Лабораторная работа №8

Научное программирование

Николаев Дмитрий Иванович, НПМмд-02-24

Содержание

1 Цель работы **5**

2 Теоретическое введение **6**
2.1 Собственные значения и собственные векторы 6
2.2 Цепи Маркова 6

3 Выполнение лабораторной работы **8**
3.1 Octave 8
3.1.1 Собственные значения и векторы 8
3.1.2 Цепи Маркова: Случайное блуждание 11
3.1.3 Цепи Маркова: Равновесное состояние 13
3.2 Julia 16

4 Выводы **21**

Список литературы **22**

Список иллюстраций

3.1 Собственные значения и векторы матрицы A на Octave 9
3.2 Собственные значения и векторы симметричной матрицы C = A'*A на Octave 10
3.3 Матрицы переходных вероятностей и начальные состояния на Octave 11
3.4 Вектора вероятностей после 5 шагов на Octave 12
3.5 Собственные значения и векторы матрицы переходных вероятностей T на Octave 13
3.6 Равновесное состояние матрицы переходных вероятностей T на Octave 15
3.7 Собственные значения и векторы матрицы A на Julia (1/2) 17
3.8 Собственные значения и векторы матрицы A на Julia (2/2) 17
3.9 Собственные значения и векторы симметричной матрицы C = A'A на Julia (1/2) 18
3.10 Собственные значения и векторы симметричной матрицы C = A'A на Julia (2/2) 18
3.11 Вектора вероятностей после 5 шагов на Julia (1/2) 18
3.12 Вектора вероятностей после 5 шагов на Julia (2/2) 19
3.13 Равновесное состояние матрицы переходных вероятностей на Julia (1/2) 19
3.14 Равновесное состояние матрицы переходных вероятностей на Julia (2/2) 20

Список таблиц

1 Цель работы

Целью работы является изучение собственных значений и собственных векторов матриц, а также моделирование цепей Маркова на языках программирования Octave и Julia.

2 Теоретическое введение

2.1 Собственные значения и собственные векторы

Собственные значения и собственные векторы играют важную роль в линейной алгебре и математической физике. Для матрицы A уравнение собственных значений записывается как:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v},$$

где λ — собственное значение, а $\vec{v}$ — собственный вектор матрицы A. Эти понятия используются для решения задач динамических систем, квантовой механики, обработки сигналов и др.

2.2 Цепи Маркова

Рассмотрим последовательность случайных событий при соблюдении следующих условий:

- конечное число состояний;
- через определённые промежутки времени проводится наблюдение и регистрируется состояние системы;
- вероятность перехода в каждое из состояний или остаться в том же состоянии зависит только от текущего состояния.

Такая система называется **цепью Маркова**. Наша задача — предсказать вероятности состояний системы.

Цепи Маркова описывают системы, где переход между состояниями определяется вероятностями, зависящими только от текущего состояния. Матрица переходов P описывает вероятность перехода между состояниями, и её можно использовать для предсказания будущих состояний системы. Математически состояние системы через k шагов определяется как:

$$\overrightarrow{x_k} = P^k \overrightarrow{x_0}$$

где $\overrightarrow{x_0}$ — начальный вектор вероятностей. Цепи Маркова применяются в теории вероятностей, экономике, биоинформатике и многих других областях.

3 Выполнение лабораторной работы

Следуя указаниям из [1], выполним лабораторную работу на Octave и Julia.

3.1 Octave

3.1.1 Собственные значения и векторы

Зададим матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

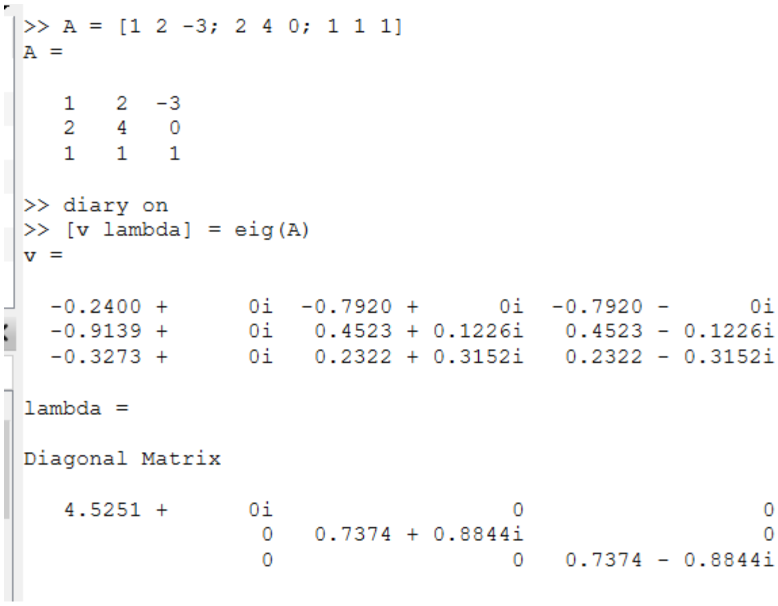
Необходимо найти собственные значения и собственные векторы этой матрицы. Для нахождения используется команда `eig` с двумя выходными аргументами. Синтаксис:

```
[v, lambda] = eig(A)
```

Первый элемент результата — матрица, столбцы которой представляют собой собственные векторы, а второй результат — диагональная матрица с собственными значениями на диагонали.

```
A = [1 2 -3; 2 4 0; 1 1 1]
[v, lambda] = eig(A)
```

Результаты ([3.1]):



```
>> A = [1 2 -3; 2 4 0; 1 1 1]
A =

   1   2  -3
   2   4   0
   1   1   1

>> diary on
>> [v lambda] = eig(A)
v =

  -0.2400 +      0i  -0.7920 +      0i  -0.7920 -      0i
  -0.9139 +      0i   0.4523 + 0.1226i   0.4523 - 0.1226i
  -0.3273 +      0i   0.2322 + 0.3152i   0.2322 - 0.3152i

lambda =

Diagonal Matrix

   4.5251 +      0i                  0                  0
                  0   0.7374 + 0.8844i                  0
                  0                  0   0.7374 - 0.8844i
```

Рис. 3.1: Собственные значения и векторы матрицы A на Octave

Для того, чтобы получить матрицу с действительными собственными значениями, мы можем создать симметричную матрицу (имеющую действительные собственные значения) путём умножения (слева) матрицы A на транспонированную матрицу:

```
C = A' * A
[v, lambda] = eig(C)
```

Результаты ([3.2]):

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 11 & -2 \\ 11 & 21 & -5 \\ -2 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 0.876137 & 0.188733 & -0.443581 \\ -0.477715 & 0.216620 & -0.851390 \\ -0.064597 & 0.957839 & 0.279949 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \mathrm{diag}\begin{pmatrix} 0.1497 & 0 & 0 \\ 0 & 8.4751 & 0 \\ 0 & 0 & 28.3752 \end{pmatrix}$$

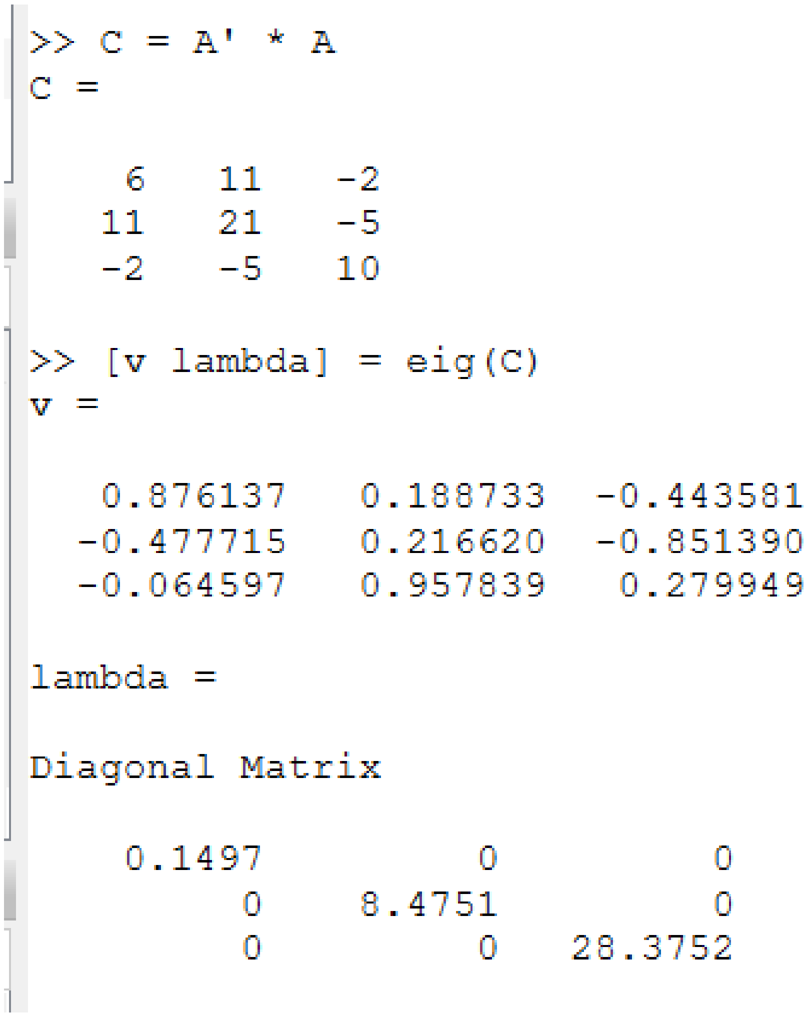


Рис. 3.2: Собственные значения и векторы симметричной матрицы C = A'*A на Octave

Диагональные элементы матрицы λ являются собственными значениями, а соответствующие столбцы матрицы v — собственными векторами. Каждому собственному значению соответствует бесконечное семейство собственных векторов. Типичные собственные векторы, полученные в Octave, нормированы на единицу.

3.1.2 Цепи Маркова: Случайное блуждание

Модель случайного блуждания была реализована с использованием матрицы переходов T и нескольких начальных состояний ([3.3]).

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

```
>> T = [1 0.5 0 0 0; 0 0 0.5 0 0; 0 0.5 0 0.5 0; 0 0 0.5 0 0; 0 0 0 0.5 1]
T =

   1.0000   0.5000        0        0        0
        0        0   0.5000        0        0
        0   0.5000        0   0.5000        0
        0        0   0.5000        0        0
        0        0        0   0.5000   1.0000

>> a = [0.2; 0.2; 0.2; 0.2; 0.2];
>> b = [0.5; 0; 0; 0; 0.5];
>> c = [0; 1; 0; 0; 0];
>> d = [0; 0; 1; 0; 0];
```

Рис. 3.3: Матрицы переходных вероятностей и начальные состояния на Octave

Мы хотим предсказать местоположение после k ходов, что делается путём перемножения матрицы переходов T. Вектор вероятности после k периодов получается следующим образом:

$$x_k = T^k a.$$

Пусть $a = (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$, $b = (0.5; 0; 0; 0; 0.5)$, $c = (0; 1; 0; 0; 0)$, $d = (0; 0; 1; 0; 0)$. Найдём вектора вероятностей после 5 шагов:

```
>> T^5 * a
ans =

   0.450000
   0.025000
   0.050000
   0.025000
   0.450000

>> T^5 * b
ans =

   0.5000
        0
        0
        0
   0.5000

>> T^5 * c
ans =

   0.6875
        0
   0.1250
        0
   0.1875

>> T^5 * d
ans =

   0.3750
   0.1250
        0
   0.1250
   0.3750
```

Рис. 3.4: Вектора вероятностей после 5 шагов на Octave

3.1.3 Цепи Маркова: Равновесное состояние

Состояние x является равновесным, если $x = Tx$. Каждая цепь Маркова имеет хотя бы одно равновесное состояние. Пусть T — матрица переходов для цепи Маркова, тогда $\lambda = 1$ является собственным значением T. Если x — собственный вектор для $\lambda = 1$ с неотрицательными компонентами, сумма которых равна 1, то x является равновесным состоянием.

Найдём вектор равновесного состояния для матрицы переходов T:

$$T = \begin{pmatrix} 0.48 & 0.51 & 0.14 \\ 0.29 & 0.04 & 0.52 \\ 0.23 & 0.45 & 0.34 \end{pmatrix}$$

и её собственные значения вместе с собственными векторами ([3.5]):

```
>> T = [0.48 0.51 0.14; 0.29 0.04 0.52; 0.23 0.45 0.34]
T =

   0.480000   0.510000   0.140000
   0.290000   0.040000   0.520000
   0.230000   0.450000   0.340000

>> [v lambda] = eig(T)
v =

  -0.6484  -0.8011   0.4325
  -0.5046   0.2639  -0.8160
  -0.5700   0.5372   0.3835

lambda =

Diagonal Matrix

   1.0000        0        0
        0   0.2181        0
        0        0  -0.3581
```

Рис. 3.5: Собственные значения и векторы матрицы переходных вероятностей T на Octave

После нормализации собственного вектора соответствующего $\lambda = 1$, получим

$$x = \begin{pmatrix} 0.3763 \\ 0.2929 \\ 0.3308 \end{pmatrix}.$$

Проверим, действительно ли полученныф вектор является равновесным состоянием ([3.6]).

```
>> x = v(:,1)/sum(v(:,1))
x =

   0.3763
   0.2929
   0.3308

>> T^10 * x
ans =

   0.3763
   0.2929
   0.3308

>> T^50 * x
ans =

   0.3763
   0.2929
   0.3308

>> T^50 * x - T^10*x
ans =

   4.4409e-16
   2.7756e-16
   3.8858e-16

>> diary off
>>
```

Рис. 3.6: Равновесное состояние матрицы переходных вероятностей T на Octave

Получили, что вектор x является равновесным состоянием.

3.2 Julia

Повторим вышеописанные шаги на языке Julia. Найдём собственные значения и вектора матрицы A ([3.7,3.8]) и полученной из неё симметричной матрицы $C = A'A$ ([3.9,3.10]), вероятностное распределение через 5 шагов при разных начальных состояних ([3.11,3.12]), а также найдём равновесное состояние цепи Маркова ([3.13,3.14]).

```julia
using LinearAlgebra
function Print_Matrix(A::Matrix)
    for i in 1:size(A)[1]
        for j in 1:size(A)[2]
            print(A[i,j], " ")
        end
        println("\n")
    end
end
function Print_Vector(a::Vector)
    for i in 1:length(a)
        println(a[i])
    end
end

A = [1 2 -3; 2 4 0; 1 1 1]
println("Матрица A:")
Print_Matrix(A)
# Нахождение собственных значений и векторов
eigvals, eigvecs = eigen(A)

# Отображение результатов
println("Собственные значения матрицы A:")
Print_Vector(eigvals)
println("Собственные векторы матрицы A:")
Print_Matrix(eigvecs)
```

Рис. 3.7: Собственные значения и векторы матрицы A на Julia (1/2)

```
PS C:\Users\User\Documents\work\study\2024-2025\Научное программирование\sciprog\labs\lab08\report\report> julia .\lab8.
jl
Матрица A:
1 2 -3

2 4 0

1 1 1

Собственные значения матрицы A:
0.7374488725928396 - 0.8843675977506604im
0.7374488725928396 + 0.8843675977506604im
4.525102254814321 + 0.0im
Собственные векторы матрицы A:
-0.7919516172176976 - 0.0im -0.7919516172176976 + 0.0im -0.23995422232051086 + 0.0im

0.45225003035238726 - 0.12258973340388972im 0.45225003035238726 + 0.12258973340388972im -0.913933153515417 + 0.0im

0.23219075691744806 - 0.31518527202044844im 0.23219075691744806 + 0.31518527202044844im -0.327334486849611З + 0.0im
```

Рис. 3.8: Собственные значения и векторы матрицы A на Julia (2/2)

```
# Создание симметричной матрицы
C = A' * A

# Нахождение собственных значений и векторов симметричной матрицы
eigvals_sym, eigvecs_sym = eigen(C)

# Отображение результатов для симметричной матрицы
println("Собственные значения симметричной матрицы:")
Print_Vector(eigvals_sym)
println("Собственные векторы симметричной матрицы:")
Print_Matrix(eigvecs_sym)
```

Рис. 3.9: Собственные значения и векторы симметричной матрицы C = A’A на Julia (1/2)

```
Собственные значения симметричной матрицы:
0.14969837669134733
8.47514514503277
28.375156478275926
Собственные векторы симметричной матрицы:
0.8761370298218328 0.18873290083336247 -0.44358065458042806

-0.477145084675508 0.2166199516441487 -0.8513898313635729

-0.06459685266778223 0.9578390724399956 0.27994920598691814
```

Рис. 3.10: Собственные значения и векторы симметричной матрицы C = A’A на Julia (2/2)

```
# Цепи Маркова.
println("\nЦепи Маркова. Матрица вероятностных переходов T:")
T = [1 0.5 0 0 0; 0 0 0.5 0 0; 0 0.5 0 0.5 0; 0 0 0.5 0 0; 0 0 0 0.5 1]
a = [0.2; 0.2; 0.2; 0.2; 0.2]
b = [0.5; 0; 0; 0; 0.5]
c = [0; 1; 0; 0; 0]
d = [0; 0; 1; 0; 0]
Print_Matrix(T)
# Вероятностное распределение состояний через 5 шагов
println("\nНачальное состоение: a = $(a)")
println("Вероятностное распределение состояний через 5 шагов: ", T^5 * a)
println("Начальное состоение: b = $(b)")
println("Вероятностное распределение состояний через 5 шагов: ", T^5 * b)
println("Начальное состоение: c = $(c)")
println("Вероятностное распределение состояний через 5 шагов: ", T^5 * c)
println("Начальное состоение: d = $(d)")
println("Вероятностное распределение состояний через 5 шагов: ", T^5 * d)
```

Рис. 3.11: Вектора вероятностей после 5 шагов на Julia (1/2)

```
Цепи Маркова. Матрица вероятностных переходов T:
1.0 0.5 0.0 0.0 0.0

0.0 0.0 0.5 0.0 0.0

0.0 0.5 0.0 0.5 0.0

0.0 0.0 0.5 0.0 0.0

0.0 0.0 0.0 0.5 1.0


Начальное состоение: a = [0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2]
Вероятностное распределение состояний через 5 шагов: [0.45000000000000007, 0.025, 0.05, 0.025, 0.45]
Начальное состоение: b = [0.5, 0.0, 0.0, 0.0, 0.5]
Вероятностное распределение состояний через 5 шагов: [0.5, 0.0, 0.0, 0.0, 0.5]
Начальное состоение: c = [0, 1, 0, 0, 0]
Вероятностное распределение состояний через 5 шагов: [0.6875, 0.0, 0.125, 0.0, 0.1875]
Начальное состоение: d = [0, 0, 1, 0, 0]
Вероятностное распределение состояний через 5 шагов: [0.375, 0.125, 0.0, 0.125, 0.375]
```

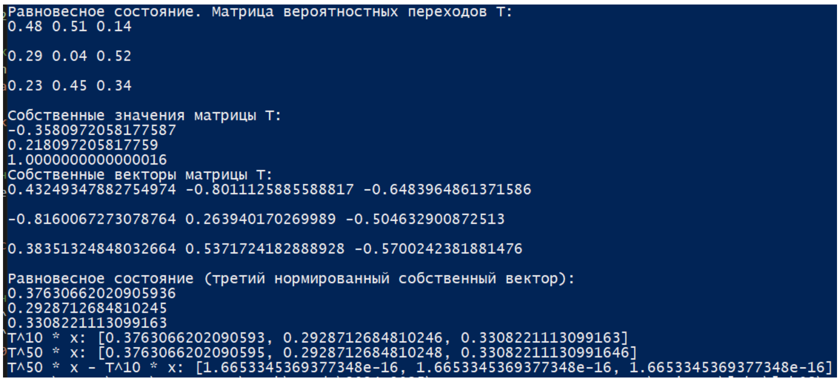
Рис. 3.12: Вектора вероятностей после 5 шагов на Julia (2/2)

```
# Равновесное состояние
println("\nРавновесное состояние. Матрица вероятностных переходов T:")
T = [0.48 0.51 0.14; 0.29 0.04 0.52; 0.23 0.45 0.34]
Print_Matrix(T)
# Нахождение собственных значений и векторов
eigvals, eigvecs = eigen(T)
println("Собственные значения матрицы T:")
Print_Vector(eigvals)
println("Собственные векторы матрицы T:")
Print_Matrix(eigvecs)
# Нормализация третьего собственного вектора
# (соответствующего равновесному состоянию)
x = eigvecs[:,3] / sum(eigvecs[:,3])

# Проверка равновесного состояния
println("Равновесное состояние (третий нормированный собственный вектор): ")
Print_Vector(x)

# Проверка через умножение
println("T^10 * x: ", T^10 * x)
println("T^50 * x: ", T^50 * x)
println("T^50 * x - T^10 * x: ", T^50 * x - T^10 * x)
```

Рис. 3.13: Равновесное состояние матрицы переходных вероятностей на Julia (1/2)



```
Равновесное состояние. Матрица вероятностных переходов T:
0.48 0.51 0.14

0.29 0.04 0.52

0.23 0.45 0.34

Собственные значения матрицы T:
-0.3580972058177587
0.218097205817759
1.0000000000000016
Собственные векторы матрицы T:
0.43249347882754974 -0.8011125885588817 -0.6483964861371586

-0.8160067273078764 0.263940170269989 -0.504632900872513

0.38351324848032664 0.5371724182888928 -0.5700242381881476

Равновесное состояние (третий нормированный собственный вектор):
0.37630662020905936
0.2928712684810245
0.3308221113099163
T^10 * x: [0.3763066202090593, 0.2928712684810246, 0.3308221113099163]
T^50 * x: [0.3763066202090595, 0.2928712684810248, 0.33082211130991646]
T^50 * x - T^10 * x: [1.6653345369377348e-16, 1.6653345369377348e-16, 1.6653345369377348e-16]
```

Рис. 3.14: Равновесное состояние матрицы переходных вероятностей на Julia (2/2)

4 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы я изучил возможности вычисления собственных значений и собственных векторов матриц, а также моделирования цепей Маркова на языках программирования Octave и Julia.

Список литературы

1. Кулябов Д. С. Лабораторная работа №8. Задача на собственные значения [Электронный ресурс]. RUDN, 2024. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/2372912/mod_resource/content/2/README.pdf.