1 LA DERIVADA

Dos problemas muy antiguos generaron el estudio del concepto de “derivada”:

1. El problema de hallar la pendiente de la recta tangente (es un problema geométrico iniciado por Arquímedes).

2. El problema de hallar la velocidad instantánea (es un problema de Mecánica estudiado pro Kepler y Galileo).

¡Son problemas gemelos!

1.1 FUNCIONES REALES

1.1.1 INTRODUCCIÓN

Los distintos objetos o fenómenos que observamos en la naturaleza parecen estar orgánicamente conectados unos a otros; dependen unos de otros. Desde hace mucho tiempo se sabe que algunas relaciones simples y otras complicadas se conocen como “leyes” fundamentales de la naturaleza. Estas leyes señalan que si distintas magnitudes caracterizan un fenómeno natural, entonces algunas de ellas están determinadas por otras. Por ejemplo, el volumen de un cilindro está determinado por la longitud de su radio y altura; el volumen de una cantidad dada de gas está determinado por la temperatura y la presión a la que está sometido el gas; la potencia de un circuito eléctrico varía proporcionalmente a la resistencia, y al cuadrado de la corriente, etc. Todo este tipo de situaciones fueron las que dieron origen al concepto de función.

Los conceptos de variable y función, que hoy utilizamos, surgieron de manera paulatina, a través de los trabajos de muchos matemáticos. Quizás el proceso de inició con Neper en conexión con la función logarítmica y avanzó de una manera más o menos clara (aunque no definitiva) con Descartes, Fermat, Newton, Leibniz y los hermanos Bernoulli. Estos últimos utilizaban el concepto de función solo en ejemplos tales como polinomios o funciones trigonométricas.

Después, Euler, en su Introduction to Algebra en 1770, dá dos explicaciones de la palabra función: una, es que una función es una expresión $y(x)$ conformada por polinomios, logaritmos y funciones trigonométricas, etc., pero sin aclarar cuáles clases de combinaciones eran admisibles; la otra, que una función $y(x)$ se tendría cuando se pudiera dibujar una curva en el plano xy.

Para Lagrange, la noción de función se restringe solo a aquellos casos que resultan potencias de x. Posteriormente Fourier en sus trabajos sobre la teoría del calor en una superficie, analizó complicadas funciones; lo que amplió la idea de lo que debería considerarse como función.

Pero fue Dirichlet (1854) el primero que definió una función: si de alguna forma se determina un valor y para cada valor de x en un intervalo dado, entonces y se llama una función de x. La forma, como aparece en este capítulo, se remonta a los trabajos de Cauchy, Weierstrass, Dedeking, Cantor y, particularmente, Kuratowski (1896 - 1980).

Después de esta breve introducción histórica, hemos llegado a una de los objetos centrales sobre los cuales se construyó la matemática moderna: el concepto de función.

Definición 1.1 (Función real)

Decimos que f es una función real de variable real o simplemente una función real f de $A \subseteq \mathbb{R}$ en $B \subseteq \mathbb{R}$, si es una relación de $A \subseteq \mathbb{R}$ en $B \subseteq \mathbb{R}$, que satisface la condición de que para toda $x \in A$ existe un único elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Observaciones

La definición (1.1), es equivalente a que

a) Todo elemento x de A es la primera componente de alguna pareja de f.

b) Si $(x, y_1) \in f$, y, $(x, y_2) \in f$, entonces $y_1 = y_2$; es decir, en f no hay dos parejas distintas con la primera componente igual.

c) Notación. Si f es una función de $A \subseteq \mathbb{R}$ en $B \subseteq \mathbb{R}$, escribimos indistintamente,

$$\begin{array}{rccc} f: & A \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & B \subseteq \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{ccc} A \subseteq \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & B \subseteq \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array}$$

d) Puede ocurrir que, en algunos casos, $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{R}$.

e) Para cada $x \in A \subseteq \mathbb{R}$, al único $y \in B \subseteq \mathbb{R}$ tal que $(x, y) \in f$ se denota como $y = f(x)$ y se dice que y es la imagen de x a través de f.

f) Dominio de f

$$D(f) = A = \{x \in A \mid y = f(x)\}$$

Recorrido de f

$$R(f) = B = \{y \in B \mid y = f(x)\}$$

g) La gráfica de una función real se denota como

$$G(f) = \{(x, y) \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x))\}$$

Observación: Toda gráfica es una función si toda recta paralela al eje y se intersectan con ésta en un solo punto.

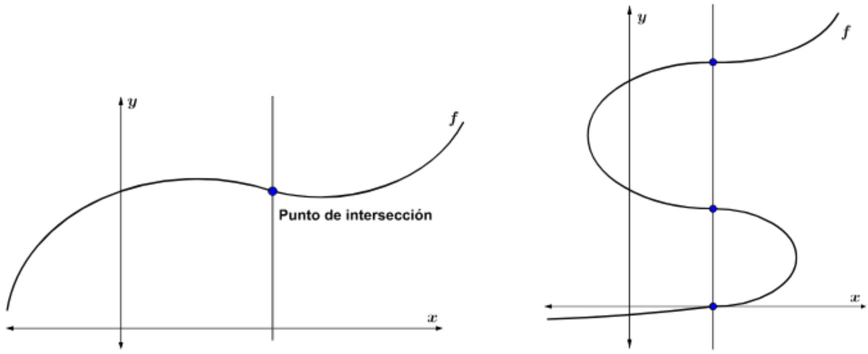

Figura 1.1

1.1.2 ALGUNAS CLASES DE FUNCIONES

Las siguientes funciones se utilizarán mas adelante.

1. **Función constante:** En una función de la forma $y = f(x) = c$, con $c \in \mathbb{R}$. Su gráfica son rectas horizontales.

2. **Función lineal:** Es de la forma $y = f(x) = mx + b$, con $m, b \in \mathbb{R}$. Al número m se suele llamar la pendiente de la recta. Si $m = 1$ y $b = 0$, a la función $y = f(x)$ se llama la función identidad (o la función idéntica).

3. **Función polinómica:** Es de la forma

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots$ son números reales y n es un entero positivo. Son ejemplos de funciones polinómicas las funciones constantes, las lineales, las ecuaciones de segundo grado $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, que son parábolas que abren hacia arriba o hacia abajo. Las parábolas que abren hacia la izquierda o hacia la derecha no son ejemplos de funciones. (¿Por qué?).

4. **Función racional:** Estas funciones son de la forma

$$y = f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n},$$

donde el numerador y el denominador son funciones polinómicas.

5. **Función valor absoluto:** Esta función se define como $y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$, su dominio son los números reales y el recorrido los números reales positivos incluido el cero.

6. **Función a trozos:** Son aquellas que se componen de trozos o segmentos de otras ya conocidas. Por consiguiente, en ocasiones no es posible presentarlas como una única expresión, así como se representan otras funciones. Son ejemplos de ellas

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } x \leq -1 \\ x^2, & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x < -2 \\ x, & \text{si } -2 \leq x \leq 4 \\ -1, & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1.1.3 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES

1. **Función par:** La función f se llama par, si para todo x en el dominio de f se tiene que $f(-x) = f(x)$.

2. **Función impar:** La función f se llama impar, si para todo x en el dominio de f se tiene que $f(-x) = -f(x)$. Existen funciones que no son ni pares ni impares, por ejemplo, $f(x) = e^x$.

3. Si f es una función par y g es una función impar, entonces $f \cdot g$ es impar, $f \cdot f$ es par y $g \cdot g$ es par.

4. **Función periódica:** La función f es periódica, si existe $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, tal que para todo x en $D(f)$ se cumple que $f(x+a) = f(x)$. Al menor número positivo con esta propiedad se le llama periodo de la función f.

5. La función f es inyectiva, si para todo x_1 y x_2 en el dominio de f, con $x_1 \neq x_2$, se tiene que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Es decir, puntos distintos de la imagen del dominio de f, no pueden tener la misma imagen. Otra manera de decir lo anterior es: si f es inyectiva, si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$.

6. **Composición de funciones reales:** Dadas las funciones $g : A \longrightarrow B$ y $f : B \longrightarrow C$. La compuesta de f y g denotada por $(f \cdot g)$, es la función definida por

$$\begin{aligned} f \cdot g : & A \longrightarrow C \\ & x \longrightarrow (f \cdot g)(x) = f[g(x)] \end{aligned}$$

El dominio de $(f \cdot g)$ se define como $D(f \cdot g] = \{x \mid x \in D(g) \text{ y } g(x) \in D(f)\}$.

Para recordar

Funciones trigonométricas: $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \csc x$, $y = \sec x$, y $y = \cot x$.

7. **Inversas de las funciones trigonométricas:** $y = \operatorname{arc\,sen} x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arcsec} x$, etc.

1.2 SOBRE LA DERIVADA

En el sigo XVII existía mucho interés por el estudio del movimiento y, por tanto, era fundamental determinar velocidades y aceleraciones. En aquella época se requería calcular, por ejemplo, la velocidad y aceleración de un cuerpo que se mueve en órbita elíptica o aún en movimientos más complicados. Esta fue, precisamente, la razón del desarrollo del concepto de la derivada.

El cálculo diferencial se remonta a los trabajos simultáneos (pero independientes) de Isaac Newton (1642 -1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), aunque debe decirse que habían tenido una labor preparatoria de muchos siglos desde la época de los antiguos griegos (siglo III a.C.) y también fueron complementados posteriormente (en su fundamentación lógica) por matemáticos del siglo XIX como Cauchy y Weierstrass. Pero fue el paso fundamental de Newton y Leibniz el que daría origen a lo hoy conocemos como análisis matemático. Newton, presentó su método para encontrar las derivadas (al que llamaba método de fluxiones) aunque advertía que lo que buscaba era explicarlo más no demostrarlo con precisión, pues consideraba que sus resultados eran verdaderos desde el punto de vista físico y eso, para él era suficiente. Se sentía seguro con la geometría euclidiana, pero tenía dudas sobre los métodos de límites, aunque los utilizaba para calcular fluxiones, y por ello, apelaba a la física como última instancia de verdad.

La aproximación de Leibniz era diferente. La forma de intentar soslayar el difícil método de límites fue utilizar lo que el llamaba "infinitesimales", aunque las críticas a este concepto fueron duras. Hasta el final de su vida, Leibniz continuó buscando explicaciones de lo que eran sus cantidades infinitamente pequeñas, sin lograrlo. Es decir, como Newton nunca tuvo conceptos claros ni justificación lógica de su Cálculo.

Por lo anterior, muchas definiciones e incluso algunos teoremas pueden escribirse en términos de problemas físicos a menudo de manera reveladora. De hecho, las necesidades de los físicos constituyeron la inspiración para estas ideas fundamentales del cálculo diferencial, y frecuentemente se mencionan las interpretaciones físicas, como camino para definir las ideas en forma matemática precisa y se discutirá su significado en términos de problemas matemáticos.

1.2.1 EL CONCEPTO DE TANGENTE

Ejemplo 1.1

Graficar las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x|$ b) $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$ c) $f(x) = \sqrt{|x|}$

Solución: Las gráficas de las funciones anteriormente establecidas se muestran a continuación.

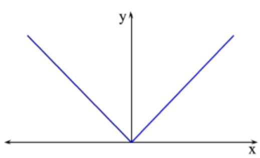

Figura 1.2: Función a)

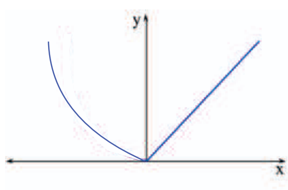

Figura 1.3: Función b)

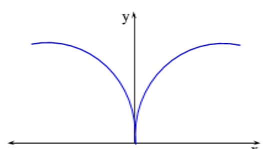

Figura 1.4: Función c)

Las gráficas anteriores ilustran ciertos tipos de comportamiento irregular que pueden presentar las funciones continuas. Las gráficas de éstas funciones están "quebradas" en $(0,0)$, a diferencia de la gráfica de la figura (1.5):

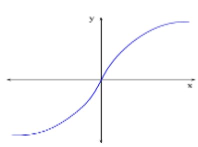

Figura 1.5

donde es posible trazar una "tangente" en cada punto. Las comillas se han usado para descartar las creencias de que hemos definido "quebrados" o "tangentes", aunque estamos indicando que la gráfica puede estar "quebrada" en un punto en el que no se puede trazar una "tangente".

¿Cómo definir la tangente?

No se puede definir la tangente como una línea que corta la gráfica solamente una vez, dado que tal definición sería demasiado restrictiva o demasiado amplia. Con esta definición, las funciones (1.6) y (1.7) tendrían dos tangentes.

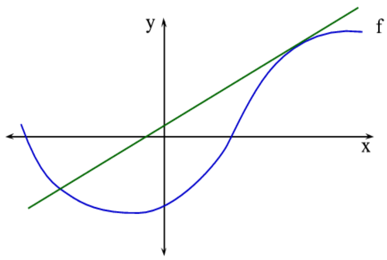

Figura 1.6

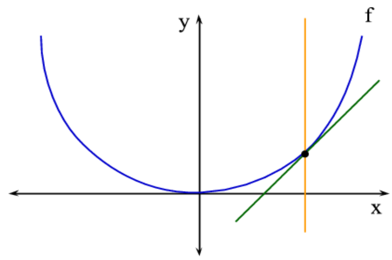

Figura 1.7

y las tres funciones (ver figura 1.8, 1.9 y 1.10) tendrán más de una tangente en los puntos que están "quebrados".

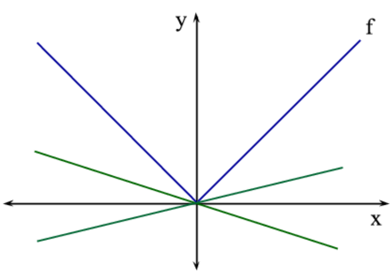

Figura 1.8

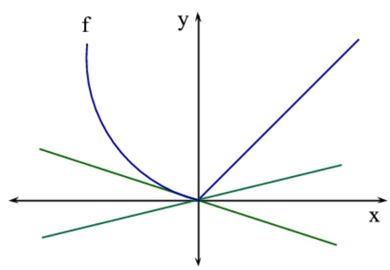

Figura 1.9

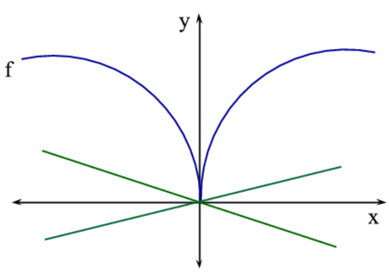

Figura 1.10

Una manera más prometedora de abordar la definición de tangente podría ser empezando con "secantes" y utilizando la definición de límite.

1.3 CONSTRUCCIÓN DE LA TANGENTE A UNA CURVA

Sea $y = f(x)$ una función continua en (a,b). Si existe la posición límite de la secante $\overline{MP}$ cuando M tiende a P (o h tiende a cero), entonces a esta posición límite se denomina tangente a la curva en el punto P.

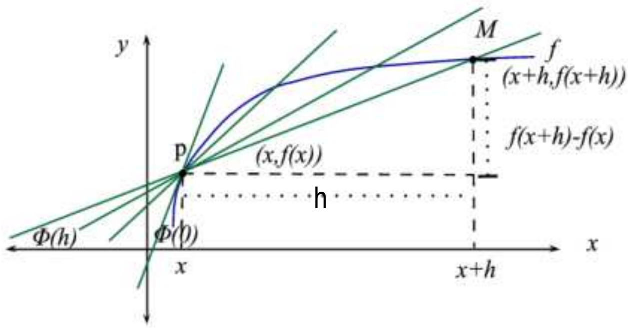

Figura 1.11: La recta tangente

Para conocer la tangente a la curva en el punto $(x, f(x))$ basta conocer su ángulo de inclinación, es decir:

$$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = \varphi_{(0)}. \tag{1.1}$$

¿Cómo conocer el ángulo φ_0?

Podemos valernos de su tangente trigonométrica:

$$\tan \varphi_{(h)} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1.2}$$

Si en el punto x existe tangente (no vertical) a la curva, entonces existe el límite $\varphi_{(h)}$, pero como la función tangente es continua en su dominio, existirá también el límite:

$$\lim_{h \to 0} \tan \varphi_{(h)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \tan \varphi_{(0)}, \tag{1.3}$$

luego

$$\varphi_{(0)} = \tan^{-1} \left[\lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]. \tag{1.4}$$

En otras palabras

$$\lim_{h \to o} \tan \varphi_{(h)} = \lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$.

Definición 1.2

La recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$ es aquella recta que pasa por P con pendiente:

$$m_{\tan} = \tan(\varphi_0) = \lim_{h \to 0} \varphi_{(h)} = \lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \text{con} \quad h \neq 0, \tag{1.5}$$

siempre que el límite exista.

Ejemplo 1.2

Hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función

$$y = f(x) = -x^2 + 2x + 2 \ \text{ en } x = -1, \frac{1}{2}, 2, 3$$

Solución:

$$\begin{array}{llll}
\text{Si} & x = -1, & \text{entonces} & m_{\tan} = -2(-1) + 2 = 4 \\
\text{Si} & x = \frac{1}{2}, & \text{entonces} & m_{\tan} = -2\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 1 \\
\text{Si} & x = 2, & \text{entonces} & m_{\tan} = -2(2) + 2 = -2 \\
\text{Si} & x = 3, & \text{entonces} & m_{\tan} = -2(3) + 2 = -4.
\end{array}$$

Ejemplo 1.3

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función

$$y = f(x) = \frac{1}{x} \ \text{ en el punto } \left(2, \frac{1}{2}\right)$$

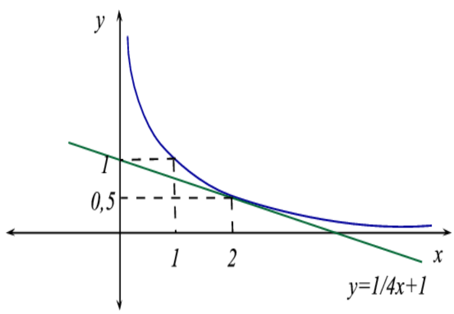

Figura 1.12: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = -\frac{1}{x^2}$$

Si $x = 2$, entonces $m_{\tan} = -\frac{1}{4}$. Al reemplazar el valor de la pendiente y el punto dado en la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$ obtenemos que $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

1.4 VELOCIDAD PROMEDIO Y VELOCIDAD INSTANTÁNEA

Si conducimos un automóvil de una ciudad a otra que está a 80 km en 2 horas ¿Cuál es la velocidad promedio?

La velocidad promedio es

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{80-0}{2-0} = 40\ \frac{Km}{h}.$$

Durante el viaje la lectura del velocímetro fue diferente de $40\ \frac{Km}{h}$. Al principio registro $0\ \frac{Km}{h}$; a veces subió a $57\ \frac{Km}{h}$ y al final regreso $0\ \frac{Km}{h}$ nuevamente. ¿Qué mide el velocímetro?

El velocímetro mide la velocidad promedio.

Ahora, consideremos un objeto p que cae al vacío. El experimento muestra que si se inicia desde el reposo, p cae según la función $f(t) = 16t^2$ pies en t segundos. Así $f(1) = 16$, $f(2) = 64, \ldots,$ pies. Luego, el objeto cada vez cae más rápido.

La siguiente gráfica ilustra la situación anterior:

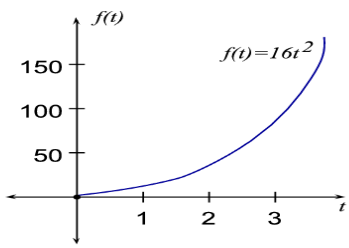

Figura 1.13: $f(t) = 16t^2$

En los intervalos dados la velocidad promedio tiene el siguiente comportamiento:

Intervalos	Velocidad promedio
$1 \leq t \leq 2$	$\ldots\ v_P = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = 48$ pies/seg
$1 \leq t \leq 1{,}5$	$\ldots\ v_P = \dfrac{f(1{,}5)-f(1)}{1{,}5-1} = 40$ pies/seg
$1 \leq t \leq 1{,}1$	$\ldots\ v_P = \dfrac{f(1{,}1)-f(1)}{1{,}1-1} = 33{,}6$ pies/seg
$1 \leq t \leq 1{,}02$	$\ldots\ v_P = \dfrac{f(1{,}02)-f(1)}{1{,}02-01} = 32{,}6$ pies/seg

En general en el intervalo $[t, t+h] \ldots v_P = 32\ \frac{\text{pies}}{\text{seg}}$.

1.4.1 VELOCIDAD INSTANTÁNEA

Si un objeto se mueve, a lo largo de un eje coordenado con función de posición $y(t) = f(t)$, entonces la velocidad instantánea en el tiempo t es:

$$v = \lim_{h \to o} v_p = \lim_{h \to o} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \quad \text{con } h \neq 0, \tag{1.6}$$

siempre que el límite exista.

Ejemplo 1.4

Si un objeto se mueve con la ley $f(t) = 16t^2$, entonces la velocidad en el tiempo t es:

$$v(t) = \lim_{h\to o} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h\to o} \frac{16(t+h)^2 - 16t^2}{h} = 32t$$

Nótese que $v(1) = 32$, coincide con el análisis anterior.

$$\begin{aligned} v(3,8) &= 32(3,8) = 121,6 \text{ pies/seg} \\ v(5,4) &= 32(5,4) = 172,8 \text{ pies/seg} \end{aligned}$$

¿Cuanto tiempo tardará el objeto para alcanzar una velocidad de 112 **pies/seg?**

Como $v(t) = 32t = 112$, entonces $t = 3,5$ seg.

La tasa de cambio se puede expresar en diferentes campos, como la física (p.e. la velocidad, la densidad de un alambre, la corriente, etc.), la economía (el ingreso marginal), entre otras.

Definición 1.3

La derivada de una función f es otra función f' (f-prima) cuyo valor en x es:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \tan(\varphi_0) \tag{1.7}$$

Observaciones

i) Si el límite existe, decimos que f es derivable.

ii) La tangente a la gráfica f en $(x, f(x))$ es la recta que pasa por $(x, f(x))$ y que tiene por pendiente f'. Esto quiere decir que la tangente en $(a, f(a))$ sólo está definida si f es derivable.

iii) El dominio de f' es el conjunto $\left\{ \left(x, \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \right\}$.

iv) Esta parte del cálculo se llama **Cálculo Diferencial**.

Ejemplo 1.5

Si $f(x) = 13x - 6$, hallar $f'(4)$. Hay dos formas:

1. $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{13(x+h) - 6 - (13x - 6)}{h} = 13,$

   entonces $f'(4) = 13$.

2. $f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(13)(4) + 13h - 6 - 13(4)}{h} = 13.$

Ejercicio. Para las funciones $f(x) = x^3 + 7x$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $f(x) = \sqrt{x}$, hallar su respectivas derivadas.

Otras notaciones usuales para la derivada son:

i) $f'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$.

ii) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

La figura (1.14) ilustra la situación.

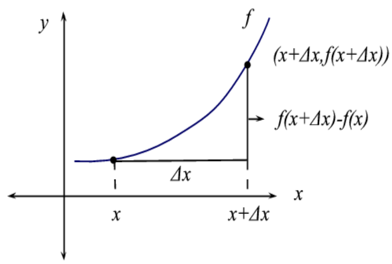

Figura 1.14

iii) También

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

donde la figura (1.15), ilustra también la situación.

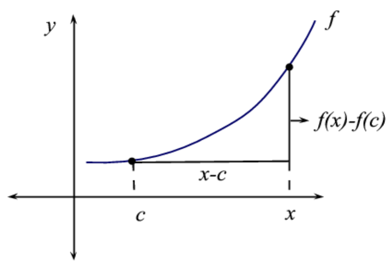

Figura 1.15

Ejemplo 1.6

Si $g(x) = \dfrac{2}{x+3}$, entonces $g'(c) = \dfrac{-2}{(c+3)^2}$. Hallar $g'(1)$ y $g'(-1)$.

Ejemplo 1.7

$f(x) = x^2$ entonces $f'(4) = 8$.

Ejemplo 1.8

Si $f(x) = \dfrac{2}{x}$ entonces $f'(3) = -\dfrac{2}{9}$.

Teorema 1.1

Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.

Demostración: Debemos demostrar que $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$, o $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ que son dos definiciones para la continuidad puntual. Veamos:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(a+h)-f(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,h.\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0} h\right).\\
&= f'(a)(0)=0. \quad \text{Luego,} \quad \lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a).
\end{aligned}$$

Para el otro caso, tenemos que:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a)+\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}(x-a) \quad \text{con} \quad x\neq a.\text{Luego}\\
\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} f(a)+\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a).\\
&= f(a)+f'(a)\cdot 0.\\
&= f(a). \quad \text{Luego,} \quad \lim_{x\to a} f(x)=f(a).
\end{aligned}$$

Observación: El recíproco del teorema (1.1) es falso, si una función f es continua en $x=a$, no implica que $f'(a)$ exista. Por ejemplo consideremos la función

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & \text{si } x\geq 0\\ -x, & \text{si } x<0\end{cases},$$

cuya gráfica se ilustra en la figura (1.16):

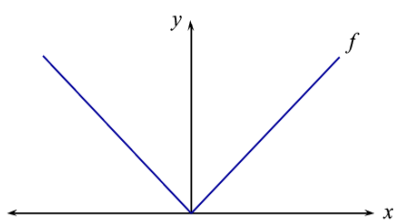

Figura 1.16

La pregunta es ¿Existe $f'(0)$? ... **Respuesta:** Calculemos los limites laterales, es decir:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{h-0}{h}=1. \quad \text{También,}\\
\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{h}{-h}=-1. \quad \text{Luego } \lim_{h\to 0} f(0) \text{ no existe.}
\end{aligned}$$

Entonces, si

$$a \neq 0, \;\; f'(a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a > 0 \\ -1, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

cuya gráfica está ilustrada en la figura (1.17):

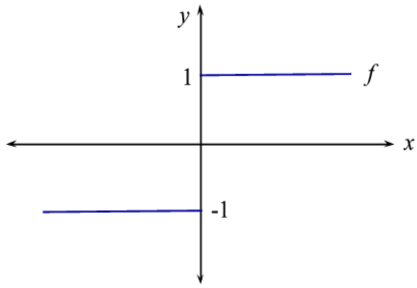

Figura 1.17: Gráfica de $f'(a)$

La gráfica (1.18) resume algunos aspectos:

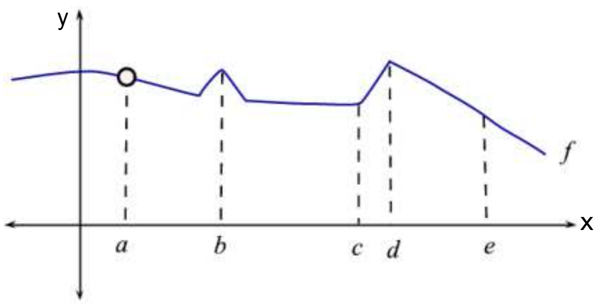

Figura 1.18

En el punto:

a) f no es continua por consiguiente no derivable.

b) f es continua pero no es derivable.

c) f es continua pero no es derivable.

d) f es continua pero no es derivable.

e) f es continua y derivable.