

Numerische Strömungssimulation

Praktikumsbericht

Institut für Technische Verbrennung
RWTH Aachen

im Studiengang Computational Engineering Science
im 6. Semester

vorgelegt von

Konstantin Key
332 523

5. August 2016

Betreuer: Dr.-Ing. Bernd Binninger

Konstantin Key
Matrikelnummer: 332 523

Abstrakt

Der vorliegende Praktikumsbericht gibt einen Überblick über die im Fach Numerische Strömungssimulation erstellten Strömungslöser der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen.

Das Dokument ist in mehrere einzelne Projekte unterteilt, die sich schrittweise zu den endgültigen Lösern vervollständigen. In diesem Bericht werden die Modellierung der strömungsmechanischen Probleme, deren resultierende mathematische Beschreibung und die numerischen Verfahren zur Approximation der Lösung besprochen. Besonderes Augenmerk wird im Weiteren auf die Validierung der implementierten Algorithmen gelegt, indem die vom Computer gelieferten Ergebnisse für einfache Probleme mit deren analytischen Lösungen verglichen werden. Des Weiteren werden im letzten Kapitel Anwendungsfälle dargestellt, bei denen die Ergebnisse der Approximationen für komplexere, reale Problemstellungen diskutiert werden.

Als Erstes werden zweidimensionale, inkompressive, reibungs- und wirbelfreie Strömungen mithilfe der Potentialtheorie bearbeitet und die Lösung der resultierenden partiellen Differentialgleichung durch Diskretisierung mittels Finiter Differenzen approximiert. Hierbei werden zuerst kartesische und anschließend krummlinig berandete Integrationsgebiete verwendet.

Im zweiten Teil des Programmierpraktikums werden sodann auch reibungsbehaftete Strömungen betrachtet. Ein auf der Finite-Volumen-Methode basierender Löser verwendet zuerst gegebene Geschwindigkeiten, errechnet dann das zu einem gegebenen Druckfeld passende Geschwindigkeitsfeld, um schlussendlich sowohl Druck- als auch Geschwindigkeitsverteilung selbstständig zu bestimmen. Auf der Grundlage dieses Strömungszustandes erfolgt der Transport eines passiven Skalars.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	V
Tabellenverzeichnis	VII
1 Einleitung	1
2 Potentialströmung	2
2.1 Aufgabenstellung	2
2.2 Mathematische Modellbildung	2
2.2.1 Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes	3
2.2.2 Berechnung des Druckfeldes	4
2.2.3 Randbedingungen	4
2.3 Diskretisierung	4
2.4 Lösen des Gleichungssystems	6
2.5 Konvergenzanalyse	8
2.5.1 Konsistenz	8
2.5.2 Stabilität	8
2.6 Validierung des Programms	9
2.6.1 Parallelströmung	9
2.6.2 Ebene Staupunktströmung	10
2.6.3 Quelle/Senke	10
2.6.4 Potentialwirbel	11
2.6.5 Dipol	12
3 Konvektions-Diffusions-Gleichung	14
3.1 Aufgabenstellung	14
3.2 Mathematische Modellbildung	14
3.3 Diskretisierung	15
3.3.1 Finite Volumen	15
3.3.2 Numerischer Fluss	16
3.3.2.1 Flusskomponenten	16
3.3.3 Zeitliche Evolution der Lösung	17
3.3.4 Upwind-Diskretisierung	17
3.3.4.1 Höhere Ordnung	18
3.3.5 Vereinheitlichte Programmierung	18
3.4 Validierung des Programms	19
3.4.1 Konvektion	19
3.4.2 Diffusion	21
3.4.3 Konvektion-Diffusion	23
3.4.4 Neumann-Ränder	23
3.4.5 Quellen	24

4 Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes	25
4.1 Aufgabenstellung	25
4.2 Mathematische Modellbildung	25
4.3 Diskretisierung	25
5 Berechnung des Druck- und Geschwindigkeitsfeldes	27
5.1 Aufgabenstellung	27
5.2 Mathematische Modellbildung und Diskretisierung	27
6 Anwendungsfälle	30
6.1 Finite Differenzen: Potentialströmung - Kanalströmung	30
6.2 Finite Volumen: verschiedene Anwendungsfälle	36
6.2.1 Berechnung des Transports eines Skalars	36
6.2.1.1 Flussströmung mit Ein- und Abflussrohr am Rand	36
6.2.1.2 Flussströmung mit Ein- und Abflussrohr in der Mitte	37
6.2.2 Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes bei gegebenem Druck	39
6.2.2.1 Couette-Strömung	39
6.2.2.2 Poiseuille-Strömung	39
6.2.3 Berechnung des Druck- und Geschwindigkeitsfeldes mit Hilfe des SIMPLER-Algorithmus	41
6.2.3.1 Couette-Strömung	41
6.2.3.2 Gartenschlauch	41
6.2.3.3 Festkörperrotation	42
6.2.3.4 Driven Cavity	43
6.2.3.5 Kanalvergrößerung	47
6.2.3.6 Kanalwand	48
6.2.3.7 Messblende	49
6.2.3.8 Umströmter Zylinder	50

Abbildungsverzeichnis

2.1	Äquipotentiallinien, Parallelströmung	9
2.2	Stromlinien, Parallelströmung	9
2.3	Äquipotentiallinien, Ebene Staupunktströmung	10
2.4	Stromlinien, Ebene Staupunktströmung	10
2.5	Äquipotentiallinien, Quelle	11
2.6	Stromlinien, Quelle	11
2.7	Äquipotentiallinien, Senke	11
2.8	Stromlinien, Senke	11
2.9	Äquipotentiallinien, Potentialwirbel	12
2.10	Stromlinien, Potentialwirbel	12
2.11	Äquipotentiallinien, Dipol	13
2.12	Stromlinien, Dipol	13
3.1	Zentrale-Differenzen-Methode, stationäre Endlösung	20
3.2	Upwind-Methode, stationäre Endlösung	20
3.3	Upwind-Methode, Initialzustand	20
3.4	Upwind-Methode, stationäre Endlösung ($v = 0$)	20
3.5	Upwind-Methode, Initialzustand	21
3.6	Upwind-Methode, stationäre Endlösung ($u = 0$)	21
3.8	zeitliche Evolution konvektiver Strömung	21
3.9	Initialwerte	22
3.10	stationäre Endlösung	22
3.12	zeitliche Evolution diffusiver Strömung	22
3.14	zeitliche Evolution konvektiv-diffusiver Strömung	23
3.16	zeitliche Evolution konvektiver Strömung mit Neumann-Rändern	24
3.18	zeitliche Evolution des diffusiven Prozesses mit Quelle und Senke	24
6.1	Kanal 1: Äquipotential- und Stromlinien	31
6.2	Kanal 1: Geschwindigkeitsfeld	31
6.3	Kanal 1: Druckfeld	32
6.4	Kanal 2: Äquipotential- und Stromlinien	32
6.5	Kanal 2: Geschwindigkeitsfeld	33
6.6	Kanal 3: Äquipotential- und Stromlinien	33
6.7	Kanal 3: Geschwindigkeitsfeld	34
6.8	Kanal 4: Äquipotential- und Stromlinien	34
6.9	Kanal 4: Geschwindigkeitsfeld	35
6.10	Kanal 2: erzeugtes/berechnetes Gitter	35
6.12	Vergleich Flussströmungen: links mit Quelle, rechts mit Quelle und Senke	37
6.14	Vergleich Flussströmungen mit verschiedenen Ergiebigkeiten der Quellen und Senken	38
6.15	Couette-Strömung: stationärer Endzustand	39
6.16	Poiseuille-Strömung: gegebenes Druckfeld	40

Abbildungsverzeichnis

6.17 Poiseuille-Strömung: gegebene Anfangswerte des Geschwindigkeitsfeldes	40
6.18 Poiseuille-Strömung: stationärer Endzustand	41
6.19 Gartenschlauch: Geschwindigkeits- und Druckfeld	41
6.20 Festkörperrotation: Druckfeld	43
6.21 Festkörperrotation: Geschwindigkeitsfeld	43
6.22 Driven Cavity: $Re=100$, Geschwindigkeitsfeld	44
6.23 Driven Cavity: $Re=100$, Druckfeld	44
6.24 Driven Cavity: $Re=400$, Geschwindigkeitsfeld	45
6.25 Driven Cavity: $Re=400$, Druckfeld	45
6.26 Driven Cavity: $Re=400$, mit Kanalströmung	46
6.27 Driven Cavity: $Re=1600$, Druck- und Geschwindigkeitsfeld	46
6.28 Driven Cavity: $Re=3200$, Druck- und Geschwindigkeitsfeld	47
6.29 Kanalvergrößerung: Druck- und Geschwindigkeitsfeld	48
6.30 Kanalvergrößerung: Geschwindigkeitsfeld	48
6.31 Kanalwand: Druckfeld	49
6.32 Kanalwand: Geschwindigkeitsfeld	49
6.33 Messblende: Druck- und Geschwindigkeitsfeld	50
6.34 Umströmter Zylinder: $Re \approx 1000$, Geschwindigkeitsfeld	50
6.35 Umströmter Zylinder: Geschwindigkeitsfeld	51

Tabellenverzeichnis

3.1 Einflussgebiet von Zelle i, j	18
3.2 Berechnung von $A(Pe)$	19

Kapitel 1

Einleitung

Dieser Bereich bezieht sich an mehreren Stellen auf die Vorlesungsfolien zum Fach Numerische Strömungssimulation von Dr.-Ing. Bernd Binninger. Um den Text übersichtlich zu halten ist nicht an jeder Stelle ein Verweis auf jene Folien angeführt, deshalb wird nur an dieser Stelle hierauf verwiesen. Dieser Praktikumsbericht kann allerdings in sämtlichen Kapiteln und Unterkapiteln als eigenständiger Bericht aufgefasst werden, indem alle wichtigen Formeln, Erläuterungen und Herleitungen aufgeführt werden.

Weiterhin werden an mehreren Stellen physikalische Größen, wie beispielsweise Länge, Geschwindigkeit, etc., verwendet. Es ist absichtlich auf Einheiten verzichtet worden, da die numerischen Resultate hier unabhängig von den Einheiten der physikalischen Größen sind. Solange diese Größen alle in den selben Einheiten dargestellt werden, können die numerischen Ergebnisse dennoch als sinnvoll angesehen werden.

Kapitel 2

Potentialströmung

2.1 Aufgabenstellung

Ziel ist es, die Verteilung von Potential- und Stromfunktionswerten numerisch auf einem krummlinigen Integrationsgebiet mithilfe eines iterativen Gleichungslösers zu bestimmen, denn damit sind gleichzeitig die Geschwindigkeits- und Druckverteilung festgelegt. Das zugrundeliegende physikalisch idealisierte Problem ist eine zweidimensionale, inkompressible, reibungs- und wirbelfreie Strömung in einem Kanal veränderlichen Querschnittes.

Im Folgenden wird dargestellt, wie dieses Problem mathematisch modelliert, anschließend diskretisiert und schließlich numerisch gelöst worden ist. Danach werden die numerischen Verfahren und die Resultate diskutiert bzw. validiert.

2.2 Mathematische Modellbildung

Das strömende Fluid wird als Kontinuum angenommen, das heißt das Grenzwerte wie

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta V}, \quad (2.1)$$

wobei Φ eine Zustandsgröße und ΔV ein Volumen darstellen, angenommen werden. Ein Beispiel hierfür ist die Dichte ρ :

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}, \quad (2.2)$$

wobei m die Masse ist. Da im Folgenden eine Kanalströmung simuliert werden soll, ist das Grenzvolumen klein im Gegensatz zu den relevanten Abmessungen des Kanals, aber dennoch groß genug gegenüber der Größe der Moleküle und Atome des Fluids. Somit ist die Annahme eines Kontinuums für das Fluid durchaus gerechtfertigt.

Im Folgenden betrachten wir die Impulsgleichung für ein inkompressibles Fluid:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \nu \Delta \vec{v}. \quad (2.3)$$

Die linke Seite dieser Gleichung spiegelt die substantielle Beschleunigung, welche sich aus lokaler und konvektiver Beschleunigung zusammensetzt, wider. Die rechte Seite setzt sich aus der Summe von Druck-, Volumen- (in diesem Fall Gewichts-) und Reibungskräften zusammen.

Wendet man nun die mathematische Operation der Rotation auf beide Seiten der Gleichungen an, erhält man unter der Annahme konstanter Zähigkeit ν die sogenannte Wirbeltransportgleichung:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \text{rot}(\vec{v} \times \vec{\omega}) = \nu \cdot \Delta \vec{\omega}, \quad (2.4)$$

wobei folgende Identitäten/Definitionen benutzt worden sind:

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \nabla \frac{\vec{v}^2}{2} - \vec{v} \times \text{rot}(\vec{v}), \quad (2.5)$$

$$\vec{g} = -\nabla U, \quad (2.6)$$

$$\text{rot}(\nabla(\bullet)) = \vec{0}, \quad (2.7)$$

$$\omega := \text{rot}(\vec{v}), \quad (2.8)$$

mit einem Potential U .

Für die zu simulierenden Potentialströmungen wird angesetzt:

$$\vec{v} := \nabla \Phi, \text{ oder} \quad (2.9)$$

$$\vec{v} := \text{rot} \vec{\Psi}, \quad (2.10)$$

mit Potentialfunktion Φ und Stromfunktion Ψ . Es werden nun Bestimmungsgleichungen für diese beiden neuen Größen benötigt.

Man sieht, dass für den stationären und inkompressiblen Fall Φ (2.4) erfüllt, da $\text{rot}(\vec{v}) = \text{rot}(\nabla \Phi) = \vec{0}$. Die Potentialfunktion erfüllt also automatisch die Drehungsfreiheit. Die Bestimmungsgleichung ergibt sich demnach aus der Kontinuitätsgleichung für ein inkompressibles Fluid ($\rho = \text{const}$):

$$\text{div}(\vec{v}) = 0. \quad (2.11)$$

Dies führt zu der Bestimmungsgleichung

$$\text{div}(\nabla \Phi) = \Delta \Phi = 0. \quad (2.12)$$

Für die Stromfunktion Ψ ist es genau der andere Fall. Das Vektorpotential $\vec{\Psi}$ erfüllt wegen $\text{div}(\text{rot} \vec{\Psi}) = 0$ bereits (2.11), somit folgt die Bestimmungsgleichung der dritten Komponente des Potentials (zweidimensionale Strömung) hier aus der Forderung nach Rotationsfreiheit der Strömung:

$$\Delta \Psi = 0. \quad (2.13)$$

2.2.1 Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes

Aus den Definitionen (2.9) und (2.10) folgt direkt die Formel zur Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes innerhalb des zweidimensionalen Integrationsgebietes:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (2.14)$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (2.15)$$

wobei u die Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung, und v die Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung darstellt.

2.2.2 Berechnung des Druckfeldes

Zur Berechnung des Druckfeldes wird die Bernoullische Gleichung für den stationären Fall betrachtet:

$$\rho \frac{|\vec{v}|^2}{2} + p + \rho U \equiv \text{const}, \quad (2.16)$$

Es folgt, da keine freien Oberflächen in dem Problem auftreten, dass sich das Schwerepotential und der hydrostatische Druck gerade gegeneinander aufheben. Bezeichne p nun nur mehr den dynamischen Druck, so ändert sich die Gleichung zu:

$$\rho \frac{|\vec{v}|^2}{2} + p \equiv \text{const}. \quad (2.17)$$

Für den Druckbeiwert, mit welchem das Druckfeld charakterisiert bzw. beschrieben wird, folgt daraus:

$$c_p = \frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} |\vec{v}_{ref}|^2} = \frac{p - p_{ref}}{\frac{\rho}{2} |\vec{v}_{ref}|^2} = 1 - \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{v}_{ref}|^2}. \quad (2.18)$$

Als Referenzgeschwindigkeit in x -Richtung kann beispielsweise die Einströmgeschwindigkeit u_∞ des Fluids in den Kanal verwendet werden.

2.2.3 Randbedingungen

Die hier relevanten Randbedingungen sind

- Ein- bzw. Ausströmränder
- Undurchlässige Wände.

Für den ersten Fall gibt man als Randbedingungen an den jeweiligen Rändern die Geschwindigkeit vor. Aus (2.14) und (2.15) folgt direkt, dass

$$u_{Rand} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{Rand} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)_{Rand}, \quad (2.19)$$

$$v_{Rand} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{Rand} = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{Rand}. \quad (2.20)$$

Für den Fall undurchlässiger Wände, wie bei der Kanalströmung, werden andere Randbedingungen benötigt. In der Potentialtheorie werden Konturen mithilfe von Stromlinien dargestellt. Aus der Definition der Stromlinien folgt für eine Wand, die mit der Funktion $h(x)$ beschrieben wird und mit Hilfe von (2.14) und (2.15), dass

$$\frac{dh}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}} = - \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\frac{\partial \Psi}{\partial y}}. \quad (2.21)$$

2.3 Diskretisierung

Es wird zunächst ein rechteckiges, zweidimensionales Integrationsgebiet der Dimensionen $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$ betrachtet. Dieses wird nun in x -Richtung in I Intervalle unterteilt,

in y-Richtung in J Intervalle. Diese Intervalle werden zunächst als äquidistant verteilt angenommen. Somit folgt für die Gitterschrittweiten:

$$\Delta x = \frac{1}{I-1}, \quad \Delta y = \frac{1}{J-1}. \quad (2.22)$$

In dem im Folgenden hergeleiteten Algorithmus wird an jedem inneren Gitterpunkt ein Wert für die Potential- und Stromfunktion berechnet.

Die für dieses Problem verwendete Diskretisierung benutzt Finite Differenzen. Für die ersten und zweiten Ableitungen von $\Phi = \Phi(x, y)$ werden bei äquidistanten Gittern folgende Differenzenausdrücke verwendet, welche beide zweiter Ordnung sind (s. Taylorentwicklung):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \approx \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2\Delta x}, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \approx \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \quad (2.24)$$

analog für die y-Ableitung und die Ableitungen der Stromfunktion.

Setzt man diese Approximationen nun in die zwei Gleichungen (2.12) und (2.13) ein, so folgen die Diskretisierungen der Potential- und Stromfunktionsgleichungen:

$$0 \stackrel{!}{=} \Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \approx \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\cdot\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{\Delta y^2}, \quad (2.25)$$

$$0 \stackrel{!}{=} \Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \approx \frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Psi_{i,j+1} - 2\cdot\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{\Delta y^2}, \quad (2.26)$$

für alle i, j . Dies stellt ein algebraisches Gleichungssystem dar, welches iterativ gelöst werden kann (vgl. Kapitel 2.4).

Jetzt wird der Übergang zu einem krummlinigen Integrationsgebiet, wie es zum Beispiel bei Kanälen vorkommt, vollzogen. Anstatt die Differenzenausdrücke entsprechend abzuändern, wird die physikalische x - y -Ebene in den Rechenraum ξ - η transformiert. Die transformierte Ebene ist hierbei wieder rechteckig und äquidistant unterteilt. Als Vereinfachungen werden die daraus resultierenden Gitterzellgrößen $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ auf 1 gesetzt, so dass man bei den Differenzenausdrücken keine rechenintensive Division durch diese Zellgrößen in Kauf nehmen muss und der Quellcode übersichtlicher gehalten werden kann. Die folgenden Transformationsvorschriften sind zu benutzen:

$$\xi(x, y) = (I-1) \cdot \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}, \quad \eta(x, y) = (J-1) \frac{y - h_u(x)}{h_o(x) - h_u(x)}, \quad (2.27)$$

$$x(\xi, \eta) = x_{min} + \frac{x_{max} - x_{min}}{I-1} \cdot \xi, \quad y(\xi, \eta) = h_u(x) + \frac{h_o(x) - h_u(x)}{J-1} \eta, \quad (2.28)$$

wobei $h_u(x)$ die untere und $h_o(x)$ die obere Kontur des Kanals beschreibt. Als Ein- und Ausströmränder werden immer im x - y -Koordinatensystem vertikale Ränder verwendet.

Aufgrund der Transformation ändern sich nun auch die Differenzenausdrücke aus (2.23) und (2.24). Mit Hilfe der Kettenregel folgt beispielsweise für die erste Ableitung:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bullet} = \frac{\partial \xi}{\partial \bullet} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \bullet} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}. \quad (2.29)$$

Setzt man dies für die zweiten Ableitungen in beide Richtungen fort, so ergibt sich eine neue Diskretisierung der Potentialgleichung (vgl. (2.25)):

$$0 \stackrel{!}{=} \Delta \Phi \approx \left(\alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \alpha_4 \frac{\partial}{\partial \xi} + \alpha_5 \frac{\partial}{\partial \eta} + \alpha_6 \right) \Phi, \quad (2.30)$$

mit den Koeffizienten

$$\alpha_1 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2, \quad (2.31)$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2, \quad (2.32)$$

$$\alpha_3 = 2 \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right], \quad (2.33)$$

$$\alpha_4 = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}, \quad (2.34)$$

$$\alpha_5 = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}, \quad (2.35)$$

$$\alpha_6 = 0. \quad (2.36)$$

Für die Randbedingungen an der oberen und unteren Kontur (siehe (2.21)) ist in η -Richtung die Bildung zentraler Differenzen nicht möglich, da nur Werte in einer Richtung bekannt sind und die Werte in der anderen Richtung außerhalb des Integrationsgebietes liegen. Für den Fall werden die einseitigen Differenzenausdrücke verwendet:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)_{i,j} \approx \frac{-\Phi_{i,j+2} + 4\Phi_{i,j+1} - 3\Phi_{i,j}}{2\Delta\eta}, \quad (2.37)$$

wobei $\Delta\eta = 1$ gesetzt worden ist (s.o.). Dieser Differenzenquotient ist ebenfalls zweiter Ordnung (s. Taylorentwicklung), so dass die Ordnung der Diskretisierung erhalten bleibt. Analog ergeben sich die Differenzenausdrücke an der oberen Kontur mit umgekehrten Vorzeichen.

Für die Randbedingungen oben und unten im transformierten Raum ergibt sich mit (2.21) folgender Ausdruck:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}}. \quad (2.38)$$

Setzt man nun (2.37) bzw. (2.38) hier ein und formt nach $\Phi_{i,j}$ um, so ergibt sich folgende Diskretisierung der Randbedingung an der unteren Kontur:

$$\Phi_{i,j} = \frac{\frac{dh}{dx} \left[(\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}) \frac{\partial \xi}{\partial x} + (-\Phi_{i,j+2} + 4\Phi_{i,j+1}) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] - (\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}) \frac{\partial \xi}{\partial y} - (-\Phi_{i,j+2} + 4\Phi_{i,j+1}) \frac{\partial \eta}{\partial y}}{3 \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{dh}{dx} - 3 \frac{\partial \eta}{\partial y}}, \quad (2.39)$$

analog für die obere Kontur.

2.4 Lösen des Gleichungssystems

In Kapitel 2.3 ist dargelegt worden, wie das zu dem Problem passende Gleichungssystem aufgestellt wird. Nun werden kurz drei Strategien aufgezeigt, wie man dieses LGS¹ lösen kann. Es werden ausschließlich iterative Löser verwendet.

Die erste Möglichkeit das LGS zu lösen, ist mittels des Jacobi-Verfahrens. Dieses Verfahren berechnet jede Aktualisierung der Lösung nur auf Grundlage der Werte aus dem vorherigen

¹LGS: Lineares Gleichungssystem

Iterationsschritt. Betrachtet man beispielsweise Gleichung (2.25), so ergibt sich, nach Auflösen nach $\Phi_{i,j}$, folgende Formel für das Jacobi-Verfahren, wobei k den Iterationsindex bezeichnet:

$$\Phi_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} [\Delta y^2 (\Phi_{i+1,j}^k + \Phi_{i-1,j}^k) + \Delta x^2 (\Phi_{i,j+1}^k + \Phi_{i,j-1}^k)]. \quad (2.40)$$

Hieran ist erkennbar, dass der neue Wert (Index $k+1$) lediglich von alten Werten (Index k) abhängt.

Der Gauss-Seidel-Algorithmus berechnet in einem Iterationsschritt neue Werte wie beim Jacobi-Verfahren. Nun werden aber die im aktuellen Iterationsschritt bereits berechneten Werte für die Berechnung derer des neuen Zeitschritts verwendet. Ähnlich zum Jacobi-Verfahren, sieht die Berechnung nun wie folgt aus, wenn das i - j -Gebiet zeilenweise durchlaufen wird:

$$\Phi_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} [\Delta y^2 (\Phi_{i+1,j}^k + \Phi_{i-1,j}^{k+1}) + \Delta x^2 (\Phi_{i,j+1}^k + \Phi_{i,j-1}^{k+1})]. \quad (2.41)$$

Für diese beiden Löser ist ebenfalls eine Relaxation implementiert, so dass:

$$\Phi_{i,j}^{k+1}|_{\text{relax}} = \Phi_{i,j}^k + \beta \cdot (\Phi_{i,j}^{k+1} - \Phi_{i,j}^k). \quad (2.42)$$

Der Relaxationsparameter β ist vom Benutzer zu setzen.

Im Gegensatz zu den gerade beschriebenen expliziten Lösern gibt es noch die Möglichkeit den impliziten Thomas-Algorithmus zu verwenden. Dieser Algorithmus ist auf tridiagonale Matrizen anwendbar:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{N-1} & \\ 0 & & a_N & b_N & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

In einem Iterationsschritt werden zunächst alle Koeffizienten der Matrix des LGSs modifiziert (Quelle: Wikipedia):

$$c'_i = \begin{cases} \frac{c_1}{b_1} & , i = 1 \\ \frac{c_i}{b_i - c'_{i-1}a_i} & , i = 2, 3, \dots, N-1, \end{cases} \quad (2.44)$$

$$d'_i = \begin{cases} \frac{d_1}{b_1} & , i = 1 \\ \frac{d_i - d'_{i-1}a_i}{b_i - c'_{i-1}a_i} & , i = 2, 3, \dots, N. \end{cases} \quad (2.45)$$

In einem zweiten Schritt werden die Unbekannten mittels Rückwärts-Einsetzen berechnet:

$$x_n = d'_n, \quad (2.46)$$

$$x_i = d'_i - c'_i x_{i+1} \quad , i = N-1, N-2, \dots, 1. \quad (2.47)$$

Dieser Einzelschritt-Linien-Algorithmus benötigt $\mathcal{O}(n)$ Operationen und löst zur Symmetrierung des Rechenablaufs alternierend entlang x - und y -Linien.

2.5 Konvergenzanalyse

Die Konvergenz der Methode folgt aus der Konsistenz und Stabilität (Lax'sches Äquivalenzkriterium). Beides wird nun getrennt überprüft.

2.5.1 Konsistenz

Es folgt eine Konsistenzuntersuchung für die in Abschnitt 2.3 diskretisierte Laplace-Gleichung (vgl. 2.25). Mittels Taylorentwicklung folgt:

$$\Phi_{i\pm 1,j} = \Phi_{i,j} \pm \frac{\partial \Phi}{\partial x}|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}|_{i,j} \Delta x^2 \pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3}|_{i,j} \Delta x^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4}|_{i,j} \Delta x^4 \pm \frac{1}{120} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial x^5}|_{i,j} \Delta x^5 + \mathcal{O}(\Delta x^6) \quad (2.48)$$

$$\Phi_{i,j\pm 1} = \Phi_{i,j} \pm \frac{\partial \Phi}{\partial y}|_{i,j} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}|_{i,j} \Delta y^2 \pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3}|_{i,j} \Delta y^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4}|_{i,j} \Delta y^4 \pm \frac{1}{120} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial y^5}|_{i,j} \Delta y^5 + \mathcal{O}(\Delta y^6). \quad (2.49)$$

Setzt man nun diese Taylorentwicklungen in (2.25) ein, so erhält man nach Kürzen, Umstellen und Grenzwertbildung:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2) \stackrel{!}{\approx} 0. \quad (2.50)$$

Somit gibt die Differenzenlösung eine hinreichend genaue Lösung für Gleichung (2.12). Gleiches folgt für die Stromfunktion Ψ .

2.5.2 Stabilität

Für Stabilität wird die von-Neumann Stabilitätsanalyse beispielhaft für das Jacobi-Verfahren angewendet. Es soll gelten:

$$|G^k| \leq 1, \quad (2.51)$$

mit Verstärkungsfaktor $G^k := \frac{\zeta_{i,j}^{k+1}}{\zeta_{i,j}^k}$ und Fehler $\zeta_{i,j}^k := \tilde{\Phi}_{i,j}^k - \Phi_{i,j}^k$, sprich die Differenz aus im Computer dargestellter Lösung und numerischer Lösung bei exakter Rechnung. Mittels Fourier-Transformation $\zeta_{i,j}^k = V_\nu^k e^{\sqrt{-1}(\nu_x i \Delta x + \nu_y j \Delta y)}$ folgt beispielsweise für das Jacobi-Verfahren (siehe (2.40)) nach Einsetzen und Umstellen:

$$\frac{V_\nu^{k+1}}{V_\nu^k} = \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} [\Delta y^2 \cos(\nu_x \Delta x) + \Delta x^2 \cos(\nu_y \Delta y)], \quad (2.52)$$

wobei $\cos(x) = \frac{e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}}{2}$ verwendet worden ist. Für Stabilität muss nun gelten, dass $|\frac{V_\nu^{k+1}}{V_\nu^k}| \leq 1$ ist. Mittels der Abschätzung $|\cos(x)| \leq 1$ folgt, dass

$$|\frac{V_\nu^{k+1}}{V_\nu^k}| \leq \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} [\Delta y^2 + \Delta x^2] = 1, \quad (2.53)$$

da Δx und Δy stets positiv sind. Somit ist die Stabilität des Jacobi-Verfahrens nachgewiesen.

2.6 Validierung des Programms

Zunächst werden die Ergebnisse für einzelne Potentialströmungen diskutiert bzw. validiert. Für jede individuelle Potentialströmung werden drei Testfälle diskutiert:

1. Zunächst wird ein Gebiet der Größe $[0, 1] \times [0, 1]$ in 3×3 Zellen unterteilt. Der berechnete Wert in der mittleren Zelle, wo keine Randwerte festgeschrieben sind, wird mit der analytischen Lösung verglichen,
2. Auf einem 50×50 -Gitter werden als Anfangsdaten bereits die Werte der analytischen Lösung vorgegeben. Da dies das Endergebnis ist, sollte keine Iteration ausgeführt werden.
3. Es werden die Äquipotentiallinien und Stromlinien visualisiert. Die Grafiken werden mit den analytischen Lösungen verglichen.

2.6.1 Parallelströmung

1. Es gilt $u_\infty = 5$ und $v_\infty = 3$. Die analytische Lösung besagt, dass für die mittlere Zelle folgende Werte angenommen werden müssen: $\Phi = 4$, $\Psi = 1$. Dies stimmt mit der berechneten Lösung überein, das maximale Residuum beträgt bei beiden Berechnungen $0.00e + 00$, was Maschinengenauigkeit entspricht. Es wurden je zwei Gauss-Seidel-Iterationen ausgeführt.
2. Die analytischen Werte berechnen sich nach den Formeln:

$$\Phi = u_\infty x + v_\infty y, \quad (2.54)$$

$$\Psi = -v_\infty x + u_\infty y. \quad (2.55)$$

Es wird kein Iterationsschritt ausgeführt.

3. Visualisierungen:

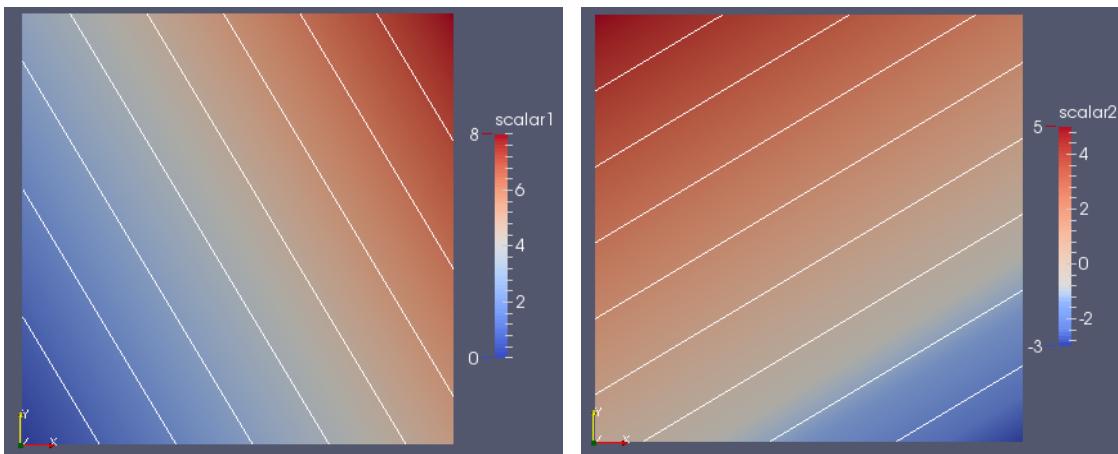


Abbildung 2.1: Äquipotentiallinien, **Abbildung 2.2:** Stromlinien, Parallelströmung

2.6.2 Ebene Staupunktströmung

1. Es gilt $a = 5$. Die analytische Lösung besagt, dass für die mittlere Zelle folgende Werte angenommen werden müssen: $\Phi = 0$, $\Psi = 2.5$. Der Endwert des maximalen Residuums beträgt bei beiden Berechnungen $0.00e + 00$. Die analytische Lösung wurde also bis auf Maschinengenauigkeit approximiert.
2. Die analytischen Werte berechnen sich nach den Formeln:

$$\Phi = a(x^2 - y^2), \quad (2.56)$$

$$\Psi = 2axy. \quad (2.57)$$

Es wird kein Iterationsschritt ausgeführt.

3. Visualisierungen:

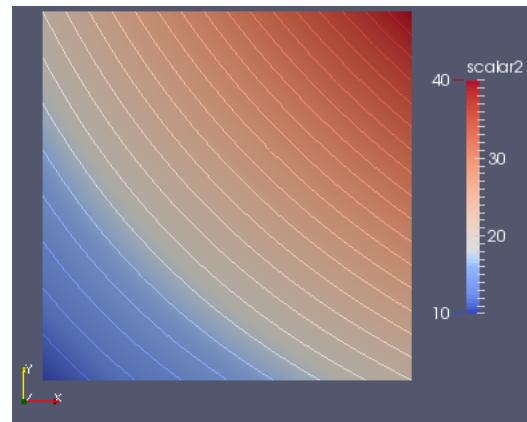
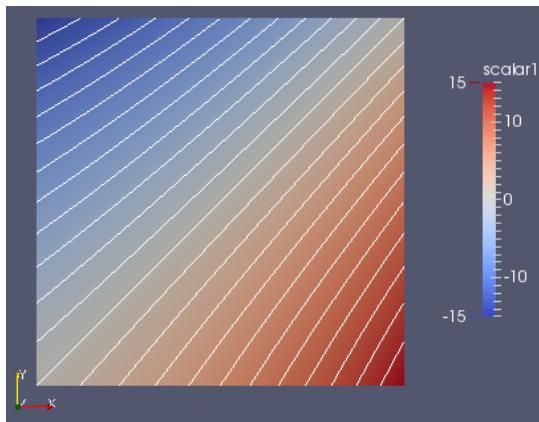


Abbildung 2.3: Äquipotentiallinien, **Abbildung 2.4:** Stromlinien, Ebene Staupunktströmung

2.6.3 Quelle/Senke

1. Es gilt $S = 5$. Das Gebiet ist in diesem Fall $[1, 2] \times [1, 2]$. Die analytische Lösung besagt, dass für die mittlere Zelle folgende Werte angenommen werden müssen: $\Phi \approx 0.59845$, $\Psi = 0.625$. Der Endwert des maximalen Residuums beträgt bei beiden Berechnungen $0.00e + 00$. Die analytische Lösung wurde also bis auf Maschinengenauigkeit approximiert.
2. Die analytischen Werte berechnen sich nach den Formeln:

$$\Phi = \frac{S}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (2.58)$$

$$\Psi = \frac{S}{2\pi} \arctan \left(\frac{y}{x} \right). \quad (2.59)$$

Es wird kein Iterationsschritt ausgeführt.

3. Visualisierungen:

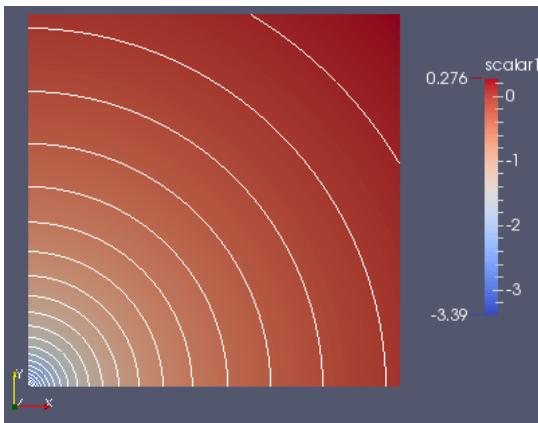


Abbildung 2.5: Äquipotentiallinien, Quelle

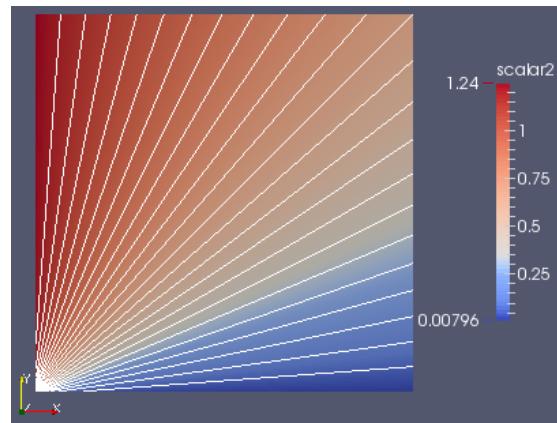


Abbildung 2.6: Stromlinien, Quelle

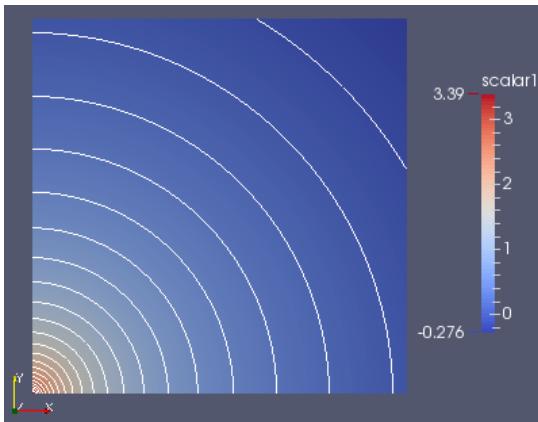


Abbildung 2.7: Äquipotentiallinien, Senke

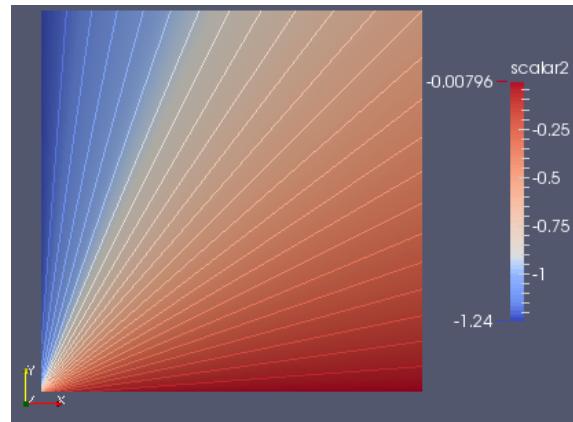


Abbildung 2.8: Stromlinien, Senke

Aufgrund der Rotationssymmetrie des Laplace-Operators (siehe (2.12) und (2.13)), ist dieses Ergebnis auf die verbleibenden drei Quadranten entsprechend zu spiegeln.

2.6.4 Potentialwirbel

1. Es gilt $\Gamma = 5$. Das Gebiet ist in diesem Fall $[1, 2] \times [1, 2]$. Die analytische Lösung besagt, dass für die mittlere Zelle folgende Werte angenommen werden müssen:
 $\Phi = 0.625$, $\Psi \approx -0.59845$. Der Endwert des maximalen Residuums beträgt bei beiden Berechnungen $0.00e + 00$. Die analytische Lösung wurde also bis auf Maschinengenauigkeit approximiert.
2. Die analytischen Werte berechnen sich nach den Formeln:

$$\Phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \arctan \left(\frac{y}{x} \right), \quad (2.60)$$

$$\Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.61)$$

Es wird kein Iterationsschritt ausgeführt.

3. Visualisierungen:

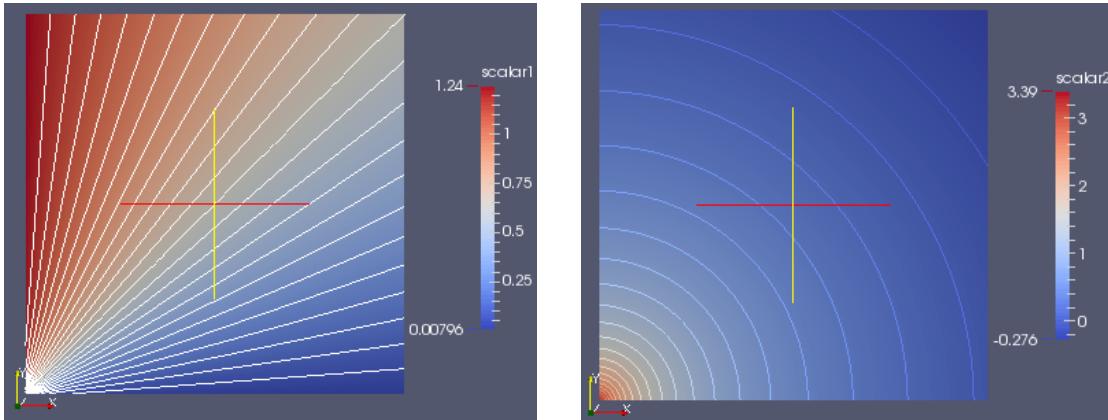


Abbildung 2.9: Äquipotentiallinien, Po- **Abbildung 2.10:** Stromlinien, Potential-
tentialwirbel

Aufgrund der Rotationssymmetrie des Laplace-Operators (siehe (2.12) und (2.13)), ist dieses Ergebnis auf die verbleibenden drei Quadranten entsprechend zu spiegeln.

2.6.5 Dipol

1. Es gilt $M = 5$. Das Gebiet ist in diesem Fall $[1, 2] \times [1, 2]$. Die analytische Lösung besagt, dass für die mittlere Zelle folgende Werte angenommen werden müssen: $\Phi \approx 0.5627$, $\Psi \approx -0.5627$. Der Endwert des maximalen Residuums beträgt bei beiden Berechnungen $0.00e + 00$. Die analytische Lösung wurde also bis auf Maschinengenauigkeit approximiert.
2. Die analytischen Werte berechnen sich nach den Formeln:

$$\Phi = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (2.62)$$

$$\Psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (2.63)$$

3. Visualisierungen:

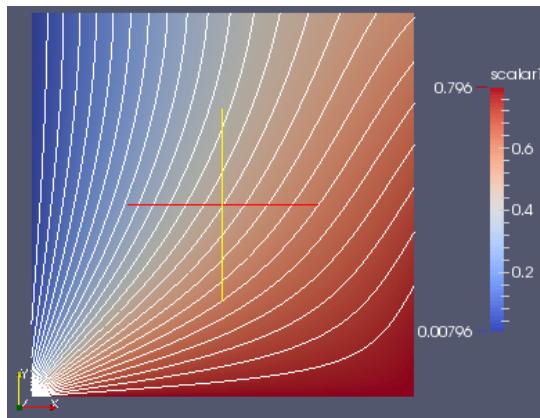


Abbildung 2.11: Äquipotentiallinien, **Abbildung 2.12:** Stromlinien, Dipol Dipol

Aufgrund der Rotationssymmetrie des Laplace-Operators (siehe (2.12) und (2.13)), ist dieses Ergebnis auf die verbleibenden drei Quadranten entsprechend zu spiegeln.

Es ist erkennbar, dass alle getesteten Potentialströmungen hinreichend exakte Ergebnisse liefern (die Ergebnisse können nicht exakt der analytischen Lösung entsprechen, sondern nur auf Maschinengenauigkeit angenähert werden, zum Beispiel aufgrund endlicher Darstellung von Gleitkommazahlen und Rundungsfehlern).

Kapitel 3

Konvektions-Diffusions-Gleichung

3.1 Aufgabenstellung

Ziel ist es, eine inkompressible, instationäre und zweidimensionale Strömung zu simulieren, welche Konvektions- und Diffusionsprozesse enthält.

Analog zu Kapitel 2 wird zunächst auf die mathematische Modellbildung eingegangen, anschließend werden numerische Methoden zum Lösen der entstandenen Gleichungen vorgestellt und schließlich, werden Testfälle bzw. Resultate des Programms diskutiert und somit das Programm validiert.

3.2 Mathematische Modellbildung

Es wird die Bilanzgröße Φ betrachtet. Stellt man die Bilanz der konvektiven und diffusiven Flüsse, sowie der Quellterme für ein differentielles Element im Zweidimensionalen auf, so ergibt sich für die horizontalen (konvektiven und diffusiven) Flüsse:

$$f_{konv,links} = \rho u \Phi dy, \quad f_{konv,rechts} = \left(\rho u \Phi + \frac{\partial(\rho u \Phi)}{\partial x} dx \right) dy, \quad (3.1)$$

$$f_{diff,links} = -a \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy, \quad f_{diff,rechts} = - \left(a \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dx \right) dy. \quad (3.2)$$

Analog gilt für die vertikalen Flüsse:

$$g_{konv,unten} = \rho u \Phi dx, \quad g_{konv,oben} = \left(\rho u \Phi + \frac{\partial(\rho u \Phi)}{\partial y} dy \right) dx, \quad (3.3)$$

$$g_{diff,unten} = -a \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx, \quad g_{diff,oben} = - \left(a \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(a \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dy \right) dx. \quad (3.4)$$

Für die Quellterme gilt:

$$s \, dx \, dy. \quad (3.5)$$

Die Bilanzgleichung ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \Phi)}{\partial t} &= f_{konv,links} - f_{konv,rechts} + g_{konv,unten} + g_{konv,oben} + \\ &\quad f_{diff,links} - f_{diff,rechts} + g_{diff,unten} - g_{diff,oben} + \\ &\quad s \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen und Kürzen ergibt sich die folgende Formel für die Bilanzierung der Größe Φ im differentiellen Element der Abmessungen $dx \times dy$:

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v\Phi)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) + s, \quad (3.6)$$

wobei Φ für den Fall $s \equiv 0$ eine Erhaltungsgröße darstellt, da weder Quellen, noch Senken vorhanden sind. Allgemeiner sieht diese Formel wie folgt aus:

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}\Phi) = \operatorname{div}(\alpha\nabla\Phi) + s. \quad (3.7)$$

Gleichung (3.6) stellt die konservative Form der Differentialgleichung dar. Unter Anwendung der Kettenregel und Nutzung der Kontruktionsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3.8)$$

gelangt man zu der nicht-konservativen Darstellung:

$$\rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \rho u \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) + s. \quad (3.9)$$

Nach Anwendung eines Volumenintegrals auf (3.7) über das komplette Volumen Ω und der anschließenden Anwendung der Gauss'schen Integralsatzes gelangt man zu folgender Form:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (\rho\Phi) d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\rho\vec{v}\Phi - \alpha\nabla\Phi) \cdot d\vec{A} = \int_{\Omega} s d\Omega, \quad (3.10)$$

wobei $\vec{F} = \rho\vec{v}\Phi - \alpha\operatorname{grad}(\Phi)$ den Fluss bezeichnet. Die rechte Seite dieser Formel stellt die Bilanz der Quellen über das gesamte Integrationsgebiet Ω dar, die linke Seite stellt die Summe aus zeitlicher Änderung der Bilanzgröße und der Bilanz aller Flüsse über die Gebietsoberfläche dar.

3.3 Diskretisierung

Das gesamte Integrationsgebiet Ω wird in kleine, sich nicht überlappende, Volumen zerlegt. Das dadurch entstehende numerische Verfahren ist das Finite-Volumen-Verfahren.

Mit dem so entstandenen Gitter gilt mit Gleichung 3.10 für jedes finite Volumen j folgende Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\Phi_j) \Delta V_j + \sum_{Seiten} \vec{F}(\Phi) \cdot \Delta \vec{A} = s_j \Delta V_j. \quad (3.11)$$

In den folgenden Unterkapiteln wird näher auf die einzelnen Terme dieser Gleichung und insbesondere auf deren numerische Berechnung eingegangen.

3.3.1 Finite Volumen

Als Erstes eröffnet sich die Frage, wie die finiten Volumen ΔV_j zu wählen sind. Es werden drei Bedingungen an diese gestellt:

1. $\bigcup_j \Delta V_j = \Omega$, d.h. die Summe aller finiten Volumen spannen das gesamte Integrationsgebiet auf.
2. $\Delta V_i \cup \Delta V_j = \emptyset, \forall i \neq j$, d.h. die finiten Volumen überschneiden sich nicht. Außerdem gehört jede Begrenzungskante oder -fläche zu zwei finiten Volumen gleichzeitig.
3. Die Berechnung der Flüsse über die Zellflächen muss unabhängig von den Zellen geschehen, so dass sicher gestellt ist, dass der eintretende Fluss über eine Zellfläche der einen Zelle, gleich dem austretenden Fluss der benachbarten Zelle über die selbe Zellfläche ist.

Im Folgenden wird eine zellzentrierte Interpretation gewählt, sprich die diskreten Werte der Bilanzgröße Φ werden innerhalb eines finiten Volumens/einer Zelle angenommen und nicht an den Knotenpunkten des Gitters.

3.3.2 Numerischer Fluss

Es wird eine numerische Berechnung für den in (3.11) beschriebenen Fluss gesucht. Betrachtet man die Kante zwischen den Punkten P_1 und P_2 einer Zelle, so ist der Fluss über diese Oberfläche gegeben durch:

$$\vec{F}_{P_1 P_2} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

wobei f und g jeweils die horizontale bzw. vertikale Komponenten sind (vgl. (3.1), (3.2), (3.3), (3.4)). Mit dem Normalenvektor der betrachteten Kante

$$\vec{n}_{P_1 P_2} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \begin{bmatrix} \Delta y \\ -\Delta x \end{bmatrix}, \text{ folgt für den Fluss über die Kante } \overline{P_1 P_2}:$$

$$\vec{F}_{P_1 P_2} \cdot \vec{n}_{P_1 P_2} = (f \Delta y - g \Delta x)_{P_1 P_2}. \quad (3.13)$$

Eingesetzt in (3.11) folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \Phi_j) \Delta V_j + \sum_{Seiten} (f \Delta y - g \Delta x) = s_j \Delta V_j, \quad \forall j. \quad (3.14)$$

3.3.2.1 Flusskomponenten

In Gleichung (3.14) ist noch unklar, wie sich die numerischen Flusskomponenten f^* bzw. g^* als Approximationen der exakten Flüsse über eine Zellfläche berechnen.

Es gibt beispielsweise folgende Möglichkeiten für den konvektiven Anteil:

1. $f_{P_1 P_2}^* = \frac{f_j + f_{j+1}}{2}$, wobei j und $j+1$ die Zellen bezeichnen die sich die gemeinsame Kante $\overline{P_1 P_2}$ teilen.
2. $f_{P_1 P_2}^* = f \left(\frac{\Phi_j + \Phi_{j+1}}{2} \right)$, mit j und $j+1$ wie bei 1..
3. $f_{P_1 P_2}^* = \frac{f_{P_1} + f_{P_2}}{2}$.

Es existieren wesentlich mehr Möglichkeiten, an dieser Stelle wird nicht auf diese eingangen. Der diffusive Anteil, der sich mittels $\vec{F}_{diff} = -\alpha \nabla \Phi$ berechnet, wird in seine x - und y -Anteile aufgespalten, so dass sich folgende Approximation ergibt:

$$f_{P_1 P_2} \approx -\alpha_{P_1 P_2} \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta x}, \quad g_{P_1 P_2} \approx -\alpha_{P_1 P_2} \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}}{\Delta y}. \quad (3.15)$$

Somit ergibt sich für die Summe der diffusiven Flüsse der Zelle $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ folgende zentrale Approximation:

$$f_{P_1 P_2} - f_{P_3 P_4} \approx \alpha_{P_1 P_2} \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{\Delta x}, \quad (3.16)$$

$$g_{P_2 P_3} - g_{P_4 P_1} \approx \alpha_{P_1 P_2} \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{\Delta y}, \quad (3.17)$$

wobei i, j den Wert von Φ in der bilanzierten Zelle entspricht, $i, j + 1$ dem Wert der Zelle darüber usw..

3.3.3 Zeitliche Evolution der Lösung

Um die zeitliche Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}$ in (3.11) zu approximieren, wird die explizite Euler-Methode verwendet, so dass:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \Phi_j) \approx \frac{\Phi_j^{n+1} - \Phi_j^n}{\Delta t}, \quad (3.18)$$

wobei n der Zeit-Index ist und j wie bereits beschrieben, das finite Volumen indiziert.

Eingesetzt ergibt sich nun folgendes Verfahren, für $\rho = const$, sprich eine inkompressible Strömung:

$$\Phi_j^{n+1} \approx \Phi_j^n + \frac{\Delta t}{\rho} s_j - \frac{\Delta t \Delta V_j}{\rho} \sum_{Seiten} (f \Delta y - g \Delta x). \quad (3.19)$$

Die Flusskomponenten f und g setzen sich, wie in Kapitel 3.3.2.1 beschrieben, aus diffusiven und konvektiven Anteilen zusammen.

3.3.4 Upwind-Diskretisierung

Es wird im eindimensionalen Fall die Kante mit Index $i + \frac{1}{2}$ betrachtet, welche die Zellen mit Werten Φ_i und Φ_{i+1} verbindet. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$(\rho u \Phi)_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} (\rho u)_{i+\frac{1}{2}} \Phi_i & , u_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \\ (\rho u)_{i+\frac{1}{2}} \Phi_{i+1} & , u_{i+\frac{1}{2}} < 0 \end{cases}, \quad (3.20)$$

d.h. die Richtung der Transportgeschwindigkeit ist hier entscheidend.

Nachteil dieser Methode ist, dass die Upwind-Diskretisierung lediglich erster Ordnung ist, die zentrale Diskretisierung hingegen zweiter Ordnung. Verbesserungsmöglichkeiten werden in Kapitel 3.3.4.1 diskutiert.

3.3.4.1 Höhere Ordnung

Es existieren optimierte Upwind-Methoden, wie z.b. QUICK. Hier wird statt eines treppenförmigen Profils eine quadratische Rekonstruktion von Φ auf drei stromauf versetzten Knotenpunkten angesetzt. So wird eine Approximation zweiter Ordnung für äquidistante Gitter erreicht, im Gegensatz zu der ersten Ordnung der gewöhnlichen Upwind-Diskretisierung.

3.3.5 Vereinheitlichte Programmierung

Wir betrachten die bereits beschriebene diskretisierte Gleichung aus einer anderen Perspektive

$$\rho \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n}{\Delta t} \Delta x \Delta y = -a_{i,j} \Phi_{i,j}^n + a_{i,j+1} \Phi_{i,j+1}^n + a_{i+1,j} \Phi_{i+1,j}^n + a_{i,j-1} \Phi_{i,j-1}^n + a_{i-1,j} \Phi_{i-1,j}^n. \quad (3.21)$$

Es gilt weiterhin:

$$a_{i,j} = a_{i,j+1} + a_{i+1,j} + a_{i,j-1} + a_{i-1,j} + \left(f_{i+\frac{1}{2},j} - f_{i-\frac{1}{2},j} \right) \Delta y + \left(g_{i,j+\frac{1}{2}} - g_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \Delta x. \quad (3.22)$$

Da die Kontinuitätsgleichung

$$\left(f_{i+\frac{1}{2},j} - f_{i-\frac{1}{2},j} \right) \Delta y + \left(g_{i,j+\frac{1}{2}} - g_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \Delta x = 0 \quad (3.23)$$

erfüllt sein muss, vereinfacht sich Gleichung (3.22) dementsprechend. Für die Berechnung eines Zellmittelwerts im nächsten Zeitschritt, kann folgende verallgemeinerte Formel angenommen werden:

$$\tilde{a}_{i,j} \Phi_{i,j}^{n+1} = a_{i,j+1} \Phi_{i,j+1}^n + a_{i+1,j} \Phi_{i+1,j}^n + a_{i,j-1} \Phi_{i,j-1}^n + a_{i-1,j} \Phi_{i-1,j}^n + b, \quad (3.24)$$

$$b = a_{i,j}^n \Phi_{i,j}^n, \quad (3.25)$$

$$a_{i,j}^n = \frac{\rho \Delta x \Delta y}{\Delta t}, \quad (3.26)$$

$$\tilde{a}_{i,j} = a_{i,j+1} + a_{i+1,j} + a_{i,j-1} + a_{i-1,j} + a_{i,j}. \quad (3.27)$$

wobei i,j die Ortsindizes und n der Zeitindex sind. Das Einflussgebiet sieht also wie folgt aus:

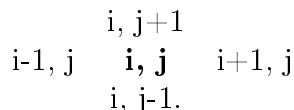


Tabelle 3.1: Einflussgebiet von Zelle i, j

Die Koeffizienten $a_{\bullet,\bullet}$ errechnen sich wie folgt:

$$a_{i,j+1} = D_{i,j+1} \Delta x A(|Pe_{i,j+1}|) + \max(-g_{i,j+1} \Delta x, 0), \quad (3.28)$$

$$a_{i+1,j} = D_{i+1,j} \Delta y A(|Pe_{i+1,j}|) + \max(-f_{i+1,j} \Delta y, 0), \quad (3.29)$$

$$a_{i,j-1} = D_{i,j-1} \Delta x A(|Pe_{i,j-1}|) + \max(g_{i,j-1} \Delta x, 0), \quad (3.30)$$

$$a_{i-1,j} = D_{i-1,j} \Delta y A(|Pe_{i-1,j}|) + \max(f_{i-1,j} \Delta y, 0), \quad (3.31)$$

wobei $f_{\bullet,\bullet} = \rho u_{\bullet,\bullet}$ und $g_{\bullet,\bullet} = \rho v_{\bullet,\bullet}$. Für die Peclet-Zahl gilt $Pe_{\bullet,\bullet} = \frac{\rho u_{\bullet,\bullet} l}{\alpha}$, mit charakteristischer Länge l und es gilt zum Beispiel $D_{i,j+1} = \frac{\alpha}{\Delta x}$. Für die Berechnung von $A(|Pe|)$ können die folgenden verschiedenen Schemata verwendet werden:

Schema	$A(Pe)$
Zentrale Differenzen	$1 - \frac{ Pe }{2}$
Upwind, 1. Ordnung	1
Hybrid	$\max\left(0, 1 - \frac{ Pe }{2}\right)$
Potenzgesetz	$\max\left(0, \left(1 - \frac{ Pe }{10}\right)^5\right)$
Exponentialgesetz	$\frac{ Pe }{\exp(Pe) - 1}$

Tabelle 3.2: Berechnung von $A(|Pe|)$

Es ist ersichtlich, dass für das Zentrale Differenzen-Schema $A(|Pe|)$ kleiner Null wird, sobald $|Pe| > 2$ ist. Da stabile Verfahren ein positives A voraussetzen, ist bei Verwendung dieses Schemas stets auf die Peclet-Zahl zu achten.

3.4 Validierung des Programms

3.4.1 Konvektion

Zunächst wird nur eine konvektive Strömung verwendet um das Programm zu validieren, d.h. der Diffusionskoeffizient α ist Null.

1. Es wird ein 3×3 -Gitter verwendet mit folgenden Initial- bzw. Randwerten (lediglich Dirichlet-Ränder):

1	1	1
1	4711	1
1	1	1

Zunächst wird die Zentrale-Differenzen-Methode verwendet, danach die Upwind-Methode. Bei beiden sind beide Geschwindigkeitskomponenten größer Null. Bei der ersten Variante sollte sich der mittlere Wert nicht ändern, da er zu gleichen Teilen vom oberen, unteren, rechten und linken Wert abhängt, die alle den gleichen numerischen Wert haben. Bei der Upwind-Methode sollte sich der Wert der linken Zelle durchsetzen, da dies die Zelle stromauf der konvektiven Strömung ist. Die Ergebnisse zeigen genau dieses Resultat:

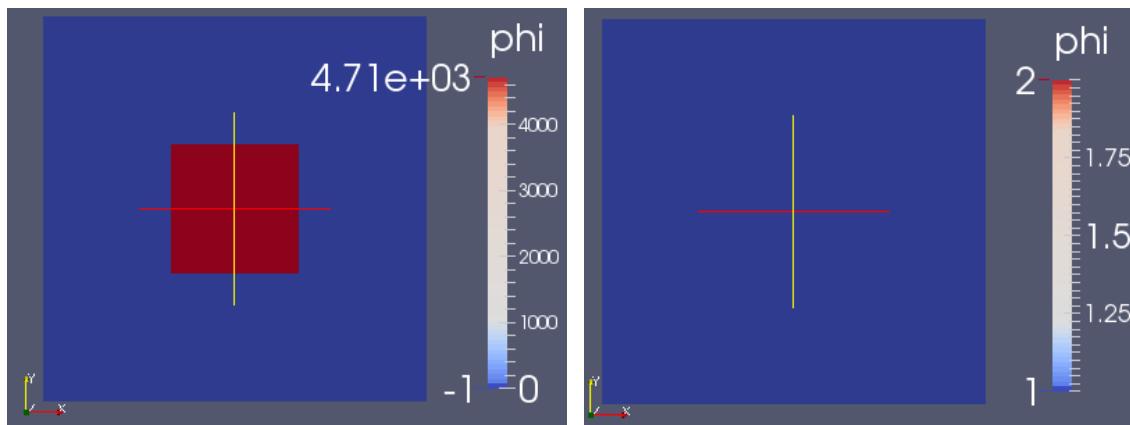


Abbildung 3.1: Zentrale-Differenzen-Methode, stationäre Endlösung

Abbildung 3.2: Upwind-Methode, stationäre Endlösung

2. Es wird ein 3×3 -Gitter verwendet mit folgenden Initial- bzw. Randwerten (lediglich Dirichlet-Ränder):

1	0	-1
1	10	-1
1	0	-1

Das Strömungsfeld wird vorgegeben, zunächst sei $u = 1$ und $v = 0$. Es wird die Upwind-Methode verwendet, d.h. als stationärer Endwert in der mittleren Zelle muss sich der Wert der linken Zelle, sprich der Wert 1, durchsetzen. Die Resultate der numerischen Berechnung geben genau dieses Ergebnis wieder:

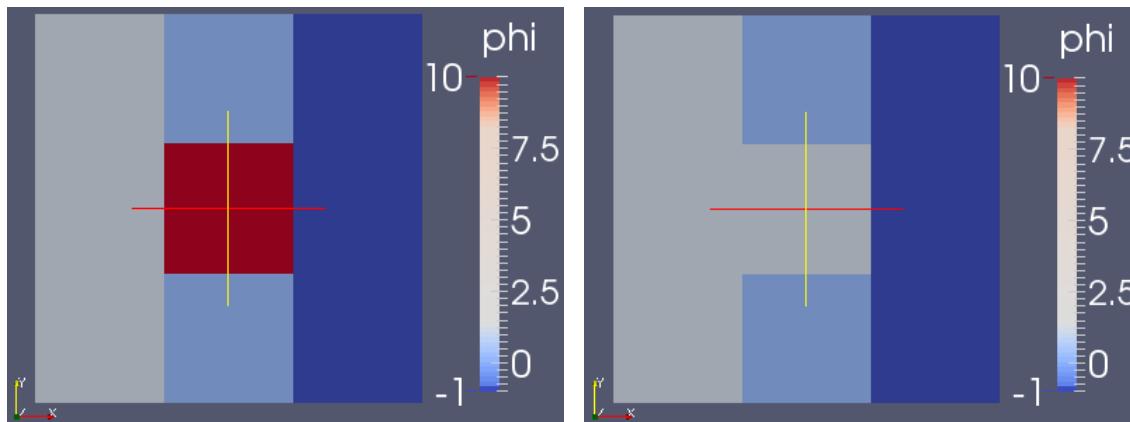


Abbildung 3.3: Upwind-Methode, Initialzustand

Abbildung 3.4: Upwind-Methode, stationäre Endlösung ($v = 0$)

Nun wird das Geschwindigkeitsfeld zu $u = 0$ und $v = 1$ geändert. Aufgrund der gleichen Argumentation, muss sich jetzt der Wert der unteren Zelle, sprich der Wert 0 in der mittleren Zelle durchsetzen. Die numerische Simulation stimmt mit dieser Überlegung überein:

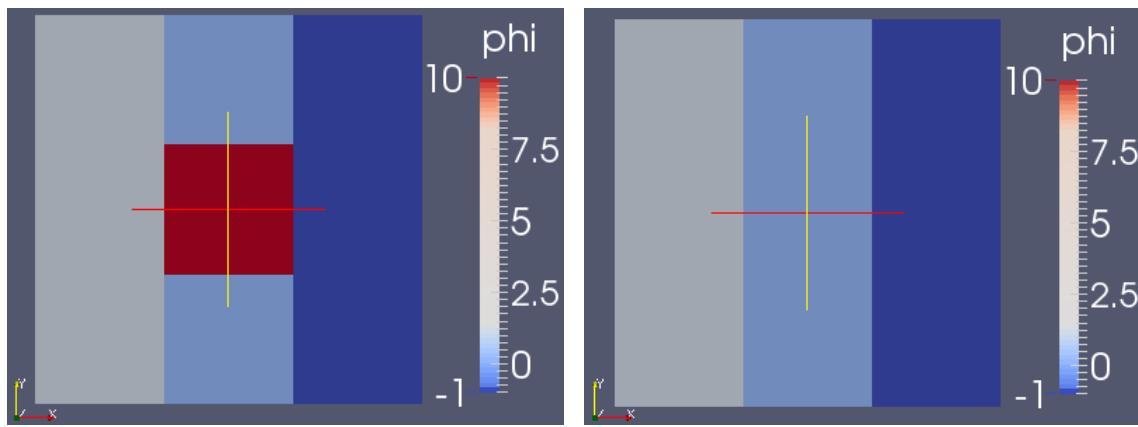


Abbildung 3.5: Upwind-Methode, Initialzustand **Abbildung 3.6:** Upwind-Methode, stationäre Endlösung ($u = 0$)

3. Die Software gibt also für das Konvektionsproblem das richtige Ergebnis aus. Abschließend wird eine konvektive Strömung auf einem größeren Gitter der Größe 100×100 mit Geschwindigkeiten $u = 1$ und $v = 2$ simuliert. Das Integrationsgebiet ist ebenfalls 100×100 groß. Im Folgenden wird die zeitliche Evolution des skalaren Wertes Φ über das gesamte Integrationsgebiet dargestellt. Hierfür ist die Upwind-Methode verwendet worden:

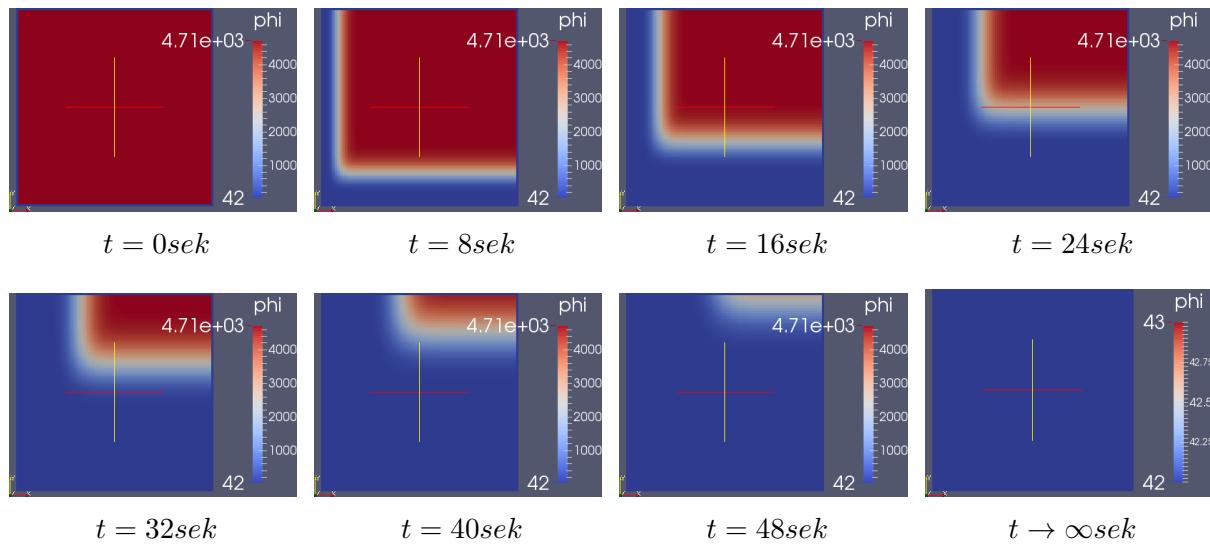


Abbildung 3.8: zeitliche Evolution konvektiver Strömung

Im stationären Endfall werden im gesamten Integrationsgebiet die Werte der Dirichlet-Ränder, nämlich 42, angenommen, was auch der richtigen Lösung für die Upwind-Methode entspricht.

3.4.2 Diffusion

Nun werden die Geschwindigkeiten u und v zu Null gesetzt, der Diffusionskoeffizient α erhält jetzt einen Wert ungleich Null.

1. Es gilt $\alpha = 1$ und es wird ein 3×3 -Gitter verwendet mit folgenden Initial- bzw. Randwerten (lediglich Dirichlet-Ränder):

1	1	1
1	4711	1
1	1	1

Da die Randwerte fest sind ist der Mittelwert der mittleren Zelle für die stationäre Endlösung gleich Eins, da alles über die Ränder in Folge der Verbreitung durch Diffusion abgeleitet worden ist. Diese Überlegung stimmt mit dem berechneten Ergebnis überein:

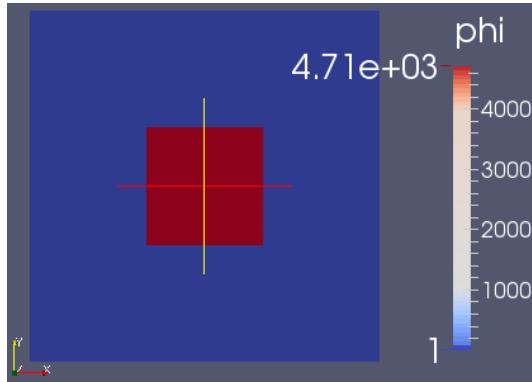


Abbildung 3.9: Initialwerte

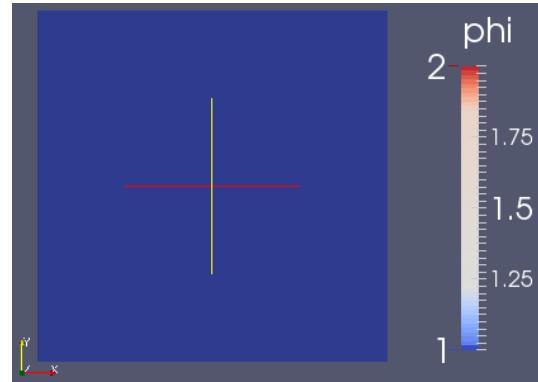


Abbildung 3.10: stationäre Endlösung

2. Die Software gibt also für das Diffusionsproblem das richtige Ergebnis aus. Abschließend wird eine diffusive Strömung auf einem größeren Gitter der Größe 100×100 mit Diffusionskoeffizient $\alpha = 50$ simuliert. Das Integrationsgebiet ist ebenfalls 100×100 groß. Im Folgenden wird die zeitliche Evolution des skalaren Wertes Φ über das gesamte Integrationsgebiet dargestellt:

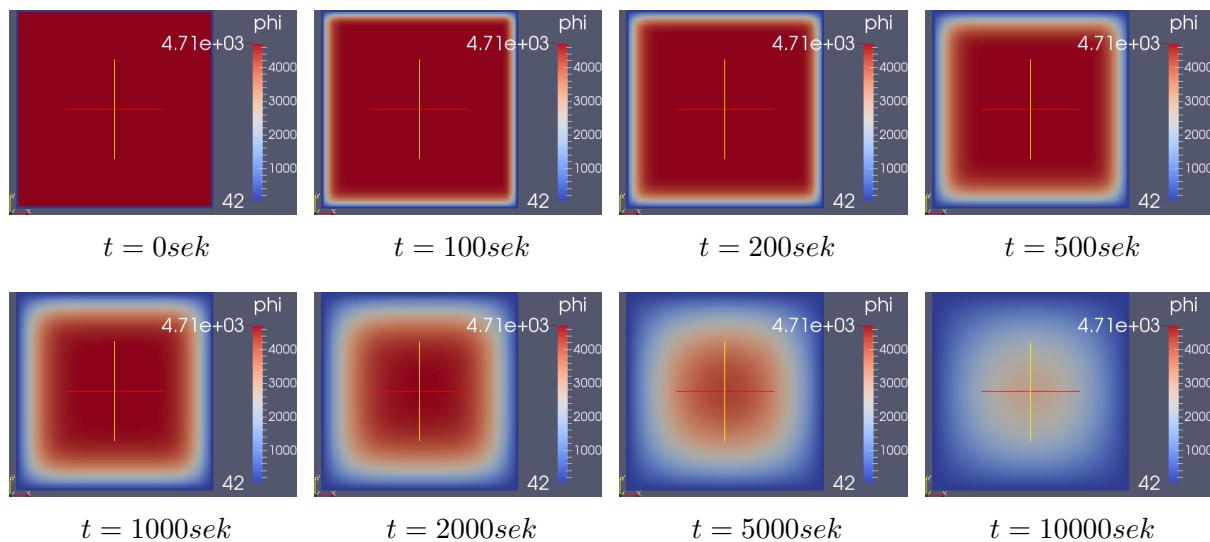


Abbildung 3.12: zeitliche Evolution diffusiver Strömung

Im stationären Endfall, der hier nicht visualisiert ist, werden im gesamten Integrationsgebiet die Werte der Dirichlet-Ränder, nämlich 42, angenommen. Dies entspricht der analytischen Lösung.

3.4.3 Konvektion-Diffusion

1. Im Folgenden wird eine Konvektion-Diffusions-Strömung visualisiert. Die Parameter sind $\alpha = 50$, $u = 5$ und $v = 10$. Das Gebiet ist das selbe 100×100 -Gebiet, wie in den vorherigen Testfällen, in denen Konvektion und Diffusion getrennt betrachtet worden sind. Das Ergebnis der Simulation sieht wie folgt aus:

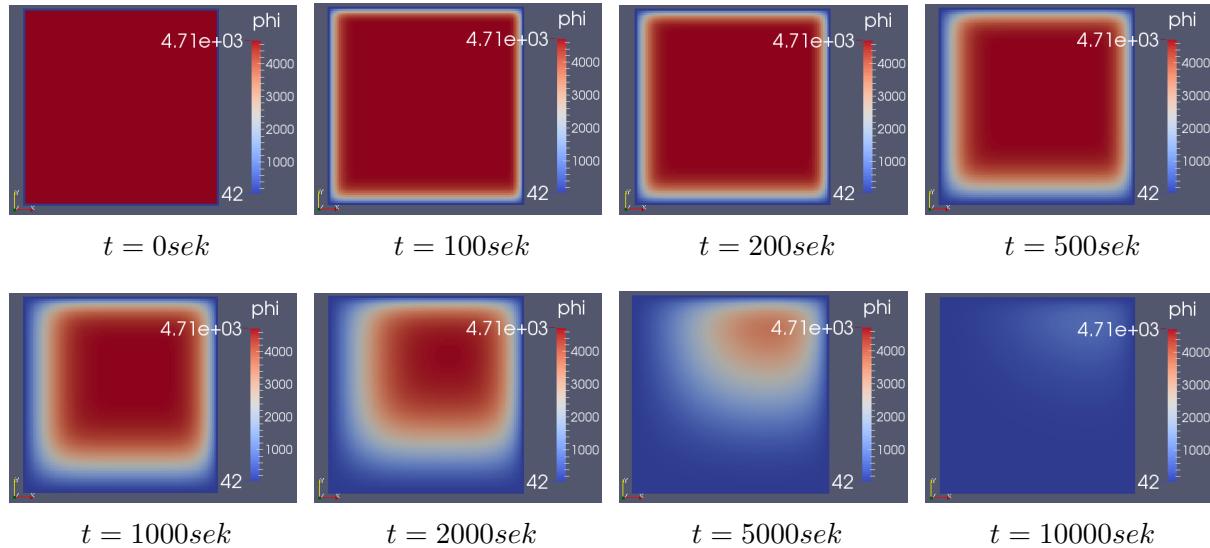


Abbildung 3.14: zeitliche Evolution konvektiv-diffusiver Strömung

Auch hier wird im stationären Endfall, der hier nicht visualisiert ist, im gesamten Integrationsgebiet der Wert der Dirichlet-Ränder, nämlich 42, angenommen.

3.4.4 Neumann-Ränder

Bisher wurden in sämtlichen Testfällen Dirichlet-Randbedingungen verwendet. Im Folgenden werden in einem Testfall die Implementierung der Neumann-Ränder validiert und visualisiert. Es wird eine 50×50 -Diskretisierung für das 3×3 große Gitter verwendet. Die Anfangswerte sind im kompletten Integrationsgebiet 4.711. Am nördlichen und östlichen Rand wird der Fluss des Skalars Φ normal zur Oberfläche ebenfalls auf 4.711 pro Zeiteinheit gesetzt. An dem südlichen und westlichen Rand beträgt der normale Fluss des Skalars Φ 42 pro Zeiteinheit. Als Konvektionsgeschwindigkeiten sind $u = 1$ und $v = 1$ gesetzt, der Diffusionskoeffizient α ist zu Null gesetzt. Es wird die zeitliche Evolution des skalaren Wertes Φ dargestellt, welche der physikalischen Überlegung, dass sich der Skalar Richtung Nord-Osten bewegt und dort aufstaut, entspricht (bei den Grafiken ist die Änderung der Skala zu beachten):

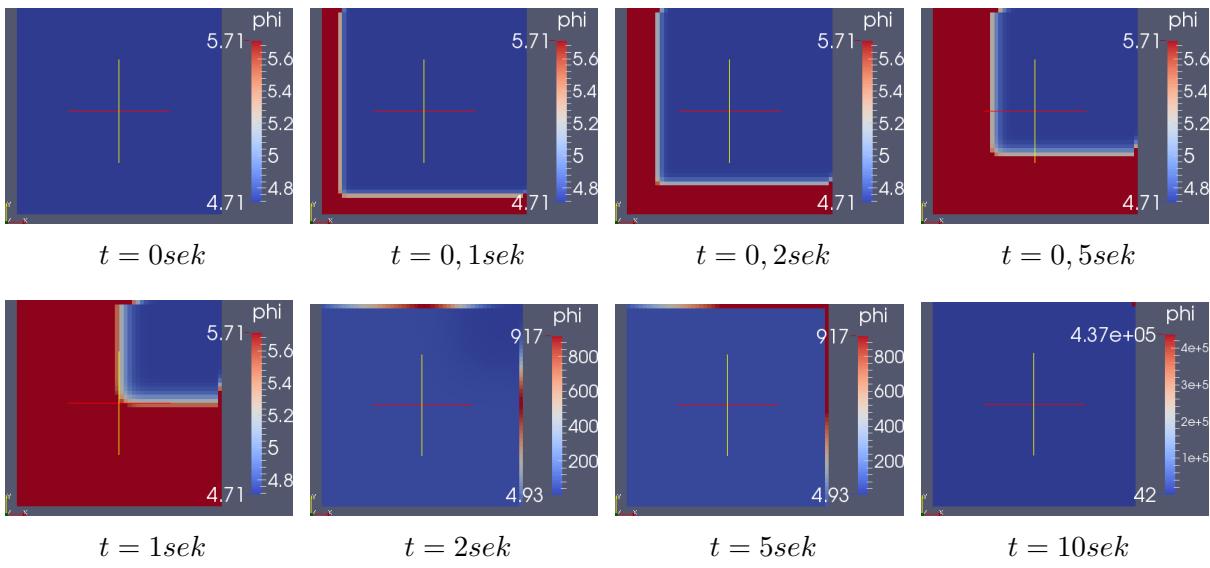


Abbildung 3.16: zeitliche Evolution konvektiver Strömung mit Neumann-Rändern

3.4.5 Quellen

Es wird wieder eine 50×50 -Diskretisierung für ein 3×3 großes Integrationsgebiet verwendet. Es werden undurchlässige Wände an allen vier Seiten simuliert, die Konvektionsgeschwindigkeiten sind beide Null und der Diffusionskoeffizient beträgt $\alpha = 10$. Als Initialwerte für den Skalar Φ wird wieder über dem gesamten Gebiet der Wert 4.711 gesetzt. An der Stelle (1, 1) befindet sich eine Quelle, die pro Zeiteinheit 100 Einheiten des Skalars Φ in das Integrationsgebiet einbringt, an der Stelle (2, 2) befindet sich eine Senke die 15 Einheiten des Skalars Φ pro Zeiteinheit absaugt. Es ergibt sich folgende, physikalisch sinnvolle, zeitliche Evolution.

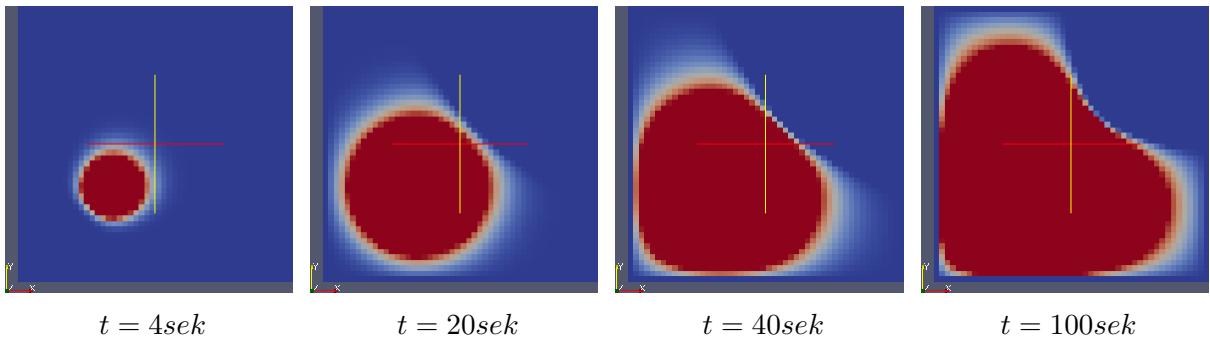


Abbildung 3.18: zeitliche Evolution des diffusiven Prozesses mit Quelle und Senke

Kapitel 4

Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes

4.1 Aufgabenstellung

In der bisherigen Implementierung der Konvektion-Diffusion-Gleichung ist das Geschwindigkeitsfeld als gegeben angenommen worden. Nun soll dieses unter Vorgabe des Druckfeldes während der Berechnung bestimmt werden. Im Folgenden wird auf die mathematische Herleitung der benötigten Formeln eingegangen. Validiert wird die implementierte Software in Kapitel 6.

4.2 Mathematische Modellbildung

Für die Berechnung der beiden Geschwindigkeitskomponenten u und v wird eine weitere (vektorielle) Gleichung benötigt. Zunächst wird die Impulsgleichung in x-Richtung

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.1)$$

betrachtet, bzw. im eindimensionalen Fall

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.2)$$

4.3 Diskretisierung

Für die Diskretisierung wird ein versetztes Gitter verwendet. Da bei der Diskretisierung auf dem Gitter für den Skalar Φ die Druckwerte benachbarter Gitterzellen entkoppelt werden würden, würde beispielsweise ein oszillierender Druck (Zick-Zack-Verteilung), welcher von einer zur anderen Zelle jeweils von Wert 1 auf Wert 2 oder umgekehrt springt, nicht zu einer Geschwindigkeit führen. Das heißt, dass bei der Betrachtung von Zelle i nur die Druckwerte in den Zellen $i - 1$ und $i + 1$ von Relevanz wären, nicht aber der Druck in Zelle i selbst (analog für die y -Richtung). Das selbe Problem tritt bei der diskreten Variante der Kontinuitätsgleichung auf, hier entkoppeln benachbarte Geschwindigkeiten. Dies ist unphysikalisch! Die Verwendung eines versetzten Gitters bringt eine Abhilfe für dieses Problem. Es gibt nun 2 weitere Gitter für beide Geschwindigkeitskomponenten. Für u wird das kartesische Gitter des Skalars Φ in horizontaler Richtung verschoben, d.h. die neuen horizontalen Kanten für das Gitter liegen auf den bisherigen, die vertikalen Kanten gehen nun aber durch die Zellmittelpunkte der physikalischen Zellen für Φ . Analoges gilt für das Gitter

für v . Dort laufen nun die horizontalen Kanten durch die Zellmittelpunkte der physikalischen Zellen für Φ . Diese Betrachtungsweise ist zusätzlich nützlich, da die Geschwindigkeitskomponenten für die Berechnung der Flüsse über die Zellkanten gerade auf diesen definiert sind, und nicht an den Zellmittelpunkten der physikalischen Zellen für Φ . Es wird die Zellkante an der Stelle $i + \frac{1}{2}, j$ betrachtet. Unter Verwendung zentraler Differenz zur Approximation des Druckgradienten in (4.1) bzw. (4.2), sprich

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} \quad (4.3)$$

für das u -Gitter und

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{y_{j+1} - y_j} \quad (4.4)$$

für das v -Gitter, gelangt man (analog zu Formeln in Kapitel 3) zu folgender Diskreitierung:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+\frac{1}{2},j}^n = & \\ & a_{i+\frac{3}{2},j} u_{i+\frac{3}{2},j}^n + a_{i-\frac{1}{2},j} u_{i-\frac{1}{2},j}^n + a_{i+\frac{1}{2},j+1} u_{i+\frac{1}{2},j+1}^n + a_{i+\frac{1}{2},j-1} u_{i+\frac{1}{2},j-1}^{kn} + \\ & b + \frac{p_{i,j} - p_{i+1,j}}{x_{i+1} - x_i} (x_{i+1} - x_i) \Delta y_j, \end{aligned} \quad (4.5)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{i,j+\frac{1}{2}} v_{i,j+\frac{1}{2}}^n = & \\ & a_{i+1,j+\frac{1}{2}} v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n + a_{i-1,j+\frac{1}{2}} v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n + a_{i,j+\frac{3}{2}} v_{i,j+\frac{3}{2}}^n + a_{i,j-\frac{1}{2}} v_{i,j-\frac{1}{2}}^n + \\ & b + \frac{p_{i,j} - p_{i,j+1}}{x_{i+1} - x_i} (y_{j+1} - y_j) \Delta x_i. \end{aligned} \quad (4.6)$$

In den Formeln wurden die Indizes jeweils auf das physikalische Gitter des Skalars Φ bezogen, da dies in der Software genau so umgesetzt worden ist. Die Formeln für die Koeffizienten entsprechen denen aus Kapitel 3 auf dem oben definierten versetztem Gitter.

Kapitel 5

Berechnung des Druck- und Geschwindigkeitsfeldes

5.1 Aufgabenstellung

Im vorherigen Kapitel ist das Geschwindigkeitsfeld mit Hilfe eines gegebenen Druckfeldes bestimmt worden. Zuletzt wird nun ebenfalls das Druckfeld berechnet und nicht vorgegeben. Der Aufbau dieses Kapitels befasst sich zunächst mit der Herleitung des SIMPLE-Algorithmus. Anschließend wird eine verbesserte Variante, nämlich SIMPLER vorgestellt. Die Validierung ist ausführlich in Kapitel 6 zu sehen.

5.2 Mathematische Modellbildung und Diskretisierung

Zur Bestimmung des Druckfeldes muss die Kontinuitätsgleichung benutzt werden, da dies die einzige bisher nicht verwendete Gleichung ist. Aus dem vorherigen Kapitel folgen folgende vorläufige Gleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten u und v :

$$\tilde{a}_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+\frac{1}{2},j}^* = \sum_n a_n u_n^* + b + (p_{i,j}^* - p_{i+1,j}^*) A_{i+\frac{1}{2},j}, \quad (5.1)$$

$$\tilde{a}_{i,j+\frac{1}{2}} v_{i,j+\frac{1}{2}}^* = \sum_n a_n v_n^* + b + (p_{i,j}^* - p_{i,j+1}^*) A_{i,j+\frac{1}{2}}. \quad (5.2)$$

Der Index * bezeichnet die zunächst geschätzten Größen für Geschwindigkeit und Druck, d.h. diese Größe sind noch nicht korrekt. Für die korrekten Werte ist noch ein Korrekturterm (Index ') hinzuzufügen:

$$p = p^* + p', \quad (5.3)$$

$$u = u^* + u', \quad (5.4)$$

$$v = v^* + v'. \quad (5.5)$$

Die Summe über alle u bzw. v koppeln sämtliche Geschwindigkeiten miteinander, sodass das Lösen für die Korrekturterme zu einem impliziten Gleichungssystem führt, welches direkt gelöst werden müsste. Aus diesem Grund werden diese Summenterme vernachlässigt, was die Genauigkeit der konvergierten Lösung jedoch nicht verschlechtert:

$$u'_{i+\frac{1}{2},j} = (p'_{i,j} - p'_{i+1,j}) \frac{A_{i+\frac{1}{2},j}}{\tilde{a}_{i+\frac{1}{2},j}}, \quad (5.6)$$

$$v'_{i,j+\frac{1}{2}} = (p'_{i,j} - p'_{i,j+1}) \frac{A_{i,j+\frac{1}{2}}}{\tilde{a}_{i,j+\frac{1}{2}}}. \quad (5.7)$$

Es fehlt nun lediglich der Druckkorrekturterm p' . In die diskretisierte Kontinuitätsgleichung

$$(\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n) \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} + ((\rho u A)_{i+\frac{1}{2},j} - (\rho u A)_{i-\frac{1}{2},j}) + ((\rho v A)_{i,j+\frac{1}{2}} - (\rho v A)_{i,j-\frac{1}{2}}) = 0 \quad (5.8)$$

werden die Formeln (5.6) und (5.7) eingesetzt, woraus die Druck-Korrekturgleichung folgt:

$$\tilde{a}_{i,j} p'_{i,j} = a_{i+1,j} p'_{i+1,j} + a_{i-1,j} p'_{i-1,j} + a_{i,j+1} p'_{i,j+1} + a_{i,j-1} p'_{i,j-1} + b, \quad (5.9)$$

mit den Koeffizienten:

$$a_{i+1,j} = \left(\frac{\rho A}{\tilde{a}} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \Delta y \Delta z, \quad (5.10)$$

$$a_{i-1,j} = \left(\frac{\rho A}{\tilde{a}} \right)_{i-\frac{1}{2},j} \Delta y \Delta z, \quad (5.11)$$

$$a_{i,j+1} = \left(\frac{\rho A}{\tilde{a}} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta x \Delta z, \quad (5.12)$$

$$a_{i,j-1} = \left(\frac{\rho A}{\tilde{a}} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta x \Delta z, \quad (5.13)$$

$$b = (\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n) \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} + ((\rho u^* A)_{i+\frac{1}{2},j} - (\rho u^* A)_{i-\frac{1}{2},j}) + ((\rho v^* A)_{i,j+\frac{1}{2}} - (\rho v^* A)_{i,j-\frac{1}{2}}). \quad (5.14)$$

Der Term für b entspricht der diskretisierten Kontinuitätsgleichung (siehe (5.8)) mit den geschätzten Geschwindigkeiten. Folglich signalisiert die Bedingung $b \approx 0$, dass die Kontinuitätsgleichung mit den aktuell geschätzten Geschwindigkeiten erfüllt ist. Somit stellt $b \approx 0$ ein vernünftiges Abbruchkriterium für die Iteration dar, d.h. Ziel ist es durch Druck- und Geschwindigkeitsiteration diesen Term gegen Null laufen zu lassen. Außerdem wird eine Unterrelaxation des Druckes mit $p = p^* + \omega p'$ mit $\omega \in [0, 1]$ verwendet.

Das bisher beschriebene Verfahren ist der SIMPLE-Algorithmus. Dieser ist bereits überarbeitet worden zu dem SIMPLER-Algorithmus. Da das Ergebnis der ersten Variante eine schlechte Druckkorrektur liefert, wird das bisher beschriebene Verfahren nur zur Geschwindigkeitskorrektur verwendet. Das Druckfeld wird anders, wie im Folgenden erläutert, berechnet.

Sei \hat{u} bzw. \hat{v} eine Pseudo-Geschwindigkeit, für die gilt:

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{\tilde{a}_{i+\frac{1}{2},j}} \left[\sum_n a_n u_n + b \right]. \quad (5.15)$$

Dies entspricht der Geschwindigkeit, welche aus der Impulsgleichung hervor ging (vergleiche Kapitel 4), jedoch ist der Term $\frac{1}{\tilde{a}_{i+\frac{1}{2},j}} [(p_{i,j} - p_{i+1,j}) A_{i+\frac{1}{2},j}]$ hier nicht betrachtet worden.

Analoges gilt für die Pseudo-Geschwindigkeiten in den anderen Richtungen. Diese neuen Pseudo-Geschwindigkeiten sind demnach unabhängig vom Druckfeld. Analog zu vorher, werden diese Geschwindigkeiten in die diskretisierte Kontinuitätsgleichung (5.8) eingesetzt und man gelangt zu folgender Formel:

$$\tilde{a}_{i,j} p_{i,j} = a_{i+1,j} p_{i+1,j} + a_{i-1,j} p_{i-1,j} + a_{i,j+1} p_{i,j+1} + a_{i,j-1} p_{i,j-1} + b, \quad (5.16)$$

was (5.9) entspricht. Es wurden lediglich die Druckkorrekturterme an den jeweiligen Stellen durch den tatsächlichen Druck ersetzt. Der Term b wird dementsprechend ebenfalls mit den

neuen Pseudo-Geschwindigkeiten gebildet, ist sonst allerdings analog zu (5.14). Für den nun erhaltenen SIMPLER-Algorithmus gilt, dass nicht wie vorher große Druckkorrekturterme auftreten und somit ein Stabilitätsgewinn erreicht wurde. Der implementierte Algorithmus lautet dann wie folgt:

1. Schätze die Geschwindigkeiten u^* und v^* ,
2. Bestimme die Pseudo-Geschwindigkeiten.
3. Bestimme das Druckfeld gemäß Formel (5.16).
4. Verwende dieses als Schätzung p^* . Berechne daraus die neuen Geschwindigkeiten u^* und v^* .
5. Berechne b und dadurch die Druckkorrektur p' .
6. Korrigiere sämtliche Geschwindigkeitskomponenten, analog zu Kapitel 4.¹
7. Transportiere den Skalar Φ mit dem neuen Geschwindigkeitsfeld.²
8. Gehe zurück zu Schritt 2 und iteriere so lange, bis der Term b verschwindet.

¹Das Druckfeld wird nicht verändert, dieses ist bereits im vorherigen Schritt korrigiert worden.

²Dieser Schritt ist nur innerhalb der Iteration notwendig, falls der Transport einen Einfluss auf das Geschwindigkeitsfeld hat. Ansonsten kann dies, um Rechenzeit zu sparen, auch nach Abschluss der Iteration geschehen.

Kapitel 6

Anwendungsfälle

In diesem Kapitel werden Anwendungsfälle der in den vorangegangenen Kapiteln dargestellten Verfahren diskutiert.

6.1 Finite Differenzen: Potentialströmung - Kanalströmung

Für die Kanalströmung werden vier verschiedene Kanalformen diskutiert:

1.

$$\begin{aligned} h_u(x) &= 0, \\ h_o(x) &= \arctan(x) + 2, \\ x &\in [-5, 5], \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} h_u(x) &= -\arctan(x) - 2, \\ h_o(x) &= \arctan(x) + 2, \\ x &\in [-5, 5], \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} h_u(x) &= \arctan(x) - 2, \\ h_o(x) &= -\arctan(x) + 2, \\ x &\in [-5, 5]. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} h_u(x) &= \arctan(x), \\ h_o(x) &= \arctan(x) + 2, \\ x &\in [-5, 5]. \end{aligned}$$

Die Ergebnisse sehen wie folgt aus:

1. Zunächst werden die Ableitungen, die beispielsweise in (2.30) benötigt werden, überprüft. Die analytischen Lösungen sehen für das genannte Problem wie folgt aus (vgl. (2.27)):

$$\begin{aligned}\xi(x, y) &= 10x + 50, & \eta(x, y) &= \frac{50y}{\arctan(x) + 2} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} &= 10, & \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{-50y}{(1+x^2)(\arctan(x)+2)^2}, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= 0, & \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} &= \frac{100(\arctan(x)x+1+2x)}{(1+x^2)^2(\arctan(x)+2)^3}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{50}{\arctan(x)+2}, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= 0, & \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} &= 0.\end{aligned}$$

Diese Ableitungen wurden an mehreren Knotenpunkten analytisch berechnet und mit den, vom Programm berechneten, Werten verglichen. Bis auf Maschinengenauigkeit stimmen alle Werte überein.

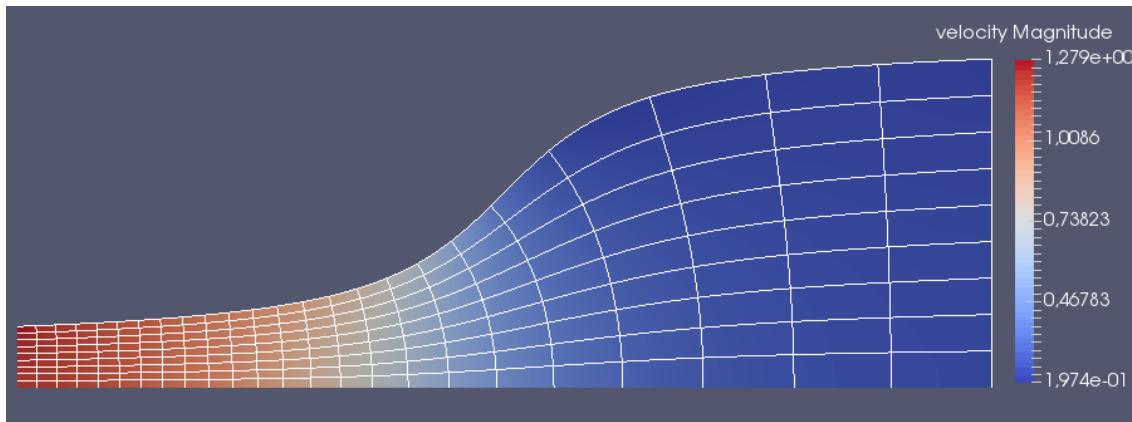


Abbildung 6.1: Kanal 1: Äquipotential- und Stromlinien

Es ist ersichtlich, dass sich alle Äquipotential- und Stromlinien senkrecht schneiden, so wie es auch aus der Theorie vorgeschrieben wird. Insbesondere stehen die Äquipotentiallinien senkrecht auf der Konturstromlinie.

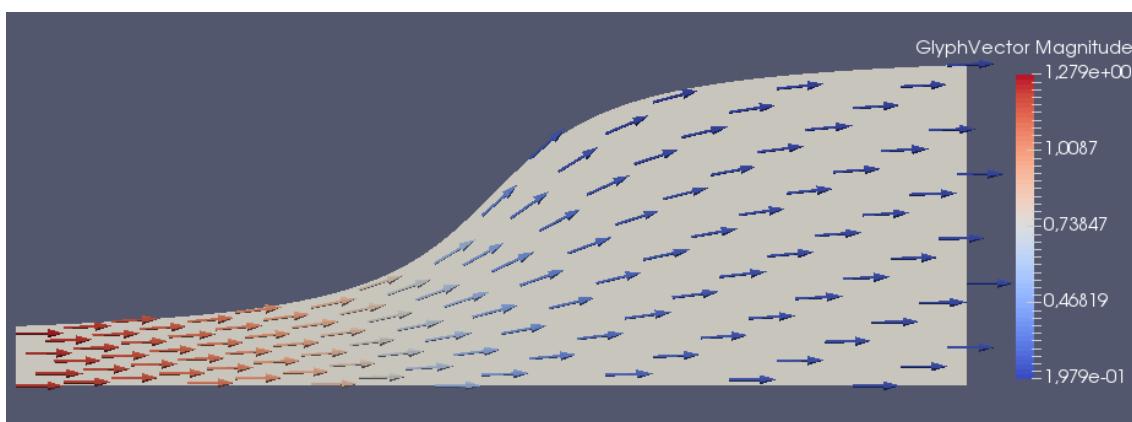


Abbildung 6.2: Kanal 1: Geschwindigkeitsfeld

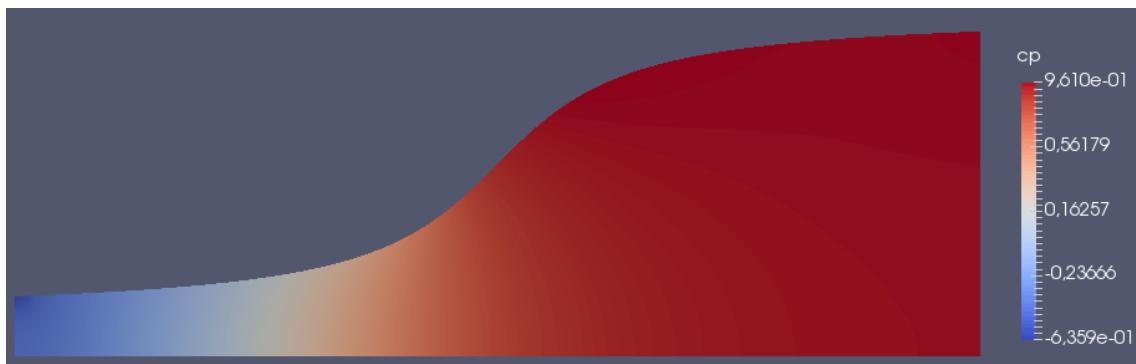


Abbildung 6.3: Kanal 1: Druckfeld

Am Auslauf des Kanals ist der Druckbeiwert ungefähr Eins, da $u_{lokal} \ll u_\infty$. Am Einlauf gilt hingegen $u_{lokal} \approx u_\infty$, so dass der Druckbeiwert dort ungefähr gleich Null ist. Das der Wert nur ungefähr 0 ist, ist durch die einseitige Approximation der Geschwindigkeiten durch diskretisierte Ortsableitungen der Potentialfunktion zu erklären.

2. Es folgen die gleichen Ergebnisse wie bei Kanal 1.

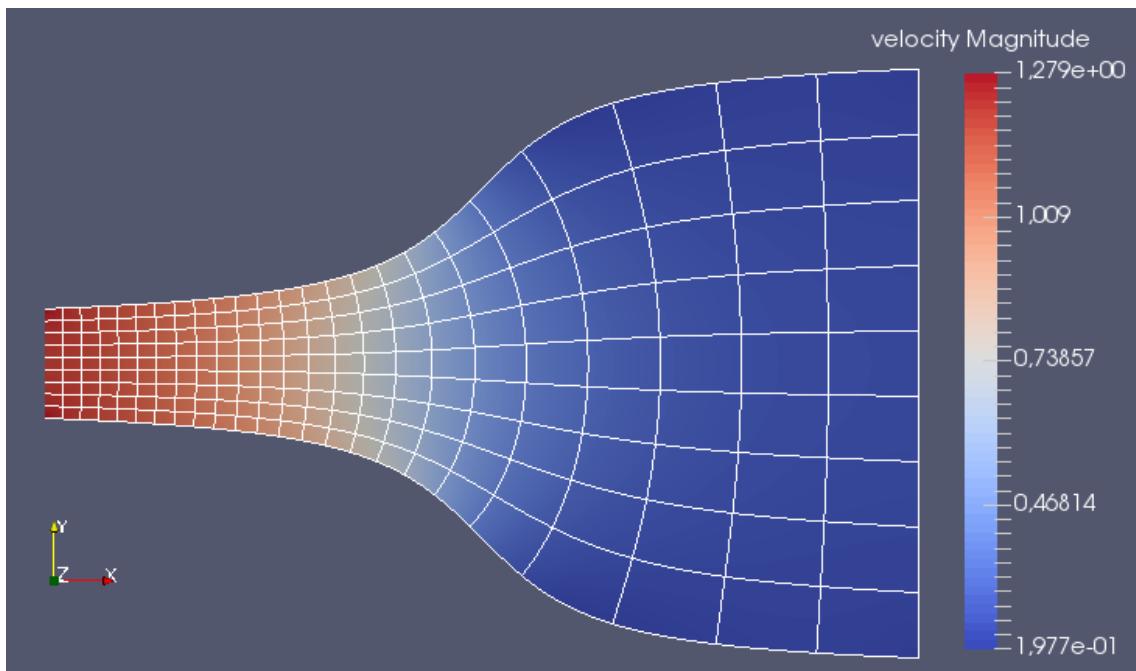


Abbildung 6.4: Kanal 2: Äquipotential- und Stromlinien

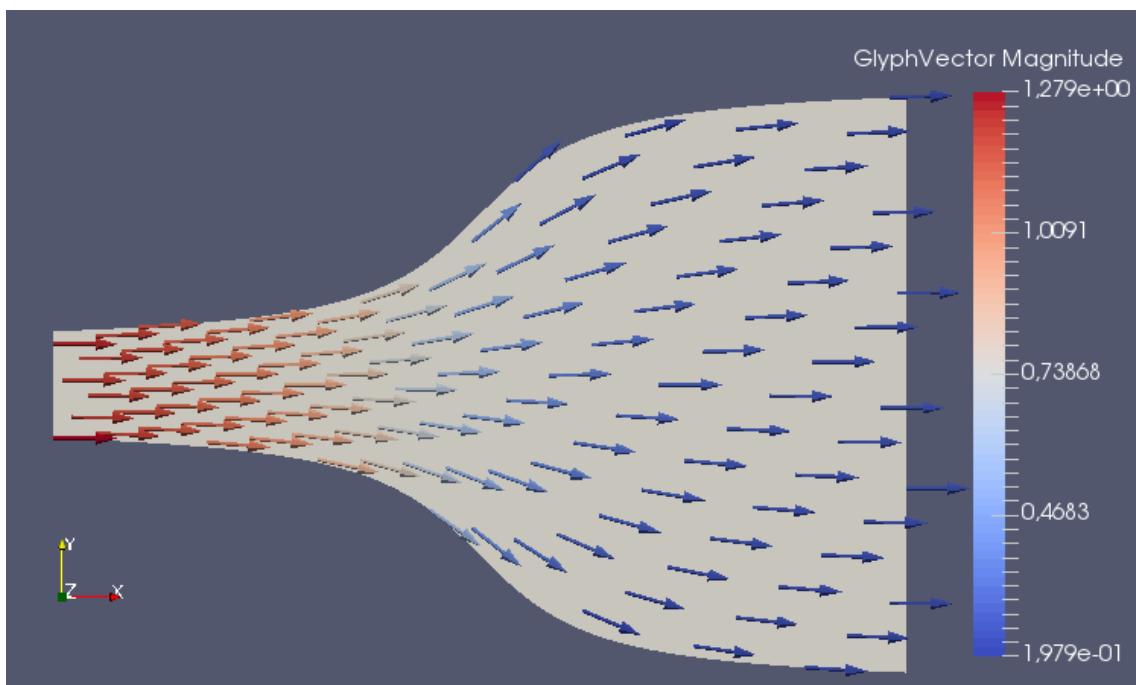


Abbildung 6.5: Kanal 2: Geschwindigkeitsfeld

3. Es folgen die gleichen Ergebnisse wie bei Kanal 1.

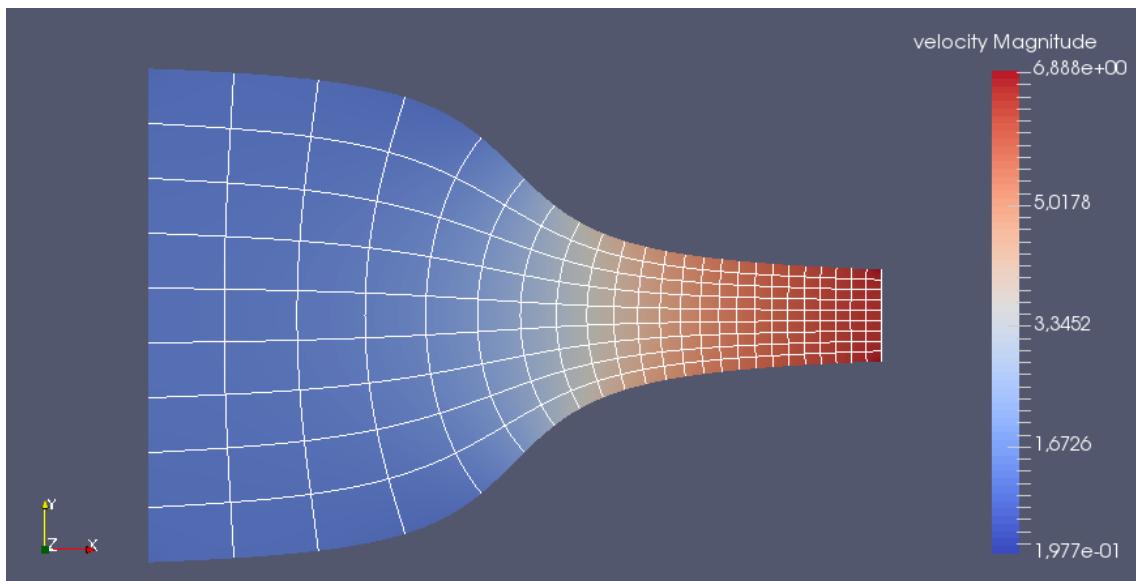


Abbildung 6.6: Kanal 3: Äquipotential- und Stromlinien

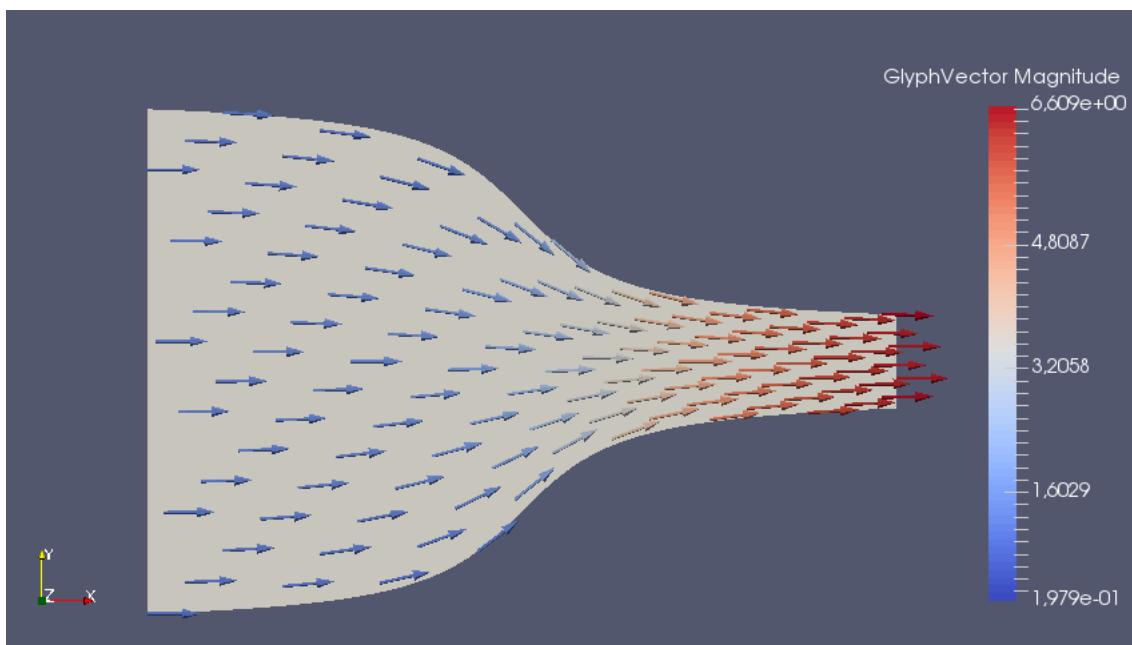


Abbildung 6.7: Kanal 3: Geschwindigkeitsfeld

4. Es folgen die gleichen Ergebnisse wie bei Kanal 1

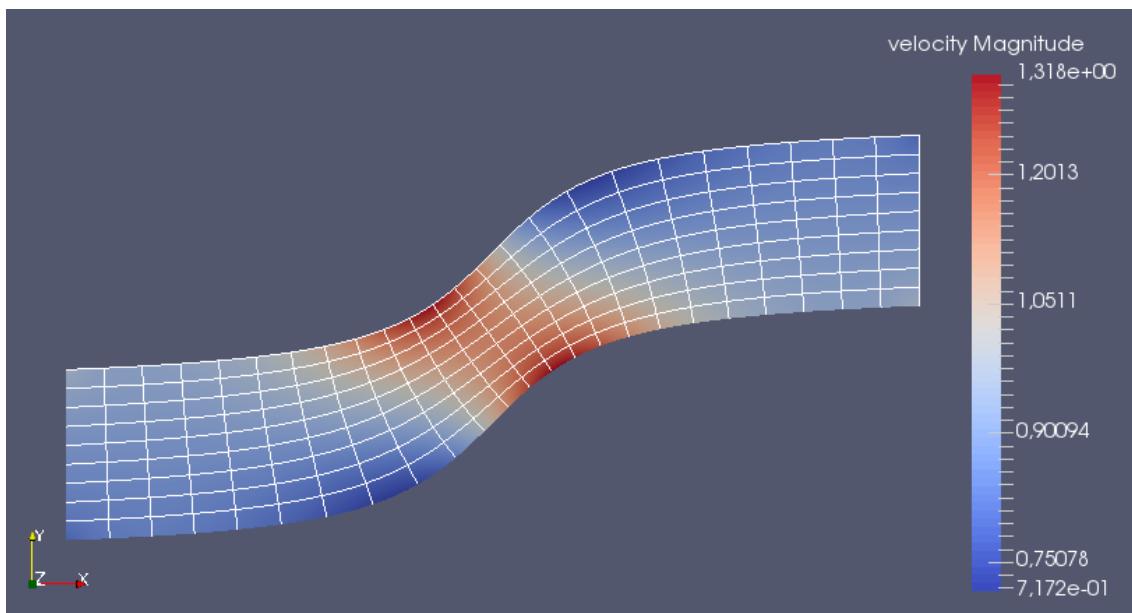


Abbildung 6.8: Kanal 4: Äquipotential- und Stromlinien

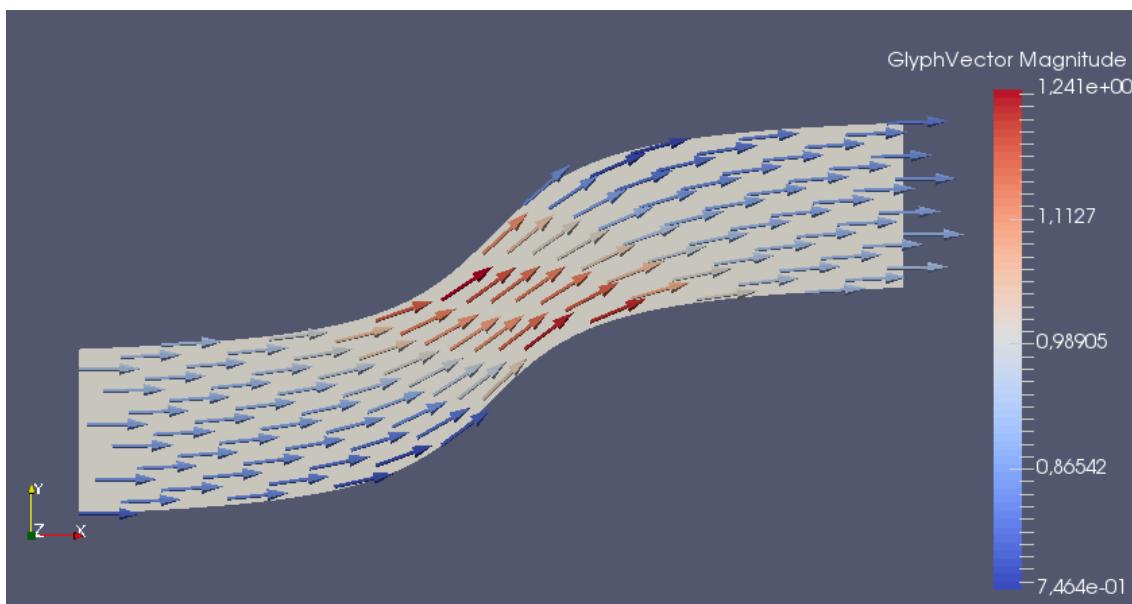


Abbildung 6.9: Kanal 4: Geschwindigkeitsfeld

Bemerkung: Die Schnittpunkte aus Äquipotentiallinien und Stromlinien bilden ein Gitter auf dem Integrationsgebiet. Somit kann man sich durch Berechnung und Abspeichern dieser Schnittpunkte ein Gitter für zum Beispiel eine reibungsbehaftete Strömungssimulation mittels der Finite-Volumen-Methode generieren. Die Knotenpunkte für Kanal 2 könnten beispielsweise wie folgt aussehen (die Berechnung der Gitterpunkte könnte noch hinsichtlich spezifischer Optimalitätskriterien abgeändert werden):

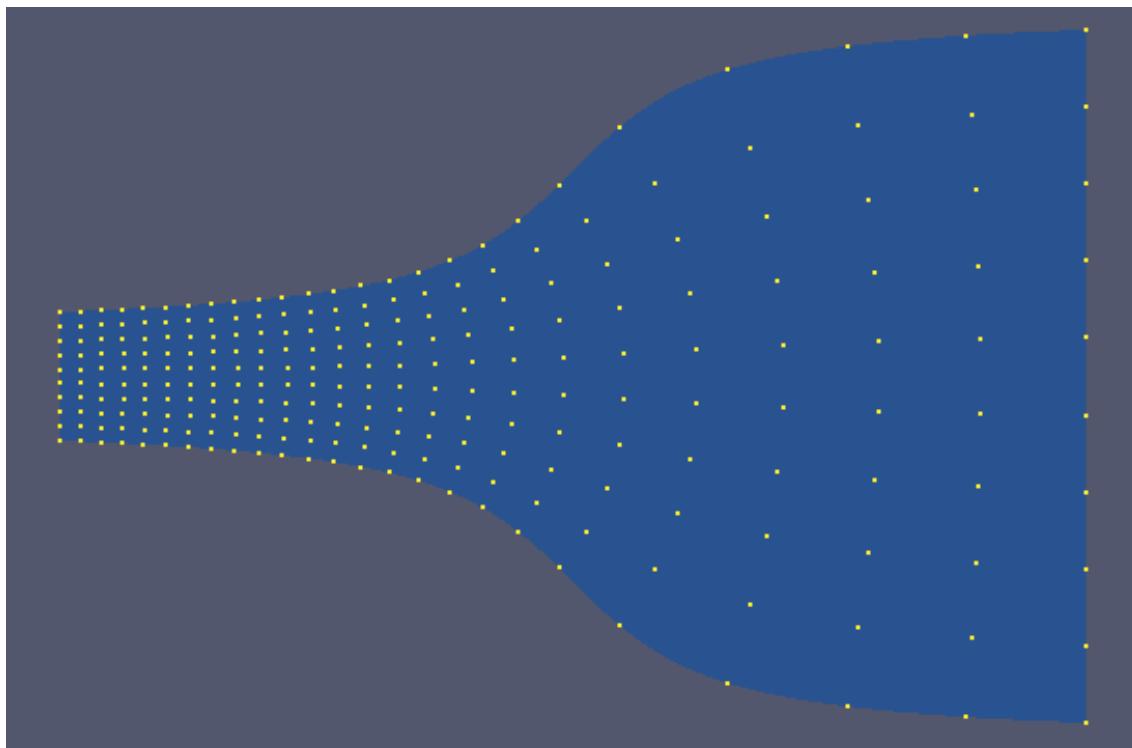


Abbildung 6.10: Kanal 2: erzeugtes/berechnetes Gitter

6.2 Finite Volumen: verschiedene Anwendungsfälle

6.2.1 Berechnung des Transports eines Skalars

6.2.1.1 Flussströmung mit Ein- und Abflussrohr am Rand

Betrachtet wird ein Fluss bzw. ein Kanal, welcher stationär und homogen mit der Geschwindigkeit u in x -Richtung fließt. Am Rand dieses Kanals befindet sich ein Einflussrohr, beispielsweise ein Abfluss einer Fabrik oder ein Zufluss eines anderen Kanals, welches einen Stoff gleicher Dichte ρ in das strömende Fluid des Kanals gibt. Die Ausströmrichtung dieses Rohres steht senkrecht zur Kanalströmung.

Im Folgenden werden zwei Fälle verglichen:

- **Links:** Es wird lediglich ein Stoff in die Kanalströmung eingeführt.
- **Rechts:** Kurz hinter dem Einfluss des neuen Stoffes wird das Fluid des Kanals abgesaugt, ebenfalls am unteren Rand.

Die zwei Strömungen werden zu fünf Zeitpunkten visualisiert. Die Berechnungen wurden auf einem 100×50 -Gitter durchgeführt.

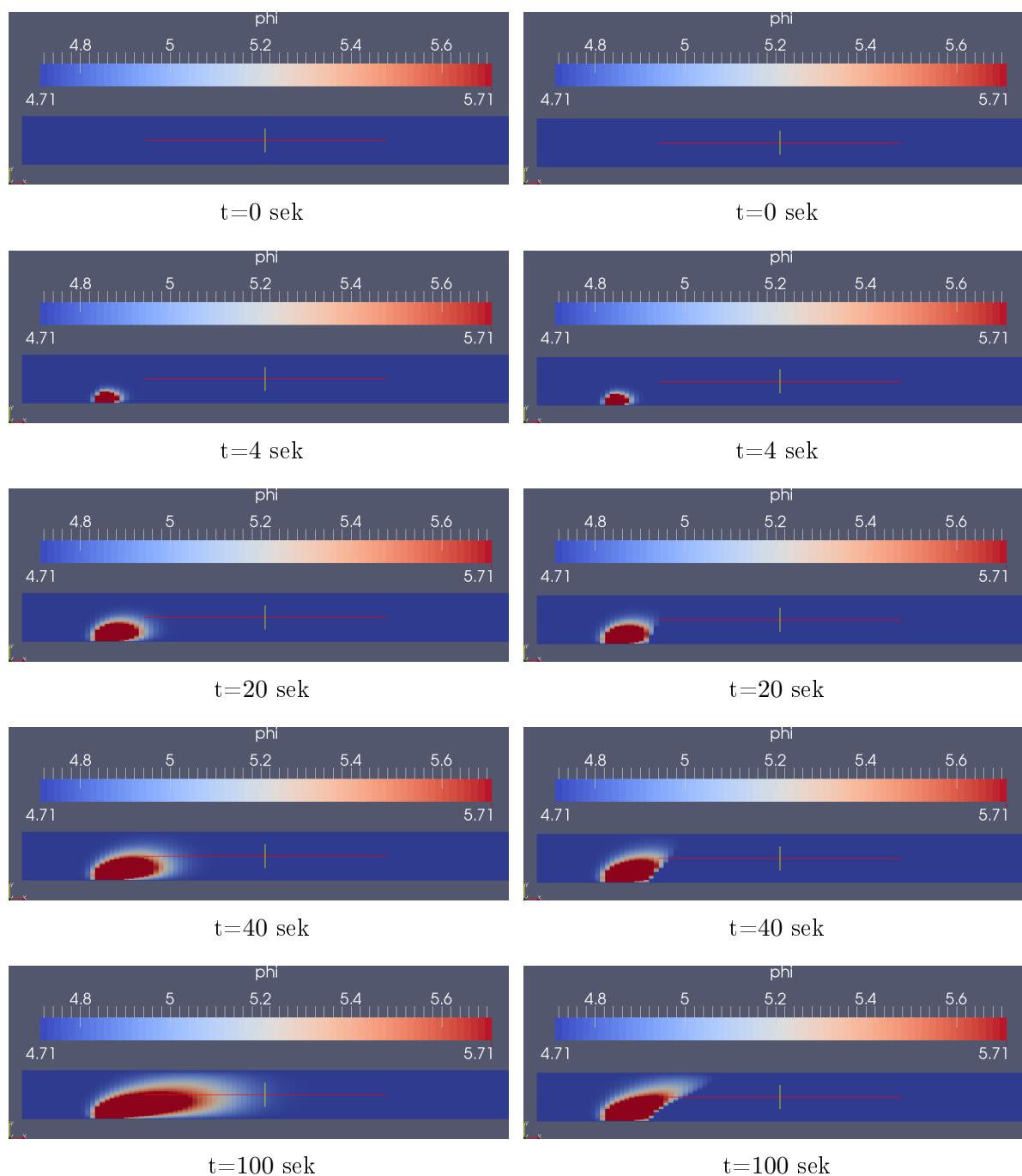


Abbildung 6.12: Vergleich Flussströmungen: links mit Quelle, rechts mit Quelle und Senke

Man erkennt, dass nach 10 Sekunden der eingeführte Stoff von der Kanalströmung noch nicht weit genug transportiert wurde, sodass die Zustände zu diesem Punkt rechts und links identisch sind. Erst ab circa 20 Sekunden wird ein Unterschied deutlich, der Einfluss der Senke ist deutlich zu erkennen.

6.2.1.2 Flussströmung mit Ein- und Abflussrohr in der Mitte

Es wird ein ähnlicher Anwendungsfall wie in 6.2.1.1 diskutiert. Allerdings befindet sich das Ein- (Quelle) bzw. Abflussrohr (Senke) in der Mitte des Kanals bzw. des Flusses. Es werden drei Ergebnisse gegenübergestellt:

- **Links:** Die Quelle stromauf der Senke fügt $10\times$ mehr des neuen Fluids hinzu, als die Senke absaugt.
- **Mitte:** Ergiebigkeit der Quelle und Schluckvermögen der Senke sind gleich groß.
- **Rechts:** Die Senke stromab der Quelle saugt $10\times$ mehr des neuen Fluids ab, als die Quelle hinzufügt.

Die Simulationseinstellungen bleiben ansonsten dieselben wie in 6.2.1.1.

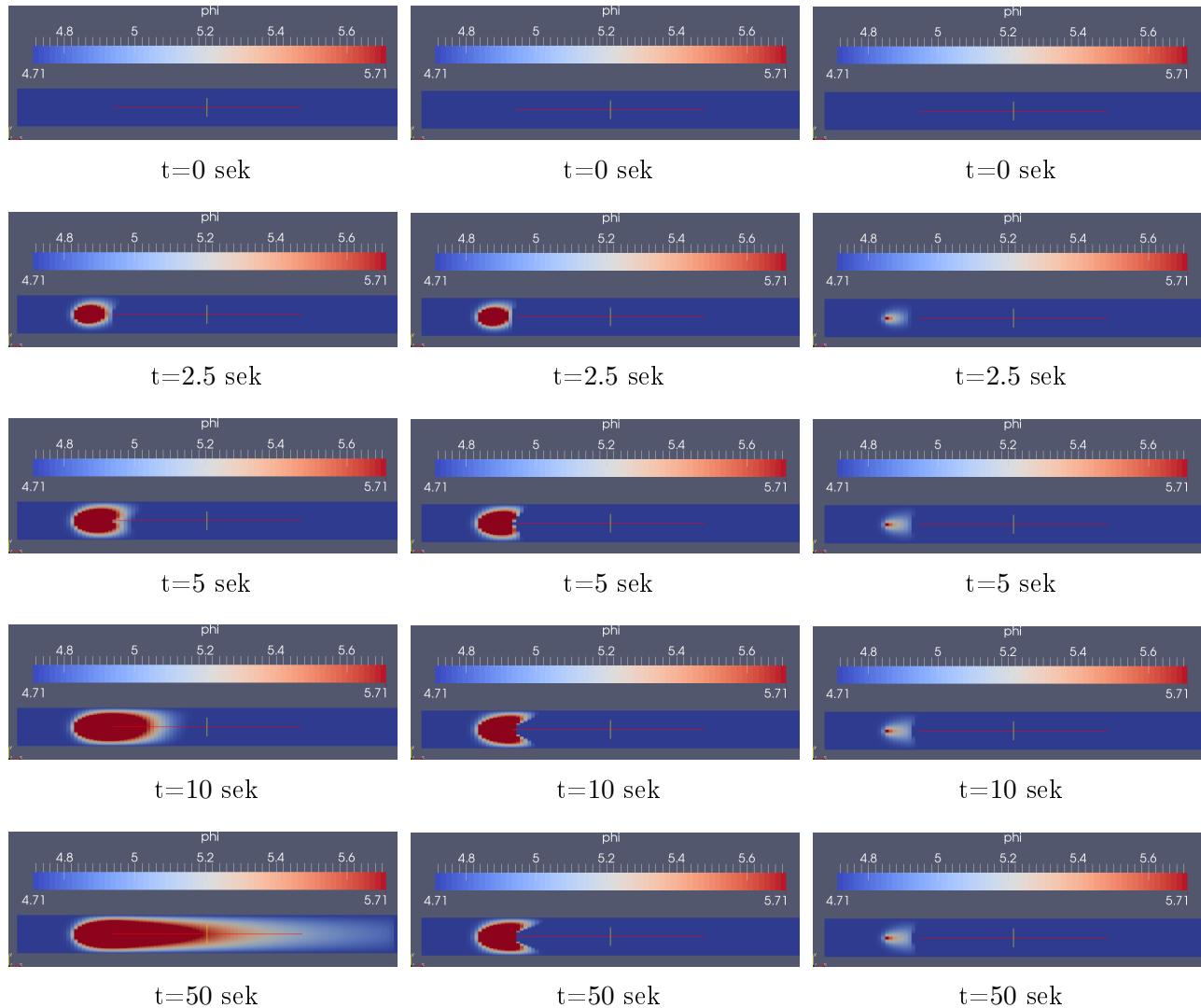


Abbildung 6.14: Vergleich Flussströmungen mit verschiedenen Ergiebigkeiten der Quellen und Senken

Links wird, aufgrund der stärkeren Quelle, das neue Fluid entlang des Kanals transportiert, da die Senke zu schwach ist, um es komplett wieder abzusaugen. Hingegen wird beim rechten Fall sogar mehr abgesaugt, als durch die Quelle eingebracht wird. Da die Skala nicht neu skaliert worden ist, wird das hier nicht komplett ersichtlich. Dies ist bewusst gemacht worden, da so die drei Fälle besser verglichen werden können. Gleicher gilt auch für die Grafiken aus 6.2.1.1.

6.2.2 Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes bei gegebenem Druck

6.2.2.1 Couette-Strömung

Es wird eine Strömung durch zwei ebene, in z -Richtung theoretisch unendlich ausgedehnte, Platten der Länge L (in x -Richtung) betrachtet, die im Abstand b (in y -Richtung) zueinander stehen. Die untere Platte bewegt sich nicht, die obere bewegt sich hingegen in x -Richtung mit der Geschwindigkeit u_{Wand} . Links strömt ein Fluid als Blockprofil mit der Geschwindigkeit u_∞ in den Zwischenraum der beiden ebenen Platten ein. Dargestellt wird der stationäre Endzustand der Lösung. Die analytische Lösung sieht mit Hilfe der Haftbedingung $u_{Fluid}|_{Wand} \stackrel{!}{=} u_{Wand}$ und konstantem Druckfeld wie folgt aus:

$$\left. \begin{array}{l} \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ p = const \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ u(y=0) \stackrel{!}{=} 0 \\ u(y=b) \stackrel{!}{=} u_{in} \end{array} \right\} u(y) = \frac{u_{in}}{b}y.$$

Das heißt stationär stellt sich ein lineares Geschwindigkeitsprofil mit Steigung $\frac{u_{in}}{b}$ in y -Richtung ein. Das numerische Ergebnis stellt auch genau dies dar:

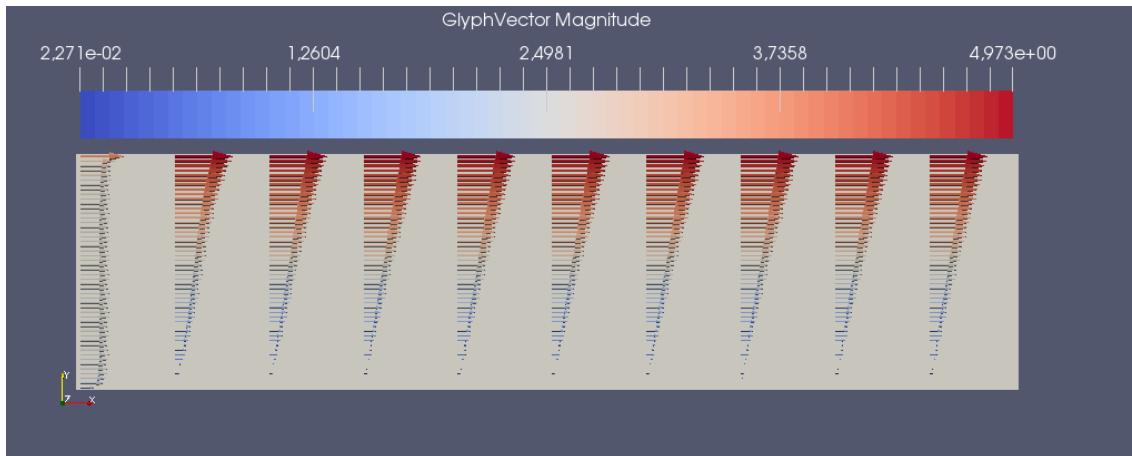


Abbildung 6.15: Couette-Strömung: stationärer Endzustand

6.2.2.2 Poiseuille-Strömung

Analog zur Couette-Strömung in 6.2.2.1 wird wieder die Strömung durch zwei ebene, in z -Richtung theoretisch unendlich ausgedehnte, Platten der Länge L (in x -Richtung) betrachtet, die im Abstand b (in y -Richtung) zueinander stehen untersucht. Im Gegensatz zu 6.2.2.1 sind jetzt allerdings beide Platten in Ruhe. Es besteht jedoch ein linearer

Druckgradient $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const.}$ Somit stellt sich ein Geschwindigkeitsprofil folgender Form ein:

$$\left. \begin{array}{l} \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial x} = \text{const} \\ u(y=0) \stackrel{!}{=} 0 \\ u(y=b) \stackrel{!}{=} 0 \end{array} \right\} u(y) = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - yb).$$

Als Randbedingungen wird dieses Geschwindigkeitsprofil am Einström- und Auströmrund vorgegeben. Als stationärer Endzustand sollte sich dieses Profil über die komplette Länge L eingestellt haben. Mit folgenden gegebenen Initialdaten

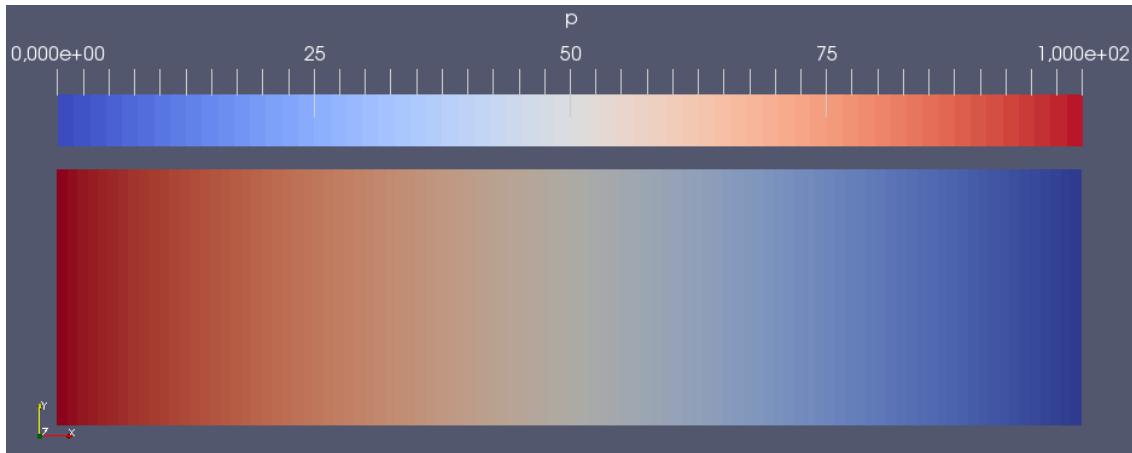


Abbildung 6.16: Poiseuille-Strömung: gegebenes Druckfeld



Abbildung 6.17: Poiseuille-Strömung: gegebene Anfangswerte des Geschwindigkeitsfeldes

ergibt sich folgendes Resultat:

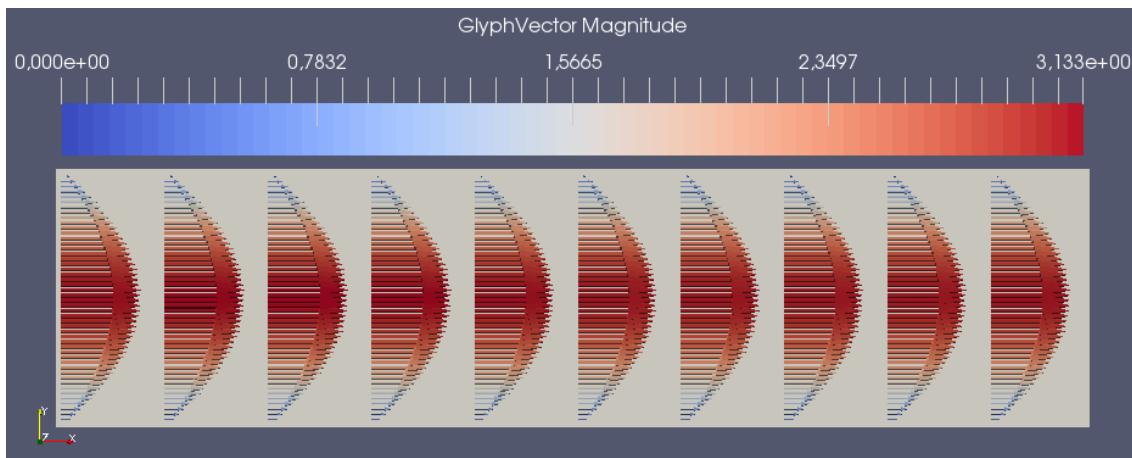


Abbildung 6.18: Poiseuille-Strömung: stationärer Endzustand

Man erkennt, dass sich das initiale Parabelprofil an den Rändern (siehe 6.17) im gesamten Kanal ausbreitet hat. Dies entspricht auch der korrekten Lösung, die Software berechnet die gegebenen Strömungen also korrekt.

6.2.3 Berechnung des Druck- und Geschwindigkeitsfeldes mit Hilfe des **SIMPLER**-Algorithmus

6.2.3.1 Couette-Strömung

Analog zu 6.2.2.1 wird eine Couette-Strömung berechnet, nun wird allerdings nur am rechten Rand ein Druckwert vorgegeben. Es sollte sich das gleiche stationäre Geschwindigkeitsprofil einstellen, sowie ein konstantes Druckfeld. Beides ist auch mit dem Algorithmus berechnet worden. Da die Bilder identisch aussehen, sind diese hier nicht noch einmal aufgeführt.

6.2.3.2 Gartenschlauch

Wie in einem Gartenschlauch wird eine Art Kanal betrachtet, welcher oben und unten undurchlässige Wände besitzt (wie im Querschnitt eines Gartenschlauches). Am Einströmrand wird eine Geschwindigkeit u vorgegeben, die von der Leistung der Wasserpumpe abhängt. Am Ausströmrand wird ein Druck vorgegeben, in diesem Fall der Umgebungsdruck p_a . Folgendes Druck- und Geschwindigkeitsfeld stellen sich ein:

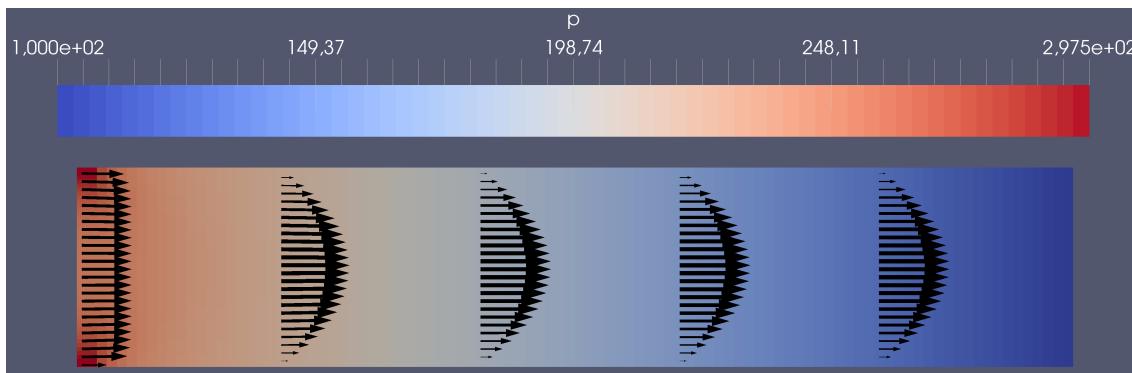


Abbildung 6.19: Gartenschlauch: Geschwindigkeits- und Druckfeld

Es bildet sich ein laminares Profil aus, sowie ein linearer Druckgradient. Dies entspricht der gleichen Überlegung wie in 6.2.2.2.

6.2.3.3 Festkörperrotation

Es wird das Druck- und Geschwindigkeitsfeld eines rotierenden Fluides betrachtet. Folgende Formeln sind hierfür relevant um das kartesische Koordinatensystem in ein tangential-radial-Koordinatensystem zu transformieren bzw. umgekehrt:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (6.1)$$

$$x = r \cos(\phi), \quad (6.2)$$

$$y = r \sin(\phi), \quad (6.3)$$

$$u = -\sin(\phi) v_\phi, \quad (6.4)$$

$$v = +\cos(\phi) v_\phi, \quad (6.5)$$

$$v_\phi = \omega r, \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho r \omega^2 \Rightarrow p(r) = \frac{1}{2} \rho r^2 \omega^2 + p_0. \quad (6.7)$$

Zunächst wird ein 3×3 -Gitter untersucht. Die Randbedingungen an den äußeren Zellen sind durch die oben genannten Formeln gegeben, die Werte der inneren Zelle werden ausgerechnet. Es sei $p_0 = 100$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\omega = 5$, $\eta = 2$, $\rho = 2.5$ und das Integrationsgebiet sei $[2; 5] \times [2; 5]$.

Es müssen sich folgende Werte für die mittlere Zelle einstellen:

$$\begin{aligned} p &= 865.625, \\ u_{unten} &= -15, \quad v_{unten} = 17.5, \\ u_{oben} &= -20, \quad v_{oben} = 17.5, \\ u_{links} &= -17.5, \quad v_{links} = 15, \\ u_{rechts} &= -17.5, \quad v_{rechts} = 20. \end{aligned}$$

Das numerische Resultat dieses Testfalles ergibt bis auf Maschinengenauigkeit genau diese Werte, d.h. der Algorithmus funktioniert.

Im Folgenden werden das Druckfeld und das Geschwindigkeitsfeld dieses Problems dargestellt, allerdings wird das Integrationsgebiet auf $[-5; 5] \times [-5; 5]$ erweitert und dieses wird mit einem 50×50 -Gitter diskretisiert:

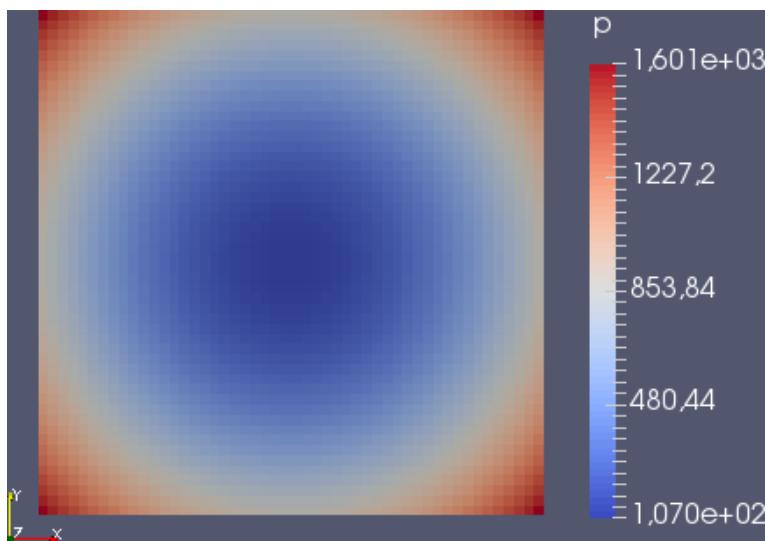


Abbildung 6.20: Festkörperrotation: Druckfeld

Dieses Druckfeld stimmt ebenfalls mit der analytischen Lösung überein. Die Konturen konstanten Druckes bilden konzentrische Kreise um den Ursprung $(0; 0)$, da $p \sim r^2$.

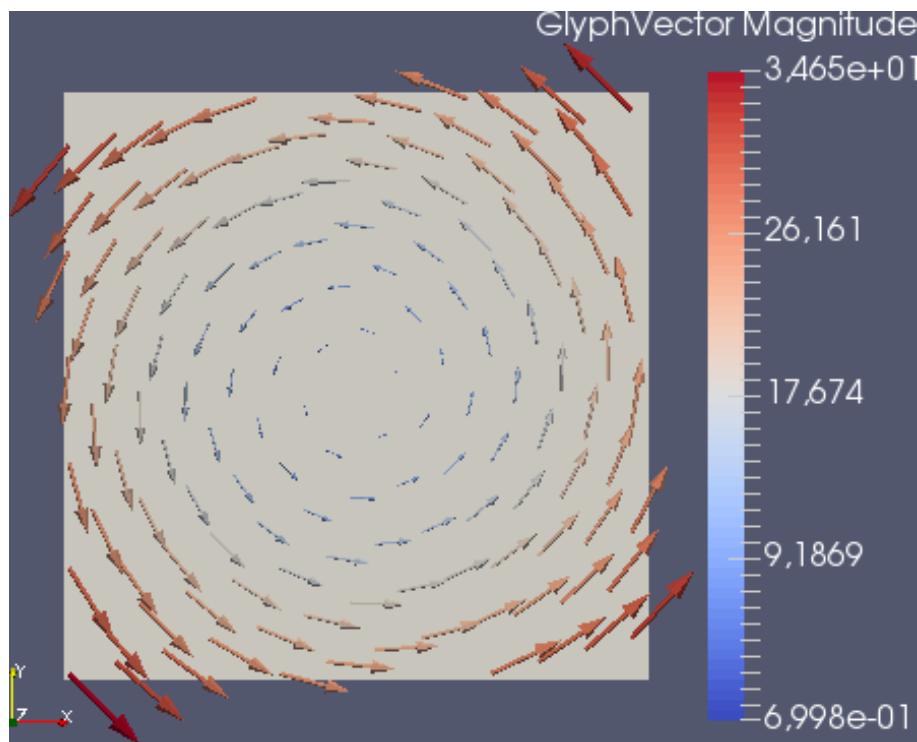


Abbildung 6.21: Festkörperrotation: Geschwindigkeitsfeld

Diese Grafik visualisiert eine im mathematisch Sinn positive Drehbewegung, was wegen der Vorgabe $\omega = 5$ auch die exakte Lösung widerspiegelt. Aufgrund der Beziehung $v_\phi \sim r$ werden die Tangentialgeschwindigkeiten Richtung Kurvenaußen proportional zum Radius größer, da $\omega = \text{const.}$

6.2.3.4 Driven Cavity

Es wird ein Behälter betrachtet, der unten, links und rechts undurchlässige Wände besitzt. Überhalb dieses Behälters fließt ein Fluid mit konstantem Druck und konstanter

Geschwindigkeit in x -Richtung. Nun wird das Druck- und Geschwindigkeitsfeld simuliert, welches sich in dem Behälter einstellt. Als Randbedingungen gilt einerseits die Haftbedingung an den drei festen undurchlässigen Wänden ($u_{Wand} = v_{Wand} = 0$), am oberen Rand gilt $u_{Fluid, oben} = u_\infty$. Gleiches gilt für den Druck: $p_{Fluid, oben} = p_\infty$. Der Behälter wird mit einem 50×50 -Gitter diskretisiert.

Für kleine Reynoldszahlen ($Re \leq 400$) ergibt sich folgendes Ergebnis:

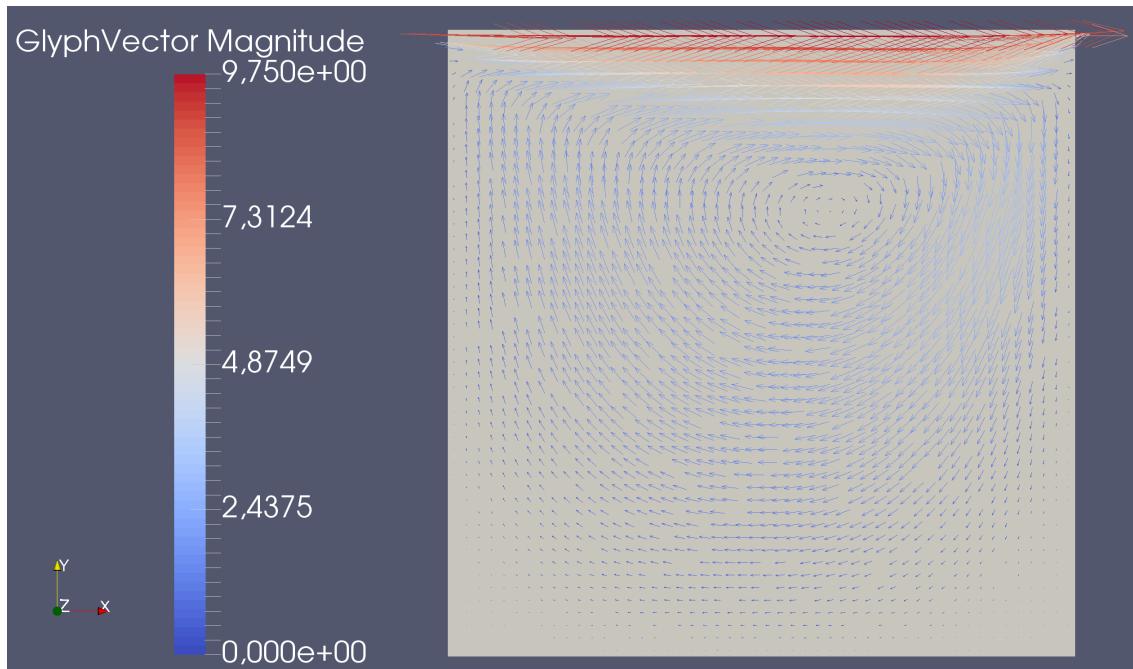


Abbildung 6.22: Driven Cavity: $Re=100$, Geschwindigkeitsfeld

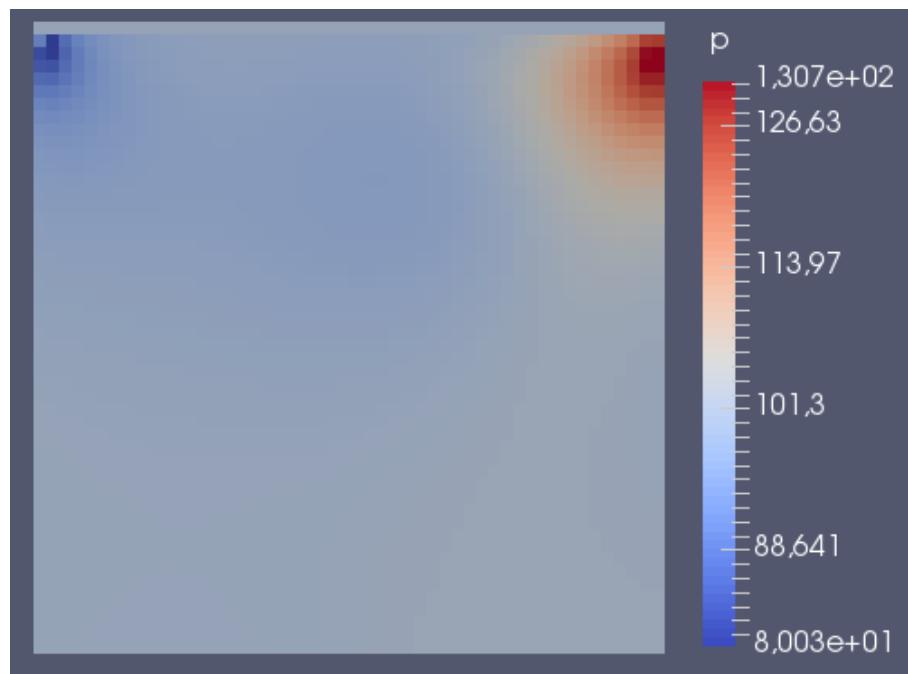


Abbildung 6.23: Driven Cavity: $Re=100$, Druckfeld

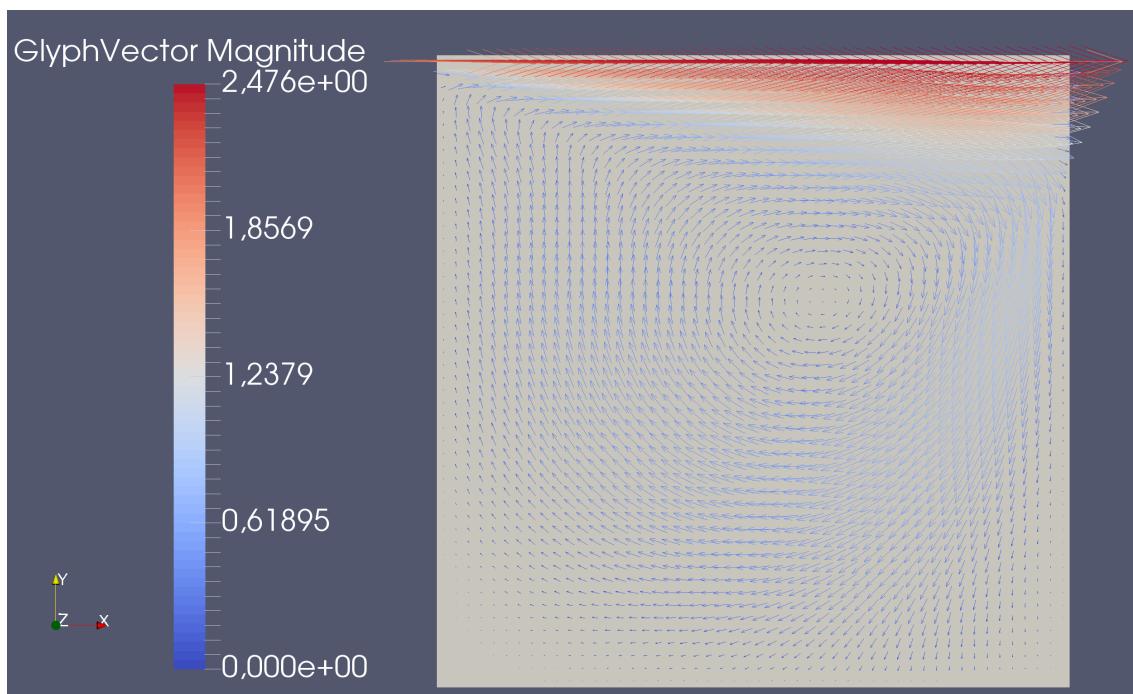


Abbildung 6.24: Driven Cavity: $\text{Re}=400$, Geschwindigkeitsfeld

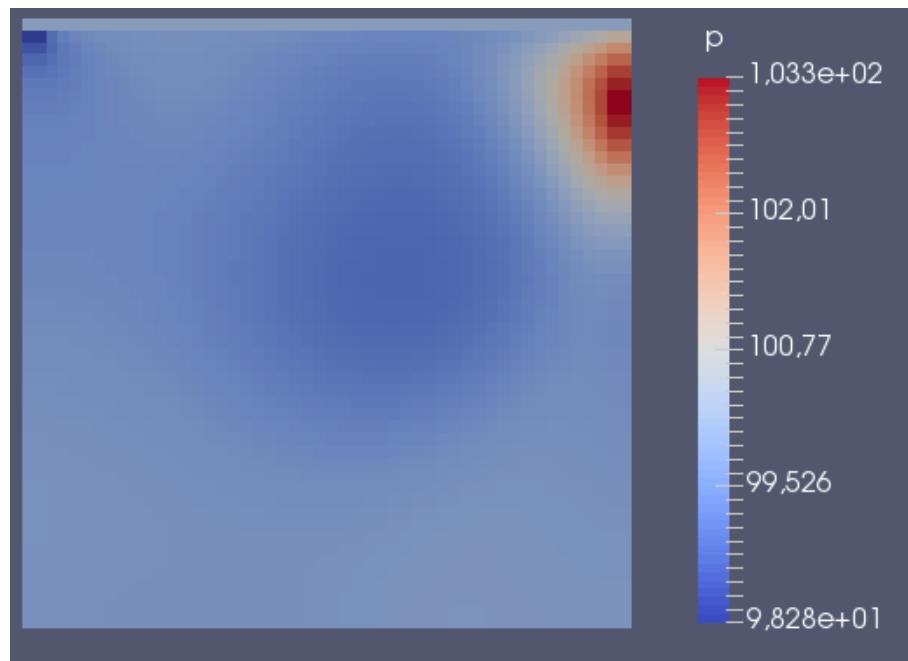


Abbildung 6.25: Driven Cavity: $\text{Re}=400$, Druckfeld

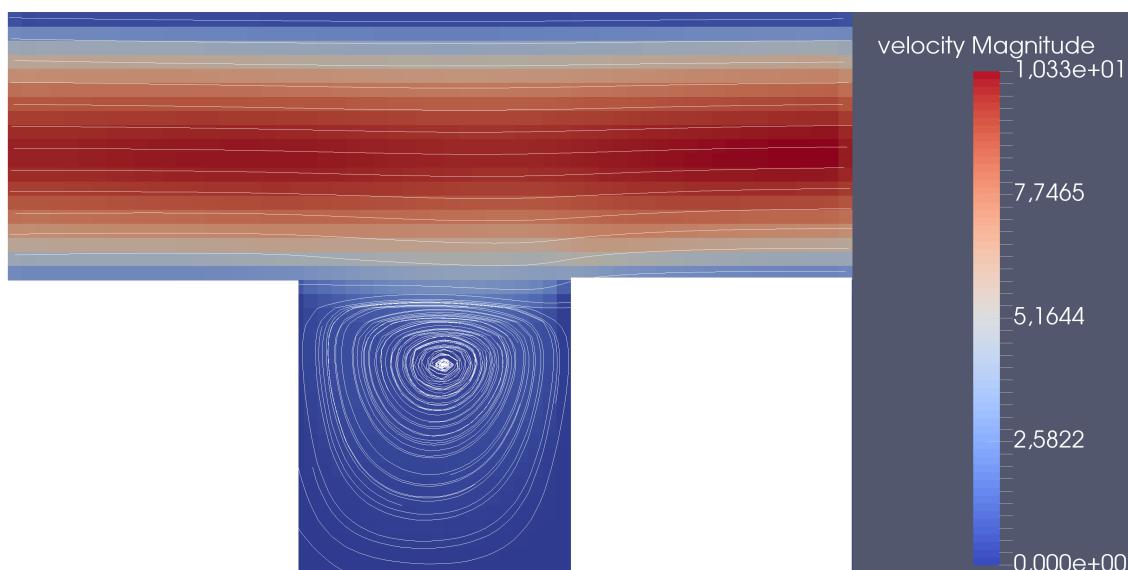


Abbildung 6.26: Driven Cavity: $\text{Re}=400$, mit Kanalströmung

Man erkennt einen einzigen Wirbel, was auch vergleichbaren Resultaten (s. Internet) entspricht. Nun werden die Strömungen für höhere Reynolds-Zahlen analysiert. Es werden jeweils die Stromlinien visualisiert, das Druckfeld wird im Hintergrund dargestellt:

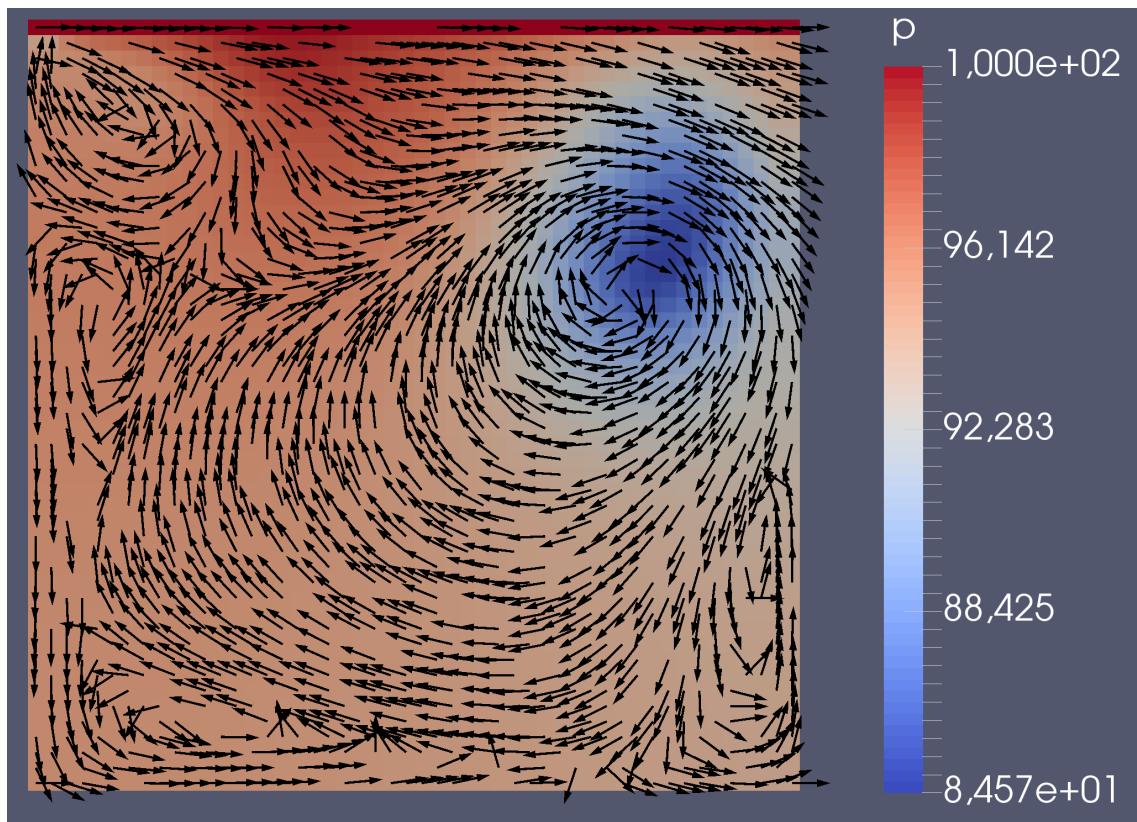


Abbildung 6.27: Driven Cavity: $\text{Re}=1600$, Druck- und Geschwindigkeitsfeld

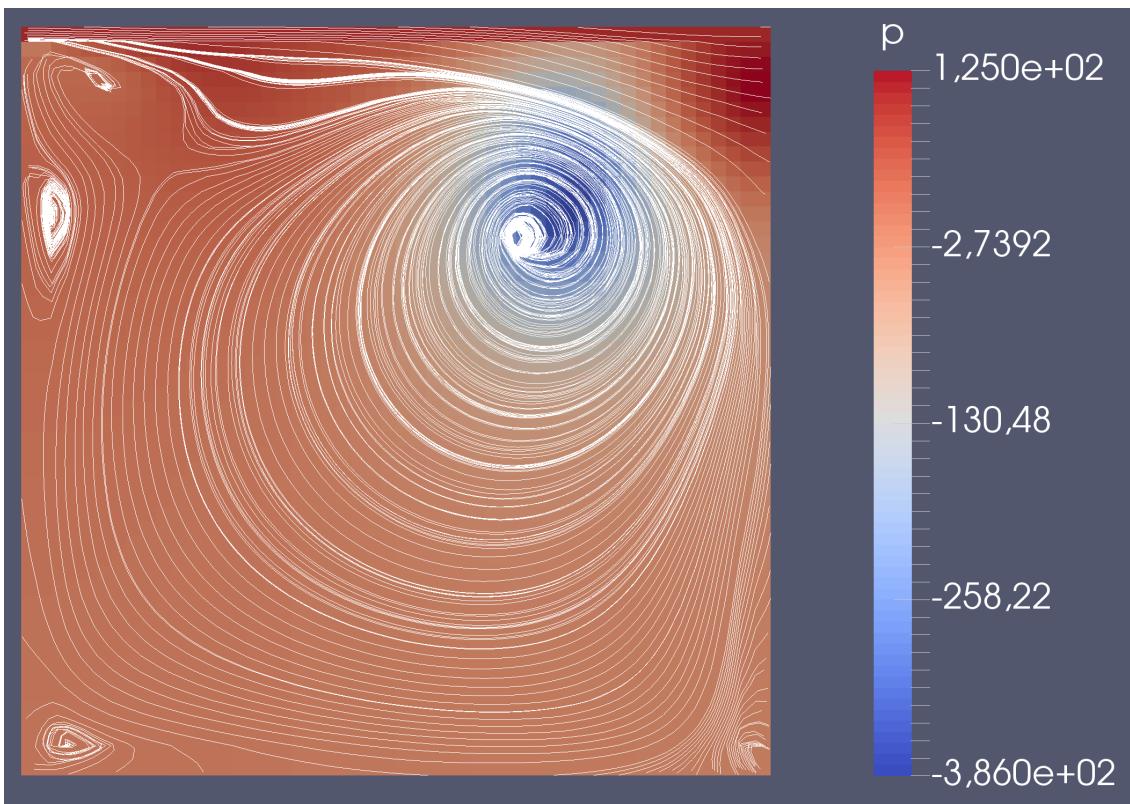


Abbildung 6.28: Driven Cavity: $Re=3200$, Druck- und Geschwindigkeitsfeld

Man erkennt, dass sich in den Ecken kleinere, entgegengerichtete Wirbel ausbilden. Die letzten beiden Bilder zeigen die Strömung für $Re = 3200$. Der zentrale, mathematisch negativ gerichtete, Wirbel hat die Tendenz in die Mitte der Nische (cavity) zu wandern. Es ist außerdem erkennbar, wie sich die kleinen, im mathematisch positiven Sinn drehenden, Wirbel ausbilden. Das Druckfeld nimmt im Bereich der Wirbel ein Minimum auf. All diese Ergebnisse spiegeln die erwarteten Ergebnisse wieder.

6.2.3.5 Kanalvergrößerung

Zunächst wird eine laminare, ausgebildete Strömung betrachtet mit einem Geschwindigkeitsfeld wie bereits in [6.2.2.2](#) beschrieben. Der Kanal wird nun schlagartig vergrößert, wodurch sich direkt hinter dem Übergang Wirbel einstellen. Nach einer kritischen Länge haben diese allerdings keinen signifikanten Einfluss mehr auf die Strömung, sodass sich wieder das Parabelprofil wie in [6.2.2.2](#) einstellt. Folgendes Druck- und Geschwindigkeitsfeld stellen sich ein:

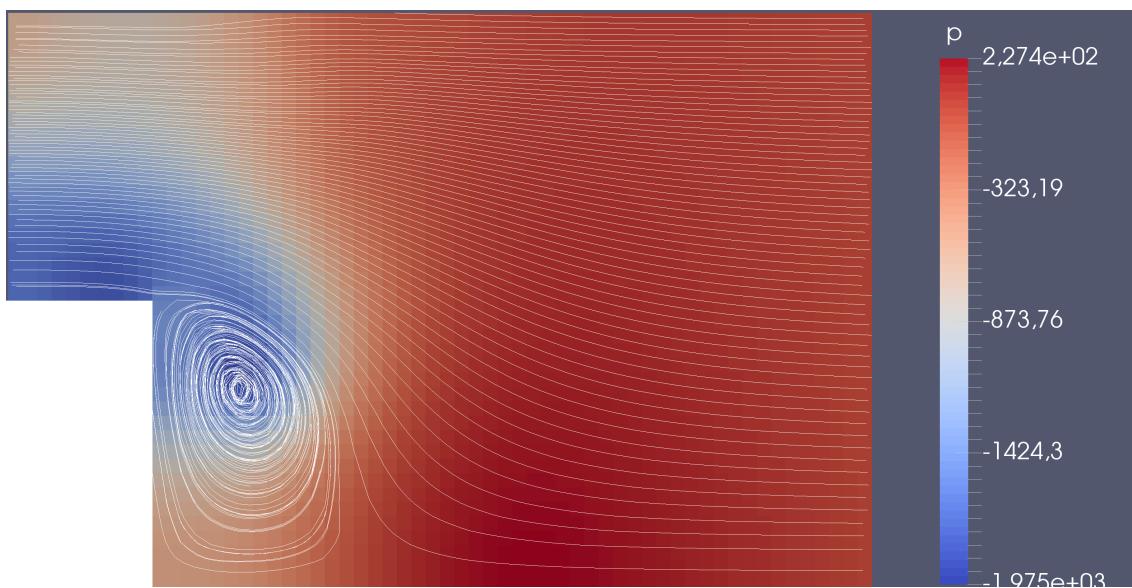


Abbildung 6.29: Kanalvergrößerung: Druck- und Geschwindigkeitsfeld

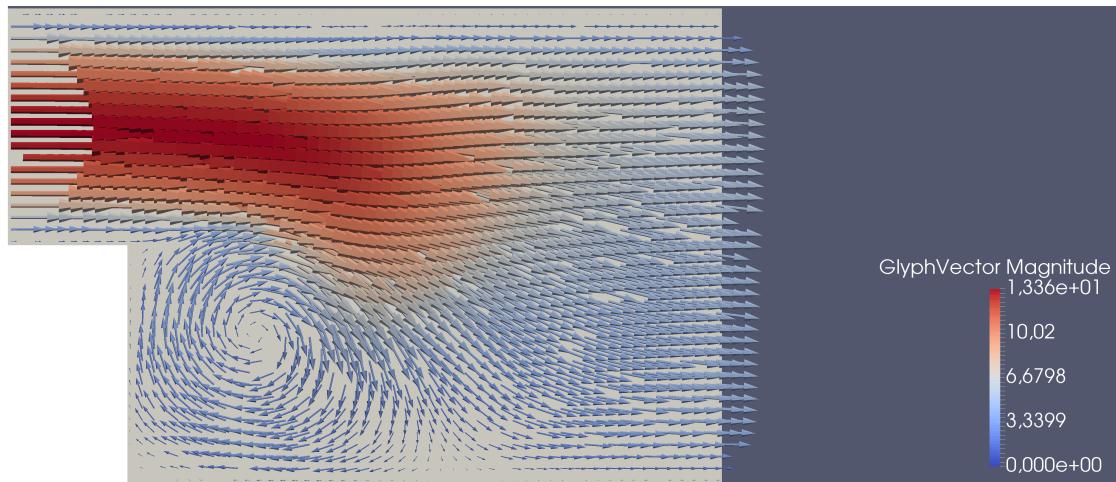


Abbildung 6.30: Kanalvergrößerung: Geschwindigkeitsfeld

Die Überlegungen des sich einstellenden Wirbels haben sich bestätigt. Auch hier liegt im Wirbel ein Druckminimum vor.

6.2.3.6 Kanalwand

Es wird wieder eine ausgebildete, laminare Strömung wie in 6.2.2.2 betrachtet. Es befindet sich nun allerdings eine Wand am unteren Rand des Kanals, beispielsweise Schmutz um den das Fluid herum fließen muss.



Abbildung 6.31: Kanalwand: Druckfeld

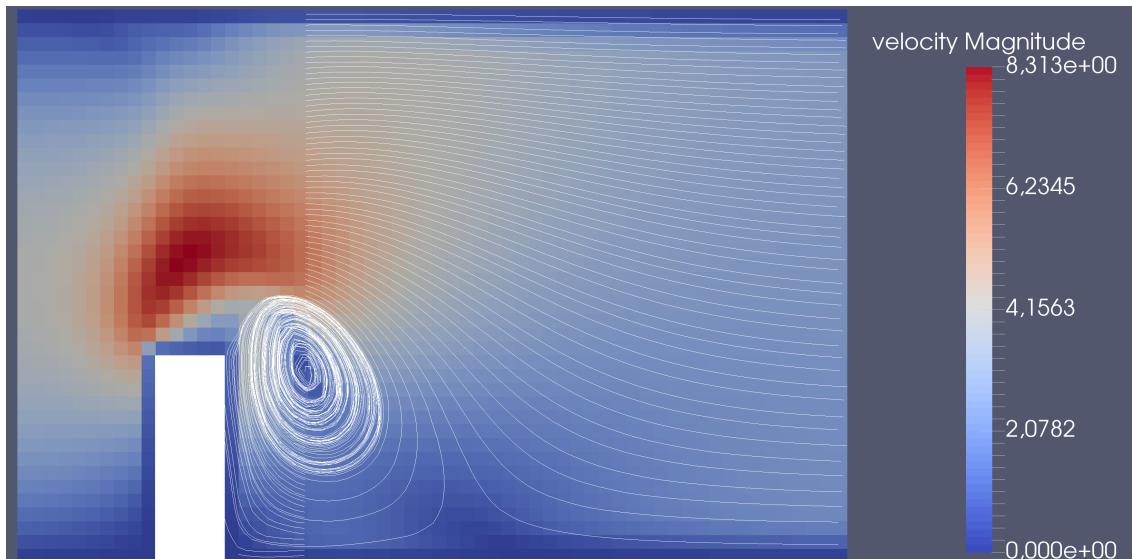


Abbildung 6.32: Kanalwand: Geschwindigkeitsfeld

Man erkennt einen sich einstellenden Wirbel hinter der Wand. Des Weiteren steigt der Druck vor der Wand deutlich an. Beides entspricht der physikalischen Überlegung.

6.2.3.7 Messblende

Zur Durchflussmessung wird beispielsweise die Strömung durch eine Messblende betrachtet, und mit Hilfe des Differenzdruckes vor und nach der Blende der Durchfluss bestimmt. Die Strömung durch solch eine Blende wird im Folgenden durch Stromlinien dargestellt, das Druckfeld wird im Hintergrund visualisiert:

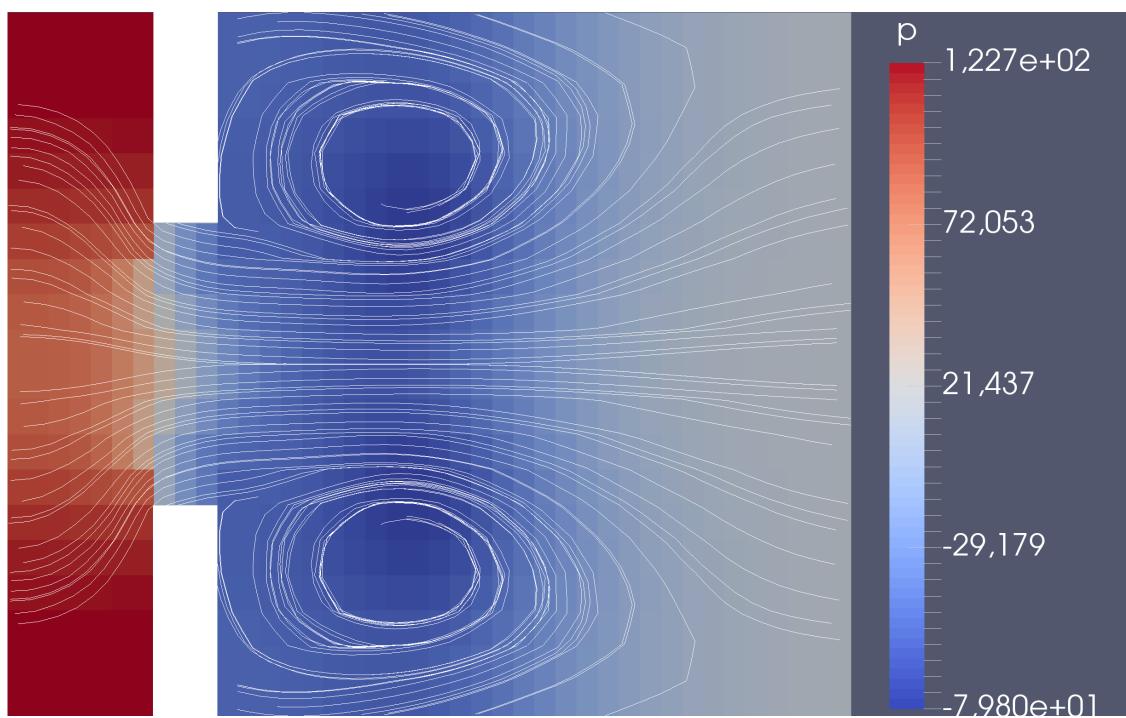


Abbildung 6.33: Messblende: Druck- und Geschwindigkeitsfeld

Analog zu 6.2.3.6 ist ein starker Druckanstieg vor der Blende erkennbar, sowie zwei Wirbel hinter der Blende. Wie erwartet, ist das Druck- und Geschwindigkeitsfeld symmetrisch um die Mitte des Kanals/Rohres.

6.2.3.8 Umströmter Zylinder

Abschließend wird ein umströmter Zylinder betrachtet. In einem Kanal befindet sich ein Zylinder, stromauf dieses Zylinders herrscht eine laminare Strömung. Aufgrund dieses Hindernisses bildet sich eine Kármán'sche Wirbelstraße.

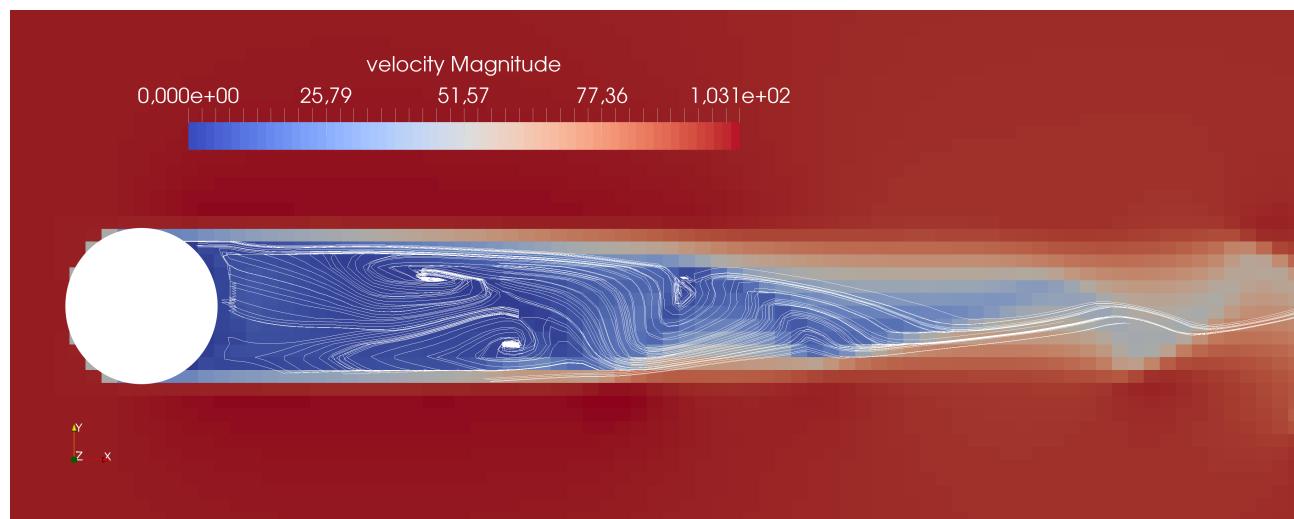


Abbildung 6.34: Umströmter Zylinder: $Re \approx 1000$, Geschwindigkeitsfeld

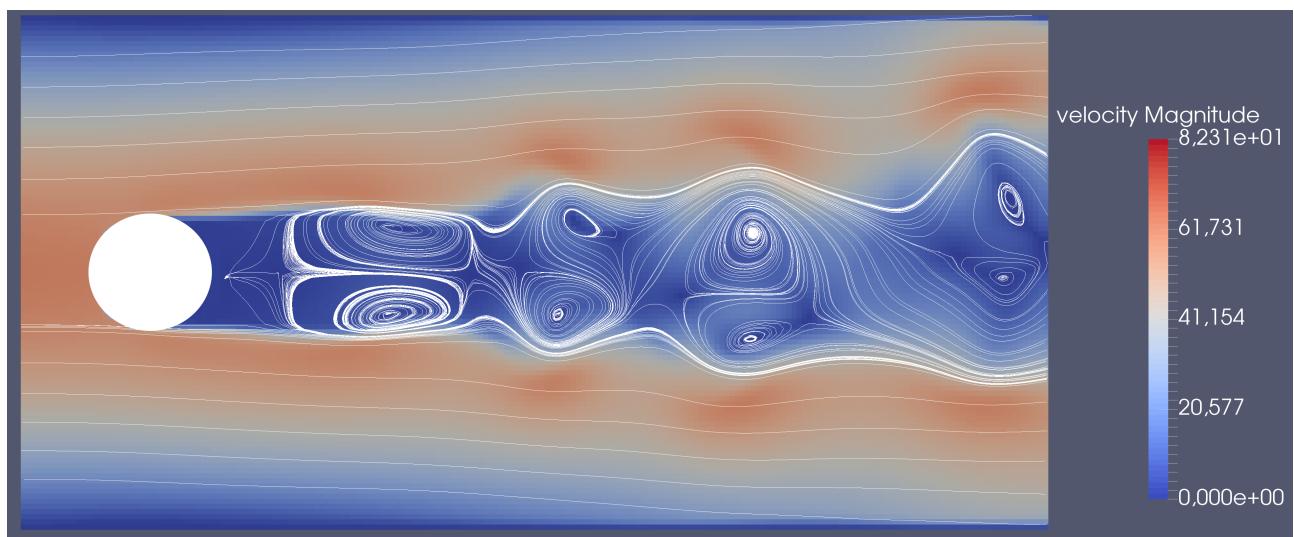


Abbildung 6.35: Umströmter Zylinder: Geschwindigkeitsfeld

Die Ergebnisse sehen qualitativ richtig aus. Es ist zu beachten, dass aufgrund des kartesischen Gitters der Zylinder nur durch eine Art Stufenprofil approximiert worden ist. Um trotzdem eine gut erkennbare Kreisform zu erhalten, wurde das 20×10 große Integrationsgebiet mit einem 200×100 -Gitter diskretisiert. Zur abschließenden Validierung der Implementierung müssten jedoch weitere Testfälle, insbesondere solche, für die experimentelle Daten zum Vergleich zur Verfügung stehen, gerechnet werden.