# 数理逻辑考题

1. 简答题（20）

(1).给出一组逻辑联结词完备集。

$\{\wedge,\vee,\neg\},\{\wedge,\neg\},\{\vee,\neg\}\{\neg,\rightarrow\}$

(2).在自然数论域，Q(x)表示 x 是自然数，在整数论域，Q(x)，表示 x 是整数。在自然数论域和整数论域上分别求下列命题的逻辑真值。

$\forall x(Q(x)\rightarrow 0\leqslant x)$ (自然数论域：1，整数论域：0)

$\exists x\,(Q(x)\wedge\forall y(Q(y)\rightarrow x\leqslant y))$ (自然数论域：1，整数论域：0 )

$\forall x\forall y(Q(x)\wedge Q(y)\rightarrow x+y=y+x)$ (自然数论域：1 ，整数论域：1 )

$\forall x\forall y(Q(x)\wedge Q(y)\rightarrow x+y\leqslant y)$ (自然数论域：0，整数论域：0)

(3). 定义：对于任意 ε >0，存在 N>0，对于任何 n，当 n>N 时，都有$|x_n-b|<\varepsilon$，则称序列$\{x_n\}$的极限是 b，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=b$

用谓词合式公式表示定义（谓词符号，运算符：| |和-）

$\forall\varepsilon(\varepsilon>0\rightarrow\exists N(N>0\wedge\forall n(n>N\rightarrow|x_n-b|<\varepsilon)))$

(4).给出可靠性和完备性定理

可靠性定理：若 $\Gamma\vdash Q$ ，则 $\Gamma\ \vDash\ Q$。

完备性定理：若 $\Gamma\vDash Q$ ，则 $\Gamma\vdash Q$。

(5).在自然数理论中，仅保持等谓词（=），后继函数和数学归纳法，是否是完备的？

是

2.论述题（20）

(A).命题逻辑合式公式

(1).符号 0 和 1 是合式公式；

(2).原子公式是合式公式；

(3).若 Q,R 是合式公式，则$(\neg Q)$、$(Q\wedge R)$ 、$(Q\vee R)$ 、$(Q\rightarrow R)$ 、$(Q\leftrightarrow R)$ 、$(Q\oplus R)$是合式公式；

(4).只有有限次应用(1)—(3)构成的公式是合式公式。

(B).谓词逻辑合式公式

合式公式是按如下规则构成的有穷长符号串。

(1).若是 $t_1,\cdots,t_n$ 项，$Q_i^n$ 是 n 元谓词，则 $Q_i^n(t_1,\cdots,t_n)$是合式公式。

(2).若 Q 是合式公式，则$(\neg Q)$是合式公式；

(3).若 Q 和 R 是合式公式，则$(Q\wedge R)$、$(Q\vee R)$、$(Q\rightarrow R)$ 、$(Q\leftrightarrow R)$及$(Q\oplus R)$是合式公式；

(4).若 Q 是合式公式，x 是变元，则$(\forall xQ)$及$(\exists xQ)$是合式公式。

(5).只有有限次应用(1)—(4)构成的公式是合式公式。

(C).谓词合式公式意义

给定一阶语言 L，结构 S=<D, I>和赋值函数σ:V→D，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是项。在模型 M=<S, σ>下，公式 P,Q,R 的语义是确定的逻辑真值。

(1) 若 P 是 $Q(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，则 $\sigma(P) = Q^I(\sigma(t_1), \sigma(t_2), \cdots, \sigma(t_n))$。

(2) 若 P 是 $\neg Q$，则 $\sigma(\neg Q) = \neg\sigma(Q)$。

(3) 若 P 是 $Q\wedge R$，则 $\sigma(Q\wedge R) = \sigma(Q) \wedge \sigma(R)$。

(4) 若 P 是 $Q\vee R$，则 $\sigma(Q\vee R) = \sigma(Q) \vee \sigma(R)$。

(5) 若 P 是 $Q\to R$，则 $\sigma(Q\to R) = \sigma(Q) \to \sigma(R)$。

(6) 若 P 是 $Q\leftrightarrow R$，则 $\sigma(Q\leftrightarrow R) = \sigma(Q) \leftrightarrow \sigma(R)$。

(7) 若 P 是 $Q\oplus R$，则 $\sigma(Q\oplus R) = \sigma(Q) \oplus \sigma(R)$。

(8) 若 P 是 $\forall xQ(x)$，则

$$\sigma(\forall xQ(x)) = \begin{cases} 1 & \text{若对于每个}\mathrm{d} \in \mathrm{D_I}, \text{有}\sigma(x) = d, \text{使得}Q^I(x)[x/d] = 1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

(9) 若 P 是 $\exists xQ(x)$，则

$$\sigma(\exists xQ(x)) = \begin{cases} 1 & \text{若存在}\mathrm{d} \in \mathrm{D_I}, \text{有}\sigma(x) = d, \text{使得}Q^I(x)[x/d] = 1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

(D).表述可满足性与有效性

给定一阶语言 L 和它的公式 Q，如果存在模型 M=<S, σ>，使得σ(Q)=1 成立，则称公式 Q 关于模型<S, σ>是可满足的，简称 Q 可满足，也称模型<S, σ>满足 Q，记为 $\models_M Q$。

若合式公式 Q 对于一阶语言 L 的任意模型 M=<S, σ>均可满足，即对任意结构 S 和任意赋值σ成立，则称公式集合 Q 是永真的或有效的，记为 $\models Q$。

(E).表述谓词公理证明

定义 设 $\Gamma$是合式公式集, Q 是合式公式,有推理步骤 $A_1,A_2,\ldots A_n$,公式序列 $\alpha_1, \alpha_2,\ldots \alpha_n$，其中

$A_1=\alpha_1$

$A_2=\alpha_2$

....

$A_n=\alpha_n$ $(\alpha_n=Q)$

每个 $\alpha_k$ 满足以下条件之一，

(1) $\alpha_k$ 是公理；

(2) $\alpha_k$ $k\in\Gamma$；

(3) 有 $i,j<k$ $\alpha_k= \alpha_i\to \alpha_j$ 由 $\alpha_i, \alpha_j$ 用 MP 规则推出。

则称它为 Q 的从 $\Gamma$的一个推演(演绎),记为 $\Gamma\vdash Q$。

如果 $\Gamma\vdash Q$，并且有推理步骤 $A_1,A_2,\ldots A_n$，则 $A_1,A_2,\ldots A_n$ 称为的一个证明。

3. （10）

(1).求命题合式公式$(P\vee Q\to R)\to P$ 主合取范式。

$\Leftrightarrow (\neg(p\vee q)\vee r)\to p$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(p\vee q)\vee r)\vee p$

$\Leftrightarrow (p\vee q)\wedge\neg r\vee p$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee p)\wedge(\neg r\vee p)$

$\Leftrightarrow (p\vee q)\wedge(\neg r\vee p)$ 合取范式

(2).设下面是数字逻辑部件译码器功能真值表，给出输出 $y_7$~$y_0$ 的逻辑表达式。

| 使能 | 输入 | | | 输出 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ | $y_7$ | $y_6$ | $y_5$ | $y_4$ | $y_3$ | $y_2$ | $y_1$ | $y_0$ |
| 0 | × | × | × | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$y_0= E\wedge\neg x_2\wedge\neg x_1\wedge\neg x_0$

$y_1= E\wedge\neg x_2\wedge\neg x_1\wedge x_0$

$y_2= E\wedge\neg x_2\wedge x_1\wedge\neg x_0$

$y_3= E\wedge\neg x_2\wedge x_1\wedge x_0$

$y_4= E\wedge x_2\wedge\neg x_1\wedge\neg x_0$

$y_5= E\wedge x_2\wedge\neg x_1\wedge x_0$

$y_6= E\wedge x_2\wedge x_1\wedge\neg x_0$

$y_7= E\wedge x_2\wedge x_1\wedge x_0$

4 （20）

(1). 用命题逻辑语义方法判断下列推论是否成立？若命题成立，给出证明；若命题不成立给出反例。

$((p\to q)\wedge p)\models q$

证明：

若真值赋值 v,使 v(p)=1，并且 $v(p\to q)=1$， 则 $v(p)\to v(q)=1$, 所以,v(q)=1。

所以，$((p\to q)\wedge p)\models q$

$((p\to q)\wedge\neg p)\models\neg q$

(2).用谓词逻辑语义方法判断下列推论是否成立？

$\exists x\forall yQ(x, y)\models\forall y\exists xQ(x, y)$

因为 $v(\exists x\forall yQ(x, y))=1$，所以 $v(\forall yQ(c, y))=1$，因此，对于所有 y，有 $v(Q(c, y))=1$。

所以，对于所有 y，有 $v(\exists xQ(x, y))=1$。

所以，有 $v(\forall y\exists xQ(x, y))=1$。

因此, $\exists x\forall yQ(x, y)\models\forall y\exists xQ(x, y)$

$\forall x\exists yQ(x, y) \models \exists y\forall xQ(x, y)$

5.用公理方法证明（20）

(1). $P\to(Q\to R),Q \vdash P\to R$

证明：

$A_1= P\to(Q\to R)$

$A_2=(P\to(Q\to R))\to((P\to Q)\to(P\to R))$

$A_3= (P\to Q)\to(P\to R)$

$A_4=Q\to(P\to Q)$

$A_5=Q$

$A_6= P\to Q$

$A_7=P\to R$

(2).选择

$\vdash \forall xQ(x)\to\forall y\, Q(y)$　(y 不在 Q 中出现)

证明：

$A_1=\forall xQ(x)\to Q(y)$

$A_2=\forall y(\forall xQ(x)\to Q(y))$

$A_3=\forall y(\forall xQ(x)\to Q(y))\to(\forall xQ(x)\to\forall y\, Q(y))$

$A_4=\forall xQ(x)\to\forall y\, Q(y)$

$\vdash\forall x\forall yR(x,y)\to\forall xR(x,x)$

证明：

$A_1=\forall x\forall yR(x,y)\to\forall yR(x,y)$

$A_2=\forall yR(x,y)\to R(x,x)$

$A_3=\forall x\forall yR(x,y)\to R(x,x)$

$A_4=\forall x\,(\forall x\forall yR(x,y)\to R(x,x))$

$A_5=\forall x\,(\forall x\forall yR(x,y)\to R(x,x))\to(\forall x\forall yR(x,y)\to\forall xR(x,x))$ $A_4$

$A_6= \forall x\forall yR(x,y)\to\forall xR(x,x)$

6.归结法求证（10）

$P\wedge Q\to R \vdash (P\to R)\vee(Q\to R)$

证明：

$(P\wedge Q\to R)\wedge\neg((P\to R)\vee(Q\to R))$

$\Leftrightarrow(\neg(P\wedge Q)\vee R)\wedge\neg(\neg P\vee R\vee\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge P\wedge Q\wedge\neg R$

因为$(P\wedge Q\to R)\wedge\neg((P\to R)\vee(Q\to R))$的合取范式$(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge P\wedge Q\wedge\neg R$

所以子句集合

$\Omega=\{P,Q,\neg R,\neg P\vee\neg Q\vee R\}$

$Q_1=\neg P\vee\neg Q\vee R$　　$Q_1\in\Omega$

$Q_2=P$　　$Q_2\in\Omega$

$Q_3=\neg Q\vee R$　　$Q_3=(Q_1-\neg P)\vee(Q_2-P)$

$Q_4=Q$　　$Q_4\in\Omega$

$Q_5=R$　　$Q_5=(Q_3-\neg Q)\vee(Q_4-Q)$

$Q_6=\neg R$　　$Q_6\in\Omega$

$Q_7=\square$　　$Q_7=(Q_5-R)\vee(Q_6-\neg R)$

因此 $P\wedge Q\to R \vdash (P\to R)\vee(Q\to R)$