Cognoms, Nom DNI

Algorísmia QT 2015–2016

Examen final **7 de Gener de 2016**

Durada: 2h 50m

Instruccions generals:

- L'exercici 1 s'ha de resoldre fent servir l'espai reservat per a cada resposta.
- Heu d'argumentar la correctesa i eficiència dels algorismes que proposeu. Per això podeu donar una descripció d'alt nivell de l'algorisme amb les explicacions i aclariments oportuns que permetin concloure que l'algorisme es correcte i que té el cost indicat.
- Heu de justificar totes les vostres afirmacions.
- Podeu fer crides a algorismes que s'han vist a classe, però si la solució és una variació haureu de donar els detalls.
- Es valorarà especialment la claredat i concisió de la presentació.
- Entregueu per separat la resolució de cadascun dels exercicis.

Exercici 1 (4.5 punts)

(a) (0.5 punts) Quines son les similituds i diferències entre les metodologies de dividir i vèncer (DiV) i programació dinàmica (PD).

(b) (0.5 punts) Sigui $G = (V, E)$ un graf no dirigit amb pesos $w : E \to \mathbb{N}$ on cada aresta té un pes diferent. Sigui $S \subseteq V$ i sigui (u, v) una aresta del tall $(S, V - S)$ amb pes mínim entre les arestes del tall $(S, V - S)$. Justifiqueu si l'afirmació *el MST de G ha d'incloure l'aresta (u, v)* és certa o falsa.

(c) (0.5 punts) Decidiu i justifiqueu si l'enunciat següent és cert o fals: *Tenim una xarxa $(G = (V, E), s, t, \{c(e)\}_{e \in E})$ amb $\forall e \in E$, $c(e) \in \mathbb{N}^+$, si f és un flux màxim a G, aleshores f satura tota aresta que surt de s. Es a dir, $\forall (s, v) \in E$, $f(s, v) = c(s, v)$.*

(d) (0.5) Quins dels algorismes per càlcul de distàncies son correctes quan el pes de les arestes del graf pot ser negatiu.

(e) (0.5 punts) Pot ser que en un codi de Huffman, quan tots els caràcters tenen freqüències $< 1/3$, existeixi un caràcter que es pot codificar amb longitud 1?

(f) (0.5 punts) Un nen està fent servir l'algorisme següent per conduir un robot,

Funcio CAMINAR-(n)
  si $n \leq 1$ aturar-se
  si no
    caminar nord n metres
    caminar est n metres
    caminar sud n metres
    caminar oest $n-1$ metres
    caminar nord 1 metre
    CAMINAR $(n-2)$
  fsi

Sigui $C(n)$ el nombre de metres que el robot camina quan executem l'algorisme amb paràmetre n. Doneu una estimació asimptòtica del valor de $C(n)$, amb condició inicial $C(0) = 0$ i n parell.

(g) Sigui $G = (V, E)$ un graf no dirigit. Un subconjunt $C \subseteq V$ s'anomena *recobriment de vèrtexs* si per a tota aresta $(u, v) \in E$ tenim que $\{u, v\} \cap C \neq \emptyset$. Donat $G = (V, E)$, un recobriment de vèrtexs C és diu que és *minimal* si per qualsevol $C' \subseteq V$ a G, tal que $C' \subset C$ hem de tenir que C' no és un recobriment de vèrtexs. Un conjunt $C \subset V$ és un *recobriment de vèrtexs mínim* si C és un recobriment de vèrtexs a G amb mínima cardinalitat. (Quan G és un arbre, hi ha un algorisme polinòmic per a trobar un recobriment de vèrtexs mínim a G, però per a G generals, el problema és NP-hard). En aquest problema demostrareu que a diferència de trobar un recobriment de vèrtexs mínim, el problema de trobar un recobriment de vèrtexs minimal por ser resolt en temps polinòmic.

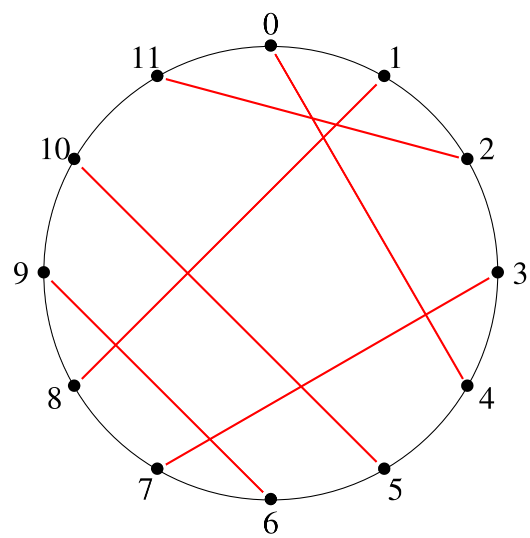
- (0.25 punts) Demostreu que un recobriment de vèrtexs minimal no té perquè ser un recobriment de vèrtexs mínim.

- (0.25 punts) Demostreu que tot recobriment de vèrtexs mínim també és minimal.

- (1 punt) Doneu un algorisme polinòmic que troba un recobriment de vèrtexs minimal a G.

Exercici 2 (3 punts)
Donat un conjunt de n cordes en el cercle unitat diem que un subconjunt de cordes es *viable* si no hi han dues cordes que es tallen. Volem trobar un subconjunt viable amb mida màxima.

Per resoldre el problema assumim que mai dues cordes tenen un extrem en comú. Per això podem enumerar els extrems de les n cordes de 0 a $2n-1$ seguint el sentit de les agulles del rellotge. Aleshores, l'entrada del problema consisteix en una seqüència de n parelles dels nombres $0, \ldots 2n-1$ on cada i, $0 \leq i \leq 2n-1$, apareix exactament en una parella. La parella (i,j) representa la corda amb extrems i i j. A la figura següent teniu un exemple de instancia amb 6 cordes:



l'entrada corresponent és $(0,4), (1,8)(11,2), (3,7), (5,10), (9,6)$.

Per $0 \leq i < j \leq 2n-1$, definim $T(i,j)$ com la mida del subconjunt viable més gran que es pot formar amb el conjunt de les cordes (a,b) tals que $i \leq a, b \leq j$.

(a) Per $0 \leq i < j \leq 2n-1$, proporcioneu una recurrència que permeti calcular $T(i,j)$.

(b) Proporcioneu un algorisme que, donat un conjunt de cordes en el cercle unitat, obtingui un conjunt viable amb mida màxima en temps polinòmic.

Exercici 3 (2.5 punts)

Un grup d'amics lloguen entre tots una embarcació d'esbarjo per sortir junts a navegar. Cada vegada que es fa un viatge cal que un dels usuaris (el mateix durant tot el viatge) s'encarregui de preparar el vaixell, n'assumeixi la conducció i l'atracada. També haurà de fer-se responsable de la neteja i reparació de desperfectes apareguts durant el viatge. A aquesta persona l'anomenem *responsable* del viatge. A ningú li ve de gust ser responsable i la nostra tasca és fer una assignació *justa* respecte de l'ús que fa cadascuna de les persones del grup.

Hi ha dos elements que semblen raonables a l'hora de definir una assignació justa. Si una persona fa servir el vaixell moltes vegades, també hauria de ser responsable moltes vegades. D'altra banda, si una persona fa servir el vaixell en dies en què poques persones volen usar-lo, això també hauria d'incrementar el nombre de vegades que és responsable. Si no veus clar aquest segon criteri, pensa en el cas que 2 persones viatgen 20 vegades juntes i amb ningú més. És lògic que en siguin responsables 10 vegades cadascuna. Si per altra banda hi ha 20 persones que viatgen 20 vegades juntes, i amb ningú més, és natural que els toqui ser responsable un cop a cadascuna d'elles.

Suposem que una persona viatja r vegades. En el seu primer viatge hi ha k_1 passatgers, en el segon k_2, i així fins k_r. Sembla just que a aquesta persona sigui responsable $S = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{k_j}$ vegades. Com que aquest número pot no ser sencer, ens conformarem amb que sigui responsable com a molt $\lceil S \rceil$ vegades. Si això passa per a tothom, direm que la assignació és justa.

Assumim que el grup està format per un conjunt A de m amics, $A = \{1, \dots m\}$. L'entrada del problema correspon a la informació de n viatges. Per a cada viatge i, s'ens dona el conjunt $V_i \subseteq A$ de viatgers.

(a) Demostreu que per a qualsevol entrada $V_1, \dots, V_n$, hi ha una assignació justa.

(b) Proporcioneu un algorisme de cost polinòmic en n i m que proporcioni una assignació de responsable per a cadascun dels n viatges que sigui justa.