Transformasi Z

Sekilas Sejarah Transformasi z

- A method for solving linear, constant-coefficient difference equations by Laplace transforms was introduced to graduate engineering students by Gardner and Barnes in the early 1940s.
- They applied their procedure, which was based on jump functions, to ladder networks, transmission lines, and applications involving Bessel functions.

Sekilas Sejarah Transformasi z

- This approach is quite complicated and in a separate attempt to simplify matters, a transform of a sampled signal or sequence was defined in 1947 by **W. Hurewicz** as:

$$Z[f(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}$$

which was later denoted in 1952 as a "z transform" by a sampled-data control group at Columbia University

Pengertian

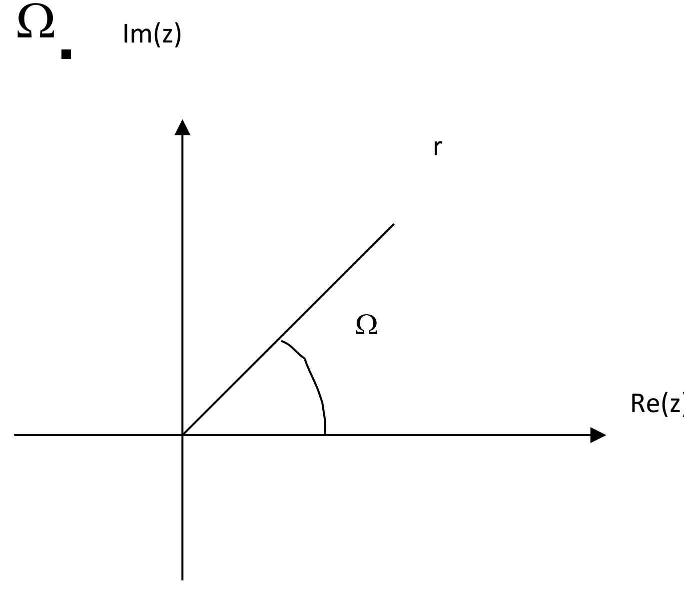
- Adalah suatu transformasi yang mengubah sinyal waktu diskrit ke dalam bentuk kompleks dalam domain frekuensi
- Berguna untuk menyelesaikan persamaan beda (*difference equation*). Hal ini serupa dengan kegunaan transformasi Laplace, tetapi berlaku untuk sinyal dan sistem waktu diskrit.

Pengertian (lanjutan)

- Transformasi-z dari suatu sinyal x(n) didefinisikan sebagai:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

di mana z adalah suatu variabel bilangan komplek, yaitu $z = re^{j\Omega}$.



Region Of Convergence

- Transformasi-z adalah suatu deret tak hingga, sehingga mungkin divergen untuk beberapa nilai z.
- Transformasi-z hanya didefinisikan untuk suatu daerah yang hasil transformasinya adalah terhingga, diberi nama *Region of Convergence*.
- *Region Of Convergence* (ROC) dari transformasi-z berbentuk :

$$R_1 < |z| < R_2, \text{ dimana } |z| = r.$$

dengan batas R_1 dan R_2 adalah tergantung pada sinyal yang ditransformasikan.

Contoh 1

- Cari Transformasi-Z dari sinyal-sinyal berikut:

  a). $x_1(n) = \{1, 2, 3, 5, 7, 0, 1\}$

  b). $x_2(n) = \{0, 0, 1, 2, 5, 0, 1\}$

- Jawab

  a). $X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 5z^{-3} + 7z^{-4} + z^{-6}$; **ROC**: $\mathbf{z \neq 0}$

  b). $X_2(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + z^{-6}$; **ROC**: $\mathbf{z \neq 0}$

Contoh 1(lanjutan)

- Cari Transformasi-Z dari sinyal:

  $x_3(n) = u(n) = \{1, 1, 1, 1, \ldots\}$

- Jawab

  $X_3(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \ldots$

  jika $z^{-1} = A$, maka :

  $X_3(z) = 1 + A + A^2 + A^3 + \ldots$

  kedua ruas dari persamaan di atas dikalikan dengan (1 – A), dihasilkan:

  $X_3(z) = \dfrac{1}{1 - A}$

Sifat-sifat Transformasi Z

- Linier
- Penggeseran Waktu
- Perkalian dengan Waktu
- Pembalikan Waktu
- Perkalian dengan a^n
- Teorema Nilai Awal
- Teorema Nilai Akhir

Linier

- $Z[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$
- **Contoh**:

  Cari transformasi z dari $x(n) = u(n) + 0{,}9^n u(n)$
- **Jawab**:

  Transformasi z dari $u(n) = z/(z - 1)$

  Transformasi z dari $0{,}9^n u(n) = z/(z - 0{,}9)$

  maka transformasi z dari $u(n) + 0{,}9^n u(n)$:

$$= \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-0{,}9} = \frac{z\left(z-0{,}9\right)+z(z-1)}{(z-1)(z-0{,}9)} = \frac{2z^2 - 1{,}9z}{(z-1)(z-0{,}9)}$$

Penggeseran Waktu

- $Z[x(n-1)] = z^{-1}X(z) + x(-1)$
- $Z[x(n-2)] = z^{-2}X(z) + x(-2) + z^{-1}x(-1)$
- $Z[x(n-k)] = z^{-k}X(z) + x(-k) + z^{-1}x(-k+1) + \ldots$

  $+ z^{-k+1}x(-1)$
-
- $Z[x(n+1)] = z\,X(z) - z\,x(0)$
- $Z[x(n+2)] = z^{2}\,X(z) - z^{2}\,x(0) - z\,x(1)$
- $Z[x(n+k)] = z^{k}\,X(z) - z^{k}\,x(0) - z^{k-1}\,x(1) - \ldots$

  $- z\,x(k-1)$

Penggeseran Waktu (lanjutan)

- **Contoh**

  Cari transformasi z dari x(n) = u(n + 2)

- **Jawab:**

  Z[u(n+2)] = z^2 X(z) – z^2 x(0) – z x(1)

$$= z^2 \frac{z}{z-1} - z^2 - z = z^2 \frac{z}{z-1} - z^2 \frac{z-1}{z-1} - z\frac{z-1}{z-1}$$

$$= \frac{z^3 - z^3 + z^2 - z^2 + z}{z-1} = \frac{z}{z-1}$$

Perkalian dengan Waktu

- Z[n x(n)] = $-z\dfrac{d}{dz}[X(z)]$
- **Contoh :**

  Tentukan transformasi z dari x(n) = n.u(n)
- **Jawab :**

  Z[n.u(n)] = $-z\dfrac{d}{dz}[X(z)]$ = $-z\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{z}{z-1}\right] = -z\left[\dfrac{(z-1)1 - z(1)}{(z-1)^2}\right]$

  = $-z\left[\dfrac{-1}{(z-1)^2}\right] = \dfrac{z}{(z-1)^2}$

Pembalikan Waktu

- $Z[x(-n)] = X(1/z)$

- **Contoh** :

  Cari transformasi z dari $x(n) = u(-n)$

- **Jawab:**

  $$Z[u(-n)] = \frac{z^{-1}}{z^{-1} - 1} = \frac{1}{1 - z}$$

Perkalian dengan a^n

- $Z[a^n\, x(n)] = X(z/a)$
- **Contoh :**

  Tentukan transformasi z dari $x(n) = 0{,}8^n\, u(n)$
- **Jawab :**

  $Z[0{,}8^n\, u(n)] = X(z/0{,}8) =$ $\dfrac{z/0{,}8}{z/0{,}8-1} = \dfrac{z}{z-0{,}8}$

Teorema Nilai Awal

- Jika Z[x(n)] = X(z), maka x(0) = $\lim_{z\to\infty} X(z)$
- **Contoh :**

  Tentukan nilai awal x(0) jika $X(z) = \dfrac{z}{z-0,9}$
- **Jawab :**

  x(0) = $\lim_{z\to\infty} X(z)$

  $\lim_{z\to\infty} \dfrac{z}{z-0,9}$

  =

  = 1

Teorema Nilai Akhir

- Jika Z[x(n)] = X(z), maka

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

- **Contoh :**

  Tentukan nilai akhir x(∞) jika

$$X(z) = \frac{z}{z-0,9}$$

- **Jawab :**

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

$$= \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{z-0,9}$$

$$= 0$$

Tabel Pasangan Transformasi Z

No	Sinyal diskrit x(n)	Transformasi-z X(z)	ROC
1	$\delta(n)$	1	Seluruh z
2	$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}} = \dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z \rvert > 1$
3	$a^{n} u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}} = \dfrac{z}{z-a}$	$\lvert z \rvert > \lvert a \rvert$
4	$n\, a^{n} u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2} = \dfrac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z \rvert > \lvert a \rvert$
5	$-a^{n} u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}} = \dfrac{z}{z-a}$	$\lvert z \rvert < \lvert a \rvert$
6	$-n\, a^{n} u(-n-1)$	$\dfrac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2} = \dfrac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z \rvert < \lvert a \rvert$

No	Sinyal diskrit	Transformasi-z	ROC
7	$(\cos \Omega_0 n)\, u(n)$	$\dfrac{1 - z^{-1}\cos\Omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\Omega_0 + z^{-2}} = \dfrac{z^2 - z\cos\Omega_0}{z^2 - 2z\cos\Omega_0 + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
8	$(\sin \Omega_0 n)\, u(n)$	$\dfrac{z^{-1}\sin\Omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\Omega_0 + z^{-2}} = \dfrac{z\sin\Omega_0}{z^2 - 2z\cos\Omega_0 + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
9	$(a^n \cos \Omega_0 n)\, u(n)$	$\dfrac{1 - az^{-1}\cos\Omega_0}{1 - 2az^{-1}\cos\Omega_0 + a^2 z^{-2}} = \dfrac{z^2 - az\cos\Omega_0}{z^2 - 2az\cos\Omega_0 + a^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
10	$(a^n \sin \Omega_0 n)\, u(n)$	$\dfrac{az^{-1}\sin\Omega_0}{1 - 2az^{-1}\cos\Omega_0 + a^2 z^{-2}} = \dfrac{az\sin\Omega_0}{z^2 - 2az\cos\Omega_0 + a^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

Transformasi Z Satu Sisi

- Tidak berisi informasi tentang sinyal x(n) untuk waktu negatif atau n < 0
- Bersifat unik hanya untuk sinyal kausal, karena sinyal-sinyal ini yang bernilai nol untuk n < 0
- Bila kita membahas transformasi z satu sisi, kita tidak perlu membahas ROC-nya.

$$X^{+}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$$

Invers Transformasi Z

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

- Menghitung langsung integral kontur
- Ekspansi dalam deret pangkat, dengan variabel z dan z^{-1}
- Ekspansi pecahan parsial dan melihat tabel pasangan transformasi

Ekspansi Pecahan Parsial

1. X(z) terdiri dari *pole-pole* riil dan tak berulang
2. X(z) terdiri dari *pole-pole* riil dan berulang
3. X(z) terdiri *pole-pole* pasangan komplek

Pole Riil dan Tak berulang

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n}; \quad \text{dengan } m \le n$$

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{(z - p_1)(z - p_2)\cdots(z - p_n)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{a_1}{z - p_1} + \frac{a_2}{z - p_2} + \cdots + \frac{a_n}{z - p_n}$$

$$a_i = \left[(z - p_i)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=p_i}$$

Contoh 2

- Tentukan invers transformasi z dari:

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1{,}5z^{-1} + 0{,}5z^{-2}}; \quad \text{jika ROC} : |z| > 1$$

- Jawab:

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1{,}5z + 0{,}5}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - 1{,}5z + 0{,}5} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{z - 0{,}5}$$

$$a_1 = \left[(z-1) \frac{z}{(z-1)(z-0{,}5)} \right]_{z=1} = \left[\frac{z}{(z-0{,}5)} \right]_{z=1}$$

Contoh 2 (lanjutan)

$$a_2 = \left[(z-0,5)\frac{z}{(z-1)(z-0,5)} \right]_{z=0,5} = \left[\frac{z}{(z-1)} \right]_{z=0,5} = \cdots$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z-0,5}$$

$$X(z) = 2\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0,5}$$

$x(n) = 2\,u(n) - (0,5)^n\,u(n)$

Pole Riil dan Berulang

- Jika X(z)/z memiliki *pole-pole* berulang pada p_1 dengan pangkat r, maka penyebut dapat ditulis sebagai:

  $(z + p_1)^r\,(z + p_{r+1})(z + p_{r+2})\ldots(z + p_n)$

- Ekspansi pecahan parsial dari X(z)/z ditulis sebagai:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_r}{(z+p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(z+p_1)^{r-1}} + \ldots + \frac{b_1}{(z+p_1)}$$

$$+ \frac{a_{r+1}}{z+p_{r+1}} + \frac{a_{r+2}}{z+p_{r+2}} + \ldots + \frac{a_n}{z+p_n}$$

Pole Riil dan Berulang (lanjutan)

- Nilai-nilai konstanta b_r, b_{r-1}, ..., b_1 dicari dengan rumus:

$$b_r = \left[\frac{X(z)}{z} (z + p_1)^r \right]_{z=-p_1}$$

$$b_{r-1} = \left\{ \frac{d}{dz} \left[\frac{X(z)}{z} (z + p_1)^r \right] \right\}_{z=-p_1}$$

$$b_{r-j} = \frac{1}{j!} \left\{ \frac{d^j}{dz^j} \left[\frac{X(z)}{z} (z + p_1)^r \right] \right\}_{z=-p_1}$$

$$b_1 = \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} \left[\frac{X(z)}{z} (z + p_1)^r \right] \right\}_{z=-p_1}$$

Contoh 3

- Tentukan invers transformasi-z dari:

$$X(z) = \frac{6z^3 + 2z^2 - z}{z^3 - z^2 - z + 1}$$

- Jawab:

  Pemfaktoran dari X(z)/z menghasilkan:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{6z^2 + 2z - 1}{z^3 - z^2 - z + 1} = \frac{6z^2 + 2z - 1}{(z-1)^2(z+1)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_2}{(z-1)^2} + \frac{b_1}{z-1} + \frac{a}{z+1}$$

Pole Pasangan Kompleks

- Jika p_1 dan p_2 adalah *pole-pole* pasangan bilangan komplek, dan *pole* lainnya adalah *pole* riil dan tak berulang, maka ekspansi berikut dapat dipakai:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{\alpha_1 z + \alpha_2}{(z+p_1)(z+p_2)} + \ldots + \frac{a_n}{z+p_n}$$

nilai-nilai dari α_1 dan α_2 ditemukan dengan rumus:

$$(\alpha_1 z + \alpha_2)(z+p_3)\ldots(z+p_n) + \ldots + a_n(z+p_1)(z+p_2) = B(z)$$

B(z) adalah bagian pembilang dari X(z)/z.

Contoh 4

- Tentukan invers transformasi z dari:

$$X(z) = \frac{z^2 + z}{z^3 - 2z^2 + 2z - 1} = \frac{z^2 + z}{(z-1)(z^2 - z + 1)}$$

- Jawab:

  Ekspansi pecahan parsial dari X(z)/z adalah:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{(z-1)(z^2 - z + 1)} = \frac{a}{z-1} + \frac{\alpha_1 z + \alpha_2}{(z^2 - z + 1)}$$

  nilai a dicari dengan:

$$a = \frac{X(z)}{z}(z-1)\Big|_{z=1} = \frac{z+1}{(z^2 - z + 1)}\Big|_{z=1} = 2$$

Contoh 4 (lanjutan)

$$\frac{z+1}{(z-1)(z^2-z+1)} = \frac{2}{z-1} + \frac{\alpha_1 z + \alpha_2}{(z^2-z+1)}$$

kemudian dicari nilai α_1 dan α_2 dengan menyamakan penyebut dari kedua ruas :

$2(z^2 – z + 1) + (z – 1)(\alpha_1 z + \alpha_2) = z + 1$

$2z^2 – 2z + 2 + (\alpha_1 z^2 – \alpha_1 z + \alpha_2 z – \alpha_2) = z + 1$

$(2 + \alpha_1)z^2 + (-2 – \alpha_1 + \alpha_2)z + (2 – \alpha_2)z^0 = z + 1$

Contoh 4 (lanjutan)

sehingga :

z^2 : $2 + \alpha_1 = 0$

z^1 : $-2 - \alpha_1 + \alpha_2 = 1$

z^0 : $2 - \alpha_2 = 1$

akhirnya didapatkan $\alpha_1 = -2$ dan $\alpha_2 = 1$, sehingga:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2}{z-1} + \frac{-2z+1}{\left(z^2 - z + 1\right)}; \qquad X(z) = 2\frac{z}{z-1} - 2\frac{z^2 - 0{,}5z}{\left(z^2 - z + 1\right)}$$

Contoh 4 (lanjutan)

$$2\frac{z^2 - 0{,}5z}{\left(z^2 - z + 1\right)}$$

$$\frac{z^2 - az\cos\Omega_0}{z^2 - 2az\cos\Omega_0 + a^2} \qquad Z[(a^n \cos \Omega_o n)\ u(n)]$$

maka a = 1, cos Ω_0 = 0,5, dan diperoleh $\Omega_0 = \pi/3$, sehingga didapat:

x(n) = 2.u(n) – 2 u(n) cos (π/3)n

Penyelesaian Persamaan Beda

Contoh 5

- Tentukan respon sistem berikut untuk input $x(n)$ adalah unit step:

  $$0{,}25\ y(n) = -\ y(n + 2) + y(n + 1) + x(n + 2)$$

  dengan $y(0) = 1$, $y(1) = 2$

Contoh 5 (lanjutan)

- Jawab:
- Dengan mengambil **tranformasi-z satu sisi**:

$0{,}25\, Y(z) = -[z^2 Y(z) - z^2 y(0) - zy(1)]$

$+ [zY(z) - zy(0)] + z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)$

- $= -z^2 Y(z) + z^2 + 2z + zY(z) - z + z^2 X(z) - z^2 - z$
- $Y(z)\, [0{,}25 - z + z^2] = z^2 X(z) = z^3 / (z - 1)$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2}{z-1}\left[\frac{1}{z^2 - z + 0{,}25}\right]$$

$$= \frac{z^2}{(z-1)(z-0{,}5)^2} = \frac{a}{(z-1)} + \frac{b_2}{(z-0{,}5)^2} + \frac{b_1}{(z-0{,}5)}$$