矩阵论期末大作业 ZY2206117 黄海浪

一

1-5: √ √ √ √ √
6-10: × √ √ √ √
11-15: √ √ √ √ √
16-20: √ √ × × ×

二

1.--

$\lambda(A)=\{1,4\}$; $\lambda(B)=\{a,b\}$; $\lambda(A\otimes B)=\{a,b,4a,4b\}$

2.--

由$A^2=A$得，$A^2=A=A^3=A^4=\cdots=A^n$

所以有:

$$e^{tA}=I+tA+\frac{(tA)^2}{2}+\frac{(tA)^3}{3!}+\cdots=I+\left(t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+\cdots\right)A=I+(e^t-1)A$$

3.--

$Q^HA=Q^HQR=IR=R$

4.--

令$A=\begin{pmatrix}1 & 2i\\ i & 1\end{pmatrix}=(\alpha_1\quad\alpha_2)$

$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{|\alpha_1|^2}\alpha_1=\alpha_2-\frac{(\alpha_1^{\mathrm{H}}\alpha_2)}{|\alpha_1|^2}\alpha_1=\begin{pmatrix}2i\\ 1\end{pmatrix}-\frac{i}{2}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$$

$\varepsilon_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$，$\varepsilon_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$

令$Q=(\varepsilon_1\quad\varepsilon_2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}}\\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$（半优阵），令$R=Q^HA=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}}\\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

得$A=QR=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}}\\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

三

由题，可得 4 个 Ger 圆为（如图 1）

G_1: $|Z-\alpha_{11}| = |Z-2| \le R_1 = 1$

G_2: $|Z-\alpha_{22}| = |Z-4| \le R_2 = \dfrac{3}{4}$

G_3: $|Z-\alpha_{33}| = |Z-6| \le R_3 = \dfrac{3}{4}$

G_4: $|Z-\alpha_{44}| = |Z-9| \le R_4 = \dfrac{3}{4}$

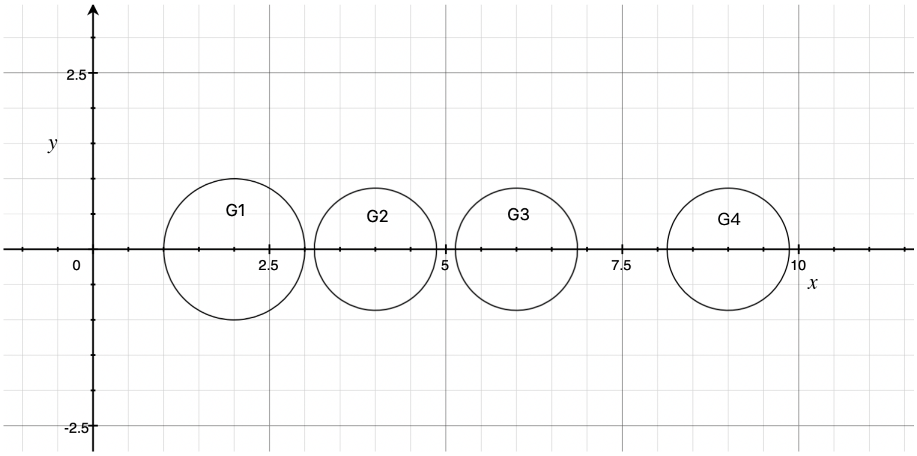

图 1Ger 圆

得谱半径范围：$9-\frac{3}{4} \le \rho(A) \le 9+\frac{3}{4}$，即$\frac{33}{4} \le \rho(A) \le \frac{39}{4}$

4 个 Ger 圆为相互独立的 4 个圆，由 Ger 圆推论可得矩阵A为单纯阵

且有$\lambda_1 \ge 1, \lambda_2 \ge \frac{13}{4}, \lambda_3 \ge \frac{21}{4}, \lambda_4 \ge \frac{33}{4}$ (其中λ_i为矩阵A特征值)

由$det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$可得，$det(A) \ge 1 \times \frac{13}{4} \times \frac{21}{4} \times \frac{33}{4}$，得证$det(A) \ge \frac{13}{4} \times \frac{21}{4} \times \frac{33}{4}$

四

1.--

由题得 A 是秩 1 矩阵，由秩 1 公式，$A^+ = \frac{1}{tr(A^H A)} A^H = \frac{1}{\sum|\alpha_{ij}|^2} A^H = \frac{1}{54} A^H$

因此，小二解为$x_0 = A^+\beta = \frac{1}{54} A^H \beta = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

验证得$Ax_0 \ne \beta$，故最佳小二解是$x_0 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2.---

由题，得A是二阶比例阵，易得A的特征根为$\{tr(A),0\}=\{1,0\}$

由特征根知矩阵A为单阵，对A进行谱分解：$A=\lambda_1 G_1+\lambda_2 G_2=G_1$

由公式$A^n=1^n G_1=A$，可得矩阵A满足幂等性，因此化简得$A^2-A=0$

所以有

$$e^{tA}=I+tA+\frac{(tA)^2}{2}+\frac{(tA)^3}{3!}+\cdots=I+\left(t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+\cdots\right)A=I+(e^t-1)A$$

$$=\begin{pmatrix}2e^t-1 & 2e^t-2\\ 1-e^t & 2-e^t\end{pmatrix}$$

五

1.---

由题，矩阵A为 2 阶矩阵，易得其特征根为$\{\lambda_1,\lambda_2\}=\{1,25\}$

由$A=A^H$得，矩阵A为 Hermite 矩阵，即A为正规阵，可用谱公式

令$G_1=\frac{A-\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}12 & -12\\ -12 & 12\end{pmatrix}$, $G_2=\frac{A-\lambda_1 I}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}12 & 12\\ 12 & 12\end{pmatrix}$；(可验证$G_1+G_2=I$)

可得$A=\lambda_1 G_1+\lambda_2 G_2$，且$G_1={G_1}^H$，$G_2={G_2}^H$（即$G_1$、$G_2$都为 Hermite 矩阵）

所以可得 Hermite 矩阵 $B=\pm A^{\frac{1}{2}}=\pm\left({\lambda_1}^{\frac{1}{2}}G_1+{\lambda_2}^{\frac{1}{2}}G_2\right)=\pm(G_1+5G_2)=$ $\pm\left(\frac{1}{24}\begin{pmatrix}12 & -12\\ -12 & 12\end{pmatrix}+\frac{5}{24}\begin{pmatrix}12 & 12\\ 12 & 12\end{pmatrix}\right)=\pm\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

2.---

$A^H=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，$A^H A=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$为对角阵，根为$\{\lambda_1,\lambda_2\}=\{8,2\}$，因此奇异值为$\{2\sqrt{2},\sqrt{2}\}$，$\Delta=\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$

$\lambda_1=8$有特征向量$X_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$，$\lambda_2=2$有特征向量$X_1=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$（互正交）

令列优阵$Q=\begin{pmatrix}\frac{X_1}{|X_1|} & \frac{X_2}{|X_2|}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$(优阵)，$P=\begin{pmatrix}\frac{AX_1}{|AX_1|} & \frac{AX_2}{|AX_2|}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

因为各项奇异值都为正，因此 SVD 为$A=P\Delta Q^H=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

六

(1)--

是 Hermite 矩阵，证明如下：$\left(\frac{A}{i}\right)^H=\frac{A^H}{\bar{i}}=\frac{-A}{-i}=\frac{A}{i}$，所以$\frac{A}{i}$是 Hermite。

$\frac{A}{i}$的特征根$t_1,\dots,t_n$都为实数，证明如下：

不妨令 B=$\frac{A}{i}$，X为 B 的特征向量，B 为 Hermite 矩阵，有$BX=tX$

$$(BX)^H=(tX)^H$$

$$X^HB^H=t^*X^H\text{（}t^*\text{表示取共轭）}$$

两边同时右乘X得：$X^HB^HX=t^*X^HX$

$$X^HBX=t^*X^HX\text{（因为矩阵}B\text{是 Hermite）}$$

$$X^HtX=t^*X^HX$$

即：$t=t^*$

所以，$\frac{A}{i}$的特征根$t_1,\dots,t_n$都为实数

(2)--

记X为 A 的特征向量，$\lambda_1,\dots,\lambda_n$为特征根，有$AX=\lambda X$

$$(AX)^H=(\lambda X)^H$$
$$X^HA^H=\lambda^*X^H$$

两边同时右乘X得：$X^HA^HX=\lambda^*X^HX$

$$-X^HAX=\lambda^*X^HX\text{（因为}A^H=-A\text{）}$$

$$-X^H\lambda X=\lambda^*X^HX$$

即：$-\lambda=\lambda^*$

所以，A的特征根$\lambda_1,\dots,\lambda_n$为纯虚数或 0

(3)--

答 1：由题，记X为A的特征向量，$\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$为特征根，有$AX=\lambda X$

$$(A+I)X=AX+IX=\lambda X+IX=(\lambda+1)X$$

因此，$\{\lambda_1+1,\dots,\lambda_n+1\}$为矩阵$A+I$特征根

由(2)可得，$\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$为纯虚数或 0，所以易证 $|det(A+I)|=\prod_{i=1}^{n}|\lambda_i+1|\geq 1$

答 2：成立，记$\{it_1, it_2, \cdots, it_n\}$为$\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$，因为$A$为实的反对称阵，所以有

$$Ax = \lambda x \Longrightarrow Ax^* = (Ax)^* = \lambda^* x^* \text{（其中}*\text{表示取共轭）}$$

并且$\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$为纯虚数或 0，由此可得，矩阵$A$的特征根两两共轭成对（当 n 为奇数，必有一特征根为 0，记为λ_n）

且设$t_i = -t_{2*i}$ $(i \le \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor)$，所以有

$$det(A+I) = \prod_{i=1}^{n} \lambda(A+I) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + 1)$$

$$= \begin{cases} \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (\lambda_i + 1)(\lambda_{2*i} + 1) & n\text{为偶数} \\ \prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} \big((\lambda_i + 1)(\lambda_{2*i} + 1)\big) * (0+1) & n\text{为奇数} \end{cases}$$

$$= \prod_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} (1 + |t_i|^2) \ge 1 \quad \text{（其中}|t_i| \ge 0\text{）}$$

得证：$det(A+I) \ge 1$

七

证：当$det(A) = 0$时，易得$det(A) = 0 \le |\alpha_1||\alpha_2| \cdots |\alpha_n|$

当$det(A) \neq 0$时，对A用 QR 分解，得

$$A = QR$$

其中$R = [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]$

$$\beta_i = \begin{bmatrix} r_{1i} \\ \vdots \\ r_{ii} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

有

$$
\begin{aligned}
|\det(A)| &= |\det(Q)||\det(R)| = |\det(R)| \\
&= |r_{11}||r_{22}|\cdots|r_{nn}| \\
&\leq \sqrt{{r_{11}}^2}\sqrt{{r_{12}}^2+{r_{22}}^2}\cdots\sqrt{{r_{1n}}^2+\cdots+{r_{nn}}^2} \\
&= |\beta_1||\beta_2|\cdots|\beta_n| \\
&= |Q^{-1}\alpha_1||Q^{-1}\alpha_2|\cdots|Q^{-1}\alpha_n| \\
&= |\alpha_1||\alpha_2|\cdots|\alpha_n|
\end{aligned}
$$

得证：$|\det{(A)}| \leq |\alpha_1||\alpha_2|\cdots|\alpha_n|$