



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



NOME DO AUTOR(A)

TÍTULO DO TRABALHO  $\mathbb{R}^n$

SÃO CARLOS  
2021

Autor(a), Nome do(a)

Título do trabalho / Nome do(a) Autor(a) -- 2021.  
100f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos,  
campus São Carlos, São Carlos

Orientador (a): Nome do Orientador(a)

Banca Examinadora: Orientador, Membro da Comissão  
Examinadora I, Membro da Comissão Examinadora II

Bibliografia

1. Assunto ou Palavra-chave I. 2. Assunto ou Palavra-  
chave II. 3. Assunto ou Palavra-chave III. I. Autor(a),  
Nome do(a). II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática  
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em

---

**Folha de Aprovação**

---

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato , realizada em

**Comissão Julgadora:**

Prof. Dr.  (UFSCar)

Profa. Dra.

Prof. Dr.  (UFSCar)

MODELO

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

*A dedicatória é um elemento OPCIONAL em que o autor presta homenagem ou dedica seu trabalho.*

## **AGRADECIMENTOS**

É um elemento OPCIONAL em que o autor faz agradecimentos aos que contribuíram de maneira relevante à elaboração do trabalho.

*Demonstração: Evidente*  
**Elon Lages Lima** ([LIMA](#), 1976, p. 154).

## RESUMO

Elemento OBRIGATÓRIO, deve apresentar os pontos relevantes do texto, de forma concisa e que permita uma visão rápida e clara do conteúdo e das conclusões do trabalho. Indica-se que o resumo tenha no máximo 500 palavras e deve ser elaborado de acordo com ABNT NBR 6028/2003. Abaixo do resumo devem ser colocadas as palavras-chave. A indicação Palavra-chave deve ser em negrito seguida de dois pontos e espaço. Cada palavra deve ser separada uma da outra por ponto final.

**Palavras-chave:** Chave 1. Chave 2. Chave 3.

## **ABSTRACT**

Version of the abstract in another language for international dissemination. Prepare the abstract in a foreign language accordingly with ABNT NBR 6028/2003. Below the abstract the keywords must be placed. The indication Keywords must be in bold followed by a colon and space. Each word must be separated from each other by a period.

**Keywords:** Key 1. Key 2. Key 3.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Superfície Costa.

15

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Rendimentos dos estudantes.

15

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRUDUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>ESPAÇOS MENSURÁVEIS</b>	<b>12</b>
<b>3</b>	<b>MODELO MATEMÁTICO PARA O <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>13</b>
3.1	A IMPORTÂNCIA DA ESCRITA EM MATEMÁTICA $x, y \in \mathbb{R}^n$	13
3.2	UM EXEMPLO DE TABELA	14
3.3	UM EXEMPLO DE FIGURA	15
<b>4</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>16</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>17</b>
	<b>APÊNDICE A PARTE QUE NÃO SERÁ LIDA DO TRABALHO</b>	<b>18</b>
	<b>ÍNDICE REMISSIVO</b>	<b>19</b>

## 1 INTRUDUÇÃO

## 2 ESPAÇOS MENSURÁVEIS

Seja  $X$  um conjunto.

**Definição 2.1.** Uma álgebra de subconjuntos de  $X$  é uma família  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $X$  que é fechada para as operações elementares de conjuntos, ou seja:

- (i)  $X \in \mathcal{B}$
- (ii)  $A \in \mathcal{B} \implies A^c = X \setminus A \in \mathcal{B}$
- (iii)  $A \in \mathcal{B} \wedge B \in \mathcal{B} \implies A \cup B \in \mathcal{B}$

Note que como  $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$  e  $A \setminus B = A \cap B^c$  para quaisquer  $A, B \in \mathcal{B}$ , então tais operações de conjuntos também são fechadas em  $\mathcal{B}$ . Note também que, por associatividade, a união e intersecção de qualquer número finito de elementos de  $\mathcal{B}$  está em  $\mathcal{B}$ .

**Definição 2.2.** Uma  $\sigma$ -álgebra é uma álgebra de subconjuntos de  $X$  que também é fechada para a união enumerável de subconjuntos de  $\mathcal{B}$ .

$$\bullet A_j \in \mathcal{B}, j \in \mathbb{Z}_+ \implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{B}$$

Note que como  $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c\right)^c = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ , nós também temos que as  $\sigma$ -álgebras são fechadas para as intersecções enumeráveis.

**Definição 2.3.** Um espaço mensurável é uma dupla  $(X, \mathcal{B})$ , onde  $X$  é um conjunto e  $\mathcal{B}$  uma  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$ . Os elementos de  $\mathcal{B}$  são chamados conjuntos mensuráveis.

Abaixo seguem alguns exemplos de  $\sigma$ -álgebras.

**Exemplo 2.1.** Seja  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$  é uma  $\sigma$ -álgebra, da mesma forma que  $\mathcal{B}_1 = \{\emptyset, X\}$  e  $\mathcal{B}_2 = 2^X$  também são  $\sigma$ -álgebras, ainda mais,  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  são  $\sigma$ -álgebras para qualquer conjunto  $X$

teste

### 3 MODELO MATEMÁTICO PARA O $\mathbb{R}^n$

Neste trabalho apresentamos o método relativístico para capturarmos um leão no deserto. Basicamente, distribuiremos sobre o deserto um número grande de iscas para leão contendo a estrela companheira de Sirius. Transcorrido o tempo necessário para que as iscas tenham sido comidas, enviamos um raio de luz através do deserto. Este raio de luz irá se curvar ao redor do leão confundindo-o e assim podemos nos aproximar sem perigo (STEPHANI et al., 2003).

#### 3.1 A IMPORTÂNCIA DA ESCRITA EM MATEMÁTICA $x, y \in \mathbb{R}^n$

Todo iniciante em matemática tem conhecimento que a soma de duas quantidades pode ser expressa na forma

$$1 + 1 = 2. \quad (3.1)$$

No entanto, esta forma de representação não é só banal como também esteticamente inadequada. Mesmo o mais iniciante sabe que

$$1 = \ln e,$$

e que,

$$1 = \sin^2 q + \cos^2 q.$$

Além disso, é imediato que

$$2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Isto permite-nos expressar a equação (3.1) de forma cientificamente mais aceitável:

$$\ln e + (\sin^2 q + \cos^2 q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}. \quad (3.2)$$

Também é imediatamente óbvio que

$$1 = \cosh p \sqrt{1 - \tanh^2 p}$$

e uma vez que

$$e = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)^{\delta}$$

podemos simplificar (3.2) e então obter

$$\ln \left\{ \lim_{\delta \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\delta} \right)^\delta \right\} + (\sin^2 q + \cos^2 q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh p \sqrt{1 - \tanh^2 p}}{2^n}. \quad (3.3)$$

Considerando o fato que

$$0! = 1 \quad (3.4)$$

e que a inversa da transposta de uma matriz é igual a transposta da inversa da matriz, podemos simplificar mais ainda a expressão (3.3) removendo a restrição não natural para um espaço unidimensional introduzindo para isto a matriz  $\mathbf{X}^1$ .

$$(\mathbf{X}^t)^{-1} - (\mathbf{X}^{-1})^t = 0 \quad (3.5)$$

onde

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Substituindo (3.5) em (3.4) teremos

$$[(\mathbf{X}^t)^{-1} - (\mathbf{X}^{-1})^t]! = 1.$$

Substituindo em (3.3) então reduzimos (3.1) em

$$\begin{aligned} \ln \left\{ \lim_{\delta \rightarrow \infty} \left( [(\mathbf{X}^t)^{-1} - (\mathbf{X}^{-1})^t]! + \frac{1}{\delta} \right)^\delta \right\} + (\sin^2 q + \cos^2 q) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh p \sqrt{1 - \tanh^2 p}}{2^n}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

É imediatamente óbvio que (3.6) é matematicamente fácil de compreensão e cientificamente mais respeitável que (3.1).

## 3.2 UM EXEMPLO DE TABELA

Segue um exemplo de tabela.

<sup>1</sup> Podemos interpretar a matriz  $\mathbf{X}$  como a representação de uma transformação linear  $T : V \rightarrow V$  sendo que  $V$  é um espaço vetorial sobre o corpo dos reais de dimensão finita  $n$  e  $T \in \mathcal{L}(V, V) \sim M_{n \times n}(\mathbf{R})$

Tabela 3.1 – Rendimentos dos estudantes.

RA	Avaliação 1	Avaliação 2	Média = 60%[Avaliação 1] + 40% [Avaliação 2]
12345	1,16	1,01	1,10
23456	1,10	1,10	1,10
34567	1,04	1,19	1,10

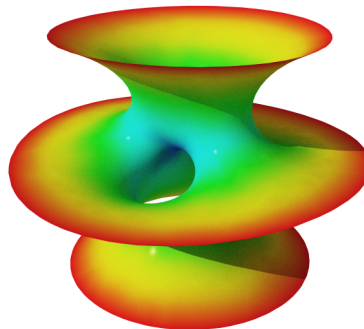
Fonte: Elaborado pelo autor.

O rendimento dos estudantes é mostrado na Tabela 3.1.

### 3.3 UM EXEMPLO DE FIGURA

Segue um exemplo de figura.

Figura 3.1 – Superfície Costa.



Fonte: Wikipédia<sup>2</sup>.

A Superfície Costa mostrada na Figura 3.1 é uma superfície com curvatura média nula descoberta pelo matemático brasileiro Celso José da Costa.

<sup>2</sup> <[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Costa%27s\\_Minimal\\_Surface.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Costa%27s_Minimal_Surface.png)>. Acesso em: 20 ago. 2021.



## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Filho (2018) faz diversas considerações sobre a boa redação matemática. Recomendamos fortemente este texto.

Anton, Bivens e Davis (2007) mostra uma referência com três autores.

Stephani et al. (2003) é um exemplo de referência com mais de três autores.

## REFERÊNCIAS

ANTON, H.; BIVENS, C. I.; DAVIS, S. L. **Cálculo - Volume I**. 8. ed. [S.l.]: Bookman, 2007. Citado na página 16.

FILHO, D. C. de M. **Manual de Redação Matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2018. (Coleção do Professor de Matemática). Citado na página 16.

LIMA, E. L. **Curso de Análise - Volume 1**. 4. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976. (Projeto Euclides). Citado na página 5.

STEPHANI, H. et al. **Exact solutions of Einstein's field equations**. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. (Cambridge monographs on mathematical physics). Citado 2 vezes nas páginas 13 e 16.

## **APÊNDICE A – PARTE QUE NÃO SERÁ LIDA DO TRABALHO**

Segue com o texto e partes que irão para o Apêndice.

Remover caso não fizer uso.

## ÍNDICE REMISSIVO

Superfície Costa, [15](#)

Exceto quando indicado o contrário, a licença deste item é descrito como  
Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Brazil

