Oblig 1

Teoretisk bakgrunn

Et komplekst tall består av en realdel og en imaginær del. Det kan skrives på kartesisk form slik:

$$z = a + bi$$

hvor $i = \sqrt{-1}$,
eller på polar form:

$$z = re^{i\theta}$$

hvor r er den absolutte lengden til vektoren som representerer z i det komplekse planet, og θ er vinkelen til vektoren i forhold til x-aksen.

Formelen for å oversette mellom kartesisk og polar form er gitt ved:

$$z = a + bi$$

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{i \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Dette kan vises geometrisk.

Når et komplekst tall opphøyes i annen potens, kvadreres den absolutte lengden av vektoren som representerer tallet i det komplekse planet, mens vinkelen dobles:

$$z = re^{i\theta}$$

$$z^2 = r^2 e^{i \cdot 2\theta}$$

Oppgaven

$$z^n = a$$

For å løse denne ligningen tar vi n-te roten på begge sider:

$$z = a^{\frac{1}{n}}$$

Dette gir oss en gyldig løsning som vi kan kalle for z_0. Vi sier at $a = re^{i\theta}$ og får:

$$z_0 = \left(re^{i\theta}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Som kan skrives som:

$$z_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$$

Kvadratroten av et komplekst tall z har to løsninger, hvor:

$$z_{1,\theta} = z_{0,\theta} + \pi$$

Dette er fordi z^2 har vinkelen 2θ. Altså vil det ekstra leddet π bli til 2π, som tilsvarer en full runde i det komplekse planet. Altså er z_0^2 og z_1^2 like hvis vinkelen er π forskjellig og den absolutte lengden er lik.

Den samme logikken gjelder for kubikkrøtter, osv.
Man kan legge $\frac{2\pi k}{n}$ til vinkelen for $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, hvor n er den naturlige roten, og fortsatt få samme svar.
Vi legger dette til i utregningen vår:

$$z = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

eller mer kompakt:

$$z = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Vi regner med oversettelsen fra det komplekse tallet vi får inn på kartesisk form:

$$a = x + yi$$

$$z = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2n}} e^{i\frac{\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Dette vil gi oss alle løsninger for ligningen.
Når vi skal plotte svaret, behøver vi å oversette tilbake til kartesisk form. Dette gjøres ved formelen:

$$z = re^{i\theta}$$

$$z_x = r\cos(\theta)$$

$$z_y = r\sin(\theta)$$

In [1]:

```
import numpy as np # Importer biblioteker
import matplotlib.pyplot as plt

x = float(input("Real part: ")) # Ta inn a på kartesisk form
y = float(input("Imaginary part: "))

n = int(input("Natural number: ")) # Ta inn det natulige tallet n

r = np.power(x**2+y**2, 1/(2*n)) # Regm ut den absolutte lengden til alle lø

theta = np.atan(y/x)

sols_x = [] # Arrays for å lage koordinatene til løsningene
sols_y = []
```

```python
for k in range(0, n): # Loop gjennom løsninger fra k=0 til k=n-1
  ang = (theta+2*np.pi*k)/n # Løsningen på polarform
  sols_x.append(r*np.cos(ang)) # Omregnes til kartesisk form
  sols_y.append(r*np.sin(ang))

plt.scatter(sols_x, sols_y, color='blue')

plt.axhline(0, color='black', linewidth=1)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=1)

plt.xlabel("X-axis")
plt.ylabel("Y-axis")

plt.show()
```