

1 ESPAÇOS MENSURÁVEIS

Definição 1.1. Uma **álgebra** de subconjuntos de X é uma família \mathcal{B} de subconjuntos de X que é fechada para as operações elementares de conjuntos, ou seja:

(i) Se $A \in \mathcal{B}$, então $A^c \in \mathcal{B}$

(ii) Se $A, B \in \mathcal{B}$, então $A \cup B \in \mathcal{B}$

Note que como $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ e $A \setminus B = A \cap B^c$ para quaisquer $A, B \in \mathcal{B}$, então tais operações de conjuntos também são fechadas em \mathcal{B} , além disso como $\emptyset = X \cap X^c$ e $X = A \cup A^c$, nós também temos que $\emptyset \in \mathcal{B}$ e $X \in \mathcal{B}$. Note também que, por associatividade, a união e intersecção de qualquer número finito de elementos de \mathcal{B} está em \mathcal{B} .

Definição 1.2. Uma σ -**álgebra** é uma álgebra de subconjuntos de X que também é fechada para a união enumerável de subconjuntos de \mathcal{B} , ou seja:

(iii) Se $A_j \in \mathcal{B}, j = \{1, 2, \dots\}$, então $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{B}$

Note que como $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c\right)^c$, nós também temos que as σ -álgebras são fechadas para as intersecções enumeráveis.

Abaixo seguem alguns exemplos de σ -álgebra.

Exemplo 1.1. Seja $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$ é uma σ -álgebra, da mesma forma que $\mathcal{B}_1 = \{\emptyset, X\}$ e $\mathcal{B}_2 = 2^X$ também são σ -álgebras, ainda mais, \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 são σ -álgebras para qualquer conjunto X , sendo $\{\emptyset, X\}$ a menor e 2^X a maior σ -álgebra de qualquer conjunto X .

Exemplo 1.2. Seja X um conjunto não enumerável, então

$$\mathcal{B} = \{A \in X : A \text{ é enumerável ou } A^c \text{ é enumerável}\}$$

é uma σ -álgebra.

Demonstração. Tome $A \in \mathcal{B}$, A é enumerável ou o A^c é enumerável, se A for enumerável, nós teremos que o $(A^c)^c$ é enumerável logo $(A^c) \in \mathcal{B}$, se A não for enumerável, então A^c é enumerável e logo A^c também é elemento de \mathcal{B} , e a primeira propriedade foi verificada.

Agora tome quaisquer $A_j \in \mathcal{B}$ tais que A_j eles são contáveis, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_j$ é enumerável já que a união enumerável de conjuntos contáveis é enumerável. Tome agora $A_j \in \mathcal{B}$ tal que pelo menos um $A_{j_0}^c$ é enumerável, logo $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_j\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_j^c \subseteq A_{j_0}^c$, logo $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{B}$ e provamos todas as propriedades □

Lema 1.1. A interseccção de uma família de σ -álgebras é uma σ -álgebra

Demonstração. Seja $\{\mathcal{B}_i : i \in \mathcal{I}\}$ uma família não vazia de σ -álgebras, de um conjunto X queremos mostrar que $\mathcal{B} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_i$ é uma σ -álgebra.

Tome $A \in \mathcal{B}$, então $A \in \mathcal{B}_i, \forall i \in \mathcal{I}$ e $A^c \in \mathcal{B}_i, \forall i \in \mathcal{I}$, portanto $A^c \in \mathcal{B}$. Temos também que se $\forall j \in \mathbb{N}, A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_i$ então $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_i$ e demonstramos as duas propriedades de σ -álgebra, logo \mathcal{B} é uma σ -álgebra. \square

Definição 1.3. Um **espaço mensurável** é uma dupla (X, \mathcal{B}) , onde X é um conjunto e \mathcal{B} uma σ -álgebra de subconjuntos de X . Os elementos de \mathcal{B} são chamados conjuntos mensuráveis.

Definição 1.4. Uma σ -álgebra gerada por uma família \mathcal{E} de subconjuntos de X é a menor σ -álgebra de X que contém \mathcal{E} e será denotada por $\sigma(\mathcal{E})$. Por construção, podemos definir tal σ -álgebra da seguinte forma

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \{\mathcal{B}_i : \mathcal{B}_i \text{ é uma } \sigma\text{-álgebra e } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}_i\}$$

Note que $\sigma(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(\mathcal{E})$

Definição 1.5. Se X é um espaço métrico, a σ -álgebra gerada pela família de subconjuntos abertos de X é chamada de **σ -álgebra de Borel**. A σ -álgebra de Borel na Reta e será denotada como $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

Lema 1.2. Se $\mathcal{E} \in \sigma(\mathcal{F})$ então $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$

Demonstração. \mathcal{E} e \mathcal{F} são famílias de subconjuntos de algum conjunto X . Note que se \mathcal{E} está em $\sigma(\mathcal{F})$ então os elementos de \mathcal{E} estão em \mathcal{F} e $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, o que implica que então $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$ \square

Proposição 1.1. A σ -álgebra de Borel em \mathbb{R} pode ser gerada com

- (i) Os intervalos abertos $\mathcal{E}_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$
- (ii) Os intervalos fechados $\mathcal{E}_2 = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$
- (iii) Os intervalos semi-abertos $\mathcal{E}_3 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{E}_4 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$
- (iv) Os intervalos abertos ilimitados $\mathcal{E}_5 = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{E}_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$
- (v) Os intervalos fechados e ilimitados $\mathcal{E}_7 = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{E}_8 = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$

Demonstração. Seja τ a família dos conjuntos abertos de \mathbb{R} , por definição $\sigma(\tau)$ é a σ -álgebra de Borel. Provaremos cada item individualmente.

- (i) Como todos os elementos de \mathcal{E}_1 são abertos, então nós temos que $\mathcal{E}_1 \subseteq \tau$, logo $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\tau)$.

Para a inclusão inversa, basta lembrar que qualquer conjunto aberto de \mathbb{R} pode ser escrito como a união enumerável de intervalos abertos de \mathbb{R} , portanto todos os elementos de τ estão contidos em $\sigma(\mathcal{E}_1)$ e pelo Lema 1.2 nós temos que $\tau \in \sigma(\mathcal{E}_1)$ então $\sigma(\tau) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_1)$.

Portanto $\sigma(\tau) = \sigma(\mathcal{E}_1)$.

- (ii) Para todo $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ nós temos que $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + n^{-1}, b - n^{-1}] \in \sigma(\mathcal{E}_2)$, logo $\mathcal{E}_1 \in \sigma(\mathcal{E}_2)$ e portanto $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$. Também temos que $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a + n^{-1}, b - n^{-1})$ e implicará que $\sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$. Portanto $\sigma(\tau) = \sigma(\mathcal{E}_2)$.

- (iii) Tomando $(a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, b - n^{-1})$ implicará que $\sigma(\mathcal{E}_3) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$ e tomando $(a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b - n^{-1}]$ implica que $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3)$. Portanto $\sigma(\tau) = \sigma(\mathcal{E}_3)$. A demonstração para $\sigma(\mathcal{E}_4)$ é análoga.

- (iv) Tomando $(a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, b + n)$ implica que $\sigma(\mathcal{E}_5) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$ e tomando $(a, b) = (a, \infty) - (b, \infty)$ implica que $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_5)$. Portanto $\sigma(\tau) = \sigma(\mathcal{E}_5)$. A demonstração para $\sigma(\mathcal{E}_6)$ é análoga.

- (v) Tomando $[a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b + n]$ implica que $\sigma(\mathcal{E}_6) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$ e tomando $[a, b] = [a, \infty) - [b, \infty)$ implica que $\sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_6)$. Portanto $\sigma(\tau) = \sigma(\mathcal{E}_6)$. A demonstração para $\sigma(\mathcal{E}_7)$ é análoga.

□

2 ESPAÇOS DE MEDIDA

Definição 2.1. Uma **medida** em um espaço mensurável (X, \mathcal{B}) é uma função $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ tal que:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (ii) (**σ -aditividade**): $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ para quaisquer $A_j \in \mathcal{B}$ disjuntos dois a dois.

Uma medida é **finitamente aditiva** se:

$$\mu(\bigcup_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j)$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.2. Um **espaço de medida** é uma tripla (X, \mathcal{B}, μ) , onde μ é uma medida no espaço mensurável (X, \mathcal{B})

Teorema 2.1. Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida.

- (i) (**Monotonicidade**) Se $A, B \in \mathcal{B}$ e $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- (ii) (**Subaditividade**) Se $\{A_n\}_1^{\infty} \in \mathcal{B}$, então $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.
- (iii) (**Continuidade por baixo**) Se $\{A_n\}_1^{\infty} \in \mathcal{B}$ e $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, então $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$.
- (iv) (**Continuidade por cima**) Se $\{A_n\}_1^{\infty} \in \mathcal{B}$ e $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ e $\mu(A_1) < \infty$, então $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$.

Demonstração. (i) $A \subset B$, então $B = B \setminus A \cup A$ onde $B \setminus A \cap A = \emptyset$, portanto $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(A)$ pois $\mu(B \setminus A) \geq 0$.

- (ii) Seja $B_1 = A_1$ e $B_k = A_k \cup \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$ para $k > 1$. Temos que $B_m \cap B_n = \emptyset$ se $m \neq n$ e $\bigcup_{j=1}^n A_j = \bigcup_{j=1}^n B_j$ para todo n , ou seja, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Portanto, pelo item anterior,
$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

(iii) Seja $B_j = A_j \setminus A_{j-1}$, temos que $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ e $B_m \cap B_n = \emptyset$ para todo $m \neq n$. Assim

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \mu(B_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \mu(A_j \setminus A_{j-1}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \mu(A_j) - \mu(A_{j-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k). \end{aligned}$$

(iv) Seja $B_j = A_1 \setminus A_j$, já que $B_j \cap A_j = \emptyset$, então $\mu(A_1) = \mu(B_j \cup A_j) = \mu(B_j) + \mu(A_j)$ e $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$, ou seja $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, e como $B_1 \subset B_2 \subset \dots$, pelo item anterior nós temos que $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1) - \mu(A_n)$. Portanto, como $\mu(A_1) < \infty$, nós obtemos que

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \mu(A_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1) - \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

□

Definição 2.3. Uma medida é completa se o seu domínio contém todos os subconjuntos do conjunto nulo, ou seja, (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida, μ é completa se, e somente se, $A \subseteq N \in \mathcal{B}$ e $\mu(N) = 0$, então $A \in \mathcal{B}$.

Teorema 2.2. Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida, $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{B} : \mu(N) = 0\}$ e $\widetilde{\mathcal{M}} = \{A \cup B : A \in \mathcal{M} \text{ e } B \in \mathcal{N}\}$. Então $\widetilde{\mathcal{M}}$ é uma σ -álgebra e existe uma única extensão $\widetilde{\mu}$ de μ para uma medida completa de $\widetilde{\mathcal{M}}$

Definição 2.4. Uma **medida exterior** em um conjunto não vazio X é uma função $\mu^* : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ tal que

- (i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- (ii) **(Monótona)** $A \subseteq B$, então $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
- (iii) **(Subaditividade enumerável)** $\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$

Proposição 2.1. Seja $\mathcal{E} \subseteq 2^X$ uma família elementar e seja $\rho : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\emptyset \in \mathcal{E}$, $X \in \mathcal{E}$ e $\rho(\emptyset) = 0$. Para todo $A \in 2^X$, seja

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) : E_j \in \mathcal{E} \text{ e } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}$$

Então μ^* é uma medida exterior.

Demonstração. $\mu^*(\emptyset) = 0$ pois basta tomar $E_j = \emptyset$ para todo j . Agora se $A \subseteq B$, então

$$A' = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) : E_j \in \mathcal{E} \text{ e } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\} \supseteq \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) : E_j \in \mathcal{E} \text{ e } A \subseteq B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\} = B'$$

Como $A' \supseteq B'$ então $\inf A' \leq \inf B'$, ou seja, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Agora suponha que $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq 2^X$ e fixe $\epsilon > 0$. Pela definição de μ^* , para cada um dos j existe $\{E_j^k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}$ tal que $A_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_j^k$ e,

pela definição de infimo, temos que $\sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \mu^*(A_j) + \epsilon 2^{-j}$. Tomando $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ nós temos que $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_j^k$ e $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon 2^{-j}$ mas então $\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \epsilon$ e como a escolha de ϵ foi arbitrária, nós concluímos a demonstração. \square

Definição 2.5. Seja μ^* uma medida exterior em X , um conjunto $A \subseteq X$ é chamado de μ^* mensurável se, para todo $E \subseteq X$

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Teorema 2.3. Se μ^* é uma medida exterior em X , a família \mathcal{M} de conjuntos μ^* mensuráveis é uma σ -álgebra e a restrição de μ^* em \mathcal{M} é uma medida completa.

Definição 2.6. Uma **pré-medida** em uma álgebra $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ é uma função $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ tal que

- (i) $\mu_0(\emptyset) = 0$;
- (ii) (**σ -aditividade**) $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois de \mathcal{A} tais que $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$, então $\mu_0(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j)$.

Proposição 2.2. Seja μ_0 uma pré-medida em \mathcal{A} e μ^* definida assim como na proposição 2.1 mas sobre μ_0 ao invés de ρ e sobre \mathcal{A} ao invés de \mathcal{E} . Teremos então que

- (i) μ^* restrita em \mathcal{A} é igual a μ_0 ;
- (ii) Todo conjunto em \mathcal{A} é μ^* mensurável.

Demonstração. (i) Seja $E \in \mathcal{A}$ qualquer, temos que existe uma sequência de conjunto

$\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ em \mathcal{A} tal que $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Seja $B_n = E \cap (A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j)$, então $B_r \cap B_s = \emptyset$ se

$r \neq s$ e $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Assim, $\mu_0(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j)$ pois $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ e pré-medidas são monótonas (a demonstração de tal fato é análoga a demonstração do

item (i) do teorema 2.1 . Portanto $\mu_0(E) \leq \mu^*(E)$. Para a igualdade inversa, note que $E \subseteq E \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$, e pela definição de μ^* nós finalmente obtemos que $\mu^*(E) \leq \mu_0(E)$.

- (ii) Seja $A \in \mathcal{A}$ qualquer e $E \subseteq X$, fixe $\epsilon > 0$, temos que existe uma sequência de conjunto $\{A_j\}_1^\infty$ em \mathcal{A} tal que $E \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ e, pela definição de infimo, $\sum_{j=1}^\infty \mu_0(A_j) \leq \mu^*(E) + \epsilon$. Como μ_0 é aditiva em \mathcal{A} e como $(A_j \cap A) \cap (A_j \cap A^c) = \emptyset$ com $(A_j \cap A) \subseteq A$ e $(A_j \cap A^c) \subseteq A$, então

$$\begin{aligned} \mu^*(E) + \epsilon &\geq \sum_{j=1}^\infty \mu_0(A_j) \geq \sum_{j=1}^\infty \mu_0((A_j \cap A) \cup (A_j \cap A^c)) \\ &\geq \sum_{j=1}^\infty \mu_0(A_j \cap A) + \sum_{j=1}^\infty \mu_0(A_j \cap A^c) \\ &\geq \mu^*(A_j \cap A) + \mu^*(A_j \cap A^c) \end{aligned}$$

Como a escolha de ϵ foi arbitrária, nós obtemos um lado da igualdade. Quando ao outro lado da desigualdade, como $E \subseteq (A_j \cap A) \cup (A_j \cap A^c)$ e como μ^* é aditiva, então $\mu^*(E) \leq \mu^*(A_j \cap A) + \mu^*(A_j \cap A^c)$

□

Definição 2.7. Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida. μ é dita **finita** se $\mu(X) < \infty$. μ é dita **σ -finita** se $\exists A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$ tal que $X = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$, onde $\mu(A_j) < \infty, \forall j = 1, 2, \dots$

Teorema 2.4. Seja $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ uma álgebra, μ_0 uma pré-medida em \mathcal{A} e \mathcal{M} σ -álgebra gerada por \mathcal{A} . Então existe uma medida μ em \mathcal{M} cuja restrição em \mathcal{A} é igual a μ_0 . Além disso, qualquer outra medida ν em \mathcal{M} que estende μ_0 será tal que $\nu(E) \leq \mu(E)$ para todo $E \in \mathcal{M}$, sendo igual caso $\mu(E) < \infty$. Se μ_0 for σ -finita, então existe uma única extensão de μ_0 para uma medida de \mathcal{M}

3 MEDIDA DE BOREL

Definição 3.1. Uma **medida de Borel** é uma medida cujo domínio é uma σ -álgebra de Borel.

Definição 3.2. Seja μ uma medida de Borel em \mathbb{R} , a *função de distribuição de μ* é definida como

$$F_\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x \mapsto \mu((-\infty, x]).$$

Proposição 3.1. *Seja F uma medida de distribuição de μ , então F é crescente e contínua à direita.*

Demonstração. Seja $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$, assim $(-\infty, x] \subset (-\infty, y]$ e pelo item (i) teorema 2.1 do último capítulo, $\mu((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty, y])$. Portanto $F(x) = \mu((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty, y]) = F(y)$ e F é crescente.

Seja $\{x_n\}_1^\infty \subset \mathbb{R}$ uma sequência convergente a x pela direita, ou seja, $x_{j+1} \leq x_j$ para todo j . Mas então $(-\infty, x_{j+1}] \subseteq (-\infty, x_j]$ para todo j e, pelo item (iv) do teorema 2.1 do capítulo anterior, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu((-\infty, x_n]) = \mu(\bigcap_{j=1}^\infty (-\infty, x_j]) = \mu((-\infty, x]) = F(x)$. Como a escolha de $\{x_n\}_1^\infty$ foi arbitrária, então $F(x)$ é contínua. \square

Proposição 3.2. *Seja $\mathcal{E} = \{(a, b], (a, \infty), \emptyset : -\infty \leq a < b < \infty ; a, b \in \overline{\mathbb{R}}\}$ o conjunto dos intervalos semi-abertos à esquerda de \mathbb{R} . Então o conjunto \mathcal{A} da união contável de elementos de \mathcal{E} , ou seja, $\mathcal{A} = \{\bigcup_{i=1}^n \mathcal{E}_i : \mathcal{E}_i \in \mathcal{E} \text{ onde } \mathcal{E}_k \cap \mathcal{E}_l = \emptyset, \forall k \neq l\}$ é uma álgebra e a σ -álgebra gerada por \mathcal{A} é a σ -álgebra de Borel.*

Demonstração. Já que $\mathbb{R} = (a, \infty)$ onde $a = -\infty$, então $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$, o conjunto \emptyset está em \mathcal{A} pois $\emptyset \cup \emptyset \in \mathcal{A}$.

Agora tome $A = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{E}_i^0 \in \mathcal{A}$ e $B = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{E}_i^1 \in \mathcal{A}$ disjuntos, ou seja $\mathcal{E}_r \neq \mathcal{E}_s, \forall r \neq s$. Reindexe os elementos de A e de B da seguinte forma $\mathcal{E}_1^0 = \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m^0 = \mathcal{E}_m$ e $\mathcal{E}_1^1 = \mathcal{E}_{m+1}, \dots, \mathcal{E}_n^1 = \mathcal{E}_{m+n}$. Assim é claro que $A \cup B = \bigcup_{i=1}^{m+n} \mathcal{E}_i$ e A é fechado pela união de elementos disjuntos.

Para provar que \mathcal{A} é fechado no complemento, primeiro notemos que

$$\begin{aligned} (a, b] \cap (c, d] &= \begin{cases} \emptyset, & \text{se } b < c \\ (c, b], & \text{se } b > c \end{cases}, & (a, b] \cap (c, \infty) &= \begin{cases} \emptyset, & \text{se } b < c \\ (c, b], & \text{se } b > c \end{cases} \\ (a, \infty) \cap (b, \infty) &= \begin{cases} (a, \infty), & \text{se } a > b \\ (b, \infty), & \text{se } a < b \end{cases}, & \emptyset \cap \mathcal{E}_i &= \emptyset \end{aligned}$$

O que mostra que \mathcal{E} é fechado sob a intersecção finita. Portanto $A^c = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{E}_i^c \in \mathcal{E}$ o que implica que $A^c \cup \emptyset \in \mathcal{A}$, concluindo que \mathcal{A} é fechado sob o complementar. Pela Proposição 1 do capítulo 1 (1.1), nós temos que $\{(a, b] : a < b; a, b \in \mathbb{R}\}$ e $\{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ geram a σ -álgebra de Borel na reta, e como \mathcal{E} é a união desses conjuntos, então \mathcal{E} também o gera. \square

Proposição 3.3. *Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita, sejam $(a_j, b_j] \in \mathcal{A}$ para todo $j = 1, \dots, n$ tais que $(a_k, b_k] \cap (a_l, b_l] = \emptyset, \forall k \neq l$, e seja $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como*

$$\mu_0\left(\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i]\right) = \sum_{i=1}^n [F(a_i) - F(b_i)]$$

onde $\mu_0(\emptyset) = 0$. Então μ_0 é uma pré-medida na álgebra \mathcal{A}

Demonstração. Primeiro, devemos mostrar que μ_0 é bem definida.

O primeiro caso que analisaremos será o caso onde $\bigcup_{i=1}^n I_i = I = (a, b]$ ou $I = (a, \infty)$. Como \mathbb{R} é totalmente ordenado sob a operação \leq , e como os I_i 's são disjuntos, então podemos re-indexá-los de forma que $a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \dots < b_n = b$, daí

$$\mu_0(I) = F(a) - F(b) = \sum_{j=1}^n [F(b_j) - F(a_j)] = \sum_{j=1}^n \mu_0((a_j, b_j]) = \sum_{j=1}^n \mu_0(I_j)$$

Agora, no caso geral, seja $\bigcup_{i=1}^n I_i = \bigcup_{j=1}^m J_j$, assim, para cada $i = 1, \dots, n$ nós temos que $I_i = \bigcup_{j=1}^m (I_i \cap J_j)$

e, como mostrado no caso acima, temos que $\mu_0(I_i) = \sum_{j=1}^m \mu_0(I_i \cap J_j)$. Portanto

$$\sum_{i=1}^n \mu_0(I_i) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mu_0(I_i \cap J_j) = \sum_{j=1}^m \mu_0(J_j)$$

e μ_0 é bem definida em \mathcal{A}

Seja $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \in \mathcal{A}$, I_j 's intervalos semi-abertos à esquerda e disjuntos dois a dois. Então, pela

definição de \mathcal{A} , $\exists n \in \mathbb{N}$ e $\exists J_1, \dots, J_n \in \mathcal{E}$ onde $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i = \bigcup_{j=1}^n J_j$. Note que agora que basta provar

que $\mu_0(J_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(J_j \cap I_i)$, pois se tal igualdade for verdadeira, nós obtemos

$$\begin{aligned} \mu_0\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right) &= \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^n J_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu_0(J_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n \mu_0(J_j \cap I_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^n J_j \cap I_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i) \end{aligned}$$

Assim, já que J_j é um intervalo semi-aberto à esquerda, renomearemos-o de I e façamos

$$\mu_0(I) = \mu_0\left(\bigcup_{i=1}^n I_i\right) + \mu_0\left(I \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i\right) \geq \mu_0\left(\bigcup_{i=1}^n I_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu_0(I_i)$$

E conforme $n \rightarrow \infty$ nós obtemos $\mu_0(I) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i)$

Agora para a desigualde reversa, assuma que $I = (a, b]$, com a e b finitos e fixe $\epsilon > 0$. Como F é contínua à direita, temos que existe algum $\delta > 0$ tal que $F(a + \delta) - F(a) < \epsilon$, e para $I_i = (a_i, b_i]$ existe algum $\delta_i > 0$ tal que $F(b_i + \delta_i) - F(b_i) < \epsilon 2^{-i}$. Além disso, note também que como $\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i] = (a, b]$ então nós temos que, ou existe algum a_i igual a a , ou existe alguma subsequência de a_i 's que convergem para a , o mesmo para b e os b_i 's. Portanto temos que os intervalos abertos $(a_i, b_i + \delta_i)$ cobrem o compacto $[a + \delta, b]$ e assim existe uma subcobertura finita. Seja $(a_1, b_1 + \delta_1), \dots, (a_N, b_N + \delta_N)$ tal subcobertura finita, onde foram descartados todos os intervalos que eram subconjunto próprio de outro intervalo e também os índices i 's foram devidamente reindexados. Teremos então que $b_i + \delta_i \in (a_{i+1}, b_{i+1} + \delta_{i+1})$ para todo $i = 1, \dots, N - 1$. Finalmente, então

$$\begin{aligned} \mu_0(I) &< F(b) - F(a + \delta) + \epsilon \\ &\leq F(b_N + \delta_N) - F(a_1) + \epsilon \\ &= F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \sum_{i=1}^{N-1} [F(a_{i+1}) - F(a_i)] + \epsilon \\ &\leq F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \sum_{i=1}^{N-1} [F(b_i + \delta_i) - F(a_i)] + \epsilon \\ &< \sum_{i=1}^N [F(b_i) + \epsilon 2^{-i} - F(a_i)] + \epsilon \\ &< \sum_{i=1}^N [F(b_i) - F(a_i)] + 2\epsilon \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i) + 2\epsilon \end{aligned}$$

E nós obtemos a desigualdade reversa já que a escolha de ϵ foi arbitrária. Agora para o caso onde $a = -\infty$, para qualquer $M < \infty$ os intervalos $(a_i, b_i + \delta_i)$ cobrem o compacto $[-M, b]$, e por um argumento análogo ao anterior, nós obtemos que $F(b) - F(-M) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i) + 2\epsilon$ e como F é contínuo em $-\infty$, nós temos que conforme $\epsilon \rightarrow 0$ e $M \rightarrow \infty$, $\mu((-\infty, b)) = F(b) - F(-\infty) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i)$. O mesmo para o caso onde $b = +\infty$, para qualquer $M < \infty$ os intervalos $(a_i, b_i + \delta_i)$ cobrem o compacto $[a, M]$ e nós obtemos $F(M) - F(a) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i) + 2\epsilon$ e conforme $\epsilon \rightarrow 0$ e $M \rightarrow \infty$, com um argumento análogo ao primeiro e ao segundo caso nós obtemos $\mu((a, \infty)) = F(+\infty) - F(a) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i)$

Portanto μ_0 é σ -aditiva e nós concluímos que μ_0 é uma pré-medida \square

Teorema 3.1. *Se $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função crescente e contínua à direita, então existe apenas uma μ_F medida de Borel em \mathbb{R} tal que $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a), \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Se $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é outra função crescente e contínua à direita, então $\mu_F = \mu_G$ se, e somente se, $F - G$ é constante. Por outro lado, se μ é uma medida de Borel na reta que é finita em todos os conjuntos de Borel limitados, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como*

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0, x]) & , \text{ se } x > 0, \\ 0 & , \text{ se } x = 0, \\ -\mu((x, 0]) & , \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

então F é crescente, contínua à direita e $\mu = \mu_F$

Demonstração. Pela proposição 3.3, a medida $\mu_F(a, b] = F(b) - F(a)$ é uma pré-medida na álgebra \mathcal{A} , e pela proposição 3.2, a σ -álgebra gerada por \mathcal{A} é a σ -álgebra de Borel, além disso μ_F é σ -finita pois $\mathbb{R} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} (j, j+1]$ e portanto, pelo teorema 4 do capítulo 2, existe uma única extensão de μ_F para uma medida de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Se $\mu_G = \mu_F$, note que $\forall x \in \mathbb{R}, \mu_G((0, x]) = \mu_F((0, x])$, então $(F - G)(x) = (F - G)(0) = k \in \mathbb{R}$; por outro lado, se $F(x) = G(x) + k$ então $F(b) - F(a) = G(b) - G(a), \forall a, b \in \mathbb{R}$ e $\mu_F = \mu_G$.

Para a volta, seja μ uma medida de Borel e F como definida no enunciado. Como μ é monótona então F é crescente em $[0, \infty)$ e também é crescente em $(-\infty, 0]$, e já que para qualquer $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < 0 \leq y$ nós temos que $F(x) = -\mu((x, 0]) \leq \mu((0, y]) = F(y)$ então F é crescente em todo \mathbb{R} . Seja $a \in \mathbb{R}$, se $a \geq 0$ então para toda sequência de pontos $x_n \rightarrow a^+$ nós temos que $F(a) = \mu((0, a]) = \lim_{x_n \rightarrow a^+} \mu((0, x_n])$ pela continuidade de μ_0 por cima, e se $a < 0$ então $F(a) = -\mu((x, 0]) = \lim_{x_n \rightarrow a^+} -\mu((x_n, 0])$ pela continuidade por baixo de μ . Portanto F é contínua à direita. A igualdade $\mu = \mu_F$ é óbvia em \mathcal{A} , logo segue do teorema 4 do capítulo 2 (2.4) que existe uma única extensão de μ para $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, portanto $\mu = \mu_F$ em $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. \square

Definição 3.3. A medida de Lebesgue-Stieltjes associada a função F (F crescente e contínua à direita) é o completamento da medida μ_F . Denotaremos tal medida de Lebesgue-Stieltjes simplesmente como μ , e seu domínio como \mathcal{M}_μ . Para todo $E \in \mathcal{M}_\mu$ nós teremos:

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j]) : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j] \right\}$$

Lema 3.1. Se $E \in \mathcal{M}_\mu$, então

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j)) : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j) \right\}$$

Demonstração. Seja $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ e denote o lado direito da igualdade como $\nu(E)$. Temos que para cada $i = 1, 2, \dots$; $(a_i, b_i) = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^k$ onde $I_j^k = (c_j^k, c_j^{k+1}]$ são intervalos semi-abertos a esquerda e disjuntos dois a dois tais que $c_j^1 = a_j$ e c_j^k é crescente e convergente para b_j conforme $k \rightarrow \infty$.

Assim $E \subseteq \bigcup_{j,k=1}^{\infty} I_j^k$ e então

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu((a_i, b_i)) = \sum_{j,k=1}^{\infty} \mu(I_j^k) \geq \mu(E)$$

Portanto, $\mu(E) \leq \nu(E)$. Agora fixe $\epsilon > 0$ qualquer. Temos que existe $\{(a_i, b_i)\}_1^\infty$ onde $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i]$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \mu((a_i, b_i]) \leq \mu(E) + \epsilon$, e como F é contínua à direita, para cada $i = 1, 2, \dots$, existe $\delta_i > 0$ tal que $F(b_i + \delta_i) - F(b_i) < \epsilon 2^{-i}$. Mas então $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i + \delta_i)$ e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu((a_i, b_i + \delta_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu((a_i, b_i]) + \epsilon \leq \mu(E) + \epsilon$$

Como a escolha de ϵ foi arbitrária, nós obtemos que $\nu(E) \leq \mu(E)$ □

Teorema 3.2. Se $E \in \mathcal{M}_\mu$, então

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf \{ \mu(U) : U \supseteq E \text{ e } U \text{ é aberto} \} \\ &= \sup \{ \mu(K) : K \subseteq E \text{ e } K \text{ é compacto} \} \end{aligned}$$

Demonstração. Seja U aberto tal que $E \subseteq U$, então $\mu(E) \leq \mu(U)$ pois μ é monotona. Agora dado $\epsilon > 0$ qualquer, pelo lema 3.1 sabemos que existe uma cobertura $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j)$ tal que

$E \subseteq U$ e $\mu(U) \leq \mu(E) + \epsilon$, e como a união enumerável de abertos é aberta, então U é aberto. E com isso nós concluímos a primeira igualdade.

Quanto a segunda igualdade, como $K \subseteq E$ e como $K \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, então pela monótonicidade de μ , $\mu(K) \leq \mu(E)$. Para a desigualdade reversa, dividiremos em casos. Se E for limitado e fechado, então E é compacto e a igualdade é válida. Se E for aberto, então E^c é fechado e \bar{E} é compacto, logo $\bar{E} \cap E^c$ é compacto. Pela primeira igualdade nós sabemos que, para todo $\epsilon > 0$, existe um aberto $U \supset \bar{E} \setminus E$ tal que

$$\mu(U) \leq \mu(\bar{E} \setminus E) + \epsilon \quad (3.1)$$

Tome $K = \bar{E} \setminus U$, daí

$$K = \bar{E} \setminus U = \bar{E} \cap U^c \subseteq \bar{E} \cap (\bar{E} \cup E) = \emptyset \cup (\bar{E} \cap E) = \emptyset \cup E = E$$

Então $K \subseteq E$. Além disso, como $E = K \cup (E \setminus K)$, onde $K \cap (E \setminus K) = \emptyset$ então

$$\mu(K) = \mu(E) - \mu(E \setminus K) \quad (3.2)$$

Agora note que

$$E \setminus K = E \setminus (\bar{E} \setminus U) = E \cap (\bar{E} \setminus U)^c = E \cap (\bar{E} \cap U^c)^c = E \cap (\bar{E}^c \cup U) = (E \cap \bar{E}^c) \cup (E \cap U) = E \cup U \quad (3.3)$$

Substituindo (3.3) em (3.2) nós obtemos

$$\mu(K) = \mu(E) - \mu(E \cap U) \quad (3.4)$$

Mas como $U = (E \cap U) \cup (U \cap E^c)$, então $\mu(E \cap U) = \mu(U) - \mu(U \setminus E)$, substituindo isso em (3.4) nós obtemos

$$\mu(K) = \mu(E) - [\mu(U) - \mu(U \setminus E)] \quad (3.5)$$

Lembremos agora que a nossa escolha de U foi tal que $U \supset \bar{E} \setminus E$, então $U \setminus E \supset (\bar{E} \setminus E)$ e pela monotonicidade de μ juntamente com a igualdade (3.5) nós teremos

$$\begin{aligned} \mu(K) &= \mu(E) - \mu(U) + \mu(U \setminus E) \\ &\geq \mu(E) - \mu(U) + \mu(\bar{E} \setminus E) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Agora, pela desigualdade (3.1) nós temos que $\mu(\bar{E} \setminus E) - \mu(U) \geq -\epsilon$ e pela desigualdade (3.6),

nós teremos

$$\begin{aligned}\mu(K) &\geq \mu(E) - \mu(U) + \mu(\bar{E} \setminus E) \\ &\geq \mu(E) - \epsilon\end{aligned}\tag{3.7}$$

E nós obtemos a igualdade caso E for aberto e limitado.

Nos resta o caso onde E não é limitado. Nesse caso, seja $E_j = E \cap (j, j+1]$, como visto acima, sabemos que para qualquer $\epsilon > 0$ existe um compacto $K_j \subset E_j$ tal que $\mu(K_j) \geq \mu(E_j) - \epsilon 2^{-j}$. Seja $H_n = \bigcup_{j=-n}^n K_j$, então H_n é compacto e $H_n \subset E$, pois então $\mu(H_n) \geq \mu(\bigcup_{j=-n}^n E_j) - \epsilon$ e conforme $n \rightarrow \infty$, nós obtemos a desigualdade que desejavamos, concluindo, por final, que a segunda desigualdade é verdadeira. \square

Definição 3.4. A **medida de Lebesgue** é a medida de Lebesgue-Stieltjes associada a função $F(x) = x$. A partir desse momento, nos referiremos como medida a medida de Lebesgue e a denotaremos tal medida por m .

Exemplo 3.1. A medida dos números racionais é zero.

Demonstração. Como o conjunto dos racionais é enumerável, então para cada racional r_j , dado $\epsilon > 0$ qualquer, nós temos que $r_j \in (r_j, r_j + \epsilon 2^{-j})$ e que $\mathbb{Q} \subset \left\{ \bigcup_{j=1}^{\infty} (r_j, r_j + \epsilon 2^{-j}) : \forall r_j \in \mathbb{Q} \right\}$.

Portanto, para todo $r_j \in \mathbb{Q}$ nós temos $0 \leq m(\mathbb{Q}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(r_j, r_j + \epsilon 2^{-j}) = \sum_{j=1}^{\infty} (r_j + \epsilon 2^{-j} - r_j) = \epsilon$.

Como a escolha de ϵ foi arbitrária, então $m(\mathbb{Q}) = 0$. \square

Exemplo 3.2. A medida do conjunto de cantor é zero.

Demonstração. Seja C o conjunto de cantor, C é construído a partir do intervalo $[0, 1]$, removendo o segundo terço aberto do intervalo, e fazendo o mesmo para cada um dos intervalos subsequentes. Note que o conjunto C' dos intervalos removidos é enumerável, então

$$m(C) = m([0, 1]) - m(C') = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{3^{j+1}} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - (2/3)} = 0.$$

\square