquer vizinhança a esquerda de ξ, existem infinitos pontos de descontinuidade nesta vizinhança.

Desaparecimento do Retardo

Demonstração.

• Como α é contínua, e como $\alpha(\xi_{k,i}) \leq \xi_{k,i} \leq \alpha(\xi)$, temos que, pelo teorema do valor intermediário, existe $\xi_{k+1,j} \in (\xi_{k,i}, \xi)$ tal que $\alpha(\xi_{k+1,j}) = \xi_{k,i}$.

• Continuando este processo, podemos criar a sequência monotonicamente crescente $s = \{\xi_{k,i}, \xi_{k+1,j}, ...\}$ limitada superiormente por ξ.

• Para simplificar a notação, denotaremos esta sequência por $s = \{s_1, s_2, \ldots\}$, observe que $\alpha(s_{k+1}) = s_k$ para todo $k = 1, 2, \ldots$.

• Pelo teorema da convergência monótona, temos que $\lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\geq 1} s_n \leq \xi$. Logo, nós temos

$$\sup_{n\geq 1} s_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \alpha(s_{n+1}) = \alpha(lim_{n\to\infty} s_{n+1}) = \alpha\left(\sup_{n\geq 1} s_n\right).$$

Desaparecimento do Retardo

Demonstração ...Continuação.

$$\vdots$$

- Como ξ é único ponto fixo em $[t_0, \xi]$ por hípotese, então $\lim_{n\to\infty} s_n = \xi$. Portanto, existem infinitos pontos de descontinuidade em qualquer vizinhança a esquerda de ξ. $\square$

- Para evitar este problema, a seguinte hipótese sobre α é introduzida.

Hipótese 1

Existe uma constante $\tau_0 > 0$ tal que $\tau(t) = t - \alpha(t) > \tau_0$ para todo $t \in [t_0, t_f]$.

Desaparecimento do Retardo

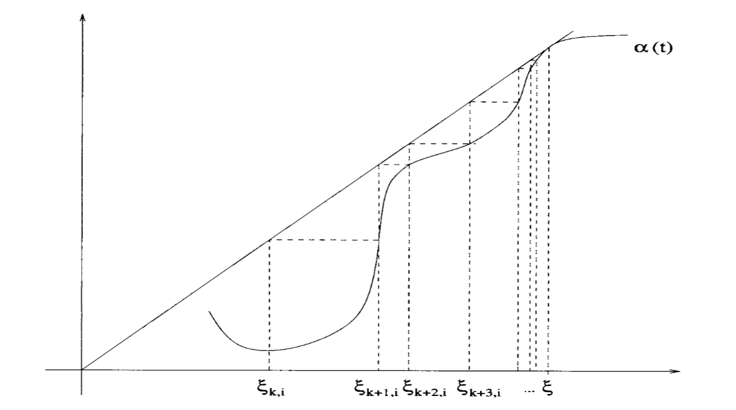


Figura: fig:Desaparecimento do Retardo

Retardos Limitados e Ilimitados

Retardos Limitados

- Caso o retardo seja limitado, a suavização da solução como visto no teorema 4, não ocorre.
- Para mostrar tanto, supoha que exista algum $M > 0$ tal que $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) \leq M$.
- Suponha que $\xi_{k,i}$ seja uma descontinuidade primária em $[M, +\infty)$, então $\alpha(t) < M < \xi_{k,j}$ para todo $t > M$, logo não existe $\xi_{k+1,i}$ que satisfaz $\alpha(\xi_{k+1,i}) = \xi_{k,j}$.
- Segue uma ilustração deste fenômemo.

Retardos Limitados e Ilimitados

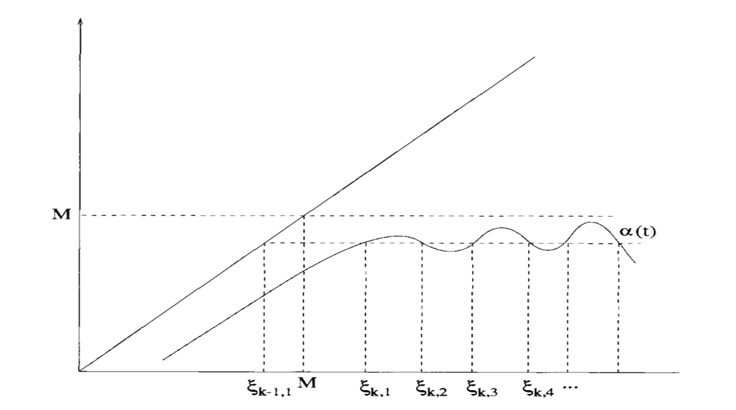


Figura: Retardo limitado

Retardos Limitados e Ilimitados

- Para garantir a suavização das soluções, a função α deve setisfazer as seguintes duas hipóteses.

Hipótese 2

$\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = +\infty$.

Hipótese 3

Existe uma constante $\tau_1 > 0$ tal que $\tau(t) = t - \alpha(t) \leq \tau_1$ para todo $t \in [t_0, t_f]$.

- abaixo, segue uma figura ilustrativa dessas três hipóteses em ação.

Retardos Limitados e Ilimitados

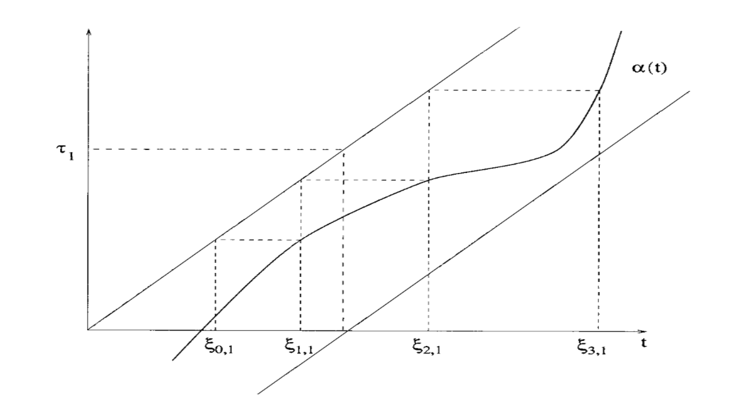


Figura: Hip 123

Descontinuidades Principais

- Dentre as descontinuidades primárias, um tipo delas se destaca em importância.

Definição 7

Seja $\bar{\xi_0} = t_0$ definido como uma *descontinuidade principal de nível 0*. Indutivamente, uma *descontinuidade principal de nível (k+1)* é a menor raiz $\bar{\xi}_{k+1}$ de

$$\alpha(t) = \bar{\xi}_k$$

com multiplicidade ímpar, sendo $\bar{\xi}_k$ uma *descontinuidade principal de nível (k)*

- Note que $\alpha(t) \leq \bar{\xi}_k, \quad \forall t \in \left[\bar{\xi}_k, \bar{\xi}_{k+1}\right]$ e todo k
- Logo, a EDR (3) se reduz a uma EDO nos intervalos $\left[\bar{\xi}_k, \bar{\xi}_{k+1}\right]$.

Existência e unicidade de soluções

Teorema 6 (Existência local)

Teorema 2.2.4 Considere a equação 7, ou seja,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))), & t \geq t_0 \\ y(t) = \phi(t), & t \leq t_0 \end{cases}$$

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^d$ e $V \subseteq \mathbb{R}^d$ vizinhanças de $\phi(t_0)$ e $\phi(t_0 - \tau(t_0, \phi(t_0)))$, respectivamente, e suponha que a função $f(t, u, v)$ seja contínua em relação a t e Lipschitz contínua em relação a u e v em $[t_0, t_0 + h] \times U \times V$ para algum $h > 0$. Além disso, suponha que a função inicial $\phi(t)$ seja Lipschitz contínua para $t \leq t_0$ e que a função de atraso $\tau(t, y) \geq 0$ seja contínua em relação a t e Lipschitz contínua em relação a y em $[t_0, t_0 + h] \times U$. Então o problema 7 tem uma única solução em $[t_0, t_0 + \delta)$ para algum $\delta > 0$ e esta solução depende continuamente dos dados iniciais.

Métodos Contínuos para EDOs

- Para $n = 0, ..., N-1$, seja $\Delta = \{t_0, ..., t_N = t_f\}$ uma malha e $h_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ os passos.

Definição 8

Um método numérico para resolver o PVI (1) é chamado de *método de k-passos* se ele satisfaz

$$y_{n+1} = \alpha_{n,1} y_n + ... + \alpha_{n,k} y_{n-k+1} + h_{n+1} \Phi(y_n, ..., y_{n-k+1}; g, \Delta_n), \quad (11)$$

para $n \geq k-1$ e para $\Delta_n = \{t_{n-k+1}, ..., t_n, t_{n+1}\}$.

- A função Φ é chamada de função incremento.
- Os valores $y_0, ..., y_k$ são os valores iniciais.

Métodos Contínuos para EDOs

• Caso $k = 1$, temos os chamados métodos de passo único, como o método de Euler

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n)$$

• Caso $k > 1$, temos os métodos multipasse. Um exemplo de um método multipasso é o método de Adams–Bashforth de 2 passos, o qual é definido por

$$y_n = y_{n-1} + \frac{3}{2} hg(t_{n-1}, y_{n-1}) - \frac{1}{2} hg(t_{n-2}, y_{n-2}),$$

e inicializado por algum método de passo único, como o método do ponto médio descrito abaixo

$$y_n = y_{n-1} + hg\left(t_{n-1} + \tfrac{1}{2}h, y_{n-1} + \tfrac{1}{2}hg(t_{n-1}, y_{n-1})\right).$$

Métodos Contínuos para EDOs

Suposição 1

Quanto a função incremento Φ, as seguintes suposições são feitas:

1. Φ satisfaz uma condição Lipschitz em relação às variáveis y com constante de Lipschitz Q_g.

2. Existem $h_g > 0$ e $\gamma_g > 0$ tal que que Φ possui uma dependência contínua de g com relação a norma do supremo no conjunto $U_n = [t_{n-k+1}, t_{n+1}] \times \mathbb{R}^d$, onde $h_{n-k+2}, \dots, h_{n+1} \leq h_g(L)$, ou seja,

$$\begin{aligned} &\|\Phi(y_n, \dots, y_{n-k+1}; \tilde{g}, \Delta_n) - \Phi(y_n, \dots, y_{n-k+1}; g, \Delta_n)\| \\ &\qquad \leq \gamma_g \sup_{t,y \in U_n} \|\tilde{g}(t,y) - g(t,y)\| \end{aligned} \tag{12}$$

para todo $\tilde{g} \in C^0([t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.

Extensão Contínua

Definição 9 (Extensão contínua)

Uma *extensão contínua*, ou *interpolante* do método (11) é uma função polinomial $\eta(t)$ definida por partes nos intervalos $[t_n, t_{n+1}]$ baseada em valores calculados pelo método definidos em $[t_{n-i_n}, t_{n+j_n+1}]$, para $i_n, j_n \geq 0$.

$$\begin{aligned}\eta(t_n + \theta h_{n+1}) = &\beta_{n,1}(\theta) y_{n+j_n} + \cdots + \beta_{n,j_n+i_n+1}(\theta) y_{n-i_n} \\ &+ h_{n+1}\Psi(y_{n+j_n}, \ldots, y_{n-i_n}; \theta, g, \Delta'_n), \qquad 0 \leq \theta \leq 1,\end{aligned} \tag{13}$$

para $\Delta'_n = \{t_{n-i_n}, \ldots, t_{n+j_n}, t_{n+j_n+1}\}$, onde η satisfaz a seguinte condição de continuidade

$$\eta(t_n) = y_n \qquad \text{e} \qquad \eta(t_{n+1}) = y_{n+1} \tag{14}$$

Extensão Contínua

Note que

- Caso $i_n = j_n = 0$, a interpolação ocorre baseada nos valores em $[t_n, t_{n+1}]$. Tal caso é chamado de *interpolação de passo único*. Caso isso não ocorra, temos uma interpolação de múltiplos passos.
- Caso $j_n > 0$, o interpolante (13) não pode ser calculado simultâneamente com o método (11), devendo esperá-lo atingir o passo t_{n+j_n+1} para poder ser calculado.

Um método numérico discreto para EDOs acompanhado de uma extensão contínua é chamado um *método numérico contínuo para EDOs*.

Extensão Contínua

- A função Ψ é também chamada de função incremento.
- Para garantir a condição de continuidade de η, normalmente são consideradas as seguintes hipóteses

$$\beta_{n,j}(0) = \begin{cases} 1 & \text{para } j = 1 + j_n, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\Psi\left(y_{n+j_n}, \ldots, y_{n-i_n}; 0, g, \Delta_n'\right) = 0$$

$$\beta_{n,j}(1) = \begin{cases} \alpha_{n,j-j_n} \text{ para } 1 + j_n \leq j \leq k + j_n \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$\Psi\left(y_{n+j_n}, \ldots, y_{n-i_n}; 1, g, \Delta_n'\right) = \Phi\left(y_n, \ldots, y_{n-k+1}; g, \Delta_n\right).$$

- Para $\theta = 1$, a equação (13) se reduz à (11).

Métodos Contínuos para EDOs

Suposição 2

Quanto a função incremento Ψ, as seguintes suposições são feitas:

1. Ψ satisfaz uma condição Lipschitz em relação às variáveis y com constante de Lipschitz Q_g.

2. Existem $h'_g > 0$ e $\gamma'_g > 0$ tal que que Φ possui uma dependência contínua de g com relação a norma do supremo no conjunto $U'_n = [t_{n-i_n}, t_{n+j_n+1}] \times \mathbb{R}^d$, onde $h_{n-i_n+1}, \ldots, h_{n+j_n+1} \leq h'_g(L)$, ou seja,

$$\begin{aligned} &\|\Psi(y_{n+jn}, \ldots, y_{n-i_n}; \tilde{g}, \Delta'_n) - \Psi(y_{n+jn}, \ldots, y_{n-i_n}; g, \Delta'_n)\| \\ &\qquad \leq \gamma'_g \sup_{t,y \in U'_n} \|\tilde{g}(t,y) - g(t,y)\| \end{aligned} \tag{15}$$

para todo $\tilde{g} \in C^0([t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.

Definição 10 (Ordem Local de um método discreto)

Um método discreto (11) é consistente e de ordem $p \geq 1$ é o menor inteiro tal que, para toda função $g \in C^p$ e para todos os pontos da malha tem-se que

$$\|z_{n+1}(t_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1}\| = \mathcal{O}(h_{n+1}^{p+1}), \tag{16}$$

uniformemente com respeito a y_n^* em qualquer conjunto limitado de R^d e para $n = 0, ..., N-1$, onde $z_{n+1}(t)$ é solução do problema local

$$\begin{cases} z'_{n+1}(t) = g(t, z_{n+1}(t)), & t_n \leq t \leq t_{n+1}, \\ z(t_n) = y_n^*, \quad t \leq t_0, \end{cases} \tag{17}$$

$$\text{para} \quad \begin{aligned} \tilde{y}_{n+1} &= \alpha_{n,1} z_{n+1}(t_n) + \cdots + \alpha_{n,k} z_{n+1}(t_{n-k+1}) \\ &\quad + h_{n+1}\Phi(z_{n+1}(t_n), \ldots, z_{n+1}(t_{n-k+1}); g, \Delta_n). \end{aligned} \tag{18}$$

Ordem Local do Interpolante

Definição 11 (Ordem Local do interpolante)

Um interpolante (13) é consistente e de ordem $q \geq 1$ se

$$\max_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} \|z_{n+1}(t) - \tilde{\eta}_{n+1}(t)\| = \mathcal{O}(h_{n+1}^{q+1}), \tag{19}$$

para

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(t_n + \theta h_{n+1}) &= \beta_{n,1}(\theta) z_{n+1}(t_{n+j_n}) + \cdots + \beta_{n,j_n+i_n+1}(\theta) z_{n+1}(t_{n-i_n}) \\ &\quad + h_{n+1} \Psi(z_{n+1}(t_{n+j_n}), \ldots, z_{n+1}(t_{n-i_n}); \theta, g, \Delta_n') \end{aligned} \tag{20}$$

Ordem Global

- Seja $h = \max_{1 \leq n \leq N} h_n$.

Definição 12 (Ordem Global de um Método Discreto)

Um método discreto (11) tem ordem global p, se

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|y(t_n) - y_n\| = \mathcal{O}(h^p), \tag{21}$$

Definição 13 (Ordem Global de um Interpolante)

Um interpolante (13) tem ordem global p, se

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_f} \|y(t) - \eta(t)\| = \mathcal{O}(h^p). \tag{22}$$

Apêndice

Definição 14 (Norma induzida de matrizes)

Seja K o corpo dos reais ou dos complexos e sejam $\|\cdot\|_\alpha$ e $\|\cdot\|_\beta$ normas em K^n e K^m, respectivamente. A norma $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ em $K^{m\times n}$ é chamada de *norma induzida* se

$$\|A\|_{\alpha,\beta} = \sup\{\frac{\|Ax\|_\beta}{\|x\|_\alpha} : x \in K^n \backslash \{0\}\}.$$

Normalmente, a notação a acima é reduzida simplesmente a

$$\|A\|_{\alpha,\beta} = \sup_{\|x\|_\alpha = 1} \|Ax\|_\beta.$$

Apêndice

Definição 15 (Produto de Kronecker)

Sejam A e B duas matrizes quaisquer nos espaços vetorias $K^{m,n}, m, n \geq 0$ e $B \in K^{p,q}, r, s \geq 0$ para $K = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). O *produto Kronecker* entre A e B é dado pela função $\otimes : K^{m,n} \times K^{p,q} \to (K^{pm \times qn})$ definida notação por blocos

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \dots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \dots & a_{2,n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & a_{m,2}B & \dots & a_{m,n}B \end{bmatrix},$$

Teorema 7 (Convergência dos Métodos para EDOs)

Considere o método (11) *de ordem* $p \geq 1$ *e, para cada* n*, seja*

$$C_n = \begin{bmatrix} \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,k-1} & \alpha_{n,k} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Caso

- *Existe uma norma* $\|\cdot\|_*$ *em* $\mathbb{R}^k$*, independente de* n *e da malha* Δ*, tal que, para a norma induzida da matriz, a seguinte condição de estabilidade é satisfeita.*

$$\|C_n\|_* \leq 1. \tag{23}$$

- *A função* g *de* (1) *é* C^p *contínua;*
- *Os valores iniciais* $y_0, \cdots, y_{k-1}$ *aproxima a solução exata com ordem* p*.*

Então, o método discreto (11) *é convergente e de ordem global* p *em* $[t_0, t_f]$*, já o interpolante, de ordem* (13) $q' = \min\{p, q+1\}$.

Teorema: Demonstração

- Como o método discreto (11) tem ordem p, então

$$
\begin{aligned}
y\left(t_{n+1}\right) = & \alpha_{n,1} y\left(t_n\right) + \cdots + \alpha_{n,k} y\left(t_{n-k+1}\right) \\
& + h_{n+1} \Phi\left(y\left(t_n\right), \ldots, y\left(t_{n-k+1}\right); g, \Delta_n\right) + \epsilon_{n+1}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

com

$$
\left\|\epsilon_{n+1}\right\| \leq c h_{n+1}^{p+1}, \tag{25}
$$

para alguma constante $c > 0$ e para todo $n = k-1, \ldots, N-1$.

- Para os mesmos n, introduziremos a seguinte notação por blocos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}_n &= \left[y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k+1}\right]^T, \\
\mathbf{y}(t_n) &= \left[y(t_n), y(t_{n-1}), \ldots, y(t_{n-k+1})\right]^T.
\end{aligned}
$$

Teorema: Demonstração

- Note que $\mathbf{y}_n, \mathbf{y}(t_n) \in \mathbb{R}^{kd}$. Agora, defina $\mathcal{C}_n$ por

$$\mathcal{C}_n = C_n \otimes I_d.$$

- Então que $\mathcal{C}_n$ é uma matriz $(dk) \times (dk)$ dada por

$$\mathcal{C}_n = \begin{bmatrix} \alpha_{n,1} I_d & \alpha_{n,2} I_d & \dots & \alpha_{n,k-1} I_d & \alpha_{n,k} I_d \\ I_d & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_d & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_d & 0 \end{bmatrix}.$$

Teorema: Demonstração

• Devemos mostrar que $\mathcal{C}_n$ herda a propriedade de estabilidade (23). Para tanto, considere $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{kd}$ qualquer. Pela notação de blocos, podemos representar $\mathbf{x}$ por k blocos de vetores $x_1, \ldots, x_k$ em $\mathbb{R}^d$, ou seja,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1^{(1)}, & x_1^{(2)}, & \ldots, & x_1^{(d)})^T \\ (x_2^{(1)}, & x_2^{(2)}, & \ldots, & x_2^{(d)})^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_k^{(1)}, & x_k^{(2)}, & \ldots, & x_k^{(d)})^T \end{bmatrix}.$$

Teorema: Demonstração

• A a norma que utilizaremos para trabalhar em $\mathbb{R}^{kd}$ será a norma do máximo definida como

$$|||\mathbf{x}||| = \max_{1 \le i \le d} \|x^{(i)}\|_*, \tag{26}$$

onde cada $x^{(i)}$ é o vetor $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \ldots, x_k^{(i)})^T \in \mathbb{R}^k$.

• Para provar que $\mathcal{C}_n$ satisfaz (23), pela definição da norma induzida 14, basta mostrar que $|||\mathcal{C}_n \mathbf{x}||| \le |||\mathbf{x}|||$ para todo $\mathbf{x}$. Teremos, então, que

$$\mathcal{C}_n \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha_{n,1} x_1 + \cdots + \alpha_{n,k} x_k \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{bmatrix}$$

Teorema: Continuação

- Observe que, para todo $1 \leq j \leq d$, o vetor coluna do lado direito da igualdade acima é dado por

$$\begin{bmatrix} \alpha_{n,1}x_1^{(j)} + \cdots + \alpha_{n,k}x_k^{(j)} \\ x_1^{(j)} \\ x_2^{(j)} \\ \vdots \\ x_{k-1}^{(j)} \end{bmatrix} = C_n x^{(j)}.$$

- Pela propriedade da estabilidade (23) sobre C_n, temos que $\|C_n x^{(j)}\|_* \leq \|x^{(j)}\|_*$.
- Finalmente, como $|||\mathcal{C}_n \mathbf{x}||| \leq \|x^{(j)}\|_*$ para todo $1 \leq j \leq d$, então $|||\mathcal{C}_n \mathbf{x}||| \leq |||\mathbf{x}|||$ e $\mathcal{C}_n$ satisfaz a propriedade.

Teorema: Continuação

- Pela notação de blocos, temos que $y(t_n) - y_n$ é equivalente a

$$\mathbf{y}\left(t_{n+1}\right) - \mathbf{y}_{n+1} = \mathcal{C}_n\left(\mathbf{y}\left(t_n\right) - \mathbf{y}_n\right) + h_{n+1}\Gamma_n + E_{n+1}, \quad n = k-1, \ldots, N-1, \tag{27}$$

onde

$$\Gamma_n = \left(\Phi\left(\mathbf{y}\left(t_n\right); g, \Delta_n\right) - \Phi\left(\mathbf{y}_n; g, \Delta_n\right), 0, \ldots, 0\right)^T,$$
$$E_{n+1} = \left(\epsilon_{n+1}, 0, \ldots, 0\right)^T,$$

sendo 0 o vetor nulo em $\mathbb{R}^d$.

- Aplicando a norma $|||\cdot|||$ em ambos os lados de (27) e utilizando da propriedade de estabilidade de $\mathcal{C}_n$, obtemos

Teorema: Continuação

$$|||\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}_{n+1}||| \leq |||\mathbf{y}(t_n) - \mathbf{y}_n||| + h_{n+1}|||\Gamma_n||| + |||E_{n+1}|||,$$

para todo $n = k-1, \ldots, N-1$.

• Utilizando da propriedade da equivalência das normas em espaços de dimensão finita, obtemos

$$\begin{aligned} |||E_{n+1}||| &= \max_{1\leq i\leq d} \|(e_{n+1}^{(i)}, 0, \ldots, 0)\|_* \leq \max_{1\leq i\leq d}(k_1\|(e_{n+1}^{(i)}, 0, \ldots, 0)\|_\infty) \\ &\leq k_1 \max_{1\leq i\leq d} |e_{n+1}^{(i)}| \leq k_1\|e_{n+1}^{(i)}\|_\infty \\ &\leq k_1 k_2\|e_{n+1}\| \leq k_1 k_2 c h_{n+1}^{p+1} \leq k_1 k_2 c h_{n+1} h^p, \end{aligned}$$

para algum $k_1, k_2 > 0$ e para $h = \max_{1\leq n\leq N} h_n$.

Teorema: Continuação

• Quanto ao restante da normas, pela continuidade Lipschitz da função incremento Φ em relação aos argumentos y na norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^d$ e, novamente, pela propriedade de equivalência das normas, junto com (25), existe uma constante $Q > 0$ tal que, para $c' = k_1 k_2$ e para todo $n = k-1, \ldots, N-1$, temos

$$|||\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}_{n+1}||| \leq (1 + h_{n+1}Q)|||\mathbf{y}(t_n) - \mathbf{y}_n||| + c' h_{n+1} h^p.$$

• Observe que $1 + h_j Q \leq e^{h_j Q}$ para todo j, assim, continuando a relação de recorrência, obtemos

Teorema: Continuação

$$\begin{aligned}\|\|\|\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}_{n+1}\|\|\| \leq & \overbrace{e^{h_{n+1}Q} \dots e^{h_k Q} \|\|\|\mathbf{y}(t_{k-1}) - \mathbf{y}_{k-1}\|\|\|}^{(\star)} \\ & + \underbrace{c' h^p \left(h_{n+1} + e^{h_{n+1}Q} h_n + \cdots + e^{(h_{n+1} \dots h_{k+1})Q} h_k\right)}_{(\star\star)}.\end{aligned}$$

• Quanto a $(\star)$, observe que, como $h_k + \dots h_{n+1} \leq t_f - t_0$, então

$$\begin{aligned} e^{h_{n+1}Q} \dots e^{h_k Q} \|\|\|\mathbf{y}(t_{k-1}) - \mathbf{y}_{k-1}\|\|\| &= e^{Q(h_{n+1} \dots h_k)} \|\|\|\mathbf{y}(t_{k-1}) - \mathbf{y}_{k-1}\|\|\| \\ &\leq e^{Q(t_f - t_0)} \|\|\|\mathbf{y}(t_{k-1}) - \mathbf{y}_{k-1}\|\|\|, \end{aligned}$$

Teorema: Continuação

- Quando a $(\star\star)$, temos que

$$h_{n+1} + e^{h_{n+1}Q}h_n + \cdots + e^{(h_{n+1}\ldots h_{k+1})Q}h_k = \sum_{r=k}^{n+1} e^{\left(Q\sum_{s=r+1}^{n+1} h_s\right)} h_r$$
$$\leq \int_{t_0}^{t_f} e^{Q(t_f - t)}\,dt = \frac{e^{Q(t_f-t_0)} - 1}{Q}$$

- Por fim, obtemos a relação final

$$\|\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}_{n+1}\| \leq e^{Q(t_f-t_0)}\|\mathbf{y}(t_{k-1}) - \mathbf{y}_{k-1}\| + \frac{e^{Q(t_f-t_0)} - 1}{Q}c'h^p$$

Teorema: Continuação

- Quanto ao resultado de ordem uniforme global, suponha novamente $y_n^* = y(t_n)$ em (17) , de modo que (20) fornece

$$\begin{aligned} y(t_n + \theta h_{n+1}) = &\beta_{n,1}(\theta) y(t_{n+j_n}) + \ldots + \beta_{n,j_n+i_n+1}(\theta) y(t_{n-i_n}) \\ &+ h_{n+1} \Psi(y(t_{n+j_n}), \ldots, y(t_{n-i_n}); \theta, g, \Delta_n') + \epsilon_{n+1}(\theta) \end{aligned} \tag{28}$$

- Sendo $\max_{0\leq\theta\leq 1} \|\epsilon_{n+1}(\theta)\| \leq \mathcal{O}(h_{n+1}^{q+1})$ para todo $n = 1, \ldots, N-1$, de acordo coma definição (19). Logo

$$\max_{0\leq n\leq N-1} \max_{0\leq\theta\leq 1} \|\epsilon_{n+1}(\theta)\| = O\left(h^{q+1}\right) \tag{29}$$

Teorema: Continuação

- Subtraindo (13) de (28), utilizando da estimativa já demonstrada (19) e a da estimativa (29), junto com a suposição de que os termos $\beta_{n,i}(\theta)$ são limitados uniformemente e de que a função incremento Ψ é Lipschitz continua em relação aos argumentos y, obtemos

$$\max_{0\leq n\leq N-1}\max_{0\leq\theta\leq 1}\|y(t_n+\theta h_{n+1})-\eta(t_n+\theta h_{n+1})\|\leq O(h^p)+O\left(h^{q+1}\right)$$

Concluindo o teorema.

Métodos Contínuos para EDRs

Utilizando do método dos passos, generalizaremos os métodos contínuos para EDOs para EDRs

- Considere o PI de EDRs (3), ou seja,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ y(t) = \phi(t), & t_0 - p \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{30}$$

- Considere uma malha $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_N = t_f\}$
- Durante o $n-$ésimo passo, uma aproximação y_n é obtida em t_n, o próximo passo $(n+1)$ consiste em resolver, pelo método 11, a equação

Métodos Contínuos para EDRs

$$\begin{cases} w'_{n+1}(t) = f(t, w_{n+1}(t), x(t - \tau(t, w_{n+1}(t)))), & t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ w_{n+1}(t_n) = y_n \end{cases} \tag{31}$$

onde

$$x(s) = \begin{cases} \phi(s) & \text{para } s \leq t_0 \\ \eta(s) & \text{para } t_0 \leq s \leq t_n \\ w_{n+1}(s) & \text{para } t_n \leq s \leq t_{n+1} \end{cases}$$

e $\eta(t)$ é o interpolante dado por 13.

- Quanto a equação (31), temos os seguintes casos:

Métodos Contínuos para EDRs

Se $s = t - \tau(t, w_{n+1}(t)) \leq t_n$ para todo $t \in [t_n, t_{n+1}]$, então, neste intervalo

- $x(s)$ é igual ao interpolante $\eta(s)$.
- O problema local (31) se reduz a uma EDO.
- A solução local $w_{n+1}(t)$ é então aproximada pelo método discreto (11) e a aproximação de $w_{n+1}(t_{n+1})$ é definida como y_{n+1}.

Se $s = t - \tau(t, w_{n+1}(t)) > t_n$ para algum $t \in [t_n, t_{n+1}]$, então

- O valor $x(s)$ é igual a $w_{n+1}(s)$ e é desconhecido. Portanto, (30) não pode mais ser visto como uma EDO.
- No entanto, $x(s)$ ainda é aproximado pelo interpolante $\eta(t)$ no intervalo subjacente $[t_n, t_{n+1}]$, implicitamente definido por (13) com $j_n = 0$, ou seja, por

Métodos Contínuos para EDRs

$$\begin{aligned}\eta(t_n + \theta h_{n+1}) =& \beta_{n,1}(\theta) y_{n+j_n} + \cdots + \beta_{n,j_n+i_n+1}(\theta) y_{n-i_n} \\ &+ h_{n+1}\Psi(y_{n+j_n}, \ldots, y_{n-i_n}; \theta, g_\eta, \Delta'_n), \qquad 0 \leq \theta \leq 1, \end{aligned} \tag{32}$$

onde

$$g_\eta(t, y) = f(t, y, \eta(t - \tau(t, y)))$$

- Observe que o uso da extensão contínua torna o método implicito, mesmo que o método discreto usado seja explicito. Este fenômeno é chamado de *sobreposição* (do inglês: *overlapping*).
-

Métodos Contínuos para EDRs

Algoritmo para resolver EDRs dependendo do tempo sem desaparecimento do retardo

1. Localize todos os pontos de descontinuidade principais e os pontos de descontinuidade de ordem $\leq p$. A

$$\xi_1, \ldots, \xi_s \, (< t_f)$$

   e defina $\xi_0 = t_0, \xi_{s+1} = t_f$.
2. Resolva a equação

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t), \phi(t - \tau(t))), \quad \xi_0 \leq t \leq \xi_1, \\ z\,(\xi_0) = \phi\,(\xi_0)\,, \end{cases}$$

   usando qualquer método discreto para EDO.
3. **Para** $\{i = 1\}$ **até** s faça:
   - Calcule e armazene a extensão contínua $\eta(t)$ para $t \in \left[\xi_{i-1}, \xi_i\right]$;
   - Resolva a equação

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t), \eta(t - \tau(t))), \quad \xi_i \leq t \leq \xi_{i+1}, \\ z\,(\xi_i) = \eta\,(\xi_i)\,, \end{cases}$$

   usando o mesmo método discreto para EDOs.
4. **Fim do Para**.
5. **Fim**.

Métodos Contínuos para EDRs

Teorema 8 (Convergência dos métodos contínuos para EDRs sem desaparecimento de retardo)

Quanto a EDR dependendo do tempo sem desaparecimento do retardo, considere

- *As funções f, τ e phi são C^p-contínuas nos seus respectivos domínios e τ satisfaz a hipótese 1.*
- *A malha Δ contém todos os pontos de descontinuidade de ordem $\leq p$.*
- *Um método contínuo satisfazendo as hipóteses do Teorema 7.*
- *Para cada n, $[t_{n-i_n}, t_{n+1}] \subseteq [\xi_i, \xi_{i+1}]$ para algum i.*

Então, o método resultante tem ordem global discreta e uniforme $q' = \min\{p, q+q\}$.

E o grude?

Os próximos slides do modelo SIR eu não sei o que fazer

Modelo de Kermack e McKendrick

Modelo SIR

- $s, i, r :=$ Percentual de Susceptíveis, Infectados e Removidos;
- $\beta, \gamma :=$ Taxa média de Contato e de Remoção por tempo;
- O modelo é dado por $\begin{cases} \frac{ds}{dt} & = -\beta is; \\ \frac{di}{dt} & = \beta is - \gamma i; \\ \frac{dr}{dt} & = \gamma i \gamma. \end{cases}$ onde $s + i + r = 1$;
- Note que a taxa de infeção é homogênea, ou seja, a chance de um indivíduo infectado contaminar outra pessoa é sempre a mesma, independente da pessoa.
- Soluções analíticas para o modelo são difíceis de encontrar, o que não nos impede de tirar conclusões importantes sobre o comportamento do modelo.

Modelo de Kermack e McKendrick

Número Básico de Reprodução

- Suponha que a população sucetível seja 1. O Número Básico de Reprodução R_0 é o número médio de pessoas que a doença é transmitida antes da pessoa ser imunizada. Note que, se $R_0 > 1$ a doença cresce, já se $R_0 < 0$, a doença descresce. O limiar epidemiológico é definido quando $R_0 = 1$i.
- No modelo SIR, a doença cresce quando $\frac{di}{dt} > 0$. Supondo que $s = 1$ obtemos

$$0 < \frac{di}{dt} = \beta is - \gamma i \iff 0 < \beta i - \gamma i \iff i < \frac{\beta}{\gamma} i \iff 0 < \frac{\beta}{\gamma}$$

ou seja, $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ denota o início da epidemia.

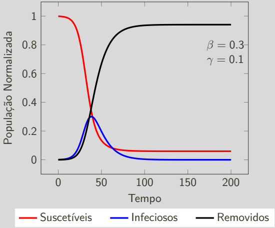
Modelo de Kermack e McKendrick

Tamanho da Epidemia

- O tamanho da epidemia no modelo SIR nunca é igual a 1 independente se $R_0 >> 1$ (onde $R_0 < \infty$), ou seja

$$s_\infty = 1 - r_\infty > 0, \qquad \forall R_0 \in \mathbb{R}.$$

A demonstração deste fato é envolvida, eis um modelo visual interativo para exploração: geogebra



Referências

K. W. Neves and A. Feldstein,
Characterization of jump discontinuities for state dependent delay differential equations.
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 56:689-707, 1976.
https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121097839.

K. W. Neves and S. Thompson,
Software for the numerical solution of systems of functional differential equations with state-dependent delays.
Applied Numerical Mathematics, 9(3):385-401, 1992.
https://doi.org/10.1016/0168-9274(92)90029-D.

Referências

M. E. J. Newman,
Spread of epidemic disease on networks.
Phys. Rev. E, 66(1):016128, 2002.

M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts,
Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications.
Phys. Rev. E, 64(2):026118, 2001.

M. E. J. Newman
Networks.
Oxford University Press, 2018.