Лабораторная работа №4

Компьютерный практикум по статистическому анализу данных

Николаев Д. И.

18 ноября 2023

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Прагматика выполнения

Прагматика выполнения

- Получение навыков работы в Jupyter Notebook;
- Освоение особенностей языка Julia;
- Применение полученных знаний на практике в дальнейшем.

Цели

Цели

Основной целью работы является изучение возможностей специализированных пакетов Julia для выполнения и оценки эффективности операций над объектами линейной алгебры

Задачи

Задачи

1. Используя Jupyter Lab, повторите примеры из раздела 4.2.
2. Выполните задания для самостоятельной работы (раздел 4.4).

Повторение примеров

Лабораторная работа № 4. Линейная алгебра

Повторение примеров

4.2.1. Поэлементные операции над многомерными массивами

[1]:
```julia
# Массив 4х3 со случайными целыми числами (от 1 до 20):
a = rand(1:20,(4,3))
```

[1]:
```
4×3 Matrix{Int64}:
 15  18  12
  9   8  12
  9  17  19
  6  11  10
```

[2]:
```julia
# Поэлементная сумма:
sum(a)
```

[2]:
```
146
```

[3]:
```julia
# Поэлементная сумма по столбцам:
sum(a,dims=1)
```

[3]:
```
1×3 Matrix{Int64}:
 39  54  53
```


Рис. 1: Поэлементные операции над многомерными массивами (1)

Поэлементные операции над многомерными массивами (2)

```
[4]: # Поэлементная сумма по строкам:
     sum(a,dims=2)

[4]: 4×1 Matrix{Int64}:
      45
      29
      45
      27

[5]: # Поэлементное произведение:
     prod(a)

[5]: 5370908083200

[6]: # Поэлементное произведение по столбцам:
     prod(a,dims=1)

[6]: 1×3 Matrix{Int64}:
      7290  26928  27360

[7]: # Поэлементное произведение по строкам:
     prod(a,dims=2)

[7]: 4×1 Matrix{Int64}:
      3240
       864
      2907
       660
```

Поэлементные операции над многомерными массивами (3)

Для работы со средними значениями можно воспользоваться возможностями пакета Statistics:

[8]:
```
# Подключение пакета Statistics:
import Pkg
Pkg.add("Statistics")
```

```
    Updating registry at `C:\Users\User\.julia\registries\General.toml`
   Resolving package versions...
    Updating `C:\Users\User\.julia\environments\v1.8\Project.toml`
  [10745b16] + Statistics
  No Changes to `C:\Users\User\.julia\environments\v1.8\Manifest.toml`
```

[9]:
```
using Statistics
```

[10]:
```
# Вычисление среднего значения массива:
mean(a)
```

[10]:
```
12.166666666666666
```

[11]:
```
# Среднее по столбцам:
mean(a,dims=1)
```

[11]:
```
1×3 Matrix{Float64}:
 9.75  13.5  13.25
```

[12]:
```
# Среднее по строкам:
mean(a,dims=2)
```

[12]:
```
4×1 Matrix{Float64}:
 15.0
  9.666666666666666
 15.0
  9.0
```

4.2.2. Транспонирование, след, ранг, определитель и инверсия матрицы

[13]:
```
# Подключение пакета LinearAlgebra:
import Pkg
Pkg.add("LinearAlgebra")
```

```
  Resolving package versions...
 No Changes to `C:\Users\User\.julia\environments\v1.8\Project.toml`
 No Changes to `C:\Users\User\.julia\environments\v1.8\Manifest.toml`
```

[15]:
```
using LinearAlgebra
```

[16]:
```
# Массив 4x4 со случайными целыми числами (от 1 до 20):
b = rand(1:20,(4,4))
```

[16]:
```
4×4 Matrix{Int64}:
 9   1  13   3
 6  18   8  17
 9  12  10  19
 1  19  20   9
```

[17]:
```
# Транспонирование:
transpose(b)
```

[17]:
```
4×4 transpose(::Matrix{Int64}) with eltype Int64:
  9   6   9   1
  1  18  12  19
 13   8  10  20
  3  17  19   9
```

[18]:
```
# След матрицы (сумма диагональных элементов):
tr(b)
```

[18]:
```
46
```

Транспонирование, след, ранг, определитель и инверсия матрицы (2)

[19]:
```julia
# Извлечение диагональных элементов как массив:
diag(b)
```

[19]:
```
4-element Vector{Int64}:
  9
 18
 10
  9
```

[20]:
```julia
# Ранг матрицы:
rank(b)
```

[20]:
```
4
```

[21]:
```julia
# Инверсия матрицы (определение обратной матрицы):
inv(b)
```

[21]:
```
4×4 Matrix{Float64}:
  0.142988     0.19193    -0.149266    -0.0950814
  0.039861     0.17712    -0.155848    -0.0188334
 -0.00420552  -0.113488    0.0730176    0.06162
 -0.090693    -0.143049    0.183336     0.0245017
```

[22]:
```julia
# Определитель матрицы:
det(b)
```

[22]:
```
-16406.999999999996
```

[23]:
```julia
# Псевдобратная функция для прямоугольных матриц:
pinv(a)
```

[23]:
```
3×4 Matrix{Float64}:
  0.0681024   0.133993  -0.0948392  -0.0623202
  0.052915   -0.174364   0.041201    0.0674566
 -0.0838008   0.096607   0.0501025  -0.0105621
```

Вычисление нормы векторов и матриц, повороты, вращения (1)

4.2.3. Вычисление нормы векторов и матриц, повороты, вращения

Для вычисления нормы используется LinearAlgebra.norm(x).

Евклидова норма:

$$||\overline{X}||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2};$$

p-норма:

$$||\overline{A}||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

[24]:
```
# Создание вектора X:
X = [2, 4, -5]
```

[24]:
```
3-element Vector{Int64}:
  2
  4
 -5
```

[25]:
```
# Вычисление евклидовой нормы:
norm(X)
```

[25]:
```
6.708203932499369
```

[26]:
```
# Вычисление p-нормы:
p = 1
norm(X,p)
```

[26]:
```
11.0
```

Рис. 6: Вычисление нормы векторов и матриц, повороты, вращения (1)

Вычисление нормы векторов и матриц, повороты, вращения (2)

Евклидово расстояние между двумя векторами $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ определяется как $||\overline{X} - \overline{Y}||^2$.

```
[27]: # Расстояние между двумя векторами X и Y:
X = [2, 4, -5];
Y = [1,-1,3];
norm(X-Y)
```

```
[27]: 9.486832980505138
```

```
[28]: # Проверка по базовому определению:
sqrt(sum((X-Y).^2))
```

```
[28]: 9.486832980505138
```

Угол между двумя векторами $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ определяется как $\cos^{-1}\frac{\overline{X}^T\overline{Y}}{||\overline{X}||^2||\overline{Y}||^2}$.

```
[31]: # Угол между двумя векторами:
acos((transpose(X)*Y)/(norm(X)*norm(Y)))
```

```
[31]: 2.4404307889469252
```

Вычисление нормы для двумерной матрицы:

```
[32]: # Создание матрицы:
d = [5 -4 2 ; -1 2 3; -2 1 0]
```

```
[32]: 3×3 Matrix{Int64}:
  5  -4  2
 -1   2  3
 -2   1  0
```

Вычисление нормы векторов и матриц, повороты, вращения (3)

```
[33]: # Вычисление Евклидовой нормы:
      opnorm(d)

[33]: 7.147682841795258

[34]: # Вычисление p-нормы:
      p=1
      opnorm(d,p)

[34]: 8.0

[35]: # Поворот на 180 градусов:
      rot180(d)

[35]: 3×3 Matrix{Int64}:
       0   1  -2
       3   2  -1
       2  -4   5

[36]: # Переворачивание строк:
      reverse(d,dims=1)

[36]: 3×3 Matrix{Int64}:
       -2   1  0
       -1   2  3
        5  -4  2

[37]: # Переворачивание столбцов
      reverse(d,dims=2)

[37]: 3×3 Matrix{Int64}:
       2  -4   5
       3   2  -1
       0   1  -2
```

4.2.4. Матричное умножение, единичная матрица, скалярное произведение

[38]:
```julia
# Матрица 2х3 со случайными целыми значениями от 1 до 10:
A = rand(1:10,(2,3))
```

[38]:
```
2×3 Matrix{Int64}:
 2  9  2
 8  2  4
```

[39]:
```julia
# Матрица 3х4 со случайными целыми значениями от 1 до 10:
B = rand(1:10,(3,4))
```

[39]:
```
3×4 Matrix{Int64}:
 10   9  4   3
  5  10  9   7
  1  10  7  10
```

[40]:
```julia
# Произведение матриц A и B:
A*B
```

[40]:
```
2×4 Matrix{Int64}:
 67  128  103  89
 94  132   78  78
```

[41]:
```julia
# Единичная матрица 3х3:
Matrix{Int}(I, 3, 3)
```

[41]:
```
3×3 Matrix{Int64}:
 1  0  0
 0  1  0
 0  0  1
```

Рис. 9: Матричное умножение, единичная матрица, скалярное произведение и массивами (1)

Матричное умножение, единичная матрица, скалярное произведение и массивами (2)

[43]:
```
# Скалярное произведение векторов X и Y:
X = [2, 4, -5]
```

[43]:
```
3-element Vector{Int64}:
  2
  4
 -5
```

[44]:
```
Y = [1,-1,3]
```

[44]:
```
3-element Vector{Int64}:
  1
 -1
  3
```

[45]:
```
dot(X,Y)
```

[45]:
```
-17
```

[46]:
```
# тоже скалярное произведение:
X'Y
```

[46]:
```
-17
```

4.2.5. Факторизация. Специальные матричные структуры

Решение систем линейный алгебраических уравнений $Ax = b$:

[47]:
```
# Задаём квадратную матрицу 3x3 со случайными значениями:
A = rand(3, 3)
```

[47]:
```
3×3 Matrix{Float64}:
 0.0244786  0.295394  0.719576
 0.470582   0.665976  0.354524
 0.494353   0.586467  0.937499
```

[48]:
```
# Задаём единичный вектор:
x = fill(1.0, 3)
```

[48]:
```
3-element Vector{Float64}:
 1.0
 1.0
 1.0
```

[49]:
```
# Задаём вектор b:
b = A*x
```

[49]:
```
3-element Vector{Float64}:
 1.039448668198395
 1.4910819593511615
 2.018319207610515
```

Факторизация, специальные матричные структуры (2)

[50]:
```
# Решение исходного уравнения получаем с помощью функции \
# (убеждаемся, что x - единичный вектор):
A\b
```

[50]:
```
3-element Vector{Float64}:
 0.9999999999999998
 0.9999999999999998
 1.0000000000000002
```

Julia позволяет вычислять LU-факторизацию и определяет составной тип факторизации для его хранения:

[51]:
```
# LU-факторизация:
Alu = lu(A)
```

[51]:
```
LU{Float64, Matrix{Float64}, Vector{Int64}}
L factor:
3×3 Matrix{Float64}:
 1.0        0.0       0.0
 0.0495165  1.0       0.0
 0.951914   0.404385  1.0
U factor:
3×3 Matrix{Float64}:
 0.494353  0.586467   0.937499
 0.0       0.266354   0.673154
 0.0       0.0       -0.810108
```

Различные части факторизации могут быть извлечены путём доступа к их специальным свойствам:

[53]:
```
# Матрица перестановок:
Alu.P
```

[53]:
```
3×3 Matrix{Float64}:
 0.0  0.0  1.0
 1.0  0.0  0.0
 0.0  1.0  0.0
```

```
[54]: # Вектор перестановок:
      Alu.p

[54]: 3-element Vector{Int64}:
       3
       1
       2

[55]: # Матрица L:
      Alu.L

[55]: 3×3 Matrix{Float64}:
       1.0        0.0       0.0
       0.0495165  1.0       0.0
       0.951914   0.404385  1.0

[56]: # Матрица U:
      Alu.U

[56]: 3×3 Matrix{Float64}:
       0.494353  0.586467   0.937499
       0.0       0.266354   0.673154
       0.0       0.0       -0.810108
```

Исходная система уравнений $Ax = b$ может быть решена или с использованием исходной матрицы, или с использованием объекта факторизации:

```
[57]: # Решение СЛАУ через матрицу A:
      A\b

[57]: 3-element Vector{Float64}:
       0.9999999999999998
       0.9999999999999998
       1.0000000000000002
```

Рис. 13: Факторизация, специальные матричные структуры (3)

Факторизация, специальные матричные структуры (4)

[58]:
```julia
# Решение СЛАУ через объект факторизации:
Alu\b
```

[58]:
```
3-element Vector{Float64}:
 0.9999999999999998
 0.9999999999999998
 1.0000000000000002
```

Аналогично можно найти детерминант матрицы:

[59]:
```julia
# Детерминант матрицы A:
det(A)
```

[59]:
```
-0.10666936065611227
```

[60]:
```julia
# Детерминант матрицы A через объект факторизации:
det(Alu)
```

[60]:
```
-0.10666936065611227
```

Julia позволяет вычислять QR-факторизацию и определяет составной тип факторизации для его хранения:

[61]:
```julia
# QR-факторизация:
Aqr = qr(A)
```

[61]:
```
LinearAlgebra.QRCompactWY{Float64, Matrix{Float64}, Matrix{Float64}}
Q factor:
3×3 LinearAlgebra.QRCompactWYQ{Float64, Matrix{Float64}, Matrix{Float64}}:
 -0.0358421   0.958247   0.283687
 -0.689035    0.181913  -0.701526
 -0.723841   -0.220614   0.653745
R factor:
3×3 Matrix{Float64}:
 -0.682958  -0.893978  -0.948671
  0.0        0.274827   0.547198
  0.0        0.0        0.568312
```

Факторизация, специальные матричные структуры (5)

По аналогии с LU-факторизацией различные части QR-факторизации могут быть извлечены путём доступа к их специальным свойствам:

[62]:
```
# Матрица Q:
Aqr.Q
```

[62]:
```
3×3 LinearAlgebra.QRCompactWYQ{Float64, Matrix{Float64}, Matrix{Float64}}:
 -0.0358421   0.958247   0.283687
 -0.689035    0.181913  -0.701526
 -0.723841   -0.220614   0.653745
```

[63]:
```
# Матрица R:
Aqr.R
```

[63]:
```
3×3 Matrix{Float64}:
 -0.682958  -0.893978  -0.948671
  0.0        0.274827   0.547198
  0.0        0.0        0.568312
```

[64]:
```
# Проверка, что матрица Q - ортогональная:
Aqr.Q'*Aqr.Q
```

[64]:
```
3×3 Matrix{Float64}:
 1.0  -2.22045e-16  -1.66533e-16
 0.0   1.0          -2.22045e-16
 0.0  -1.11022e-16   1.0
```

Примеры собственной декомпозиции матрицы A:

[65]:
```
# Симметризация матрицы A:
Asym = A + A'
```

[65]:
```
3×3 Matrix{Float64}:
 0.0489572  0.765976  1.21393
 0.765976   1.33195   0.940991
 1.21393    0.940991  1.875
```

Рис. 15: Факторизация, специальные матричные структуры (5)

Факторизация, специальные матричные структуры (6)

[66]:
```
# Спектральное разложение симметризованной матрицы:
AsymEig = eigen(Asym)
```

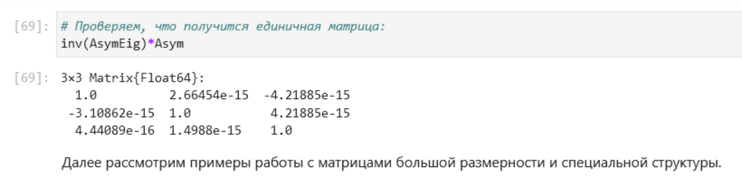
[66]:
```
Eigen{Float64, Float64, Matrix{Float64}, Vector{Float64}}
values:
3-element Vector{Float64}:
 -0.6043968330748379
  0.6325671697101596
  3.227737441859591
vectors:
3×3 Matrix{Float64}:
  0.908856   0.071752  0.410891
 -0.17568   -0.827605  0.53311
 -0.378308   0.556705  0.739569
```

[67]:
```
# Собственные значения:
AsymEig.values
```

[67]:
```
3-element Vector{Float64}:
 -0.6043968330748379
  0.6325671697101596
  3.227737441859591
```

[68]:
```
#Собственные векторы:
AsymEig.vectors
```

[68]:
```
3×3 Matrix{Float64}:
  0.908856   0.071752  0.410891
 -0.17568   -0.827605  0.53311
 -0.378308   0.556705  0.739569
```


[69]:
```julia
# Проверяем, что получится единичная матрица:
inv(AsymEig)*Asym
```

[69]:
```
3×3 Matrix{Float64}:
  1.0           2.66454e-15  -4.21885e-15
 -3.10862e-15  1.0            4.21885e-15
  4.44089e-16  1.4988e-15    1.0
```

Далее рассмотрим примеры работы с матрицами большой размерности и специальной структуры.

Рис. 17: Факторизация, специальные матричные структуры (7)

Факторизация, специальные матричные структуры (8)

[70]:
```julia
# Матрица 1000 x 1000:
n = 1000
A = randn(n,n)
```

[70]:
```
1000×1000 Matrix{Float64}:
  0.715121   -1.09378    -0.0644743  …  -0.608474    0.135291     0.477227
 -0.0257378  -0.583642   -0.428233       1.34519     2.10222     -0.69783
 -1.11208    -0.648552   -0.0955454     -1.78696     0.302478     0.156592
  0.0214497  -0.157924   -0.699911      -1.03782    -0.125016    -0.0160884
 -0.457676   -0.218426    1.26587        1.21362    -0.00822816  -0.709229
 -0.857719   -1.41396    -0.939895   …  -1.0237      0.223336     0.289345
  1.93189     0.618262    1.15489       -0.331677    0.297265    -1.37486
 -0.279122   -0.554029   -1.62564        0.592909   -0.444105     0.578417
 -1.01754    -0.46107     0.890266      -1.26405    -1.19266      0.519305
 -0.331716    0.357467   -1.74207       -1.12207    -2.17101     -1.61775
 -0.223045    0.981586    2.33064    …   0.117963    0.845698    -1.74915
  2.37672     0.062367    1.95454       -0.628635    0.950427     0.813157
 -1.28262    -0.859824   -0.708803       2.01096     0.781505     0.976032
  ⋮                                  ⋱
  0.777343    0.389775   -0.0231732     -1.17584    -1.23587      0.134063
 -0.212206    0.765117    0.0413582      0.420782   -1.00319      0.272628
  1.0237      0.612465   -1.8645     …   1.01826    -1.27172     -0.176564
  2.56778    -0.520432   -0.629332      -0.707429   -0.791852     1.57703
 -1.82739     1.66386     0.85783        0.270949    1.29468     -0.282906
  0.0971543   0.24198    -0.803953      -1.32409    -1.06221     -0.362605
 -0.0567814  -0.612306   -0.725842       1.09588    -0.0717177   -1.79129
  1.53218    -0.637768   -1.22399    …   0.559103    1.71369      1.13567
 -1.91554    -2.96016     2.09998        0.467376   -0.314868     0.0106346
  1.45246     1.19208     1.57033        0.980217    0.516328    -0.569184
 -1.03089    -1.23329     0.918618      -0.441951    1.12149      1.04079
  0.406171   -1.23483     2.16231       -1.92173     0.224729     0.376351
```

Факторизация, специальные матричные структуры (9)

[71]:
```julia
# Симметризация матрицы:
Asym = A + A'
```

[71]:
```
1000×1000 Matrix{Float64}:
  1.43024    -1.11952    -1.17655   …   0.84399    -0.895594    0.883398
 -1.11952    -1.16728    -1.07678       2.53726     0.868932   -1.93266
 -1.17655    -1.07678    -0.191091     -0.216623    1.2211      2.3189
  0.0541985   0.823744   -1.53706      -0.785901   -0.559282    1.52263
 -0.387462   -1.30423    -0.445992      1.63118    -1.2959     -2.62596
 -2.03282    -3.47907    -0.784218  …  -1.09252    -0.636919    0.252326
  2.20544     0.96182    -0.174497     -1.87636    -0.492122   -1.81876
 -2.1409     -0.49753    -1.29366      -0.363027    0.294809    0.599053
 -0.651438   -0.107928    2.30529      -1.54557    -1.61155     1.44834
 -2.37908     1.60309    -1.75341       0.826037   -1.76863    -1.13807
  0.328566    0.259349    4.93238   …   0.621055    1.79743    -0.306787
  2.65319     0.454741    0.707302     -1.98627     1.92313     2.08757
 -2.43506    -0.825956   -0.916995      3.03427     2.96398    -0.00659231
  ⋮                                 ⋱
 -0.449135    1.44031     0.589127     -0.751309    1.03124     0.131837
  0.913089   -1.07386     2.24422       1.29229    -1.73184     0.930101
  2.61202     1.16403    -1.33515   …  -1.22623    -1.13502    -1.41021
  1.63117    -0.676748   -1.2645       -1.19492     0.662504    2.72126
 -3.38065     1.47896     0.369715     -0.0987206   2.83172    -0.741428
  0.408206    0.317323   -0.470182     -0.587179   -1.35645    -0.550765
 -1.02969    -1.51806    -0.412233      2.81717     1.01752    -2.44839
  0.752629   -1.2514     -2.27441   …  -0.114144    1.97173    -0.49272
 -1.26177    -3.72216     3.59293       1.1674      1.53069    -0.684214
  0.84399     2.53726    -0.216623      1.96043     0.0743765  -2.49091
 -0.895594    0.868932    1.2211        0.0743765   2.24298     1.26552
  0.883398   -1.93266     2.3189       -2.49091     1.26552     0.752703
```

[72]:
```julia
# Проверка, является ли матрица симметричной:
issymmetric(Asym)
```

[72]:
```
true
```

Пример добавления шума в симметричную матрицу (матрица уже не будет симметричной):

```
[73]: # Добавление шума:
      Asym_noisy = copy(Asym)
      Asym_noisy[1,2] += 5eps()
```

```
[73]: -1.1195158971718326
```

```
[74]: # Проверка, является ли матрица симметричной:
      issymmetric(Asym_noisy)
```

```
[74]: false
```

В Julia можно объявить структуру матрица явно, например, используя Diagonal, Triangular, Symmetric, Hermitian, Tridiagonal и SymTridiagonal:

Рис. 20: Факторизация, специальные матричные структуры (10)

[75]:
```
# Явно указываем, что матрица является симметричной:
Asym_explicit = Symmetric(Asym_noisy)
```

[75]:
```
1000×1000 Symmetric{Float64, Matrix{Float64}}:
  1.43024    -1.11952    -1.17655   …   0.84399    -0.895594    0.883398
 -1.11952    -1.16728    -1.07678       2.53726     0.868932   -1.93266
 -1.17655    -1.07678    -0.191091     -0.216623    1.2211      2.3189
  0.0541985   0.823744   -1.53706      -0.785901   -0.559282    1.52263
 -0.387462   -1.30423    -0.445992      1.63118    -1.2959     -2.62596
 -2.03282    -3.47907    -0.784218  …  -1.09252    -0.636919    0.252326
  2.20544     0.96182    -0.174497     -1.87636    -0.492122   -1.81876
 -2.1409     -0.49753    -1.29366      -0.363027    0.294809    0.599053
 -0.651438   -0.107928    2.30529      -1.54557    -1.61155     1.44834
 -2.37908     1.60309    -1.75341       0.826037   -1.76863    -1.13807
  0.328566    0.259349    4.93238   …   0.621055    1.79743    -0.306787
  2.65319     0.454741    0.707302     -1.98627     1.92313     2.08757
 -2.43506    -0.825956   -0.916995      3.03427     2.96398    -0.00659231
  ⋮                                 ⋱
 -0.449135    1.44031     0.589127     -0.751309    1.03124     0.131837
  0.913089   -1.07386     2.24422       1.29229    -1.73184     0.930101
  2.61202     1.16403    -1.33515   …  -1.22623    -1.13502    -1.41021
  1.63117    -0.676748   -1.2645       -1.19492     0.662504    2.72126
 -3.38065     1.47896     0.369715     -0.0987206   2.83172    -0.741428
  0.408206    0.317323   -0.470182     -0.587179   -1.35645    -0.550765
 -1.02969    -1.51806    -0.412233      2.81717     1.01752    -2.44839
  0.752629   -1.2514     -2.27441   …  -0.114144    1.97173    -0.49272
 -1.26177    -3.72216     3.59293       1.1674      1.53069    -0.684214
  0.84399     2.53726    -0.216623      1.96043     0.0743765  -2.49091
 -0.895594    0.868932    1.2211        0.0743765   2.24298     1.26552
  0.883398   -1.93266     2.3189       -2.49091     1.26552     0.752703
```

Далее для оценки эффективности выполнения операций над матрицами большой размерности и специальной структуры воспользуемся пакетом BenchmarkTools:

[76]:
```
import Pkg
Pkg.add("BenchmarkTools")
```

```
  Resolving package versions...
 No Changes to `C:\Users\User\.julia\environments\v1.8\Project.toml`
 No Changes to `C:\Users\User\.julia\environments\v1.8\Manifest.toml`
```

[77]:
```
using BenchmarkTools
```

[80]:
```
# Оценка эффективности выполнения операции по нахождению
# собственных значений симметризованной матрицы:
@btime eigvals(Asym);
```

```
  75.297 ms (11 allocations: 7.99 MiB)
```

[81]:
```
# Оценка эффективности выполнения операции по нахождению
# собственных значений зашумлённой матрицы:
@btime eigvals(Asym_noisy);
```

```
  454.170 ms (13 allocations: 7.92 MiB)
```

[82]:
```
# Оценка эффективности выполнения операции по нахождению
# собственных значений зашумлённой матрицы,
# для которой явно указано, что она симметричная:
@btime eigvals(Asym_explicit);
```

```
  74.700 ms (11 allocations: 7.99 MiB)
```

Рис. 22: Факторизация, специальные матричные структуры (12)

Далее рассмотрим примеры работы с разряженными матрицами большой размерности.

Использование типов Tridiagonal и SymTridiagonal для хранения трёхдиагональных матриц позволяет работать с потенциально очень большими трёхдиагональными матрицами:

```
[83]: # Трёхдиагональная матрица 1000000 х 1000000:
      n = 1000000;
      A = SymTridiagonal(randn(n), randn(n-1))
```

```
[83]: 1000000×1000000 SymTridiagonal{Float64, Vector{Float64}}:
 -1.00882    -0.0972623    ⋅        …   ⋅          ⋅           ⋅
 -0.0972623   2.33981    -2.0367        ⋅          ⋅           ⋅
   ⋅         -2.0367      1.86911       ⋅          ⋅           ⋅
   ⋅           ⋅          1.14463       ⋅          ⋅           ⋅
   ⋅           ⋅           ⋅            ⋅          ⋅           ⋅
   ⋅           ⋅           ⋅        …   ⋅          ⋅           ⋅
   ⋅           ⋅           ⋅            ⋅          ⋅           ⋅
   ⋅           ⋅           ⋅            ⋅          ⋅           ⋅
   ⋅           ⋅           ⋅            ⋅          ⋅           ⋅
   ⋅           ⋅           ⋅            ⋅          ⋅           ⋅
   ⋅           ⋅           ⋅        …   ⋅          ⋅           ⋅
   ⋅           ⋅           ⋅            ⋅          ⋅           ⋅
   ⋅           ⋅           ⋅            ⋅          ⋅           ⋅
  ⋮                                 ⋱
   ⋅           ⋅           ⋅            ⋅          ⋅           ⋅
   ⋅           ⋅           ⋅            ⋅          ⋅           ⋅
   ⋅           ⋅           ⋅        …   ⋅          ⋅           ⋅
   ⋅           ⋅           ⋅            ⋅          ⋅           ⋅
   ⋅           ⋅           ⋅            ⋅          ⋅           ⋅
   ⋅           ⋅           ⋅            ⋅          ⋅           ⋅
   ⋅           ⋅           ⋅            ⋅          ⋅           ⋅
   ⋅           ⋅           ⋅        …   ⋅          ⋅           ⋅
   ⋅           ⋅           ⋅           1.07083     ⋅           ⋅
   ⋅           ⋅           ⋅           1.3813    -0.385808     ⋅
   ⋅           ⋅           ⋅          -0.385808   0.0896784   0.258891
   ⋅           ⋅           ⋅            ⋅         0.258891   -0.561995
```

Рис. 23: Факторизация, специальные матричные структуры (13)

Факторизация, специальные матричные структуры (14)

```
[84]: # Оценка эффективности выполнения операции по нахождению
      # собственных значений:
      @btime eigmax(A)

        426.209 ms (17 allocations: 183.11 MiB)

[84]: 6.749672457003237
```

При попытке задать подобную матрицу обычным способом и посчитать её собственные значения, вы скорее всего получите ошибку переполнения памяти:

```
[85]: B = Matrix(A)

OutOfMemoryError()

Stacktrace:
 [1] Array
   @ .\boot.jl:461 [inlined]
 [2] Array
   @ .\boot.jl:469 [inlined]
 [3] zeros
   @ .\array.jl:588 [inlined]
 [4] zeros
   @ .\array.jl:584 [inlined]
 [5] Matrix{Float64}(M::SymTridiagonal{Float64, Vector{Float64}})
   @ LinearAlgebra C:\Users\User\AppData\Local\Programs\Julia-1.8.5\share\julia\stdlib\v1.8\LinearAlgebra\src\tridiag.jl:127
 [6] (Matrix)(M::SymTridiagonal{Float64, Vector{Float64}})
   @ LinearAlgebra C:\Users\User\AppData\Local\Programs\Julia-1.8.5\share\julia\stdlib\v1.8\LinearAlgebra\src\tridiag.jl:137
 [7] top-level scope
   @ In[85]:1
```

Рис. 24: Факторизация, специальные матричные структуры (14)

4.2.6. Общая линейная алгебра

[86]:
```
# Матрица с рациональными элементами:
Arational = Matrix{Rational{BigInt}}(rand(1:10, 3, 3))/10
```

[86]:
```
3×3 Matrix{Rational{BigInt}}:
 1//10  1//1   1//5
 1//10  3//10  1//1
 3//5   9//10  3//5
```

[87]:
```
# Единичный вектор:
x = fill(1, 3)
```

[87]:
```
3-element Vector{Int64}:
 1
 1
 1
```

[88]:
```
# Задаём вектор b:
b = Arational*x
```

[88]:
```
3-element Vector{Rational{BigInt}}:
 13//10
  7//5
 21//10
```

```
[89]: # Решение исходного уравнения получаем с помощью функции \
      # (убеждаемся, что x - единичный вектор):
      Arational\b

[89]: 3-element Vector{Rational{BigInt}}:
       1//1
       1//1
       1//1

[90]: # LU-разложение:
      lu(Arational)

[90]: LU{Rational{BigInt}, Matrix{Rational{BigInt}}, Vector{Int64}}
      L factor:
      3×3 Matrix{Rational{BigInt}}:
       1//1  0//1   0//1
       1//6  1//1   0//1
       1//6  3//17  1//1
      U factor:
      3×3 Matrix{Rational{BigInt}}:
       3//5   9//10   3//5
       0//1  17//20   1//10
       0//1   0//1   15//17
```

Самостоятельное задание

Самостоятельное задание ¶

4.4.1. Произведение векторов

1. Задайте вектор v. Умножьте вектор v скалярно сам на себя и сохраните результат в dot_v.

```
[91]: v = [1, 2, 3]
```

```
[91]: 3-element Vector{Int64}:
 1
 2
 3
```

```
[92]: dot_v = v'*v
```

```
[92]: 14
```

```
[93]: dot(v, v)
```

```
[93]: 14
```

2. Умножьте v матрично на себя (внешнее произведение), присвоив результат переменной outer_v.

```
[94]: outer_v = v*v'
```

```
[94]: 3×3 Matrix{Int64}:
 1  2  3
 2  4  6
 3  6  9
```

4.4.2. Системы линейных уравнений

1. Решить СЛАУ с двумя неизвестными.

[116]:
```
# Функция для решения СЛАУ с 2 неизвестными
function SLAE(A, b)
    if size(A)[1] == size(A)[2]
        return inv(A)*b
    else
        return pinv(A)*b
    end
end
```

Рис. 28: Задание 4.4.2. Функция решения СЛАУ а) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 3. \end{cases}$

[117]:
```
A_42_1a = [1 1; 1 -1]
```

[117]:
```
2×2 Matrix{Int64}:
 1   1
 1  -1
```

[118]:
```
b_42_1a = [2, 3]
```

[118]:
```
2-element Vector{Int64}:
 2
 3
```

[119]:
```
x_42_1a = SLAE(A_42_1a, b_42_1a)
```

[119]:
```
2-element Vector{Float64}:
  2.5
 -0.5
```

b) $\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 2y = 4. \end{cases}$

Данная система линейно зависима, остается уравнение $x + y = 2$, то есть имеем решение $\begin{pmatrix} x \\ 2 - x \end{pmatrix}$

```
[120]: x_42_1b = ["x", "2 - x"]
```

```
[120]: 2-element Vector{String}:
 "x"
 "2 - x"
```

c) $\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 2y = 5. \end{cases}$

Данная система несовместна, так как $\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 2.5. \end{cases}$, то есть решений нет

d) $\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 2, \\ 3x + 3y = 3. \end{cases}$

Данная система линейно зависима, остается уравнение $x + y = 1$, то есть имеем решение $\begin{pmatrix} x \\ 1 - x \end{pmatrix}$, где $x \in \mathbb{R}(\text{или } \mathbb{C})$

Рис. 30: Задание 4.4.2. Номер 1. Пункты b, c и d

e) $\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + y = 1, \\ x - y = 3. \end{cases}$

Система несовместна, так как из 1 и 3-го уравнений, имеем $x = 2.5$, $y = -0.5$, и, подставив во 2-е уравнение, получим неверное равенство $5 - 0.5 \neq 1$

[121]:
```
A_42_1e = [1 1; 2 1; 1 -1]
b_42_1e = [2, 1, 3]
x_42_1e = SLAE(A_42_1e, b_42_1e)
```

[121]:
```
2-element Vector{Float64}:
  1.5000000000000004
 -0.9999999999999998
```

f) $\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + y = 1, \\ 3x + 2y = 3. \end{cases}$

[122]:
```
A_42_1f = [1 1; 2 1; 3 2]
b_42_1f = [2, 1, 3]
x_42_1f = SLAE(A_42_1f, b_42_1f)
```

[122]:
```
2-element Vector{Float64}:
 -0.9999999999999987
  2.9999999999999982
```

Рис. 31: Задание 4.4.2. Номер 1. Пункты e и f

2. Решить СЛАУ с тремя неизвестными.

a) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x - y - 2z = 3. \end{cases}$

[123]:
```
A_42_2a = [1 1 1; 1 -1 -2]
b_42_2a = [2, 3]
x_42_2a = SLAE(A_42_2a, b_42_2a)
```

[123]:
```
3-element Vector{Float64}:
  2.2142857142857144
  0.35714285714285676
 -0.5714285714285716
```

b) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x + 2y - 3z = 4, \\ 3x + y + z = 1. \end{cases}$

[124]:
```
A_42_2b = [1 1 1; 2 2 -3; 3 1 1]
b_42_2b = [2, 4, 1]
x_42_2b = SLAE(A_42_2b, b_42_2b)
```

[124]:
```
3-element Vector{Float64}:
 -0.4999999999999999
  2.4999999999999996
  0.0
```

c) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + y + 2z = 0, \\ 2x + 2y + 3z = 1. \end{cases}$

Система линейно зависима, так как 3-е уравнение получим из сумма первых двух. Тогда остается два уравнения $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$, откуда получим $z = -1$, тогда $x + y = 2$ и итоговое решение $\begin{pmatrix} x \\ 2 - x \\ -1 \end{pmatrix}$, где $x \in \mathbb{R}$(или $\mathbb{C}$)

[125]:
```julia
A_42_2c = [1 1 1; 1 1 2; 2 2 3]
b_42_2c = [1, 0, 1]
x_42_2c = SLAE(A_42_2c, b_42_2c)
```

```
SingularException(2)

Stacktrace:
 [1] checknonsingular
   @ C:\Users\User\AppData\Local\Programs\Julia-1.8.5\share\julia\stdlib\v1.8\LinearAlgebra\src\factorization.jl:19 [inlined]
 [2] checknonsingular
   @ C:\Users\User\AppData\Local\Programs\Julia-1.8.5\share\julia\stdlib\v1.8\LinearAlgebra\src\factorization.jl:21 [inlined]
 [3] #lu!#170
   @ C:\Users\User\AppData\Local\Programs\Julia-1.8.5\share\julia\stdlib\v1.8\LinearAlgebra\src\lu.jl:82 [inlined]
 [4] #lu#177
   @ C:\Users\User\AppData\Local\Programs\Julia-1.8.5\share\julia\stdlib\v1.8\LinearAlgebra\src\lu.jl:279 [inlined]
 [5] lu (repeats 2 times)
   @ C:\Users\User\AppData\Local\Programs\Julia-1.8.5\share\julia\stdlib\v1.8\LinearAlgebra\src\lu.jl:278 [inlined]
 [6] inv(A::Matrix{Int64})
   @ LinearAlgebra C:\Users\User\AppData\Local\Programs\Julia-1.8.5\share\julia\stdlib\v1.8\LinearAlgebra\src\dense.jl:893
 [7] SLAE(A::Matrix{Int64}, b::Vector{Int64})
   @ Main .\In[116]:4
 [8] top-level scope
   @ In[125]:3
```

Рис. 33: Задание 4.4.2. Номер 2. Пункт c

d) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+y+2z=0, \\ 2x+2y+3z=0. \end{cases}$

Система несовместна, так как из 1 и 2-го уравнений, имеем $z=-1$, $x+y=2$, и, подставив в 3-е уравнение, получим неверное равенство $4-3 \neq 0$

126]:
```
A_42_2d = [1 1 1; 1 1 2; 2 2 3]
b_42_2d = [1, 0, 0]
x_42_2d = SLAE(A_42_2d, b_42_2d)
```

```
SingularException(2)

Stacktrace:
 [1] checknonsingular
   @ C:\Users\User\AppData\Local\Programs\Julia-1.8.5\share\julia\stdlib\v1.8\LinearAlgebra\src\factorization.jl:19 [inlined]
 [2] checknonsingular
   @ C:\Users\User\AppData\Local\Programs\Julia-1.8.5\share\julia\stdlib\v1.8\LinearAlgebra\src\factorization.jl:21 [inlined]
 [3] #lu!#170
   @ C:\Users\User\AppData\Local\Programs\Julia-1.8.5\share\julia\stdlib\v1.8\LinearAlgebra\src\lu.jl:82 [inlined]
 [4] #lu#177
   @ C:\Users\User\AppData\Local\Programs\Julia-1.8.5\share\julia\stdlib\v1.8\LinearAlgebra\src\lu.jl:279 [inlined]
 [5] lu (repeats 2 times)
   @ C:\Users\User\AppData\Local\Programs\Julia-1.8.5\share\julia\stdlib\v1.8\LinearAlgebra\src\lu.jl:278 [inlined]
 [6] inv(A::Matrix{Int64})
   @ LinearAlgebra C:\Users\User\AppData\Local\Programs\Julia-1.8.5\share\julia\stdlib\v1.8\LinearAlgebra\src\dense.jl:893
 [7] SLAE(A::Matrix{Int64}, b::Vector{Int64})
   @ Main .\In[116]:4
 [8] top-level scope
   @ In[126]:3
```

Рис. 34: Задание 4.4.2. Номер 2. Пункт d

4.4.3. Операции с матрицами

1. Приведите приведённые ниже матрицы к диагональному виду

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

```
[132]: A_43_1a = [1 -2; -2 1]

[132]: 2×2 Matrix{Float64}:
        -0.707107  -0.707107
        -0.707107   0.707107

[133]: #A_43_1a_Eig = eigen(A_43_1a)
       A_43_1a_EigVect = eigvecs(A_43_1a)

[133]: 2×2 Matrix{Float64}:
        -0.707107  -0.707107
        -0.707107   0.707107

[134]: A_43_1a_Diag = A_43_1a_EigVect' * A_43_1a * A_43_1a_EigVect

[134]: 2×2 Matrix{Float64}:
        -1.0  0.0
         0.0  3.0
```

```
[140]: A_43_1a_EigVals = eigvals(A_43_1a)

[140]: 2-element Vector{Float64}:
        -1.0
         3.0

[142]: A_43_1a_EigVal_Matrix = zeros(size(A_43_1a)[1], size(A_43_1a)[2])
       for i ∈ 1:size(A_43_1a)[1]
           A_43_1a_EigVal_Matrix[i, i] = A_43_1a_EigVals[i]
       end
       A_43_1a_EigVal_Matrix

[142]: 2×2 Matrix{Float64}:
        -1.0  0.0
         0.0  3.0
```

Рис. 36: Задание 4.4.3. Номер 1. Пункт а (2)

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

[144]:
```
A_43_1b = [1 -2; -2 3]
```

[144]:
```
2×2 Matrix{Int64}:
  1  -2
 -2   3
```

[146]:
```
A_43_1b_EigVals = eigvals(A_43_1b)
```

[146]:
```
2-element Vector{Float64}:
 -0.2360679774997897
  4.23606797749979
```

[147]:
```
A_43_1b_EigVal_Matrix = zeros(size(A_43_1b)[1], size(A_43_1b)[2])
for i ∈ 1:size(A_43_1b)[1]
    A_43_1b_EigVal_Matrix[i, i] = A_43_1b_EigVals[i]
end
A_43_1b_EigVal_Matrix
```

[147]:
```
2×2 Matrix{Float64}:
 -0.236068  0.0
  0.0       4.23607
```

[148]:
```
A_43_1b_EigVect = eigvecs(A_43_1b)
```

[148]:
```
2×2 Matrix{Float64}:
 -0.850651  -0.525731
 -0.525731   0.850651
```

[149]:
```
A_43_1b_Diag = A_43_1b_EigVect' * A_43_1b * A_43_1b_EigVect
```

[149]:
```
2×2 Matrix{Float64}:
 -0.236068     3.46945e-16
  2.22045e-16  4.23607
```

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

[150]:
```
A_43_1c = [1 -2 0; -2 1 2; 0 2 0]
```

[150]:
```
3×3 Matrix{Int64}:
  1  -2  0
 -2   1  2
  0   2  0
```

[151]:
```
A_43_1c_EigVals = eigvals(A_43_1c)
```

[151]:
```
3-element Vector{Float64}:
 -2.1413361156553643
  0.51513804712807
  3.6261980685272945
```

[152]:
```
A_43_1c_EigVal_Matrix = zeros(size(A_43_1c)[1], size(A_43_1c)[2])
for i ∈ 1:size(A_43_1c)[1]
    A_43_1c_EigVal_Matrix[i, i] = A_43_1c_EigVals[i]
end
A_43_1c_EigVal_Matrix
```

[152]:
```
3×3 Matrix{Float64}:
 -2.14134  0.0       0.0
  0.0      0.515138  0.0
  0.0      0.0       3.6262
```

```
[153]: A_43_1c_EigVect = eigvecs(A_43_1c)

[153]: 3×3 Matrix{Float64}:
         0.421859  0.717093   0.554808
         0.6626    0.173846  -0.728518
        -0.618866  0.674948  -0.401808

[154]: A_43_1c_Diag = A_43_1c_EigVect' * A_43_1c * A_43_1c_EigVect

[154]: 3×3 Matrix{Float64}:
        -2.14134       3.55271e-15  -6.66134e-16
         3.52496e-15   0.515138     -3.88578e-16
        -6.66134e-16  -3.33067e-16   3.6262
```

Рис. 39: Задание 4.4.3. Номер 1. Пункт c (2)

2. Вычислите

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{10}$

[155]:
```
A_43_2a = [1 -2; -2 1]
```

[155]:
```
2×2 Matrix{Int64}:
  1  -2
 -2   1
```

[156]:
```
A_43_2a^10
```

[156]:
```
2×2 Matrix{Int64}:
  29525  -29524
 -29524   29525
```

b) $\sqrt{\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}}$

```
[172]: A_43_2b = [5 -2; -2 5]

[172]: 2×2 Matrix{Int64}:
         5  -2
        -2   5

[173]: A_43_2b_Eig = eigen(A_43_2b)

[173]: Eigen{Float64, Float64, Matrix{Float64}, Vector{Float64}}
       values:
       2-element Vector{Float64}:
        3.0
        7.0
       vectors:
       2×2 Matrix{Float64}:
        -0.707107  -0.707107
        -0.707107   0.707107

[174]: A_43_2b_EigVect = eigvecs(A_43_2b)

[174]: 2×2 Matrix{Float64}:
        -0.707107  -0.707107
        -0.707107   0.707107
```

```
[175]: A_43_2b_Diag = A_43_2b_EigVect' * A_43_2b * A_43_2b_EigVect

[175]: 2×2 Matrix{Float64}:
        3.0  0.0
        0.0  7.0

[176]: Res_43_2b = sqrt.(A_43_2b_Diag)

[176]: 2×2 Matrix{Float64}:
        1.73205  0.0
        0.0      2.64575

[177]: # Проверка
       Res_43_2b*Res_43_2b

[177]: 2×2 Matrix{Float64}:
        3.0  0.0
        0.0  7.0
```

Рис. 42: Задание 4.4.3. Номер 2. Пункт b (2)

c) $\sqrt[3]{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$

[180]:
```
A_43_2c = [1 -2; -2 1]
```

[180]:
```
2×2 Matrix{Int64}:
  1  -2
 -2   1
```

[181]:
```
A_43_2c_Eig = eigen(A_43_2c)
```

[181]:
```
Eigen{Float64, Float64, Matrix{Float64}, Vector{Float64}}
values:
2-element Vector{Float64}:
 -1.0
  3.0
vectors:
2×2 Matrix{Float64}:
 -0.707107  -0.707107
 -0.707107   0.707107
```

[184]:
```
A_43_2c_EigVect = eigvecs(A_43_2c)
```

[184]:
```
2×2 Matrix{Float64}:
 -0.707107  -0.707107
 -0.707107   0.707107
```

```
[185]: A_43_2c_Diag = A_43_2c_EigVect' * A_43_2c * A_43_2c_EigVect

[185]: 2×2 Matrix{Float64}:
        -1.0  0.0
         0.0  3.0

[186]: Res_43_2c = cbrt.(A_43_2c_Diag)

[186]: 2×2 Matrix{Float64}:
        -1.0  0.0
         0.0  1.44225

[187]: # Проверка
       Res_43_2c*Res_43_2c*Res_43_2c

[187]: 2×2 Matrix{Float64}:
        -1.0  0.0
         0.0  3.0
```

Рис. 44: Задание 4.4.3. Номер 2. Пункт c (2)

Задание 4.4.3. Номер 2. Пункт d (1)

d) $\sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$

```
[188]: A_43_2d = [1 2; 2 3]
```

```
[188]: 2×2 Matrix{Int64}:
        1  2
        2  3
```

```
[189]: A_43_2d_Eig = eigen(A_43_2d)
```

```
[189]: Eigen{Float64, Float64, Matrix{Float64}, Vector{Float64}}
       values:
       2-element Vector{Float64}:
        -0.2360679774997897
         4.23606797749979
       vectors:
       2×2 Matrix{Float64}:
        -0.850651  0.525731
         0.525731  0.850651
```

```
[190]: A_43_2d_EigVect = eigvecs(A_43_2d)
```

```
[190]: 2×2 Matrix{Float64}:
        -0.850651  0.525731
         0.525731  0.850651
```

```
[191]: A_43_2d_Diag = A_43_2d_EigVect' * A_43_2d * A_43_2d_EigVect
```

```
[191]: 2×2 Matrix{Float64}:
        -0.236068      -3.46945e-16
        -2.22045e-16    4.23607
```

```
[195]: # Одно из собственных значений отрицательно, поэтому извлекаем корень из комплексного числа
       Res_43_2d = sqrt.(Complex.(A_43_2d_Diag))

[195]: 2×2 Matrix{ComplexF64}:
        0.0+0.485868im        0.0+1.86265e-8im
        0.0+1.49012e-8im  2.05817+0.0im

[196]: # Проверка
       Res_43_2d*Res_43_2d

[196]: 2×2 Matrix{ComplexF64}:
        -0.236068+0.0im         -9.05e-9+3.83364e-8im
         -7.24e-9+3.06691e-8im   4.23607+0.0im
```

Рис. 46: Задание 4.4.3. Номер 2. Пункт d (2)

Задание 4.4.3. Номер 3 (1)

3. Найдите собственные значения матрицы A, если $A = \begin{pmatrix} 140 & 97 & 74 & 168 & 131 \\ 97 & 106 & 89 & 131 & 36 \\ 74 & 89 & 152 & 144 & 71 \\ 168 & 131 & 144 & 54 & 142 \\ 131 & 36 & 71 & 142 & 36 \end{pmatrix}$. Создайте диагональную матрицу из собственных значений матрицы A. Создайте нижнедиагональную матрицу из матрица A. Оцените эффективность выполняемых операций.

```
[199]: A_43_3 = [140 97 74 168 131;
                 97 106 89 131 36;
                 74 89 152 144 71;
                 168 131 144 54 142;
                 131 36 71 142 36]
```

```
[199]: 5×5 Matrix{Int64}:
        140   97   74  168  131
         97  106   89  131   36
         74   89  152  144   71
        168  131  144   54  142
        131   36   71  142   36
```

```
[200]: print(issymmetric(A_43_3))
```

```
true
```

```
[201]: A_43_3_EigVals = eigvals(A_43_3)
```

```
[201]: 5-element Vector{Float64}:
        -128.49322764802145
         -55.887784553056875
          42.7521672793189
          87.16111477514521
         542.4677301466143
```

Рис. 47: Задание 4.4.3. Номер 3 (1)

Задание 4.4.3. Номер 3 (2)

[202]:
```
A_43_3_EigVal_Matrix = zeros(size(A_43_3)[1], size(A_43_3)[2])
for i ∈ 1:size(A_43_3)[1]
    A_43_3_EigVal_Matrix[i, i] = A_43_3_EigVals[i]
end
A_43_3_EigVal_Matrix
```

[202]:
```
5×5 Matrix{Float64}:
 -128.493    0.0       0.0       0.0       0.0
    0.0    -55.8878    0.0       0.0       0.0
    0.0      0.0      42.7522    0.0       0.0
    0.0      0.0       0.0      87.1611    0.0
    0.0      0.0       0.0       0.0     542.468
```

[204]:
```
LowerTriangular(A_43_3)
```

[204]:
```
5×5 LowerTriangular{Int64, Matrix{Int64}}:
 140    ⋅    ⋅    ⋅   ⋅
  97  106    ⋅    ⋅   ⋅
  74   89  152    ⋅   ⋅
 168  131  144   54   ⋅
 131   36   71  142  36
```


Рис. 48: Задание 4.4.3. Номер 3 (2)

```
[207]: @btime begin
           A_43_3_EigVals = eigvals(A_43_3)
           A_43_3_EigVal_Matrix = zeros(size(A_43_3)[1], size(A_43_3)[2])
           for i ∈ 1:size(A_43_3)[1]
               A_43_3_EigVal_Matrix[i, i] = A_43_3_EigVals[i]
           end
       end

         3.350 μs (25 allocations: 3.20 KiB)

[206]: @btime LowerTriangular(A_43_3)

         68.275 ns (1 allocation: 16 bytes)

[206]: 5×5 LowerTriangular{Int64, Matrix{Int64}}:
        140    ⋅    ⋅    ⋅   ⋅
         97  106    ⋅    ⋅   ⋅
         74   89  152    ⋅   ⋅
        168  131  144   54   ⋅
        131   36   71  142  36
```

Рис. 49: Задание 4.4.3. Номер 3 (3)

4.4.4. Линейные модели экономики

Линейная модель экономики может быть записана как СЛАУ

$$x - Ax = y, \qquad (x(E - A) = y)$$

где элементы матрицы A и столбца y --- неотрицательные числа. По своему смыслу в экономике элементы матрицы A и столбцов x, y не могут быть отрицательными числами.

[231]:
```
function Diagonalize(A)
    A_EigVals = eigvals(A)
    A_EigVal_Matrix = zeros(size(A)[1], size(A)[2])
    for i ∈ 1:size(A)[1]
        A_EigVal_Matrix[i, i] = A_EigVals[i]
    end
    return A_EigVal_Matrix
end
```

[231]: Diagonalize (generic function with 1 method)

[236]:
```
function inverse_E_minus_A_Diag(A)
    A_Diag = Diagonalize(A)
    E_minus_A = Matrix{Int}(I, size(A)[1], size(A)[2]) - A_Diag
    return inv(E_minus_A)
end
```

[236]: inverse_E_minus_A_Diag (generic function with 1 method)

[265]:
```
function SLAE_44(A, y)
    Inv_E_minus_A_Diag = inverse_E_minus_A_Diag(A)
    x = zeros(length(y))
    # Умножаем элементы диагональной матрицы на соответствующий элемент из правой части
    for i ∈ 1:length(y)
        x[i] = y[i]*Inv_E_minus_A_Diag[i, i]
    end
    return x
end
```

[265]: SLAE_44 (generic function with 1 method)

Рис. 50: Задание 4.4.4. Линейные модели экономики

Задание 4.4.4. Номер 1. Пункт а (1)

1. Матрица A называется продуктивной, если решение x системы при любой неотрицательной правой части y имеет только неотрицательные элементы x_i. Используя это определение, проверьте, являются ли матрицы продуктивными.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

```
[260]: A_44_1a = [1 2; 3 4]
```

```
[260]: 2×2 Matrix{Int64}:
        1  2
        3  4
```

```
[261]: b_44_1a = [2, 2]
```

```
[261]: 2-element Vector{Int64}:
        2
        2
```

Рис. 51: Задание 4.4.4. Номер 1. Пункт а (1)

[262]:
```
Diagonalize(A_44_1a)
```

[262]:
```
2×2 Matrix{Float64}:
 -0.372281  0.0
  0.0       5.37228
```

[263]:
```
inverse_E_minus_A_Diag(A_44_1a)
```

[263]:
```
2×2 Matrix{Float64}:
 0.728714   0.0
 0.0       -0.228714
```

Так как один из элементов на диагонали отрицательный, то матрицы не продуктивная

[271]:
```
# Проверка
SLAE_44(A_44_1a, b_44_1a)
```

[271]:
```
2-element Vector{Float64}:
  1.457427107756338
 -0.4574271077563381
```

Рис. 52: Задание 4.4.4. Номер 1. Пункт а (2)

Задание 4.4.4. Номер 1. Пункт b

b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

[266]:
```
A_44_1b = 1/2*[1 2; 3 4]
```

[266]:
```
2×2 Matrix{Float64}:
 0.5  1.0
 1.5  2.0
```

[267]:
```
b_44_1b = b_44_1a
```

[267]:
```
2-element Vector{Int64}:
 2
 2
```

[268]:
```
Diagonalize(A_44_1b)
```

[268]:
```
2×2 Matrix{Float64}:
 -0.186141  0.0
  0.0       2.68614
```

[269]:
```
inverse_E_minus_A_Diag(A_44_1b)
```

[269]:
```
2×2 Matrix{Float64}:
 0.84307   0.0
 0.0      -0.59307
```

Так как один из элементов на диагонали отрицательный, то матрицы не продуктивная

[270]:
```
# Проверка
SLAE_44(A_44_1b, b_44_1b)
```

[270]:
```
2-element Vector{Float64}:
  1.6861406616345072
  1.1861406616345072
```

Задание 4.4.4. Номер 1. Пункт c

c) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

[272]:
```
A_44_1c = 1/10*[1 2; 3 4]
```

[272]:
```
2×2 Matrix{Float64}:
 0.1  0.2
 0.3  0.4
```

[274]:
```
b_44_1c = b_44_1a
```

[274]:
```
2-element Vector{Int64}:
 2
 2
```

[275]:
```
Diagonalize(A_44_1c)
```

[275]:
```
2×2 Matrix{Float64}:
 -0.0372281  0.0
  0.0        0.537228
```

[276]:
```
inverse_E_minus_A_Diag(A_44_1c)
```

[276]:
```
2×2 Matrix{Float64}:
 0.964108  0.0
 0.0       2.16089
```

Так как все элементы на диагонали неотрицательны, то матрица продуктивная

[277]:
```
# Проверка
SLAE_44(A_44_1c, b_44_1c)
```

[277]:
```
2-element Vector{Float64}:
 1.9282161153045774
```

Задание 4.4.4. Номер 2

2. Критерий продуктивности: матрица A является продуктивной тогда и только тогда, когда все элементы матрицы

$$(E - A)^{-1}$$

являются неотрицательными числами. Используя этот критерий, проверьте, являются ли матрицы продуктивными.

[299]:
```julia
Inverse_E_minus_A(A) = inv(Matrix{Int}(I, size(A)[1], size(A)[2]) - A)

function Productivity_Criteria(A)
    inverse_E_minus_A = Inverse_E_minus_A(A)
    n = 0
    for i ∈ 1:length(A)
        if inverse_E_minus_A[i] >= 0
            n += 1
        end
    end
    if n == length(A)
        return true
    else
        return false
    end
end
```

[299]:
```
Productivity_Criteria (generic function with 1 method)
```

Рис. 55: Задание 4.4.4. Номер 2

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

[300]:
```
A_44_2a = [1 2; 3 1]
```

[300]:
```
2×2 Matrix{Int64}:
 1  2
 3  1
```

[303]:
```
Inverse_E_minus_A(A_44_2a)
```

[303]:
```
2×2 Matrix{Float64}:
 -0.0  -0.333333
 -0.5   0.0
```

[304]:
```
Productivity_Criteria(A_44_2a)
```

[304]:
```
false
```

Матрица не продуктивна

Задание 4.4.4. Номер 2. Пункт b

b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

[305]:
```
A_44_2b = 1/2*[1 2; 3 1]
```

[305]:
```
2×2 Matrix{Float64}:
 0.5  1.0
 1.5  0.5
```

[306]:
```
Inverse_E_minus_A(A_44_2b)
```

[306]:
```
2×2 Matrix{Float64}:
 -0.4  -0.8
 -1.2  -0.4
```

[307]:
```
Productivity_Criteria(A_44_2b)
```

[307]:
```
false
```

Матрица не продуктивна

Задание 4.4.4. Номер 2. Пункт c

c) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

```
[308]: A_44_2c = 1/10*[1 2; 3 1]

[308]: 2×2 Matrix{Float64}:
        0.1  0.2
        0.3  0.1

[309]: Inverse_E_minus_A(A_44_2c)

[309]: 2×2 Matrix{Float64}:
        1.2  0.266667
        0.4  1.2

[310]: Productivity_Criteria(A_44_2c)

[310]: true
```

Матрица продуктивна

3. Спектральный критерий продуктивности: матрица A является продуктивной тогда и только тогда, когда все её собственные значения по модулю меньше 1. Используя этот критерий, проверьте, являются ли матрицы продуктивными.

[324]:
```
function Spectral_Productivity_Criteria(A)
    Eig_val = abs.(eigvals(A))
    n = 0
    for i ∈ 1:size(A)[1]
        if Eig_val[i] < 1
            n += 1
        end
    end
    if n == size(A)[1]
        return true
    else
        return false
    end
end
```

[324]:
```
Spectral_Productivity_Criteria (generic function with 1 method)
```

Рис. 59: Задание 4.4.4. Номер 3

Задание 4.4.4. Номер 3. Пункт а

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

```
[325]: A_44_3a = [1 2; 3 1]

[325]: 2×2 Matrix{Int64}:
        1  2
        3  1

[326]: A_44_3a_Eigvals = eigvals(A_44_3a)

[326]: 2-element Vector{Float64}:
        -1.4494897427831779
         3.4494897427831783

[327]: Spectral_Productivity_Criteria(A_44_3a)

[327]: false
```

Матрица не продуктивна

b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

[328]:
```
A_44_3b = 1/2*[1 2; 3 1]
```

[328]:
```
2×2 Matrix{Float64}:
 0.5  1.0
 1.5  0.5
```

[329]:
```
A_44_3b_Eigvals = eigvals(A_44_3b)
```

[329]:
```
2-element Vector{Float64}:
 -0.7247448713915892
  1.724744871391589
```

[330]:
```
Spectral_Productivity_Criteria(A_44_3b)
```

[330]:
```
false
```

Матрица не продуктивна

Задание 4.4.4. Номер 3. Пункт c

c) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

[331]:
```
A_44_3c = 1/10*[1 2; 3 1]
```

[331]:
```
2×2 Matrix{Float64}:
 0.1  0.2
 0.3  0.1
```

[332]:
```
A_44_3c_Eigvals = eigvals(A_44_3c)
```

[332]:
```
2-element Vector{Float64}:
 -0.14494897427831785
  0.34494897427831783
```

[333]:
```
Spectral_Productivity_Criteria(A_44_3c)
```

[333]:
```
true
```

Матрица продуктивна

d) $\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$

[334]:
```
A_44_3d = [0.1 0.2 0.3; 0 0.1 0.2; 0 0.1 0.3]
```

[334]:
```
3×3 Matrix{Float64}:
 0.1  0.2  0.3
 0.0  0.1  0.2
 0.0  0.1  0.3
```

[335]:
```
A_44_3d_Eigvals = eigvals(A_44_3d)
```

[335]:
```
3-element Vector{Float64}:
 0.02679491924311228
 0.1
 0.37320508075688774
```

[336]:
```
Spectral_Productivity_Criteria(A_44_3d)
```

[336]:
```
true
```

Результаты

Результаты

В ходе работы я изучил специализированные пакеты Julia для выполнения и оценки эффективности операций над объектами линейной алгебры