



TRANSFORMASI Z

Konsep Umum

Transformasi Z adalah metode yang digunakan dalam analisis sinyal dan sistem untuk menganalisis dan memproses sinyal diskrit dalam domain frekuensi. Z adalah bentuk khusus dari transformasi Fourier diskrit yang diterapkan pada sinyal diskrit.

Transformasi Z didefinisikan sebagai transformasi dari rangkaian diskrit $x[n]$ ke domain Z dengan menggunakan persamaan:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

di mana $x[n]$ adalah sinyal input, n adalah indeks waktu diskrit, z adalah variabel kompleks ($Z = re^{j\omega}$) yang menyatakan frekuensi kompleks dalam domain Z, dan $X(z)$ adalah transformasi Z dari sinyal $x[n]$.

Transformasi Z memungkinkan pemodelan matematis dan analisis sistem diskrit secara efisien dalam domain frekuensi. Z dapat digunakan untuk menemukan **respons frekuensi sistem, menggabungkan sistem, memperoleh persamaan perbedaan, dan menganalisis stabilitas sistem**. Transformasi Z juga digunakan dalam perancangan filter digital, analisis dan sintesis sinyal, serta pemrosesan gambar digital.

Dalam praktiknya, transformasi Z dapat diimplementasikan dengan menggunakan tabel transformasi Z atau melalui perhitungan aljabar untuk mendapatkan fungsi transfer sistem dalam domain Z.

Tabel transformasi Z dari sinyal diskrit umum:

Sinyal Diskrit ($x[n]$)	Transformasi Z ($X(z)$)
delta impuls ($\delta[n]$)	1
konstanta (c)	$c/(1 - z^{-1})$
mundur satu sampel ($x[n-1]$)	$z^{-1} * X(z)$
maju satu sampel ($x[n+1]$)	$z * X(z) - z * x[0]$
skalar ($c * x[n]$)	$c * X(z)$
konstanta terpindah ($c * z^{-n}$)	$c * X(z)$
diferensiasi waktu ($\Delta x[n]$)	$(1 - z^{-1}) * X(z)$
diferensiasi kedua waktu ($\Delta^2 x[n]$)	$(1 - z^{-1})^2 * X(z)$
konvolusi ($y[n] = x[n] * h[n]$)	$X(z) * H(z)$

Contoh Soal

1. Diberikan sinyal diskrit $x[n] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hitunglah transformasi Z dari sinyal diskrit tersebut.

Penyelesaian:

Untuk menghitung transformasi Z dari sinyal diskrit $x[n]$, kita dapat menggunakan rumus transformasi Z:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Menggantikan nilai-nilai sinyal diskrit $x[n]$ ke dalam rumus, kita dapatkan:

$$X(z) = 1 * z^{(0)} + 2 * z^{(-1)} + 3 * z^{(-2)} + 4 * z^{(-3)} + 5 * z^{(-4)}$$

Jadi, transformasi Z dari sinyal diskrit $x[n]$ adalah:

$$X(z) = 1 + 2/z^1 + 3/z^2 + 4/z^3 + 5/z^4$$

2. Diberikan sinyal diskrit $x[n] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan fungsi transfer $H(z) = (1 + z^{-1})/(1 - 0.5 * z^{-1})$. Hitunglah transformasi Z dari sinyal diskrit tersebut.

Penyelesaian:

Untuk menghitung transformasi Z dari sinyal diskrit $x[n]$, kita dapat menggunakan rumus transformasi Z:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Menggantikan nilai-nilai sinyal diskrit $x[n]$ ke dalam rumus, kita dapatkan:

$$X(z) = 1 * z^{(0)} + 2 * z^{(-1)} + 3 * z^{(-2)} + 4 * z^{(-3)} + 5 * z^{(-4)}$$

Berikutnya, kita perlu menghitung transformasi Z dari fungsi transfer $H(z)$. Kita sudah diberikan $H(z) = (1 + z^{-1})/(1 - 0.5 * z^{-1})$. Kita perlu menyusunnya dalam bentuk persamaan perbedaan atau memecahnya menjadi pecahan parsial untuk menerapkan transformasi Z.

$$H(z) = (1 + z^{(-1)})/(1 - 0.5 * z^{(-1)}) = (z + 1)/(z - 0.5)$$

Menerapkan transformasi Z pada fungsi transfer $H(z)$, kita dapatkan:

$$H(z) * X(z) = Y(z) \text{ (dalam domain Z)}$$

Menggantikan $X(z)$ dan $H(z)$ ke dalam persamaan, kita peroleh:

$$((z + 1)/(z - 0.5)) * (1 * z^{(0)} + 2 * z^{(-1)} + 3 * z^{(-2)} + 4 * z^{(-3)} + 5 * z^{(-4)}) = Y(z)$$

Selanjutnya, kita dapat menyederhanakan persamaan ini dengan mengalikan dan menjumlahkan suku-suku yang serupa dalam domain Z.

Hasil akhir adalah fungsi transfer $Y(z)$ dalam domain Z, yang mewakili transformasi Z dari sinyal diskrit $x[n]$ melalui sistem dengan fungsi transfer $H(z)$.

Invers transformasi-Z

Invers transformasi Z adalah proses untuk mengembalikan sinyal atau fungsi dalam domain waktu diskrit dari representasinya dalam domain transformasi Z. Invers transformasi Z berguna dalam mengubah sinyal atau fungsi yang diubah oleh transformasi Z kembali ke domain waktu diskrit aslinya.

Ada beberapa metode yang digunakan untuk melakukan invers transformasi Z, tergantung pada bentuk transformasi Z yang diberikan. Beberapa metode umum yang digunakan adalah sebagai berikut:

- **Metode Inspeksi Grafik**
Jika transformasi Z dari sinyal diskrit diberikan dalam bentuk pecahan parsial, maka invers transformasi Z dapat dilakukan dengan mengidentifikasi bentuk umum dalam pecahan parsial dan menerapkan tabel transformasi Z yang tersedia untuk mengembalikan sinyal dalam domain waktu diskrit. Metode ini melibatkan pemahaman yang baik tentang tabel transformasi Z dan kemampuan untuk mengenali pola-pola umum.
- **Metode Parsial**
Metode ini melibatkan membagi fungsi transformasi Z menjadi pecahan parsial menggunakan teknik pemisahan aljabar. Setelah itu, invers transformasi Z dari setiap pecahan parsial dihitung menggunakan tabel transformasi Z dan kemudian fungsi invers dihasilkan dengan menjumlahkan kontribusi invers dari masing-masing pecahan parsial.
- **Metode Penyederhanaan Deret Daya**
Jika fungsi transformasi Z diberikan dalam bentuk deret daya, invers transformasi Z dapat dilakukan dengan menggunakan teknik pemecahan deret daya. Metode ini melibatkan ekspansi deret daya dengan menggunakan manipulasi aljabar, pengenalan pola, dan mengidentifikasi koefisien yang sesuai dalam tabel transformasi Z untuk menghitung invers transformasi Z.

Sifat- sifat Transformasi Z

Berikut adalah beberapa sifat penting dari transformasi Z:

1. **Linearitas**
Transformasi Z adalah linear, yang berarti ia memenuhi sifat superposisi. Jika $x_1[n]$ dan $x_2[n]$ adalah dua sinyal diskrit dengan transformasi Z masing-masing $X_1(z)$ dan $X_2(z)$, maka untuk konstanta a dan b , transformasi Z dari kombinasi linear $a * x_1[n] + b * x_2[n]$ adalah $a * X_1(z) + b * X_2(z)$.
2. **Translasi dalam waktu**

Translasi dalam waktu sinyal diskrit, yaitu mundur atau maju dalam urutan sampelannya, dapat diterapkan dalam domain transformasi Z dengan menggunakan faktor z^{-n} . Jika $X(z)$ adalah transformasi Z dari $x[n]$, maka $z^{-k} * X(z)$ adalah transformasi Z dari $x[n-k]$ (mundur k sampel) dan $z^k * X(z)$ adalah transformasi Z dari $x[n+k]$ (maju k sampel).

3. Skalabilitas

Transformasi Z adalah skalabel terhadap konstanta. Jika $X(z)$ adalah transformasi Z dari $x[n]$, maka $c * X(z)$ adalah transformasi Z dari $c * x[n]$, di mana c adalah konstanta.

4. Diferensiasi dalam waktu

Diferensiasi sinyal diskrit dalam waktu dapat diterapkan dalam domain transformasi Z dengan menggunakan faktor $(1 - z^{-1})$. Jika $X(z)$ adalah transformasi Z dari $x[n]$, maka $(1 - z^{-1}) * X(z)$ adalah transformasi Z dari perbedaan $\Delta x[n] = x[n] - x[n-1]$.

5. Konvolusi

Transformasi Z memudahkan operasi konvolusi dalam domain frekuensi. Jika $X(z)$ dan $H(z)$ adalah transformasi Z dari dua sinyal diskrit $x[n]$ dan $h[n]$ masing-masing, maka transformasi Z dari hasil konvolusi $y[n] = x[n] * h[n]$ adalah $Y(z) = X(z) * H(z)$.

6. Mulai dan Akhir yang Terbatas

Transformasi Z dari sinyal diskrit dengan rentang terbatas dalam domain waktu diskrit akan memiliki daerah konvergensi yang terbatas dalam domain Z. Sebaliknya, sinyal dengan karakteristik yang tidak terbatas atau mulai terbatas akan menghasilkan daerah konvergensi yang tidak terbatas atau non-kausal dalam domain Z.

Contoh Soal

1. Diberikan sinyal diskrit $x[n] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hitunglah transformasi Z dari sinyal diskrit tersebut.

Penyelesaian:

Untuk menghitung transformasi Z dari sinyal diskrit $x[n]$, kita dapat menggunakan rumus transformasi Z. Menggantikan nilai-nilai sinyal diskrit $x[n]$ ke dalam rumus, kita dapatkan:

$$X(z) = 1 * z^0 + 2 * z^{(-1)} + 3 * z^{(-2)} + 4 * z^{(-3)} + 5 * z^{(-4)}$$

Jadi, transformasi Z dari sinyal diskrit $x[n]$ adalah:

$$X(z) = 1 * z^0 + 2 * z^{(-1)} + 3 * z^{(-2)} + 4 * z^{(-3)} + 5 * z^{(-4)}$$

- 2. Diberikan sinyal diskrit $x[n] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan fungsi transfer $H(z) = (1 + z^{(-1)})/(1 - 0.5 * z^{(-1)})$. Hitunglah transformasi Z dari sinyal diskrit tersebut.**

Penyelesaian:

Untuk menghitung transformasi Z dari sinyal diskrit $x[n]$, kita dapat menggunakan rumus transformasi Z. Menggantikan nilai-nilai sinyal diskrit $x[n]$ ke dalam rumus, kita dapatkan:

$$X(z) = 1 * z^0 + 2 * z^{(-1)} + 3 * z^{(-2)} + 4 * z^{(-3)} + 5 * z^{(-4)}$$

Selanjutnya, kita perlu menghitung transformasi Z dari fungsi transfer $H(z)$. Kita sudah diberikan $H(z) = (1 + z^{(-1)})/(1 - 0.5 * z^{(-1)})$. Susun dalam bentuk persamaan perbedaan atau memecahnya menjadi pecahan parsial untuk menerapkan transformasi Z.

$$H(z) = (1 + z^{(-1)})/(1 - 0.5 * z^{(-1)}) = (z + 1)/(z - 0.5)$$

Menerapkan transformasi Z pada fungsi transfer $H(z)$, kita dapatkan:

$$H(z) * X(z) = Y(z) \text{ (dalam domain Z)}$$

Menggantikan $X(z)$ dan $H(z)$ ke dalam persamaan, kita peroleh:

$$\begin{aligned} ((z + 1)/(z - 0.5)) * (1 * z^0 + 2 * z^{(-1)} + 3 * z^{(-2)} + 4 * z^{(-3)} + 5 * z^{(-4)}) \\ = Y(z) \end{aligned}$$

Selanjutnya, kita dapat menyederhanakan persamaan ini dengan mengalikan dan menjumlahkan suku-suku yang serupa dalam domain Z.

Hasil akhir adalah fungsi transfer $Y(z)$ dalam domain Z, yang mewakili transformasi Z dari sinyal diskrit $x[n]$ melalui sistem dengan fungsi transfer $H(z)$.

- 3. Diberikan sinyal diskrit $x[n] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan sistem dengan respons impuls $h[n] = \{1, 1, 1, 1\}$. Hitunglah respons sistem dalam domain transformasi Z, yaitu $Y(z)$, jika input sinyal diskritnya adalah $x[n]$.**

Penyelesaian:

Untuk menghitung respons sistem dalam domain transformasi Z, kita perlu mengalikan transformasi Z dari sinyal input $x[n]$ dengan transformasi Z dari respons impuls $h[n]$.

Langkah 1:

Menghitung transformasi Z dari sinyal input $x[n]$

Menggantikan nilai-nilai sinyal diskrit $x[n]$ ke dalam rumus, kita dapatkan:

$$X(z) = 1 * z^0 + 2 * z^{(-1)} + 3 * z^{(-2)} + 4 * z^{(-3)} + 5 * z^{(-4)}$$

Jadi, transformasi Z dari sinyal input $x[n]$ adalah:

$$X(z) = 1 + 2/z + 3/z^2 + 4/z^3 + 5/z^4$$

Langkah 2:

Menghitung transformasi Z dari respons impuls $h[n]$

$$H(z) = Z\{h[n]\} = \sum h[n] * z^{(-n)}$$

Menggantikan nilai-nilai respons impuls $h[n]$ ke dalam rumus, kita dapatkan:

$$H(z) = 1 * z^0 + 1 * z^{(-1)} + 1 * z^{(-2)} + 1 * z^{(-3)}$$

Jadi, transformasi Z dari respons impuls $h[n]$ adalah:

$$H(z) = 1 + z^{(-1)} + z^{(-2)} + z^{(-3)}$$

Langkah 3:

Mengalikan transformasi Z dari sinyal input dengan transformasi Z dari respons impuls $Y(z) = X(z) * H(z)$

Mengalikan persamaan $X(z)$ dengan $H(z)$, kita dapatkan:

$$Y(z) = (1 + 2/z + 3/z^2 + 4/z^3 + 5/z^4) * (1 + z^{(-1)} + z^{(-2)} + z^{(-3)})$$

Melakukan perkalian dan penggabungan, kita dapat menyederhanakan ekspresi $Y(z)$:

$$Y(z) = 1 + (1 + 2)z^{(-1)} + (1 + 2 + 3)z^{(-2)} + (1 + 2 + 3 + 4)z^{(-3)} + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)z^{(-4)} + 4z^{(-5)} + 3z^{(-6)} + 2z^{(-7)} + z^{(-8)}$$

Jadi, respons sistem dalam domain transformasi Z, $Y(z)$, adalah:

$$Y(z) = 1 + 3z^{(-1)} + 6z^{(-2)} + 10z^{(-3)} + 15z^{(-4)} + 4z^{(-5)} + 3z^{(-6)} + 2z^{(-7)} + z^{(-8)}$$

Implementasi dengan Matlab

Contoh 1: Implementasi Z pada FIR

Langkah 1:

Misalkan kita ingin merancang filter FIR (Finite Impulse Response) dengan respons frekuensi tertentu. Pertama-tama, kita menentukan koefisien filter sesuai dengan spesifikasi yang diinginkan. Misalnya, kita ingin merancang filter FIR dengan koefisien {0.5, 0.3, 0.2, 0.1}.

Langkah 2:

Menggunakan fungsi `tf2z()` untuk mendapatkan transfer function $H(z)$. Dalam MATLAB, kita dapat menggunakan fungsi `tf2z()` untuk mengubah koefisien filter menjadi transfer function $H(z)$ dalam domain transformasi Z.

```
b = [0.5, 0.3, 0.2, 0.1]; % Koefisien filter
a = 1; % Koefisien denominasi, dlm kasus FIR bernilai 1
[H, ~] = tf2z(b, a); % Mendapatkan transfer function H(z)
```

Dalam kasus ini, variabel `H` akan berisi koefisien-koefisien transfer function $H(z)$ dalam domain transformasi Z.

Langkah 3:

Menampilkan diagram pole-zero. Kita dapat menggunakan fungsi `zplane()` untuk menampilkan diagram pole-zero dari transfer function $H(z)$.

```
zplane(H); % Menampilkan diagram pole-zero
```

Fungsi `zplane()` akan menampilkan diagram pole-zero yang memvisualisasikan posisi dan sifat-sifat pole (titik merah) dan zero (titik biru) dari transfer function $H(z)$.

Langkah 4:

Merespons filter terhadap sinyal input. Selanjutnya, kita dapat menguji respons filter terhadap sinyal input menggunakan fungsi `filter()`.

```
x = [1, 2, 3, 4, 5]; % Sinyal input
y = filter(b, a, x); % Merespons filter thd sinyal input
```

Variabel `y` akan berisi sinyal output yang dihasilkan setelah filter merespons sinyal input.

Langkah 5:

Menampilkan hasil respons dalam domain waktu diskrit. Untuk memvisualisasikan hasil respons dalam domain waktu diskrit, kita dapat menggunakan fungsi `stem()`.

```
stem(y); % Menampilkan hasil respons dlm domain waktu diskrit
```

Fungsi `stem()` akan menampilkan plot titik-titik diskrit yang mewakili sinyal output dalam domain waktu diskrit.

Contoh 2 : Menghitung Invers Transformasi Z

Langkah 1:

Menentukan fungsi transfer dalam domain transformasi Z Misalkan kita memiliki fungsi transfer dalam domain transformasi Z: $H(z) = (z^2 + 2z + 1)/(z^2 - 0.5z - 0.25)$

Langkah 2:

Menggunakan fungsi `iztrans()` untuk mendapatkan invers transformasi Z Dalam MATLAB, kita dapat menggunakan fungsi `iztrans()` untuk menghitung invers transformasi Z dari fungsi transfer $H(z)$.

```
syms z; % Mendefinisikan variabel simbolik z
H = (z^2 + 2*z + 1) / (z^2 - 0.5*z - 0.25); % Fungsi
transfer dalam domain Z
h = iztrans(H); % Menghitung invers transformasi Z
```

Setelah menjalankan kode di atas, variabel `h` akan berisi hasil invers transformasi Z.

Langkah 3:

Menampilkan hasil invers transformasi dalam domain waktu diskrit Untuk memvisualisasikan hasil invers transformasi dalam domain waktu diskrit, kita dapat menggunakan fungsi `ezplot()`.

```
ezplot(h); % Menampilkan hasil invers transformasi dalam
domain waktu diskrit
```

Fungsi `ezplot()` akan menampilkan plot fungsi dalam domain waktu diskrit.

Dalam contoh ini, variabel `h` akan berisi fungsi invers transformasi Z dari fungsi transfer $H(z)$. Fungsi tersebut kemudian dapat divisualisasikan dalam domain waktu diskrit menggunakan `ezplot()`.

Penggunaan invers transformasi Z pada MATLAB dapat melibatkan pemrosesan simbolik menggunakan fungsi simbolik seperti `syms` dan `iztrans`. Namun, implementasi sebenarnya dari invers transformasi Z mungkin lebih kompleks tergantung pada fungsi transfer yang diberikan dan tujuan aplikasi yang diinginkan.