

Лабораторна робота 4

ОПТИМАЛЬНА Й АДАПТИВНА ФІЛЬТРАЦІЯ БІОСИГНАЛІВ

Мета роботи:

1. Дослідити основні властивості оптимальних і адаптивних цифрових фільтрів.
2. Ознайомитися з варіантами застосування таких фільтрів для оброблення біосигналів.

Короткі теоретичні відомості

Оптимальний фільтр Вінера виконує фільтрацію корисного випадкового сигналу $s(n)$ з адитивної суміші його з випадковим шумом $v(n)$ з урахуванням їх статистичних властивостей (рис. 4.1). Параметри фільтра є оптимальними для забезпечення мінімуму середнього квадрата помилки передачі корисного сигналу.

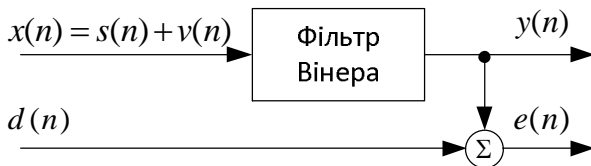


Рис. 4.1. Розрахункова схема фільтра Вінера

Вихідним сигналом фільтра зі скінченною імпульсною характеристикою є

$$y(n) = \mathbf{w}'\mathbf{x}(n),$$

де $\mathbf{w} = [w_0, w_1, \dots, w_{L-1}]'$ – вектор коефіцієнтів фільтра (імпульсна характеристика); $\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-L+1)]'$ – блок відліків вхідного сигналу; L – довжина цих векторів; « ' » – символ операції транспонування.

Помилка передачі корисного сигналу фільтром має вигляд:

$$e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - \mathbf{w}'\mathbf{x}(n),$$

де $d(n)$ – бажаний сигнал.

Завдання синтезу оптимального фільтра Вінера полягає в тому, щоб знайти оцінку вектора \mathbf{w} , при якій середній квадрат помилки відгуку фільтра буде мінімальним. Середній квадрат помилки:

$$J = \sigma^2 - 2\mathbf{p}'\mathbf{w} + \mathbf{w}'\mathbf{R}\mathbf{w},$$

де σ^2 – дисперсія сигналу $d(n)$; $\mathbf{p} = E[d(n)\mathbf{x}(n)]$ – вектор взаємної кореляції між вхідним і бажаним сигналами; $\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}'(n)]$ – автокореляційна матриця блоку вхідного сигналу.

Мінімум помилки визначають диференціюванням J за вектором \mathbf{w} і прирівнюванням до нуля отриманого градієнта:

$$\frac{dJ}{d\mathbf{w}} = \frac{d\sigma^2}{d\mathbf{w}} - \frac{d(\mathbf{p}'\mathbf{w})}{d\mathbf{w}} + \frac{d(\mathbf{w}'\mathbf{R}\mathbf{w})}{d\mathbf{w}} = -2\mathbf{p} + 2\mathbf{R}\mathbf{w} = 0.$$

Із цієї рівності отримуємо рівняння Вінера–Хопфа

$$\mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{p}, \quad (1)$$

його розв'язок є вектор оптимальних коефіцієнтів фільтра

$$\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}.$$

Фільтр Вінера не є оптимальним для нестационарних сигналів.

Адаптивні фільтри. Адаптивний фільтр змінює свої коефіцієнти залежно від характеристик вхідного сигналу і може використовуватися для фільтрації нестационарних процесів. Адаптивний фільтр складається з цифрового фільтра з регульованими коефіцієнтами і алгоритму адаптації (рис. 4.2).

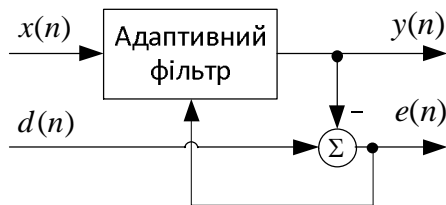


Рис. 4.2. Адаптивний фільтр

Частіше використовують СІХ-фільтри, оскільки вони завжди стійкі. Коефіцієнти фільтра \mathbf{w} обчислюють за умови досягнення мінімуму середнього квадрату помилки $e(n)$. Для розв'язання рівняння використовують ітераційний алгоритм на основі метода

найменших квадратів (алгоритм Уідроу–Хоффа). Вектор коефіцієнтів фільтра на $(k + 1)$ -й ітерації обчислюють як:

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k + 2\mu e_k \mathbf{x}_k, \quad (2)$$

де $e_k = d_k - \mathbf{x}'_k \mathbf{w}_k$.

Великі значення параметра адаптації μ прискорюють збіжність, але можуть призвести до нестійкості процесу адаптації, малі значення є причиною повільної збіжності коефіцієнтів фільтра до оптимальних значень.

Адаптивний послаблювач шуму/селективний фільтр містить адаптивний фільтр і блок затримки D (рис. 4.3).

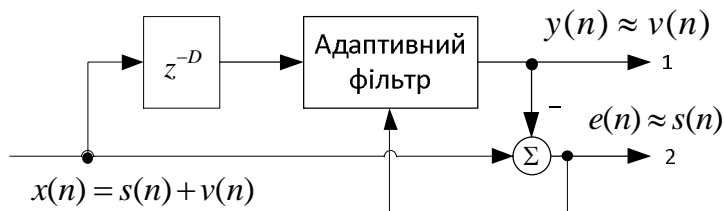


Рис. 4.3. Адаптивний послаблювач шуму

Вхідний сигнал $x(n) = s(n) + v(n)$ є адитивною сумішшю широкосмугового $s(n)$ і вузькосмугового $v(n)$ сигналів. Після блоку затримки широкосмуговий сигнал $s(n - D)$ не корельований з широкосмуговим компонентом $s(n)$ у вхідному сигналі. Проте вузькосмуговий сигнал $v(n - D)$ залишиться корельованим з вузькосмуговим компонентом сигналу. Внаслідок цього сигнал на виході 1 адаптивного фільтра є оцінкою вузькосмугового компонента, $y(n) \approx v(n)$, тобто схема працює як адаптивний селективний фільтр. На виході 2 фільтр мінімізує сигнал

$$e(n) = s(n) + v(n) - y(n) \approx s(n),$$

тобто сигнал $e(n)$ є виходом адаптивного послаблювача шуму.

Адаптивний фільтр послаблення перешкод мережі живлення має структуру, яку зображено на рис. 4.4. Вхідний сигнал $x(n) = s(n) + v(n)$ є адитивною сумішшю корисного сигналу $s(n)$, наприклад електрокардіограми, і перешкоди $v(n)$ –

гармонійного сигналу відомої частоти f (50/60 Гц), але невідомої амплітуди і фази.

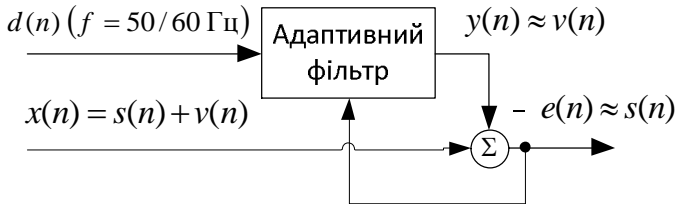


Рис. 4.4. Адаптивний фільтр послаблення перешкод мережі живлення

Опорний сигнал частоти f зі змінною амплітудою і фазою формується з двох квадратурних сигналів відповідно до рівняння:

$$y(n) = w_0 \cos(2\pi fn) + w_1 \sin(2\pi fn),$$

де w_0, w_1 – коефіцієнти адаптивного фільтра.

На частоті f опорного сигналу вихідний сигнал дорівнює:

$$e(n) = x(n) - y(n) \approx s(n),$$

тобто схема має властивості режекторного фільтра.

Команди MATLAB для вивчення

Використовуйте команду `help` у MATLAB, вивчіть призначення та варіанти застосування таких функцій (команд): `sum`, `toeplitz`, `xcorr`, `xcov`, `zeros`.

Завдання і методичні вказівки до виконання роботи

1. Фільтрація сигналу фільтром Вінера

1.1. Змодельуйте досліджуваний сигнал $x(n) = s(n) + v(n)$, що складається з суміші двох синусоїд $s(n)$ з частотами 10 і 20 Гц, і шуму $v(n)$. Для моделювання використовується такий код:

```
fs = 200; N = 400; t = (0:(N-1))/fs;
s = sin(2*pi*10*t) + sin(2*pi*20*t);
v = 2*randn(size(t)); x = s + v;
```

1.2. Синтезуйте оптимальний фільтр Вінера довжиною $L = 32$. Коефіцієнти фільтра за рівнянням Вінера–Хопфа (1) обчислює функція `wiener_hopf`, що має такий код

```
function w = wiener_hopf(x,y,L)
x = x(:); y = y(:);
rxx = xcorr(x,L); rxy = xcorr(x,y,L);
rxx_matrix = toeplitz(rxx(L+1:end));
w = rxx_matrix\rxy(L+1:end);
```

Збережіть функцію в окремому файлі.

Яка розмірність кореляційної матриці сигналу?

Обчисліть за допомогою функції коефіцієнти фільтра Вінера:

$L = 32$;

`w = wiener_hopf(x, s, L)`;

1.3. Виконайте фільтрацію досліджуваного сигналу (функція `filter`). Побудуйте в одному графічному вікні графіки: 1) сигналу $x(n)$; 2) сигналу $s(n)$; 3) відфільтрованого сигналу $y(n)$.

Обчисліть АЧХ оптимального фільтра побудуйте її графік. Подайте результати у звіті.

1.4. Повторіть дослідження п. 1.3. при довжині фільтра 64, 128, 256 відліків.

Як змінюється частотна характеристика фільтра зі збільшенням його довжини?

1.5. Обчисліть дисперсію передачі сигналу оптимальним фільтром для фільтрів різної довжини. Подайте результати у звіті.

Як змінюється дисперсія зі збільшенням довжини фільтра?

2. Адаптивна фільтрація вузькосмугового сигналу

2.1. Створіть досліджуваний сигнал, що складається з суміші синусоїди з частотою 10 Гц і адитивного шуму (див. п. 1.1).

2.2. Уведіть код функції `lms`, що обчислює коефіцієнти адаптивного фільтра за алгоритмом Уидроу–Хоффа (2):

```
function [y, e, w] = lms(x, d, mu, L)
x = x(:); d = d(:);
M = length(x); y = zeros(M,1);
e = zeros(M,1); w = zeros(L,1);
for k = L:M
```

```

xk = x(k:-1:k - L + 1);
y(k) = w'*xk; e(k) = d(k) - y(k);
w = w + 2*mu*e(k)*xk;
end

```

Збережіть функцію в окремому файлі.

2.3. Виконайте фільтрацію сигналу з п. 2.1 адаптивним фільтром. Для цього можна використати такий код

```

L = 128; mu = 0.0001;
[y, e, w] = lms(x, s, mu, L);

```

Побудуйте в одному графічному вікні графіки: 1) сигналу $s(n)$; 2) відфільтрованого сигналу $y(n)$; 3) АЧХ адаптивного фільтру. Подайте результати у звіті.

2.4. Дослідіть залежність часу адаптації залежно від параметру адаптації. Оцініть час адаптації фільтра, змінюючи коефіцієнт адаптації в межах $10^{-2} \dots 10^{-6}$.

Як впливає значення коефіцієнта адаптації на час адаптації фільтра і на якість фільтрації?

2.5. Дослідіть процедуру адаптивної фільтрації за різної довжини фільтру (256, 512, 1024).

Як змінюється частотна характеристика фільтра у разі збільшення його довжини?

3. Адаптивна фільтрація сигналу зі змінною частотою

3.1. Створіть сигнал, що складається з двох послідовних синусоїд з частотами 10 Гц і 20 Гц і адитивного шуму (див. п. 1.1)

```

s1 = sin(2*pi*10*t); s2 = sin(2*pi*20*t); s = [s1 s2];
t = (0:length(x)-1)/fs; v = 2*randn(size(t)); x = s + v;

```

3.2. Виконайте фільтрацію сигналу адаптивним фільтром. Побудуйте в одному графічному вікні графіки: 1) початкового сигналу; 2) відфільтрованого сигналу; 3) АЧХ адаптивного фільтра. Подайте результати у звіті.

3.3. Дослідіть залежність часу адаптації залежно від коефіцієнта адаптації. Оцініть час адаптації фільтра, змінюючи коефіцієнт адаптації в межах $10^{-2} \dots 10^{-6}$.

Як впливає значення коефіцієнта адаптації на час адаптації фільтра і на якість фільтрації?

3.4. Дослідіть процедуру адаптивної фільтрації при довжині фільтра 256, 512, 1024 відліки (для останнього фільтра прийняти тривалість сигналу 2000 і більше відліків).

Як змінюється частотна характеристика фільтра у разі збільшення його довжини?

4. Адаптивна фільтрація перешкод мережі живлення

4.1. Завантажте сигнал ЕКГ з перешкодою від мережі живлення (файл `ecg2x60.dat`). Цей сигнал $x(n) = s(n) + v(n)$ є адитивною сумішшю корисного ЕКГ сигналу $s(n)$ і перешкоди $v(n)$ від мережі живлення. Обчислення коефіцієнтів фільтра виконує функція `lms60` (модифікація функції `lms`), що має такий код:

```
function [y, e, w] = lms60(x, d, mu)
M = length(x); y = zeros(1, M); e = zeros(1, M); w = [0; 0];
for k = 2:M
    y(k) = d(:,k)'*w; e(k) = x(k) - y(k);
    w = w + 2*mu*e(k)*d(:, k);
end
```

Уведіть цей код і збережіть функцію в окремому файлі.

4.2. Виконайте фільтрацію сигналу адаптивним фільтром:

```
ecg = load('ecg2x60.dat'); fs = 200;
t = (0:length(ecg) - 1)/fs; mu = 0.1; f = 60;
d = [cos(2*pi*f*t); sin(2*pi*f*t)];
[y, e, w] = lms60(ecg, d, mu);
```

Зверніть увагу, що тут фільтрований сигнал позначено як «*e*».

Побудуйте в одному графічному вікні графіки: 1) сигналу `ecg`; 2) відфільтрованого сигналу $e(n)$; 3) вихідного сигналу $y(n)$ адаптивного фільтра. Подайте результати у звіті.

Опишіть результат фільтрації.

4.3. Визначте значення коефіцієнтів адаптивного фільтра після закінчення адаптації, наведіть їх у звіті.

4.4. Дослідіть якість фільтрації від параметра адаптації, змінюючи його у межах $10^{-1} \dots 10^{-4}$, визначте час адаптації фільтра.

Як впливає значення коефіцієнта адаптації на час адаптації фільтра і на якість фільтрації?

Контрольні запитання

1. Чому фільтр Вінера втрачає властивість оптимальності при нестационарних сигналах?
2. Чому для реалізації адаптивного фільтра краще використовувати СІХ-фільтри?
3. Як параметр збіжності впливає на швидкість адаптації цифрового фільтра?
4. У чому переваги ітераційного алгоритму адаптації фільтра?