Cognoms, Nom DNI

Algorísmia QP 2015–2016

Examen final **8 de Juny de 2016**

Durada: 2h 50m

Instruccions generals:

- L'exercici 1 s'ha de resoldre fent servir l'espai reservat per a cada resposta.
- Heu d'argumentar la correctesa i eficiència dels algorismes que proposeu. Per això podeu donar una descripció d'alt nivell de l'algorisme amb les explicacions i aclariments oportuns que permetin concloure que l'algorisme es correcte i que té el cost indicat.
- Heu de justificar totes les vostres afirmacions.
- Podeu fer crides a algorismes que s'han vist a classe, però si la solució ès una variació haureu de donar els detalls.
- Es valorà especialment la claredat i concisió de la presentació.
- Entregueu per separat la resolució de cadascun dels exercicis.

Exercici 1 (4.5 punts)

(a) (0.5 punts) Sigui $G = (V, A)$ un graf no dirigit i connex. Digueu i justifiqueu si es cert que un algorisme amb complexitat $\Theta(|A| \lg |V|)$ és asimptòticament millor que un algorisme amb complexitat $\Theta(|A| \lg |A|)$

(b) (0.5 punts) Un vector conté n elements diferents i està ordenat aleatòriament amb probabilitat $1/n!$. Quin és el valor esperat de l'índex on està l'element màxim?

(c) (0.5 punts) Quines són les similituds i diferències entre les metodologies de dividir i vèncer (DiV) i programació dinàmica (PD).

(d) (0.5 punts) Digueu i **justifiqueu** si l'algorisme Ford-Fulkerson per a trobar fluxos màxims en una xarxa té complexitat polinòmica.

(e) (0.5 punts) Tenim un digraf $G = (V, E)$ on cada $e \in E$ té capacitat $c(e) = 1$, i amb una font $s \in V$ i un sumider $t \in V$. També ens donen un paràmetre $k \in \mathbb{N}$. Doneu un algorisme amb temps polinòmic per a resoldre el següent problema: Volem eliminar k arestes de G de manera que reduïm al màxim que poguem el flux $s \to t$. En altres paraules, volem trobar un $F \subseteq E$ tal que $|F| = k$ i el flux màxim $s \to t$ en $G' = (V, E - F)$ sigui el més petit possible.

(f) Donat un conjunt S d'enters i un enter x, volem determinar si existeixen dos elements a S tals que la seva suma sigui x.

i. (0.25 punts) Descriviu un algorisme $\Theta(n \log n)$ que resolgui el problema.

ii. (0.25 punts) Descriviu un algorisme que resolgui el problema en temps esperat $O(n)$.

(g) (1.5 punt) Suposem que tenim dos conjunts A i B cadascun amb n enters positius (desordenats). Podeu optar per canviar l'ordre de cada conjunt com vulgueu. Després de reordenar els conjunts, sigui a_i l'element i-èsim d'A i sigui b_i l'element i-èsim de B (després de la vostra re-ordenació). Aleshores rebeu un pagament de $\prod_{i=1}^{n} a_i^{b_i}$ bitcoins. Doneu un algorisme que maximitzi el vostre guany. Demostreu la correctesa i digueu quina és la complexitat del vostre algorisme.

Exercici 2 (3 punts)

Donada una cadena $x \in \{0,1\}^n$, escrivim x^k per a representar x copies de x concatenades (una darrera l'altra). Direm que una cadena x' és una repetició de x si existeix un $k \in \mathbb{N}$ tal que x' és un prefix de x^k (per ex. $x' = 10110110110$ és una repetició de $x = 101$.

Diem que una cadena s és una *trena* de x i y si podem particionar els símbols de s en dues subseqüències s' i s'', no necessàriament contigues, de manera que s' és una repetició de x i s'' és una repetició de y. Es a dir, cada símbol de s ha de ser a s' o a s" sense trencar l'ordre relatiu a s dels símbols. Per exemple, si $x = 101$, $y = 00$, i $s = 100010101$. s és una trena de x i y, ja que els símbols a les posicions 1,2,5,7,8,9 (=101101) són un repetició de x, i la resta dels símbols forment 000 que és una repetició de y).

Doneu un algorisme eficient tal que donades tres cadenes x, y i s decideixi si s és una trena de x i y.

Exercici 3 (2.5 punts)

Les xarxes ad-hoc, composades per dispositius sense fils de baixa potència, s'han proposat per situacions com els desastres naturals en què els coordinadors dels treballs de rescat podrien controlar les condicions en zones de difícil accés. La idea és que una gran col·lecció d'aquests dispositius sense fils es podria llançar des d'un avió en una regió per a continuació reconfigurar-se com una xarxa operativa.

Estem parlant de: (a) dispositius relativament barats, el quals (b) es llancen des d'un avió a (c) un territori perillós; i per la combinació de (a), (b) i (c), es fa necessari fer front a la fallida d'un nombre raonable dels dispositius.

Ens agradaria que fos el cas que si un dels dispositius v detecta que està en perill de fallar, transmetés una representació del seu estat a un altre dispositiu a la xarxa. Cada dispositiu té un abast de transmissió limitat, pot comunicar-se amb altres dispositius que es troben com a màxim a d metres d'ell. Com que no volem que es transmeti el seu estat a un dispositiu inoperant, hem d'incloure una mica de redundància: Un dispositiu v ha de tenir un conjunt de k altres dispositius en un radi de d metres de distància. Anomenarem a aquest conjunt una *còpia de seguretat* per al dispositiu v.

Suposeu que desprès del llançament podem obtenir les coordenades (x_i, y_i) dels n dispositius operatius que formen la xarxa inicial.

Dissenyeu un algorisme per determinar si és possible triar una còpia de seguretat per a cada dispositiu, amb la propietat addicional que, per algun paràmetre donat b, cap dispositiu apareix en la còpia de seguretat de més de b altres dispositius. L'algorisme ha de proporcionar com a sortida també els conjunts de còpia de seguretat, sempre que es puguin trobar.