Лабораторная работа №2

Математическое моделирование

Николаев Дмитрий Иванович

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Научиться работать с Julia, его пакетами Plots для построения графиков и DifferentialEquations для решения дифференциальных уравнений. Решить задачу о погоне, построить графики траектории движения. Проверить возможность реализации этой задачи на языке OpenModelica.

2 Задание

Вариант 29.

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 11,8 (k = 11.8) км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4,2 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки.

3 Теоретическое введение

Julia — высокоуровневый высокопроизводительный свободный язык программирования с динамической типизацией, созданный для математических вычислений. Эффективен также и для написания программ общего назначения. Синтаксис языка схож с синтаксисом других математических языков (например, MATLAB и Octave), однако имеет некоторые существенные отличия. OpenModelica — свободное открытое программное обеспечение для моделирования, симуляции, оптимизации и анализа сложных динамических систем. Основано на языке Modelica.

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Постановка задачи

1. Пусть место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения: $t_0 = 0, x_0 = 0$. Пусть место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки: $x_0 = 0$.
2. Введем полярные координаты. Будем считать, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров x_0 $(0 = x_0 = 0)$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.
3. Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса, только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.
4. Чтобы найти расстояние X (расстояние, после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x, а катер — k-x (или k+x в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{k-x}{4.2v}$ (во втором случае $\frac{k+x}{4.2v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное

расстояние x можно найти из следующего уравнения:$\frac{x}{v} = \frac{k-x}{4.2v}$ в первом случае (рис. [4.1]) и $\frac{x}{v} = \frac{k+x}{4.2v}$ во втором (рис. [4.2]). Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{k}{5.2}$ и $x_2 = \frac{k}{3.2}$ (k = 11.8), задачу будем решать для двух случаев.

5. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса, удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r — радиальная скорость и v_τ — тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{dr}{dt} = v$. Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ на радиус r, $v_\tau = r\frac{\partial\theta}{\partial t}$, $v_\tau = \sqrt{17.64v^2 - v^2} = \sqrt{16.64}v$ (учитывая, что радиальная скорость равна v). Тогда получаем $r\frac{\partial\theta}{\partial t} = \sqrt{16.64}v$.
6. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений. Далее, исключая из полученной системы производную по t, переходим к одному уравнению:

$$\frac{\partial r}{\partial\theta} = \frac{r}{\sqrt{16.64}}.$$

   При этом, начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получаем траекторию движения катера в полярных координатах.

4.2 Реализация на Julia

Код на Julia:

```
using Plots
using DifferentialEquations
```

```
const theta01 = 0
const theta02 = -pi
const r01 = 11.8/5.2
const r02 = 11.8/3.2
const T1 = (theta01, 2pi)
const T2 = (theta02, pi)
const phi = pi/4

function F(u, p, t)
    return u/\sqrt(16.64)
end

prob1 = ODEProblem(F, r01, T1)
prob2 = ODEProblem(F, r02, T2)

sol1 = solve(
  prob1,
  abstol=1e-16,
  reltol=1e-16)
sol2 = solve(
    prob2,
    abstol=1e-16,
    reltol=1e-16)

plt1 = plot(
    proj = :polar,
    aspect_ratio=:equal,
    dpi=300,
```

```
    legend=true)

plot!(
    plt1,
    sol1.t,
    sol1.u,
    xlabel="theta",
    ylabel="r(theta)",
    label="Траектория катера",
    color=:red,
    title="Катер с бандитами")
plot!(
    plt1,
    fill(phi,11),
    collect(0:10),
    label="Траектория движения лодки",
    color=:blue)

plt2 = plot(
    proj = :polar,
    aspect_ratio=:equal,
    dpi=300,
    legend=true)
plot!(
    plt2,
    sol2.t,
    sol2.u,
    xlabel="theta",
    ylabel="r(theta)",
```

```
    label="Траектория катера",
    color=:red,
    title="Катер с бандитами")
plot!(
    plt2,
    fill(phi,11),
    collect(0:10),
    label="Траектория движения лодки",
    color=:blue)

savefig(plt1, "image/lab02_1.png")
savefig(plt2, "image/lab02_2.png")
```

4.3 Полученные графики

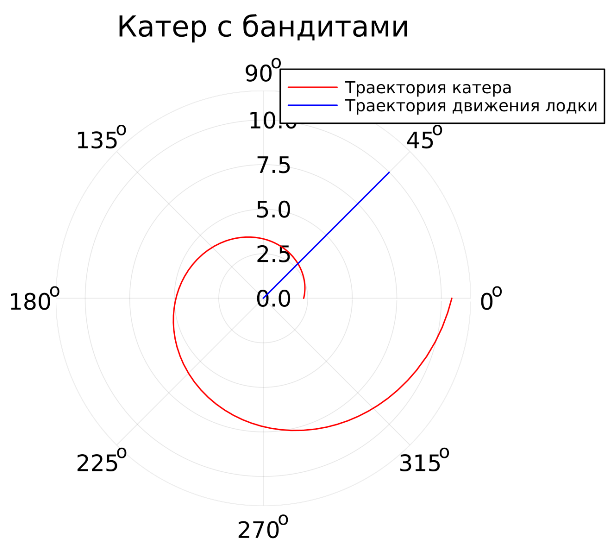

Рис. 4.1: Первый случай

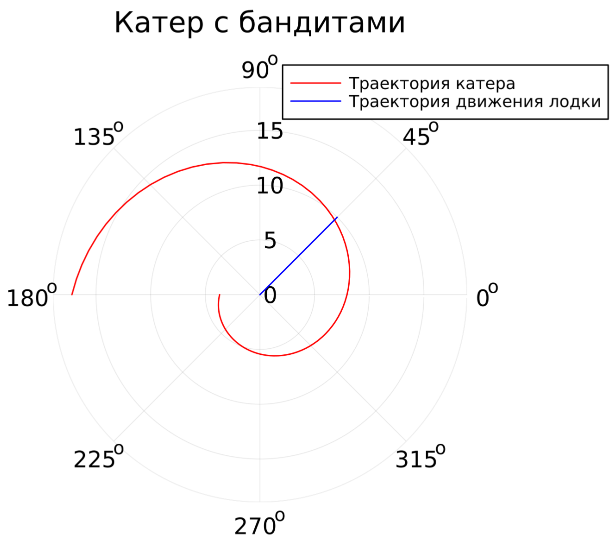

Рис. 4.2: Второй случай

5 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы я освоил основы Julia и двух библиотек - Plots и DifferentialEquations, научился решать задачу о погоне и строить графики, записал уравнение, описывающее движение катера в погоне за лодкой, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени), построил траекторию движения катера и лодки для двух случаев, нашёл точку пересечения траектории катера и лодки графически. На OpenModelica данная задача решается с куда большими трудностями из-за наличия производных только по времени и сложности построения графика для системы дифференциальных уравнений.

Список литературы

[1]

1. Кулябов Д.С. Лабораторная работа №2. Москва, Россия: Российский Университет Дружбы Народов.