1 ESPAÇOS MENSURÁVEIS

Definição 1.1. Uma **álgebra** de subconjuntos de X é uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X que é fechada para as operações elementares de conjuntos, ou seja:

(i) Se $A \in \mathcal{B}$, então $A^c \in \mathcal{B}$

(ii) Se $A, B \in \mathcal{B}$, então $A \cup B \in \mathcal{B}$

Note que como $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ e $A \setminus B = A \cap B^c$ para quaisquer $A, B \in \mathcal{B}$, então tais operações de conjuntos também são fechadas em $\mathcal{B}$, além disso como $\emptyset = X \cap X^c$ e $X = A \cup A^c$, nós também temos que $\emptyset \in \mathcal{B}$ e $X \in \mathcal{B}$. Note também que, por associatividade, a união e intercecção de qualquer número finito de elementos de $\mathcal{B}$ está em $\mathcal{B}$.

Definição 1.2. Uma σ**-álgebra** é uma álgebra de subconjuntos de X que também é fechada para a união enumerável de subconjutos de $\mathcal{B}$, ou seja:

(iii) Se $A_j \in \mathcal{B}, j = \{1, 2, ...\}$, então $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{B}$

Note que como $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c\big)^c$, nós também temos que as σ-álgebras são fechadas para as intersecções enumeráveis.

Abaixo seguem alguns exemplos de σ-álgebra.

Exemplo 1.1. Seja $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$ é uma σ-álgebra, da mesma forma que $\mathcal{B}_1 = \{\emptyset, X\}$ e $\mathcal{B}_2 = 2^X$ também são σ-álgebras, ainda mais, $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são σ-álgebras para qualquer conjunto X, sendo $\{\emptyset, X\}$ a menor e 2^X a maior σ-álgebra de qualquer conjunto X.

Exemplo 1.2. Seja X um conjunto não enumerável, então

$$\mathcal{B} = \{A \in X : A \text{ é enumerável ou } A^c \text{ é enumerável}\}$$

é uma σ-álgebra.

Demonstração. Tome $A \in \mathcal{B}$, A é enumerável ou o A^c é enumerável, se A for enumerável, nós teremos que o $(A^c)^c$ é enumerável logo $(A^c) \in \mathcal{B}$, se A não for enumerável, então A^c é enumerável e logo A^c também é elemento de $\mathcal{B}$, e a primeira propriedade foi verificada.
Agora tome quaisquer $A_j \in \mathcal{B}$ tais que A_j eles são contáveis, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_j$ é enumerável já que a união enumerável de conjuntos contáveis é enumerável. Tome agora $A_j \in \mathcal{B}$ tal que pelo ou menos um $A_{j_0}^c$ é enumerável , logo $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_j)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_j^c \subseteq A_{j_0}^c$, logo $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{B}$ e provamos todas as propriedades $\square$

Lema 1.1. *A intercecção de uma família de σ-álgebras é uma σ-álgebra*

Demonstração. Seja $\{\mathcal{B}_i : i \in \mathcal{I}\}$ uma família não vazia de σ-álgebras, de uma conjunto X queremos mostrar que $\mathcal{B} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_i$ é uma σ-álgebra.

Tome $A \in \mathcal{B}$, então $A \in \mathcal{B}_i, \forall i \in \mathcal{I}$ e $A^c \in \mathcal{B}_i, \forall i \in \mathcal{I}$, portanto $A^c \in \mathcal{B}$. Temos também que se $\forall j \in \mathbb{N}, A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_i$ então $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_i$ e demonstramos as duas propriedades de σ-álgebra, logo $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra. $\square$

Definição 1.3. Um **espaço mensurável** é uma dupla $(X, \mathcal{B})$, onde X é um conjunto e $\mathcal{B}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de X. Os elementos de $\mathcal{B}$ são chamados conjuntos mensuráveis.

Definição 1.4. Uma **σ-álgebra gerada** por uma família $\mathcal{E}$ de subcontos de X é a menor σ-álgebra de X que contém $\mathcal{E}$ e será denotada por $\sigma(\mathcal{E})$. Por construção, podemos definir tal σ-álgebra da seguinte forma

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \{\mathcal{B}_i : \mathcal{B}_i \text{ é uma } \sigma\text{-álgebra e } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}_i\}$$

Note que $\sigma(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(\mathcal{E})$

Definição 1.5. Se X é um espaço métrico, a σ-álgebra gerada pela família de subconjuntos abertos de X é chamada de **σ-álgebra de Borel**. A σ-álgebra de Borel na Reta e será denotada como $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

Lema 1.2. *Se $\mathcal{E} \in \sigma(\mathcal{F})$ então $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$*

Demonstração. $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ são famílias de subconjuntos de algum conjunto X. Note que se $\mathcal{E}$ está em $\sigma(\mathcal{F})$ então os elementos de $\mathcal{E}$ estão em $\mathcal{F}$ e $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, o que implica que então $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$ $\square$

Proposição 1.1. *A σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$ pode ser gerada com*

(i) Os intervalos abertos $\mathcal{E}_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

(ii) Os intervalos fechados $\mathcal{E}_2 = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$

(iii) Os intervalos semi-abertos $\mathcal{E}_3 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ *e* $\mathcal{E}_4 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

(iv) Os intervalos abertos ilimitados $\mathcal{E}_5 = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ *e* $\mathcal{E}_5 = \{(\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$

(v) Os intervalos fechados e ilimitados $\mathcal{E}_6 = \{(\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$ *e* $\mathcal{E}_7 = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$

Demonstração. Seja τ a família dos conjuntos abertos de $\mathbb{R}$, por definição $\sigma(\tau)$ é a σ-álgebra de Borel. Provaremos cada item individualmente.

(i) Como todos os elementos de $\mathcal{E}_1$ são abertos, então nós temos que $\mathcal{E}_1 \subseteq \tau$, logo $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\tau)$.
Para a inclusão inversa, basta lembrar que qualquer conjunto aberto de $\mathbb{R}$ pode ser escrito como a união enumerável de intervalos abertos de $\mathbb{R}$, portanto todos os elementos de τ estão contidos em $\sigma(\mathcal{E}_1)$ e pelo Lema 1.2 nós temos que $\tau \in \sigma(\mathcal{E}_1)$ então $\sigma(\tau) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_1)$.
Portanto $\sigma(\tau) = \sigma(\mathcal{E}_1)$.

(ii) Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ nós temos que $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a + n^{-1}, b - n^{-1}] \in \sigma(\mathcal{E}_2)$, logo $\mathcal{E}_1 \in \sigma(\mathcal{E}_2)$ e portanto $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$. Também temos que $[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a + n^{-1}, b - n^{-1})$ e implicará que $\sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$. Portanto $\sigma(\tau) = \sigma(\mathcal{E}_2)$.

(iii) Tomando $(a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a, b - n^{-1})$ implicará que $\sigma(\mathcal{E}_3) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$ e tomando $(a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a, b - n^{-1}]$ implica que $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3)$. Portanto $\sigma(\tau) = \sigma(\mathcal{E}_3)$. A demonstração para $\sigma(\mathcal{E}_4)$ é análoga.

(iv) Tomando $(a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a, b + n)$ implica que $\sigma(\mathcal{E}_5) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$ e tomando $(a, b) = (a, \infty) - (b, \infty)$ implica que $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_5)$. Portanto $\sigma(\tau) = \sigma(\mathcal{E}_5)$. A demonstração para $\sigma(\mathcal{E}_6)$ é análoga.

(v) Tomando $[a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a, b + n]$ implica que $\sigma(\mathcal{E}_6) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$ e tomando $[a, b] = [a, \infty) - [b, \infty)$ implica que $\sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_6)$. Portanto $\sigma(\tau) = \sigma(\mathcal{E}_6)$. A demonstração para $\sigma(\mathcal{E}_7)$ é análoga.

$\square$

2 ESPAÇOS DE MEDIDA

Definição 2.1. Uma **medida** em um espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$ é uma função $\mu :\longrightarrow [\mathcal{B}, +\infty]$ tal que:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) **(σ-aditividade)**: $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ para quaisquer $A_j \in \mathcal{B}$ disjuntos dois a dois.

Uma medida é **finitamente aditiva** se:

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.2. Um **espaço de medida** é uma tripla $(X, \mathcal{B}, \mu)$, onde μ é uma medida no espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$

Teorema 2.1. *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida.*

(i) ***(Monotonicidade)*** *Se $A, B \in \mathcal{B}$ e $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

(ii) ***(Subaditividade)*** *Se $\{A_n\}_1^{\infty} \in \mathcal{B}$, então $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.*

(iii) ***(Continuidade por baixo)*** *Se $\{A_n\}_1^{\infty} \in \mathcal{B}$ e $A_1 \subset A_2 \subset ...$, então $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \mu(A_k)$.*

(iv) ***(Continuidade por cima)*** *Se $\{A_n\}_1^{\infty} \in \mathcal{B}$ e $E_1 \supset E_2 \supset ...$ e $\mu(A_1) < \infty$, então $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \mu(A_k)$.*

Demonstração. (i) $A \subset B$, então $B = B \setminus A \cup A$ onde $B \setminus A \cap A = \emptyset$, portanto $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(A)$ pois $\mu(B \setminus A) \geq 0$.

(ii) Seja $B_1 = A_1$ e $B_k = A_k\ cup_{j=1}^{k-1} A_j$ para $k > 1$. Temos que $B_m \cap B_n = \emptyset$ se $m \neq n$ e $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$ para todo n, ou seja, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Portanto, pelo item anterior, $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

(iii) Seja $B_j = A_j \setminus A_{j-1}$, temos que $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ e $B_m \cap B_n = \emptyset$ para todo $m \neq n$. Assim

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{k\longrightarrow\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j) = \lim_{k\longrightarrow\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j \setminus A_{j-1})$$
$$= \lim_{k\longrightarrow\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) - \mu(A_{j-1}) = \lim_{k\longrightarrow\infty} A_j.$$

(iv) Seja $B_j = A_1 \setminus A_j$, já que $B_j \cap A_j = \emptyset$, então $\mu(A_1) = \mu(B_j \cup A_j) = \mu(B_j) + \mu(A_j)$ e $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$, ou seja $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, e como $B_1 \subset B_2 \subset ...$, pelo item anterior nós temos que $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_1) - \mu(A_n)$. Portanto, como $\mu(A_1) < \infty$, nós obtemos que

$$\mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = \mu(A_1) - \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \mu(A_1) + \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_1) - \mu(A_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n).$$

□

Definição 2.3. Uma medida é completa se o seu domínio contém todos os subconjuntos do conjunto nulo, ou seja, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, μ é completa se, e somente se, $A \subseteq N \in \mathcal{B}$ e $\mu(N) = 0$, então $A \in \mathcal{B}$.

Teorema 2.2. *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{B} : \mu(N) = 0\}$ e $\overline{\mathcal{M}} = \{A \cup B : A \in \mathcal{M}$ e $B \in \mathcal{N}\}$. Então $\overline{\mathcal{M}}$ é uma σ-álgebra e existe uma única extensão $\overline{\mu}$ de μ para uma medida completa de $\overline{\mathcal{M}}$*

Definição 2.4. Uma **medida exterior** em um conjunto não vazio X é uma função $\mu^* : 2^X \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(ii) **(Monótona)** $A \subseteq B$, então $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

(iii) **(Subaditividade enumerável)** $\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$

Proposição 2.1. *Seja $\mathcal{E} \subseteq 2^X$ uma família elementar e seja $\rho : \mathcal{E} \longrightarrow [0, \infty]$ tal que $\emptyset \in \mathcal{E}, X \in \mathcal{E}$ e $\rho(\emptyset) = 0$. Para todo $A \in X$, seja*

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) : E_j \in \mathcal{E} \text{ e } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}$$

Então μ^* é uma medida exterior.

Demonstração. $\mu^*(\emptyset) = 0$ pois basta tomar $E_j = \emptyset$ para todo j. Agora se $A \subseteq B$, então

$$A' = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) : E_j \in \mathcal{E} \text{ e } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\} \supseteq \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) : E_j \in \mathcal{E} \text{ e } A \subseteq B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\} = B'$$

Como $A' \supseteq B'$ então $\inf A' \leq \inf B'$, ou seja, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ Agora suponha que $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq 2^X$ e fixe $\epsilon > 0$. Pela definição de μ^*, para cada um dos j existe $\{E_j^k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}$ tal que $A_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_j^k$ e, pela definição de infimo, temos que $\sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \mu^*(A_j) + \epsilon 2^{-j}$. Tomando $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ nós temos que $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_j^k$ e $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon 2^{-j}$ mas então $\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \epsilon$ e como a escolha de ϵ foi arbitrária, nós concluímos a demonstração. □

Definição 2.5. Seja μ^* uma medida exterior em X, um conjunto $A \subseteq X$ é chamado de μ^* mensurável se, para todo $E \subseteq X$

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Teorema 2.3. *Se μ^* é uma medida exterior em X, a família $\mathcal{M}$ de conjuntos μ^* mensuráveis é uma σ-álgebra e a restrição de μ^* à $\mathcal{M}$ é uma medida completa.*

Definição 2.6. Uma **pré-medida** em uma álgebra $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ é uma função $\mu_0 : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ tal que

(i) $\mu_0(\emptyset) = 0$;

(ii) **(σ-aditividade)** $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois de $\mathcal{A}$ tais que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$, então $\mu_0(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j)$.

Proposição 2.2. *Seja μ_0 uma pré-medida em $\mathcal{A}$ e μ^* definida assim como na proposição 2.1 mas sobre μ_0 ao invés de ρ e sobre $\mathcal{A}$ ao invés de $\mathcal{E}$. Teremos então que*

(i) μ^* restrita em $\mathcal{A}$ é igual a μ_0;

(ii) Todo conjunto em $\mathcal{A}$ é μ^* mensurável.

Demonstração. (i) Seja $E \in \mathcal{A}$ qualquer, temos que existe uma sequência de conjunto $\{A_j\}_1^{\infty}$ em $\mathcal{A}$ tal que $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Seja $B_n = E \cap (A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j)$, então $B_r \cap B_s = \emptyset$ se $r \neq s$ e $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Assim, $\mu_0(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j)$ pois $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ e pré-medidas são monótonas (a demonstração de tal fato é análoga a demonstração do item (i) do teorema 2.1 . Portanto $\mu_0(E) \leq \mu^*(E)$. Para a igualdade inversa, note que $E \subseteq E \cup \emptyset \cup \emptyset \cup ...$, e pela definição de μ^* nós finalmente obtemos que $\mu^*(E) \leq \mu_0(E)$.

(ii) Seja $A \in \mathcal{A}$ qualquer e $E \subseteq X$, fixe $\epsilon > 0$, temos que existe uma sequência de conjunto $\{A_j\}_1^\infty$ em $\mathcal{A}$ tal que $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ e, pela definição de infimo, $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) \leq \mu^*(E) + \epsilon$. Como μ_0 é aditiva em $\mathcal{A}$ e como $(A_j \cap A) \cap (A_j \cap A^c) = \emptyset$ com $(A_j \cap A) \subseteq A$ e $(A_j \cap A^c) \subseteq A$, então

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) + \epsilon \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0((A_j \cap A) \cup (A_j \cap A^c)) \\
&\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j \cap A) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j \cap A^c) \\
&\geq \mu^*(A_j \cap A) + \mu^*(A_j \cap A^c)
\end{aligned}$$

Como a escolha de ϵ foi arbitrária, nós obtemos um lado da igualdade. Quando ao outro lado da desigualde, como $E \subseteq (A_j \cap A) \cup (A_j \cap A^c)$ e como μ^* é aditiva, então $\mu^*(E) \leq \mu^*(A_j \cap A) + \mu^*(A_j \cap A^c)$

□

Definição 2.7. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida. μ é dita **finita** se $\mu(X) < \infty$. μ é dita σ**-finita** se $\exists A_1, A_2, ... \in \mathcal{B}$ tal que $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, onde $\mu(A_j) < \infty, \forall j = 1, 2, ...$

Teorema 2.4. *Seja $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ uma álgebra, μ_0 uma pré-medida em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{M}$ σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$. Então existe uma medida μ em $\mathcal{M}$ cuja restrição em $\mathcal{A}$ é igual a μ_0. Além disso, qualquer outra medida ν em $\mathcal{M}$ que extende μ_0 será tal que $\nu(E) \leq \mu(E)$ para todo $E \in \mathcal{M}$, sendo igual caso $\mu(E) < \infty$. Se μ_0 for σ-finita, então existe uma única extensão de μ_0 para uma medida de $\mathcal{M}$*

3 MEDIDA DE BOREL

Definição 3.1. Uma **medida de Borel** é uma medida cujo domínio é uma σ-álgebra de Borel.

Definição 3.2. Seja μ uma medida de Borel em $\mathbb{R}$, a *função de distribuição de μ* é definida como

$$\begin{aligned} F_\mu : \mathbb{R} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto \mu((-\infty, x]). \end{aligned}$$

Proposição 3.1. *Seja F uma medida de distribuição de μ, então F é crescente e contínua à direita.*

Demonstração. Seja $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$, assim $(-\infty, x] \subset (-\infty, y]$ e pelo item (i) teorema 2.1 do último capítulo, $\mu((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty, y])$. Portanto $F(x) = \mu((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty, y]) = F(y)$ e F é crescente.

Seja $\{x_n\}_1^\infty \subset \mathbb{R}$ uma sequência convergente a x pela direita, ou seja, $x_{j+1} \leq x_j$ para todo j. Mas então $(-\infty, x_{j+1}] \subseteq (-\infty, x_j]$ para todo j e, pelo item (iv) do teorema 2.1 do capítulo anterior, $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \mu((-\infty, x_n]) = \mu(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}(-\infty, x_j]) = \mu((-\infty, x]) = F(x)$. Como a escolha de $\{x_n\}_1^\infty$ foi arbitrária, então $F(x)$ é contínua. $\square$

Proposição 3.2. *Seja $\mathcal{E} = \{(a, b], (a, \infty), \emptyset : -\infty \leq a < b < \infty \; ; \; a, b \in \overline{\mathbb{R}}\}$ o conjunto dos intervalos semi-abertos à esquerda de $\mathbb{R}$. Então o conjunto $\mathcal{A}$ da união contável de elementos de $\mathcal{E}$, ou seja, $\mathcal{A} = \{\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i : \mathcal{E}_i \in \mathcal{E}$ onde $\mathcal{E}_k \cap \mathcal{E}_l = \emptyset, \forall k \neq l\}$ é uma álgebra e a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$ é a σ-álgebra de Borel.*

Demonstração. Já que $\mathbb{R} = (a, \infty)$ onde $a = -\infty$, então $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$, o conjunto $\emptyset$ está em $\mathcal{A}$ pois $\emptyset \cup \emptyset \in \mathcal{A}$.

Agora tome $A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathcal{E}_i^0 \in \mathcal{A}$ e $B = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i^1 \in \mathcal{A}$ disjuntos, ou seja $\mathcal{E}_r \neq \mathcal{E}_s, \forall r \neq s$. Reindexe os elementos de A e de B da seguinte forma $\mathcal{E}_1^0 = \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_m^0 = \mathcal{E}_m$ e $\mathcal{E}_1^1 = \mathcal{E}_{m+1}, ..., \mathcal{E}_n^1 = \mathcal{E}_{m+n}$. Assim é claro que $A \cup B = \bigcup\limits_{i=1}^{m+n} \mathcal{E}_i$ e A é fechado pela união de elementos disjuntos.

Para provar que $\mathcal{A}$ é fechado no complemento, primeiro notemos que

$$(a, b] \cap (c, d] = \begin{cases} \emptyset \text{ , se } b < c \\ (c, b] \text{ , se } b > c \end{cases} \quad , \quad (a, b] \cap (c, \infty) = \begin{cases} \emptyset \text{ , se } b < c \\ (c, b] \text{ , se } b > c \end{cases}$$

$$(a, \infty) \cap (b, \infty) = \begin{cases} (a, \infty) \text{ , se } a > b \\ (b, \infty) \text{ , se } a < b \end{cases} \quad , \quad \emptyset \cap \mathcal{E}_i = \emptyset$$

O que mostra que $\mathcal{E}$ é fechado sob a intersecção finita. Portanto $A^c = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i^c \in \mathcal{E}$ o que implica que $A^c \cup \emptyset \in \mathcal{A}$, concluindo que $\mathcal{A}$ é fechado sob o complementar. Pela Proposição 1 do capítulo 1 (1.1), nós temos que $\{(a, b] : a < b; a, b \in \mathbb{R}\}$ e $\{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ geram a σ-álgebra de Borel na reta, e como $\mathcal{E}$ é a união desses conjuntos, então $\mathcal{E}$ também o gera.

□

Proposição 3.3. *Seja $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita, sejam $(a_j, b_j] \in \mathcal{A}$ para todo $j = 1, ..., n$ tais que $(a_k, b_k] \cap (a_l, b_l] = \emptyset, \forall k \neq l$, e seja $\mu_0 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como*

$$\mu_0\left(\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]\right) = \sum_{i=1}^{n}[F(a_i) - F(b_i)]$$

onde $\mu_0(\emptyset) = 0$. Então μ_0 é uma pré-medida na álgebra $\mathcal{A}$

Demonstração. Primeiro, devemos mostrar que μ_0 é bem definida.
O primeiro caso que analisaremos será o caso onde $\bigcup I_{i=1}^{n} = I = (a, b]$ ou $I = (a, \infty)$. Como $\mathbb{R}$ é totalmente ordernado sob a operação $\leq$, e como os $I_i's$ são disjuntos, então podemos re-indexá-los de forma que $a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = ... < b_n = b$, daí

$$\mu_0(I) = F(a) - F(b) = \sum_{j=1}^{n}[F(b_j) - F(a_j)] = \sum_{j=1}^{n} \mu_0((a_j, b_j]) = \sum_{j=1}^{n} \mu_0(I_j)$$

Agora, no caso geral, seja $\bigcup_{i=1}^{n} I_i = \bigcup_{j=1}^{m} J_j$, assim, para cada $i = 1, ..., n$ nós temos que $I_i = \bigcup_{j=1}^{m}(I_i \cap J_J)$ e, como mostrado no caso acima, temos que $\mu_0(I_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu_0(I_i \cap J_j)$. Portanto

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_0(I_i) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \mu_0(I_i \cap J_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu_0(J_j)$$

e μ_0 é bem definida em $\mathcal{A}$
Seja $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \in \mathcal{A}$, I_j's intervalos semi-abertos à esquerda e disjuntos dois a dois. Então, pela definição de $\mathcal{A}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ e $\exists J_1, ..., J_n \in \mathcal{E}$ onde $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i = \bigcup_{j=1}^{n} J_j$. Note que agora que basta provar

que $\mu_0(J_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(J_j \cap I_i)$, pois se tal igualdade for verdadeira, nós obtemos

$$\begin{aligned}\mu_0\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right) &= \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{n} J_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu_0(J_j) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \mu_0(J_j \cap I_i)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{n} J_j \cap I_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i)\end{aligned}$$

Assim, ja que J_j é um intervalo semi-aberto à esquerda, renomearemos-o de I e façamos

$$\mu_0(I) = \mu_0(\bigcup_{i=1}^{n} I_i) + \mu_0(I \setminus \bigcup_{i=1}^{n} I_i) \geq \mu_0(\bigcup_{i=1}^{n} I_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_0(I_i)$$

E conforme $n \to \infty$ nós obtemos $\mu_0(I) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i)$

Agora para a desigualde reversa, assuma que $I = (a, b]$, com a e b finitos e fixe $\epsilon > 0$. Como F é contínua à direita, temos que existe algum $\delta > 0$ tal que $F(a + \delta) - F(a) < \epsilon$, e para $I_i = (a_i, b_i]$ existe algum $\delta_i > 0$ tal que $F(b_i + \delta_i) - F(b_i) < \epsilon 2^{-i}$. Além disso, note também que como $\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i] = (a, b]$ então nós temos que, ou existe algum a_i igual a a, ou existe alguma subsequência de a_i's que convergem para a, o mesmo para b e os b_i's. Portanto temos que os intervalos abertos $(a_i, b_i + \delta_i)$ cobrem o compacto $[a + \delta, b]$ e assim existe uma subcobertura finita. Seja $(a_1, b_1 + \delta_1), ..., (a_N, b_N + \delta_N)$ tal subcobertura finita, onde foram descartados todos os intervalos que eram subconjunto próprio de outro intervalo e também os índices i's foram devidamente reindexados. Teremos então que $b_i + \delta_i \in (a_{i+1}, b_{i+1} + \delta_{i+1})$ para todo $i = 1, ..., N - 1$. Finalmente, então

$$\begin{aligned}\mu_0(I) &< F(b) - F(a + \delta) + \epsilon\\ &\leq F(b_n + \delta_N) - F(a_1) + \epsilon\\ &= F(b_n + \delta_N) - F(a_N) + \sum_{i=1}^{N-1}[F(a_{i+1}) - F(a_i)] + \epsilon\\ &\leq F(b_n + \delta_N) - F(a_N) + \sum_{i=1}^{N-1}[F(b_i + \delta_i) - F(a_i)] + \epsilon\\ &< \sum_{i=1}^{N}[F(b_i) + \epsilon 2^{-i} - F(a_i)] + \epsilon\\ &< \sum_{i=1}^{N}[F(b_i) - F(a_i)] + 2\epsilon\\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i) + 2\epsilon\end{aligned}$$

E nós obtemos a desigualdade reversa já que a escolha de ϵ foi arbitrária. Agora para o caso onde $a = -\infty$, para qualquer $M < \infty$ os intervalos $(a_i, b_i + \delta_i)$ cobrem o compacto $[-M, b]$, e por um argumento análogo ao anterior, nós obtemos que $F(b) - F(-M) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i) + 2\epsilon$ e como F é contínuo em $-\infty$, nós temos que conforme $\epsilon \to 0$ e $M \to \infty$, $\mu((-\infty, b)) = F(b) - F(-\infty) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i)$. O mesmo para o caso onde $b = +\infty$, para qualquer $M < \infty$ os intervalos $(a_i, b_i + \delta_i)$ cobrem o compacto $[a, M]$ e nós obtemos $F(M) - F(a) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i) + 2\epsilon$ e conforme $\epsilon \to 0$ e $M \to \infty$, com um argumento análogo ao primeiro e ao segundo caso nós obtemos $\mu((a, \infty)) = F(+\infty) - F(a) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i)$

Portanto μ_0 é σ-aditiva e nós concluímos que μ_0 é uma pré-medida □

Teorema 3.1. *Se $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função crescente e contínua à direita, então existe apenas uma μ_F medida de Borel em $\mathbb{R}$ tal que $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a), \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Se $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é outra função crescente e contínua à direita, então $\mu_F = \mu_G$ se, e somente se, $F - G$ é constante. Por outro lado, se μ é uma medida de Borel na reta que é finita em todos os conjuntos de Borel limitados, $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como*

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0, x]) & , se\ x > 0, \\ 0 & , se\ x = 0, \\ -\mu((x, 0]) & , se\ x < 0 \end{cases}$$

então F é crescente, contínua à direita e $\mu = \mu_F$

Demonstração. Pela proposição 3.3, a medida $\mu_F(a, b]) = F(b) - F(a)$ é uma pré-medida na álgebra $\mathcal{A}$, e pela proposição 3.2, a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$ é a σ-álgebra de Borel, além disso μ_F é σ-finita pois $\mathbb{R} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} (j, j+1]$ e portanto, pelo teorema 4 do capítulo 2, existe uma única extensão de μ_F para uma medida de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Se $\mu_G = \mu_F$, note que $\forall x \in \mathbb{R}, \mu_G((0, x]) = \mu_F((0, x])$, então $(F - G)(x) = (F - G)(0) = k \in \mathbb{R}$; por outro lado, se $F(x) = G(x) + k$ então $F(b) - F(a) = G(b) - G(a), \forall a, b \in \mathbb{R}$ e $\mu_F = \mu_G$.

Para a volta, seja μ uma medida de Borel e F como definida no enunciado. Como μ é monótona então F é crescente em $[0, \infty)$ e também é crescente em $(-\infty, 0]$, e já que para qualquer $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < 0 \leq y$ nós temos que $F(x) = -\mu((x, 0]) \leq \mu((0, y]) = F(y)$ então F é crescente em todo $\mathbb{R}$. Seja $a \in \mathbb{R}$, se $a \geq 0$ então para toda sequência de pontos $x_n \to a^+$ nós temos que $F(a) = \mu((0, a]) = lim_{x_n \to a^+} \mu((0, x_n])$ pela continuidade de μ_0 por cima, e se $a < 0$ então $F(a) = -\mu((x, 0]) = lim_{x_n \to a^+} - \mu((x_n, 0])$ pela continuidade por baixo de μ. Portanto F é contínua à direita. A igualdade $\mu = \mu_F$ é óbvia em $\mathcal{A}$, logo segue do teorema 4 do capítulo 2 (2.4) que existe uma única extensão de μ para $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, portanto $\mu = \mu_F$ em $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. □

Definição 3.3. A **medida de Lebesgue-Stieltjes** associada a função F (F crescente e contínua à direita) é o completamento da medida μ_F. Denotaremos tal medida de Lebesgue-Stieltjes simplismente como μ, e seu domínio como $\mathcal{M}_\mu$. Para todo $E \in \mathcal{M}_\mu$ nós teremos:

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu((a_j, b_j]) : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j]\right\}$$

Lema 3.1. *Se $E \in \mathcal{M}_u$, então*

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu((a_j, b_j)) : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)\right\}$$

Demonstração. Seja $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$ e denote o lado direito da igualdade como $\nu(E)$. Temos que para cada $i = 1, 2, ...;$ $(a_i, b_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_j^k$ onde $I_j^k = (c_j^k, c_j^{k+1}]$ são intervalos semi-abertos a esquerda e disjuntos dois a dois tais que $c_j^1 = a_j$ e c_j^k é crescente e convergente para b_j conforme $k \to \infty$. Assim $E \subseteq \bigcup_{j,k=1}^{\infty} I_j^k$ e então

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu((a_i, b_i)) = \sum_{j,k=1}^{\infty}\mu(I_j^k) \geq \mu(E)$$

Portanto, $\mu(E) \leq \nu(E)$. Agora fixe $\epsilon > 0$ qualquer. Temos que existe $\{(a_i, b_i]\}_1^{\infty}$ onde $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i]$ e $\sum_{i=1}^{\infty}\mu((a_i, b_i]) \leq \mu(E) + \epsilon$, e como F é contínua à direita, para cada $i = 1, 2, ...$, existe $\delta_i > 0$ tal que $F(b_i + \delta_i) - F(b_i) < \epsilon 2^{-i}$. Mas então $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i + \delta_i)$ e

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu((a_i, b_i + \delta_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mu((a_i, b_i]) + \epsilon \leq \mu(E) + \epsilon$$

Como a escolha de ϵ foi arbitrária, nós obtemos que $\nu(E) \leq \mu(E)$ □

Teorema 3.2. *Se $E \in \mathcal{M}_u$, então*

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \inf\{\mu(U) : U \supseteq E \text{ e } U \text{ é aberto}\}\\ &= \sup\{\mu(K) : K \subseteq E \text{ e } K \text{ é compacto}\}\end{aligned}$$

Demonstração. Seja U aberto tal que $E \subseteq U$, então $\mu(E) \leq \mu(U)$ pois μ é monotona. Agora dado $\epsilon > 0$ qualquer, pelo lema 3.1 sabemos que existe uma cobertura $U = \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)$ tal que

$E \subseteq U$ e $\mu(U) \leq \mu(E) + \epsilon$, e como a união enumerável de abertos é aberta, então U é aberto. E com isso nós concluímos a primeira igualdade.

Quanto a segunda igualdade, como $K \subseteq E$ e como $K \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, então pela monôtonicidade de μ, $\mu(K) \leq \mu(E)$. Para a desigualdade reversa, dividiremos em casos. Se E for limitado e fechado, então E é compacto e a igualdade é valida. Se E for aberto, então E^c é fechado e $\overline{E}$ é compacto, logo $\overline{E} \cap E^c$ é compacto. Pela primeira igualdade nós sabemos que, para todo $\epsilon > 0$, existe um aberto $U \supset \overline{E} \setminus E$ tal que

$$\mu(U) \leq \mu(\overline{E} \setminus E) + \epsilon \tag{3.1}$$

Tome $K = \overline{E} \setminus U$, daí

$$K = \overline{E} \setminus U = \overline{E} \cap U^c \subseteq \overline{E} \cap (\overline{E} \cup E) = \emptyset \cup (\overline{E} \cap E) = \emptyset \cup E = E$$

Então $K \subseteq E$. Além disso, como $E = K \cup (E \setminus K)$, onde $K \cap (E \setminus K) = \emptyset$ então

$$\mu(K) = \mu(E) - \mu(E \setminus K) \tag{3.2}$$

Agora note que

$$E \setminus K = E \setminus (\overline{E} \setminus U) = E \cap (\overline{E} \setminus U)^c = E \cap (\overline{E} \cap U^c)^c = E \cap (\overline{E}^c \cup U) = (E \cap \overline{E}^c) \cup (E \cap U) = E \cup U \tag{3.3}$$

Substituindo (3.3) em (3.2) nós obtemos

$$\mu(K) = \mu(E) - \mu(E \cap U) \tag{3.4}$$

Mas como $U = (E \cap U) \cup (U \cap E^c)$, então $\mu(E \cap U) = \mu(U) - \mu(U \setminus E)$, substituindo isso em (3.4) nós obtemos

$$\mu(K) = \mu(E) - [\mu(U) - \mu(U \setminus E)] \tag{3.5}$$

Lembremos agora que a nossa escolha de U foi tal que $U \supset \overline{E} \setminus E$, então $U \setminus E \supset (\overline{E} \setminus E)$ e pela monotonicidade de μ juntamente com a igualdade (3.5) nós teremos

$$\begin{aligned} \mu(K) &= \mu(E) - \mu(U) + \mu(U \setminus E) \\ &\geq \mu(E) - \mu(U) + \mu(\overline{E} \setminus E) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Agora, pela desigualdade (3.1) nós temos que $\mu(\overline{E} \setminus E) - \mu(U) \geq -\epsilon$ e pela desigualdade (3.6), nós teremos

$$\begin{aligned} \mu(K) &\geq \mu(E) - \mu(U) + \mu(\overline{E} \setminus E) \\ &\geq \mu(E) - \epsilon \end{aligned} \tag{3.7}$$

E nós obtemos a igualdade caso E for aberto e limitado.

Nos resta o caso onde E não é limitado. Nesse caso, seja $E_j = E \cap (j, j+1]$, como visto acima, sabemos que para qualquer $\epsilon > 0$ existe um compacto $K_j \subset E_j$ tal que $\mu(K_j) \geq \mu(E_j) - \epsilon 2^{-j}$. Seja $H_n = \bigcup_{j=-n}^{n} K_j$, então H_n é compacto e $H_n \subset E$, pois então $\mu(H_n) \geq \mu(\bigcup_{j=-n}^{n} E_j) - \epsilon$ e conforme $n \to \infty$, nós obtemos a desigualdade que desejavamos, concluindo, por final, que a segunda desigualdade é verdadeira. $\square$

Definição 3.4. A **medida de Lebesgue** é a medida de Lebesgue-Stieltjes associada a função $F(x) = x$. A partir desse momento, nos referiremos como medida a medida de Lebesgue e denotaremos tal medida por m.

Exemplo 3.1. A medida dos números racionais é zero.

Demonstração. Como o conjunto dos racionais é enumerável, então para cada racional r_j, dado $\epsilon > 0$ qualquer, nós temos que $r_j \in \left(r_j, r_j + \epsilon 2^{-j}\right)$ e que $\mathbb{Q} \subset \left\{ \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(r_j, r_j + \epsilon 2^{-j}\right) : \forall r_j \in \mathbb{Q} \right\}$.

Portanto, para todo $r_j \in \mathbb{Q}$ nós temos $0 \leq m(\mathbb{Q}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m\left(r_j, r_j + \epsilon 2^{-j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(r_j + \epsilon 2^{-j} - r_j\right) = \epsilon$.

Como a escolha de ϵ foi arbitrária, então $m(\mathbb{Q}) = 0$. $\square$

Exemplo 3.2. A medida do conjunto de cantor é zero.

Demonstração. Seja C o conjunto de cantor, C é construído a partir do intervalo $[0, 1]$, removendo o segundo terço aberto do intervalo, e fazendo o mesmo para cada um dos intervalos subsequentes. Note que o conjunto C' dos intervalos removidos é enumerável, então

$$m(C) = m([0,1]) - m(C') = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{3^{j+1}} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - (2/3)} = 0.$$

$\square$

4 FUNÇÕES MENSURÁVEIS

Definição 4.1. Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita **mensurável** ou $\mathcal{B}$ **mensurável** se $\{x : f(x) > a\} \in \mathcal{B}$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Uma função complexa é mensurável se ambas as suas partes, real e complexa, forem mensuráveis.

Proposição 4.1. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\{x : f(x) > a\} \in \mathcal{B}$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$

(ii) $\{x : f(x) \geq a\} \in \mathcal{B}$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$

(iii) $\{x : f(x) < a\} \in \mathcal{B}$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$

(iv) $\{x : f(x) \leq a\} \in \mathcal{B}$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$

Demonstração. Se (i), então para todo $a \in \mathbb{R}, \{x : f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x : f(x) > a - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{B}$ pois $\mathcal{B}$ é fechado sob a intersecções enumeráveis, ou seja, $(i) \implies (ii)$. Se (ii), então para todo $a \in \mathbb{R}, \{x : f(x) < a\} = \{x : f(x) \geq a\}^c \in \mathcal{B}$, pois $\mathcal{B}$ é fechado sob o complementar, ou seja, $(ii) \implies (iii)$. Se (iii), então para todo $a \in \mathcal{R}, \{x : f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x : f(x) < a + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{B}$, ou seja $(iii) \implies (iv)$. E se (iv), então para todo $a \in \mathcal{R}\{x : f(x) > a\} = \{x : f(x) \leq a\}^c \in \mathcal{B}$, ou seja, $(iv) \implies (i)$ e concluímos a demonstração. $\square$

Proposição 4.2. *Se f é mensurável, então $|f|$ é mensurável.*

Demonstração. Para todo $a \in \mathcal{R}, \{x : |f(x)| < a\} = \{x : f(x) < a\} \cap \{x : f(x) > -a\} \in \mathcal{B}$, logo $|f|$ é mensurável. $\square$

Proposição 4.3. *Seja X um espaço métrico e $\mathcal{B}_X$ a sua σ-álgebra de Borel, e seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua, então f é mensurável.*

Demonstração. f é contínua se, e somente se, $f^{-1}(U)$ é aberto em X para todo aberto U em $\mathbb{R}$. Logo para todo $a \in \mathbb{R}, (a, \infty)$ é aberto em $\mathbb{R}$ e $\{x : f(x) > a\} = f^{-1}(a, \infty)$ é aberto em X, e portanto $\{x : f(x) > a\} \in \mathcal{B}_X$. $\square$

Proposição 4.4. *Seja $c \in \mathbb{R}$ e sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ mensuráveis, então $f+g$, $-f$, cf, fg, $max(f, g)$ e $min(f, g)$ são mensuráveis.*

Demonstração. fixe $a \in \mathbb{R}$ qualquer.
$(f + g)$: Se $f(x) + g(x) \geq a$ para todo $x \in X$, então $\{x : f(x) + g(x) < a\} = \emptyset \in \mathcal{B}$ e $f + g$ é mensurável, caso contrário, para todo $x \in X$ tal que $f(x) + g(x) < a$ teremos que $f(x) < a - g(x)$ e que, pela densidade dos racionais nos reais, existe um racional r tal que $f(x) < r < a - g(x)$. Seja Q o conjunto de tais racionais que satisfazem nossa condição, como existem infinitos

racionais entre dois números reais e como $card(\mathbb{Q}) = card(\mathbb{N})$, então $card(Q) = card(\mathbb{N})$ e Q é enumerável. Portanto

$$\{x : f(x) + g(x) < a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left(\{x : f(x) < r\} \cap \{x : g(x) < a - r\}\right) \in \mathcal{B}$$

Como a escolha de a foi arbitrária, então $f + g$ é mensurável.
$(-f)$: Pelo item (iii) proposição 4.1, $\{x : -f(x) > a\} = \{x : f(x) < -a\} \in \mathcal{B}$, logo $-f$ é mensurável.
(cf) : Se $c > 0$, então $\{x : cf(x) > a\} = \{x : f(x) < a/b\} \in \mathcal{B}$; se $c = 0$, então ou $a > 0$ e $\{x : 0 < a\} \in \mathcal{B}$ ou $a \leq 0$ e $\{x : 0 < a\} = \emptyset \in \mathbb{B}$; se $c < 0$ então $cf = |c|(-f)$, onde $-f$ é mensurável e $|c| > 0$, o que cai nos casos demonstrados acima. Portanto cf é mensurável para qualquer $c \in \mathbb{R}$.
(f^2) : Se $a < 0$, como para todo $x \in X$, $f(x)^2 \geq 0$, então $\{x : f(x)^2 > a\} = X \in \mathcal{B}$, se $a \geq 0$, então

$$\{x : f(x)^2 > a\} = \{x : f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x : f(x) < -\sqrt{a}\} \in \mathcal{B}$$

Logo f^2 é mensurável.
(fg) : Note que, como $f(x)g(x) = \frac{1}{2}[(f(x) + g(x))^2 - f(x)^2 - g(x)^2]$, então fg é mensurável pelos argumentos vistos acima.
$max(f, g)$: Note que $\{x : max(f(x), g(x)) > a\} = \{x : f(x) > a\} \cup \{x : g(x) > a\} \in \mathcal{B}$, então $max(f, g)$ é mensurável.
$min(f, g)$: Como $min(f, g) = -max(-f, -g)$, então $min(f, g)$ é mensurável. $\square$

Proposição 4.5. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : X \to \mathbb{R}$ mensurável. Para cada $x \in X$, defina*

$$g_1(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \qquad g_2(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \qquad g_3(x) = \limsup_{n \to \infty} f_n(x), \qquad g_4(x) = \liminf_{n \to \infty} f_n(x)$$

então g_1, g_2, g_3, g_4 são mensuráveis.

Demonstração. Note que, dado $a \in \mathbb{R}$, $g_1(x) > a$ se, e somente se, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(x) > a$, pois então

$$\{x : g_1(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > a\} \in \mathcal{B}$$

E g_1 é mensurável. De forma similar, $g_2(x) < a \iff \exists n \in \mathbb{N}, f_n(x) < a$, ou seja,

$$\{x : g_2(x) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) < a\} \in \mathcal{B}$$

E pelo item (iii) da 4.1, g_2 é mensurável.

Teremos que g_3 é mensurável pois

$$g_3(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{n\geq 0}\sup_{m\geq n} f_m(x),$$

que são os casos cobertos por g_1 e g_2. O mesmo para g_4 já que

$$g_3(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\geq 0}\inf_{m\geq n} f_m(x)$$

$\square$

4.1 FUNÇÕES SIMPLES

Definição 4.2. Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Para cada $E \in X$, a **função característica de E** é dada como

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in E; \\ 0, \text{ se } x \notin E. \end{cases}$$

Lema 4.1. *$\mathcal{X}_E(x)$ é mensurável se $E \in \mathcal{B}$.*

Demonstração. Se $a > 1$, então $\{x : \mathcal{X}_E(x) < a\} = X \in \mathcal{B}$.
Se $a = 1$, então $\{x : \mathcal{X}_E(x) < a\} = E^c \in \mathcal{B}$.
Se $1 > a > 0$, então $\{x : \mathcal{X}_E(x) > a\} = E \in \mathcal{B}$.
Se $a = 0$, então $\{x : \mathcal{X}_E(x) > a\} = E \in \mathcal{B}$.
Se $a > 0$, então $\{x : \mathcal{X}_E(x) > a\} = X \in \mathcal{B}$.
Portanto $\mathcal{X}_E(x)$ é mensurável. $\square$

Definição 4.3. Uma **função simples** $s : X \to \mathbb{R}$ é uma função tal que

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{E_j}(x)$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$, $E_j \in \mathcal{B}$ e $\mathcal{X}_{e_j}(x)$ é a função característica de E_j. Ou seja, $s(x)$ pode ser escrita como a combinação linear finita de funções características. Note que, pelo lema 4.1 e pela proposição 4.4 s é mensurável,

Teorema 4.1. *Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensurável, então existe uma sequência $\{s_n\}$ crescente tal que $s_n \to f$ uniformemente.*

Demonstração. Se $f \geq 0$, para cada $n = 1, 2, ...$ e todo $k = 1, 2, ..., n2^n$, seja

$$E_n^k = \{x : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\}, \qquad F_n = \{x : f(x) \geq n\}.$$

Note que $\mathbb{R}_+ = \left(\bigcup_{k=1}^{n2^n} E_n^k\right) \cup F_n$. Agora, para todo $x \in X$, seja

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n}\mathcal{X}_{E_n^k}(x) + n\mathcal{X}_{F_n}(x).$$

Fixe $x \in X$ qualquer.
Se $f(x) = \infty$, então $s_n(x) = n$ e $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$.
Se $f(x) < \infty$, então podemos escolher $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\frac{k_0 - 1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k_0}{2^n}$ para algum $k_0 = 1, 2, ..., N2^N$. Pois então $f(x) \in E_N^{k_0}$ e para todo $n \geq N$

$$0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}.$$

Ou seja, $s_n(x) \to f(x)$. Mais ainda, se existe $U \in X$ tal que $f(x) < \infty$ para todo $x \in U$, então $0 \geq \sup_{x\in U} |s_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n}$ e então a convergência é uniforme em U.
Se f for qualquer, seja

$$f^+(x) = max(f(x), 0) \qquad\qquad f^-(x) = max(-f(x), 0).$$

Assim f^+ e f^- positivas e mensuráveis e pela proposição 4.4.Pelo argumento acima, sabemos que existem duas sequências de funções simples, s_n e t_n, tais que $s_n \to f^+$ e $t_n \to f^-$. Portanto $r_n = s_n - t_n$ é uma função simples tal que $r_n \to f(x)$. $\square$