

一、已知下列递推式：

$$\begin{aligned} C(n) &= 1 && \text{若 } n = 1 \\ &= 2C(n/2) + n - 1 && \text{若 } n \geq 2 \end{aligned}$$

请由定理 1 导出 $C(n)$ 的非递归表达式并指出其渐进复杂性。

定理 1: 设 a, c 为非负整数, b, d, x 为非负常数, 并对于某个非负整数 k , 令 $n=c^k$, 则以下递推式

$$\begin{aligned} f(n) &= d && \text{若 } n=1 \\ &= af(n/c) + bn^x && \text{若 } n \geq 2 \end{aligned}$$

的解是

$$\begin{aligned} f(n) &= bn^x \log_c n + dn^x && \text{若 } a=c^x \\ f(n) &= \left(d + \frac{bc^x}{a-c^x} \right) n^{\log_c a} - \left(\frac{bc^x}{a-c^x} \right) n^x && \text{若 } a \neq c^x \end{aligned}$$

二、由于 Prim 算法和 Kruskal 算法设计思路的不同, 导致了其对不同问题实例的效率对比关系的不同。请简要论述:

- 1、如何将两种算法集成, 以适应问题的不同实例输入;
- 2、你如何评价这一集成的意义?

三、分析以下生成排列算法的正确性和时间效率:

```
HeapPermute(n)
//实现生成排列的 Heap 算法
//输入: 一个正正整数  $n$  和一个全局数组  $A[1..n]$ 
//输出:  $A$  中元素的全排列
if  $n = 1$ 
    write  $A$ 
else
    for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
        HeapPermute( $n-1$ )
        if  $n$  is odd
            swap  $A[1]$  and  $A[n]$ 
        else swap  $A[i]$  and  $A[n]$ 
```

四、对于求 n 个实数构成的数组中最小元素的位置问题, 写出你设计的具有减治思想算法的伪代码, 确定其时间效率, 并与该问题的蛮力算法相比较。

五、请给出约瑟夫斯问题的非递推公式 $J(n)$, 并证明之。其中, n 为最初总人数, $J(n)$ 为最后幸存者的最初编号。