Лабораторная работа №5

Математическое моделирование

Николаев Дмитрий Иванович

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при заданных начальных условиях. Найти стационарное состояние системы.

2 Задание

Вариант 29

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.31x(t) + 0.054x(t)y(t), \\ \frac{dy}{dt} = 0.32x(t) - 0.055x(t)y(t). \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 7$, $y_0 = 15$. Найдите стационарное состояние системы.

3 Теоретическое введение

Модель Лотки-Вольтерры — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь её авторов, которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга. Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами [1].

Модель хищник-жертва Лотки-Вольтерры была первоначально предложена Альфредом Дж. Лоткой в области теории автокаталитических химических реакций в 1910 г. Это было фактически логистическое уравнение, первоначально выведенное Пьером Франсуа Верхульстом. В 1920 году Лотка с помощью Андрея Колмогорова расширил модель на "органические системы" на примере вида растений и вида травоядных животных, а в 1925 году он использовал уравнения для анализа взаимодействия хищник-жертва в своей книге по биоматематике. Тот же набор уравнений был опубликован в 1926 году Вито Вольтеррой, математиком и физиком, который заинтересовался математической биологией. Вольтерру вдохновило общение с морским биологом Умберто Д'Анкона, который в то время ухаживал за его дочерью, а позже стал его зятем. Д'Анкона изучал улов рыбы в Адриатическом море и заметил, что в годы Первой мировой войны (1914-1918) увеличился процент вылова хищных рыб. Это озадачило его, поскольку в военные годы рыболовство сильно сократилось. Вольтерра разработал свою модель независимо от Лотки и использовал ее для объяснения наблюдения Д'Анконы [2].

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Постановка задачи

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax(t) + bx(t)y(t), \\ \frac{dy}{dt} = cx(t) - dx(t)y(t). \end{cases}$$

В этой модели x — число хищников, y — число жертв. Коэффициент a описывает естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв,

— скорость естественной прироста числа жертв в отсутствие хищников. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены — bxy и dxy в правой части уравнения) ([3]).

Стационарное состояние системы находится из значений коэффициентов системы дифференциальных уравнений следующим образом:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{c}{d}, \\ y_0 = \frac{a}{b}. \end{cases}$$

Что в случае $a = 0.31$, $b = 0.054$, $c = 0.32$ и $d = 0.055$ даст $x_0 = \frac{0.32}{0.055} \approx 5.8182$ и $y_0 = \frac{0.31}{0.054} \approx 5.7407$. То есть стационарное состояние системы находится в точке (5.8182; 5.7407).

4.2 Реализация на Julia

- Эволюция популяции жертв и хищников (Рис. [4.1]).
- Эволюция популяций жертв и хищников в зависимости от времени (Рис. [4.2]).

Код на Julia:

```
using Plots
using DifferentialEquations

const a = 0.31;     # Коэффициент смертности хищников
const b = 0.054;  # Коэффициент прироста популяции хищников
const c = 0.32;    # Коэффициент прироста популяции жертв
```

```
const d = 0.055;   # Коэффициент смертности жертв

# u[1] - x, u[2] - y, где x - численность популяции хищников,
#y - численность популяции жертв, du[1]=dx/dt, du[2]=dy/dt
function lorenz1!(du,u,p,t)  # Модель хищник-жертва
    du[1] = -a*u[1] + b*u[1]*u[2]
    du[2] = c*u[2] - d*u[1]*u[2]
end

const u0 = [7, 15]
const T = [0.0, 100.0]

prob1 = ODEProblem(lorenz1!, u0, T)

sol1 = solve(
    prob1,
    abstol=1e-8,
    reltol=1e-8)

plt1 = plot(
    dpi=300,
    legend=true)
plot!(
    plt1,
    sol1,
    idxs=(2,1),
    label="Эволюция популяции жертв и хищников",
    xlabel="Численность жертв",
    ylabel="Численность хищников",
```

```
    legend_position=:topright,
    titlefontsize=:14,
    legend_font_pointsize=:6,
    color=:blue,
    title="Модель хищник-жертва")

plt2 = plot(
    dpi=300,
    legend=true)
plot!(
    plt2,
    sol1,
    idxs=(0,1),
    label="Эволюция популяции хищников",
    xlabel="Время",
    ylabel="Численность популяции",
    titlefontsize=:14,
    color=:red,
    title="Модель хищник-жертва")

plot!(
    plt2,
    sol1,
    idxs=(0,2),
    label="Эволюция популяции жертв",
    color=:green)

savefig(plt1, "image/lab05_1.png")
savefig(plt2, "image/lab05_2.png")
```

4.3 Реализация на OpenModelica

- Эволюция популяции жертв и хищников (Рис. [4.3]).
- Эволюция популяций жертв и хищников в зависимости от времени (Рис. [4.4]).

Код на OpenModelica:

```
model Pred_Prey
Real x;
Real y;
initial equation
  x = 7;
  y = 15;
equation
  der(x) = -0.31*x + 0.054*x*y;
  der(y) = 0.32*y - 0.055*x*y;
end Pred_Prey;
```

4.4 Полученные графики

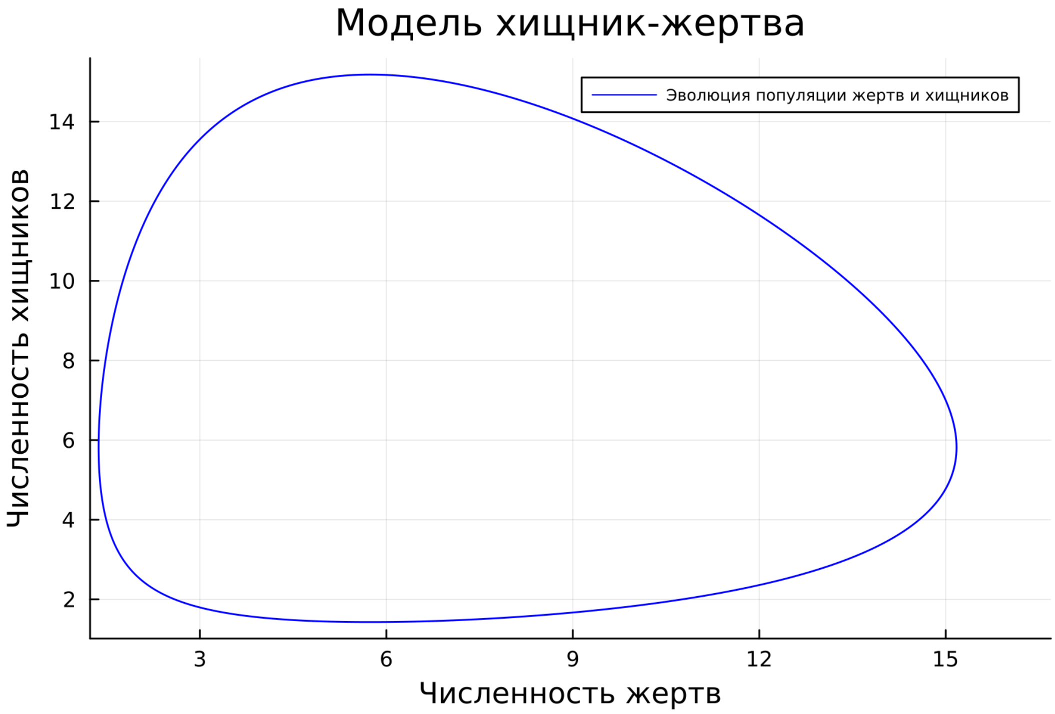

Рис. 4.1: Зависимость изменения численности хищников от изменения численности жертв с начальными значениями x=7, y=15 на Julia

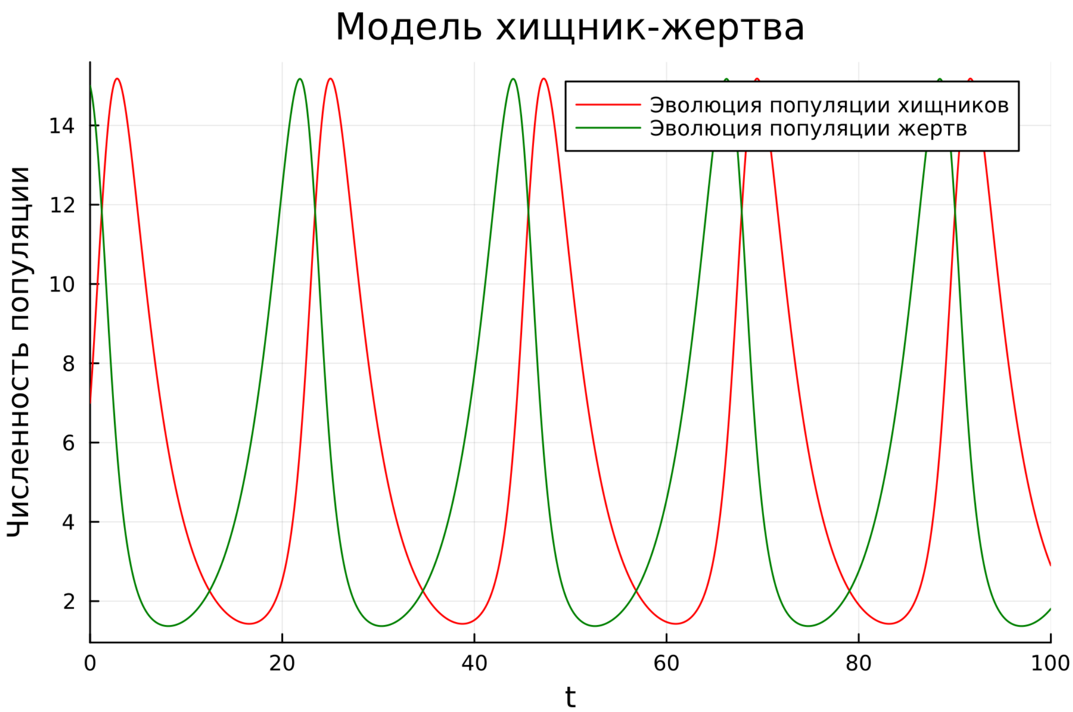

Рис. 4.2: Зависимости изменения численности хищников и жертв от времени с начальными значениями x=7, y=15 на Julia

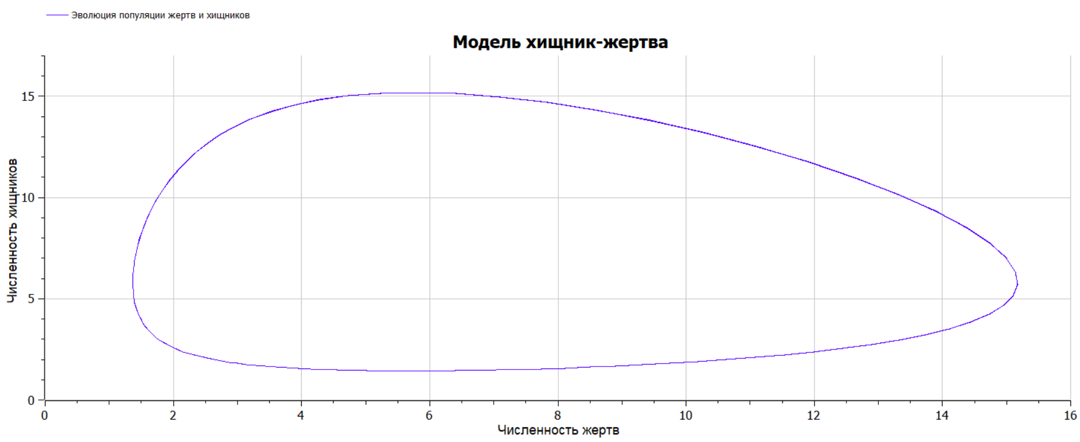

Рис. 4.3: Зависимость изменения численности хищников от изменения численности жертв с начальными значениями x=7, y=15 на OpenModelica

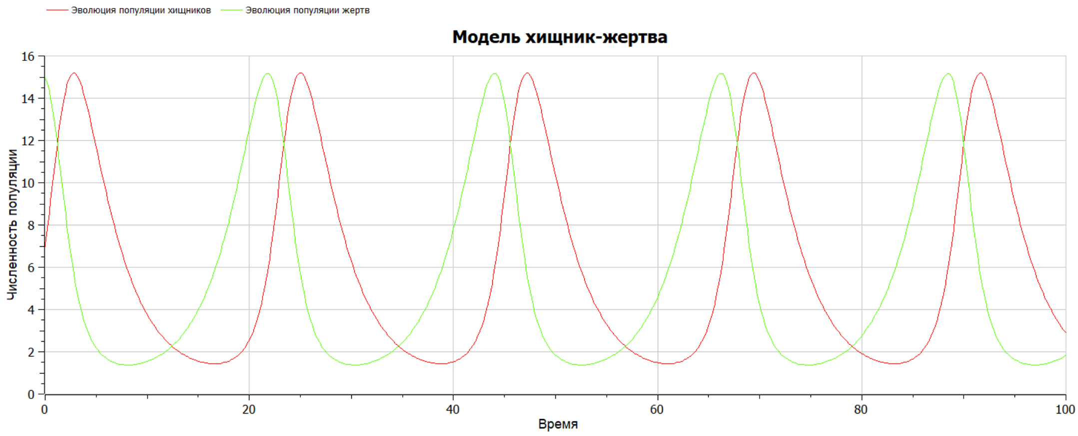

Рис. 4.4: Зависимости изменения численности хищников и жертв от времени с начальными значениями x=7, y=15 на OpenModelica

5 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы я научился строить графики зависимости численности хищников от численности жертв в модели Лотки-Вольтерры, а также графики изменения численности хищников и численности жертв в зависимости от времени при заданных начальных условиях. Нашел стационарное состояние данной системы.

Список литературы

1. Модель Лотки-Вольтерры [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%8C_%D0%9B%D0%BE%D1%82%D0%BA%D0%B8_%E2%80%94_%D0%92%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%82%D0%B5%D1%80%D1%80%D1%8B.
2. Lotka-Volterra equations [Электронный ресурс]. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Lotka%E2%80%93Volterra_equations.
3. Кулябов Д.С. Лабораторная работа №5. Москва, Россия: Российский Университет Дружбы Народов.