2022 秋季矩阵大作业 A

学号　　　　　　　　　　　　　　姓名

一. 判断正误(20 分) (填√或×)

(1) $rank(A^H A)=rank(AA^H)=rank(A)$　　(　　)

(2) 方阵 A 的特征根λ，谱半径 $\rho(A)$ 满足 $|\lambda|\le\rho(A)\le\|A\|_1$　　(　　)

(3)设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 则有迹公式：$tr(A^H A)=tr(AA^H)=\sum|a_{ij}|^2$　　(　　)

(4)若 rank（A）=1，则 $A^+=\dfrac{1}{tr(A^H A)}A^H=\dfrac{1}{\sum|a_{ij}|^2}A^H$　　(　　)

(5)设 $A=A_{n\times p},B=B_{p\times n}$，则 AB,BA **有相同的非 0 特征根**（　　）

(6)若$A=\begin{pmatrix}0 & A_1\\ A_2 & 0\end{pmatrix}$，则　$A^+=\begin{pmatrix}0 & A_1^+\\ A_2^+ & 0\end{pmatrix}$　　(　　)

(7)若 B 是列满秩(高阵)，**C** 是行满秩，则 $B^+=(B^H B)^{-1}B^H$，$\mathbf{C^+=C^H(CC^H)^{-1}}$　(　　)

(8) 若 $A=BC$ 是满秩分解(**高低分解**)，则 $A^+=C^+B^+$　(　　)

(9) 设 $A=A_{m\times p}$ 为高阵，且有 QR 分解 $A=QR$,Q 为半优阵，$R=R_{p\times p}$ 可逆，则

$$A^+=R^+Q^+=R^{-1}Q^H\qquad(\quad)$$

(10)若 A 是酉阵($A^H A=AA^H=I$)，则 $A^+=A^{-1}=A^H$　(　　)

(11)**若 A 为半优阵(**$A^H A=I$**)，则** $A^+=A^H$ **且** $A^+A=I$　(　　)

(12)**若** A^H **为半优阵(**$AA^H=I$**)，则** $A^+=A^H$ **且** $AA^+=I$　(　　)

(13) 若 $x_0=A^+b$，**则** $A^H Ax_0=A^H b$ 一定成立（　　）　(　　)

(14) A,B 是任意矩阵，则 $(A\otimes B)^H=A^H\otimes B^H$，$(A\otimes B)^+=A^+\otimes B^+$　(　　)

(15) n 阶 Hermite 阵 A ($A^H=A$)**的特征根**$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$**全为实数**　(　　)

(16)若 A 是正规阵，则**存在酉矩阵** P 使 $P^H AP=D$ **为对角阵**.　(　　)

(17)**正规阵 A 特征根为**$\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，则它的全体奇异值为$\{|\lambda_1|,\cdots,|\lambda_n|\}$（　）

(18)**许尔定理说**：若 A 是 n 阶方阵，则存在酉阵 P 使 $P^H AP=D$ 为上三角阵　(　　)

(19) 若 Ax=b 无解(不相容), 则 $A^H A$x=A^Hb 也无解(不相容) （　　）

(20) I 是单位阵，则存在相容的矩阵范数 $\|\bullet\|$， 使得 $0<\|I\|<1$ （　　）

二. 化简与计算

1. $A=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a&1\\0&b\end{pmatrix}$, 写出张量积 $A\otimes B$ 的全体特征根:

2.已知 $A^2=A$, **化简** $e^{tA}=I+tA+\frac{t^2A^2}{2}+\frac{t^3A^3}{3!}+\cdots=?$

3.**设 A 的 QR 分解是** $A=QR$ **，其中** $Q^HQ=I$，计算 Q^HA

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2i\\i&1\end{pmatrix},(i^2=-1)$ **求 QR 分解** $A=QR$

三. 估计 $A=\begin{pmatrix}2&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&4&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&6&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&9\end{pmatrix}$ 的**谱半径** $\rho(A)$ **范围；证明** $\det(A)\geq\frac{13}{4}\times\frac{21}{4}\times\frac{33}{4}$.
A是否为单纯阵(相似于对角阵)?

四. 计算

1.设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{2}&\mathbf{4}\\\mathbf{2}&\mathbf{2}&\mathbf{4}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}$, 求 $Ax=\beta$ 最佳极小二乘解或极小范数解.

2. **设** $A=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$，化简：$A^2-A$, 且求 e^{tA}

五. 计算

1.设 $A=\begin{pmatrix}13 & 12\\12 & 13\end{pmatrix}$**，求一个 Hermite 矩阵 *B*，使** $A=B^2$

2.求 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}$的奇异值与奇异值分解 **SVD**.

六.设 A 为 n 阶**实的反对称阵** $A^H=-A\in \mathrm{R}^{n\times n}$

(1)问：$\frac{A}{i}$ 是否**为 Hermite 阵？且** $\frac{A}{i}$ **的特征根** $\{t_1,\cdots,t_n\}$ 是否都为实数？

(2)**证明** A **的特征根必为纯虚数(或 0)**，可记为$\{it_1, it_2,\cdots,it_n\}$

(3)**证明** $|\det(A+I)|\geq 1$ ； 问 $\det(A+I)\geq 1$ 是否成立？

七. 设 n 阶**方阵** $A\in \mathrm{C}^{n\times n}, A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$， α_j 为 A 中列向量.

证明 $|\det(A)|\leq|\alpha_1||\alpha_2|\cdots|\alpha_n|$**,其中**$|\alpha_j|$为模长.

(提示 1: $\det(A)\neq 0$ 时，即 A **可逆时，对** A **用 QR 分解)**