

Лабораторная работа №3

Научное программирование

Николаев Дмитрий Иванович, НПИМд-02-24

Содержание

1	Цель работы	5
2	Теоретическое введение	6
2.1	Введение	6
2.2	История и развитие	6
2.3	Основные особенности	7
2.4	Применение	7
3	Выполнение лабораторной работы	8
3.1	Простейшие операции	8
3.2	Операции с векторами	10
3.3	Вычисление проектора	13
3.4	Матричные операции	14
3.5	Построение простейших графиков	18
3.6	Два графика на одном чертеже	21
3.7	График $y = x^2 \sin x$	23
3.8	Сравнение циклов и операций с векторами	25
4	Выводы	28
	Список литературы	29

Список иллюстраций

3.1	Простейшие операции в Octave	10
3.2	Операции с векторами в Octave	12
3.3	Вычисление проектора в Octave	14
3.4	Матричные операции в Octave 1	17
3.5	Матричные операции в Octave 2	18
3.6	График $y = \sin x$ 1	19
3.7	Построение простейших графиков в Octave	20
3.8	График $y = \sin x$ 2	21
3.9	Два графика на одном чертеже в Octave	22
3.10	График точек и регрессии в Octave	23
3.11	График $y = x^2 \sin x$ в Octave	24
3.12	Вычисление суммы с помощью цикла в Octave	26
3.13	Вычисление суммы с помощью операций с векторами в Octave . .	27
3.14	Сравнение способов вычисления суммы с помощью цикла и операций с векторами в Octave	27

Список таблиц

1 Цель работы

Получение первичных практических навыков работы с языком Octave.

2 Теоретическое введение

2.1 Введение

GNU Octave — это высокоуровневый язык программирования, предназначенный для численных вычислений [1]. Он является мощной альтернативой MATLAB и предоставляет пользователям возможность решать задачи математического моделирования, анализа данных и научных исследований. С момента своего появления, Octave завоевал популярность среди студентов, исследователей и инженеров благодаря своей доступности и функциональности.

2.2 История и развитие

Octave был создан в начале 1990-х годов Джоном Д. Бейнсом и стал одним из первых проектов в области свободного программного обеспечения для выполнения числовых операций. С тех пор он активно развивался, и его функционал постоянно расширялся. С момента последнего стабильного релиза, Octave продолжает поддерживаться и обновляться сообществом, что позволяет ему оставаться актуальным инструментом для научных исследований и инженерных задач.

2.3 Основные особенности

Octave поддерживает большинство функций MATLAB, что позволяет пользователям с опытом работы в MATLAB без труда осваивать его. Среди основных особенностей Octave можно выделить:

- Векторизация: Это позволяет выполнять операции над массивами матриц и векторов, что значительно ускоряет вычисления по сравнению с обычными циклами.
- Интерактивная среда: Octave предоставляет пользовательский интерфейс командной строки, что упрощает тестирование и отладку кода.
- Богатая библиотека функций: В Octave имеется множество встроенных функций для работы с математикой, статистикой, линейной алгеброй и сигналами.
- Графические возможности: Инструменты для построения графиков и визуализации данных делают Octave мощным инструментом для анализа данных.

2.4 Применение

Octave находит применение в самых различных областях, включая:

- Инженерия: Моделирование и симуляция систем управления.
- Научные исследования: Анализ и визуализация данных в физических и биологических науках.
- Образование: Преподавание численных методов и программирования.

3 Выполнение лабораторной работы

Следуем указаниям [2]

3.1 Простейшие операции

1. Включите журналирование сессии.

```
diary on
```

2. Поскольку оператор `diary` является переключателем, то достаточно ввести:

```
diary
```

чтобы переключить состояние журналирования.

3. Octave можно использовать как простейший калькулятор. Вычислим выражение:

$$2 \times 6 + (7 - 4)^2$$

В Octave это будет иметь следующий вид:

```
2*6 + (7-4)^2
```

```
ans = 21
```


4. Зададим вектор-строку (ковектор):

$$\mathbf{u} = (1, -4, 6)$$

$$u = [1 \ -4 \ 6]$$

$$u =$$

$$1 \quad -4 \quad 6$$

5. Аналогично можно задать вектор-столбец (вектор) ([3.1]):

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$u = [1; -4; 6]$$

$$u =$$

$$1$$

$$-4$$

$$6$$

6. Теперь зададим матрицу:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = [1 \ 2 \ -3; \ 2 \ 4 \ 0; \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$A =$$

$$1 \quad 2 \quad -3$$

$$2 \quad 4 \quad 0$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

```

>> diary on
>> diaru
error: 'diaru' undefined near line 1, column 1
>> diary
>> 2*6 + (7-4)^2
ans = 21
>> u = [1 -4 6]
u =

    1   -4    6

>> u = [1; -4; 6]
u =

    1
   -4
    6

>> A = [1 2 -3; 2 4 0; 1 1 1]
A =

    1    2   -3
    2    4    0
    1    1    1

```

Рис. 3.1: Простейшие операции в Octave

3.2 Операции с векторами

1. Зададим два вектора-столбца:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

```
u = [1; -4; 6]
```

```
v = [2; 1; -1]
```

2. Сложение векторов:

$$2\mathbf{v} + 3\mathbf{u}$$

```
2*v + 3*u
```

```
ans =
```

```
7
```

```
-10
```

```
16
```

3. Скалярное умножение векторов $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$:

```
dot(u, v)
```

```
ans = -8
```

4. Векторное умножение $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$:

```
cross(u, v)
```

```
ans =
```

```
-2
```

```
13
```

```
9
```

5. Норма вектора $\|\mathbf{u}\|$ ([3.2]):

```
norm(u)
```

```
ans = 7.2801
```

```
>> u = [1; -4; 6]
u =

     1
    -4
     6

>> v = [2; 1; -1]
v =

     2
     1
    -1

>> 2*v + 3*u
ans =

     7
    -10
    16

>> dot(u, v)
ans = -8
>> cross(u, v)
ans =

    -2
    13
     9

>> norm(u)
ans = 7.2801
```

Рис. 3.2: Операции с векторами в Octave

3.3 Вычисление проектора

1. Введём два вектора-строки:

$$\mathbf{u} = (3, 5), \quad \mathbf{v} = (7, 2)$$

$$\mathbf{u} = [3 \ 5]$$

$$\mathbf{v} = [7 \ 2]$$

2. Вычислим проекцию вектора \mathbf{u} на вектор \mathbf{v} . Пусть θ — угол между \mathbf{u} и \mathbf{v} . Тогда верна формула:

$$\|\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\| \cos \theta.$$

Учитывая, что

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta,$$

запишем:

$$\|\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\| \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Поскольку направление проекции совпадает с направлением вектора \mathbf{v} , то запишем:

$$\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}.$$

В Octave это можно вычислить следующим образом ([3.3]):

```
proj = dot(u, v) / (norm(v))^2 * v  
proj =
```

4.0943 1.1698

```
>> u = [3 5]
u =
     3     5

>> v = [7 2]
v =
     7     2

>> proj = dot(u, v) / (norm(v))^2 * v
proj =
     4.0943     1.1698
```

Рис. 3.3: Вычисление проектора в Octave

3.4 Матричные операции

1. Введём матрицы **A** и **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A = [1 2 -3; 2 4 0; 1 1 1]

B = [1 2 3 4; 0 -2 -4 6; 1 -1 0 0]

2. Вычислим произведение матриц **A · B**:

```
A * B
```

```
ans =
```

```
-2    1   -5   16
     2   -4  -10   32
     2   -1   -1   10
```

3. Вычислим произведение матриц $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}$:

```
B' * A
```

```
ans =
```

```
2     3    -2
-3    -5    -7
-5   -10    -9
16    32   -12
```

4. Вычислим $2\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ ([3.4]):

```
2 * A - 4 * eye(3)
```

```
ans =
```

```
-2    4   -6
 4     4    0
 2     2   -2
```

5. Найдём определитель $|\mathbf{A}|$:

```
det(A)
```

```
ans = 6
```

6. Найдём обратную матрицу \mathbf{A}^{-1} :

```
inv(A)
ans =
    0.66667   -0.83333    2.00000
   -0.33333    0.66667   -1.00000
   -0.33333    0.16667    0.00000
```

7. Найдём собственные значения матрицы **A**:

```
eig(A)
ans =
    4.52510 + 0.00000i
    0.73745 + 0.88437i
    0.73745 - 0.88437i
```

8. Найдём ранг матрицы **A** ([3.5]):

```
rank(A)
ans = 3
```



```

>> A = [1 2 -3; 2 4 0; 1 1 1]
A =

     1     2    -3
     2     4     0
     1     1     1

>> B = [1 2 3 4; 0 -2 -4 6; 1 -1 0 0]
B =

     1     2     3     4
     0    -2    -4     6
     1    -1     0     0

>> A * B
ans =

    -2     1    -5    16
     2    -4   -10    32
     2    -1    -1    10

>> B' * A
ans =

     2     3    -2
    -3    -5    -7
    -5   -10    -9
    16    32   -12

>> 2 * A - 4 * eye(3)
ans =

    -2     4    -6
     4     4     0
     2     2    -2

```

Рис. 3.4: Матричные операции в Octave 1

```

>> eye(3)
ans =

Diagonal Matrix

    1    0    0
    0    1    0
    0    0    1

>> det(A)
ans = 6
>> inv (A)
ans =

    0.6667   -0.8333    2.0000
   -0.3333    0.6667   -1.0000
   -0.3333    0.1667         0

>> eig (A)
ans =

    4.5251 +      0i
    0.7374 + 0.8844i
    0.7374 - 0.8844i

>> eigvec(A)
error: 'eigvec' undefined near line 1, column 1
>> rank (A)
ans = 3

```

Рис. 3.5: Матричные операции в Octave 2

3.5 Построение простейших графиков

Построим график функции $\sin x$ на интервале $[0, 2\pi]$

1. Создадим вектор значений x :

```
x = linspace(0, 2*pi, 50);
```

Команда `linspace(начальное_значение, конечное_значение, n)` создаёт вектор-строку из n равномерно распределённых значений на заданном интервале. Чем меньше приращение, тем более гладкой будет выглядеть кривая. Точка с запятой в конце строки подавляет вывод на экран.

2. Зададим вектор $y = \sin x$:

```
y = sin(x);
```

3. Построим график:

```
plot(x, y);
```

В результате получим следующий график (рис. [3.6]).

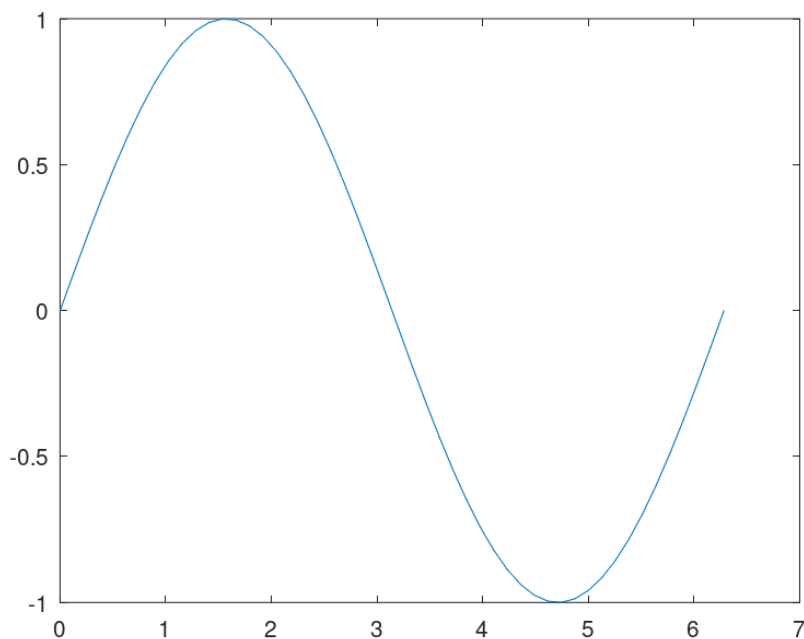


Рис. 3.6: График $y = \sin x$

4. Улучшим внешний вид графика. Сначала очистим получившийся график:

```
clf;
```

Заданные вектора x и y сохранятся.

5. Зададим красный цвет для линии и сделаем её потолще:

```
plot(x, y, 'r', 'linewidth', 3);
```

6. Подгоним диапазон осей:

```
axis([0 2*pi -1 1]);
```

7. Нарисуем сетку:

```
grid on;
```

8. Подпишем оси:

```
xlabel('x');  
ylabel('y');
```

9. Сделаем заголовок графика:

```
title('Sine graph');
```

10. Зададим легенду ([3.7]):

```
legend('y=sin(x)');
```

```
--  
>> x = linspace(0, 2*pi, 50);  
>> plot (x, y, 'r' , 'linewidth', 3)  
>> axis([0 2*pi -1 1]);  
>> grid on  
>> xlabel ('x');  
>> ylabel ('y');  
>> title ('Sine graph');  
>> legend ('y=sin(x)');
```

Рис. 3.7: Построение простейших графиков в Octave

В результате получим следующий график (рис. [3.6]).

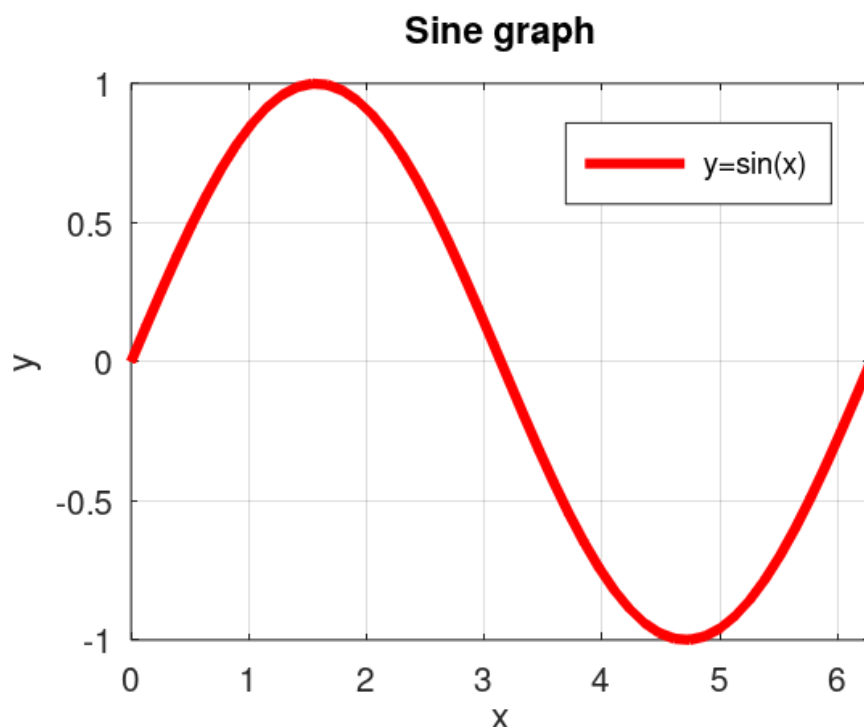


Рис. 3.8: График $y = \sin x$

3.6 Два графика на одном чертеже

1. Очистим память и рабочую область фигуры:

```
clear;  
clf;
```

2. Зададим два вектора:

```
x = [1 2 3 4];  
y = [1 2 5 4];
```

3. Построим эти точки, используя кружочки как маркеры:

```
plot(x, y, 'o');
```

4. Чтобы добавить к нашему графику ещё один, используем команду:

```
hold on;
```

5. Добавим график регрессии:

```
plot(x, 1.2*x);
```

6. Зададим сетку, оси и легенду ([3.9]):

```
grid on;
```

```
axis([0 5 0 6]);
```

```
legend('data points', 'regressionline');
```

```
>> clear;
>> clf;
>> x = [1 2 3 4]
x =
     1     2     3     4

>> y = [1 2 5 4]
y =
     1     2     5     4

>> plot (x , y , 'o')
>> hold on
>> plot (x, 1.2*x)
>> grid on;
>> axis ([0 5 0 6]);
>> legend ('data points' , 'regressionline');
```

Рис. 3.9: Два графика на одном чертеже в Octave

В результате получим график (рис. [3.10]).

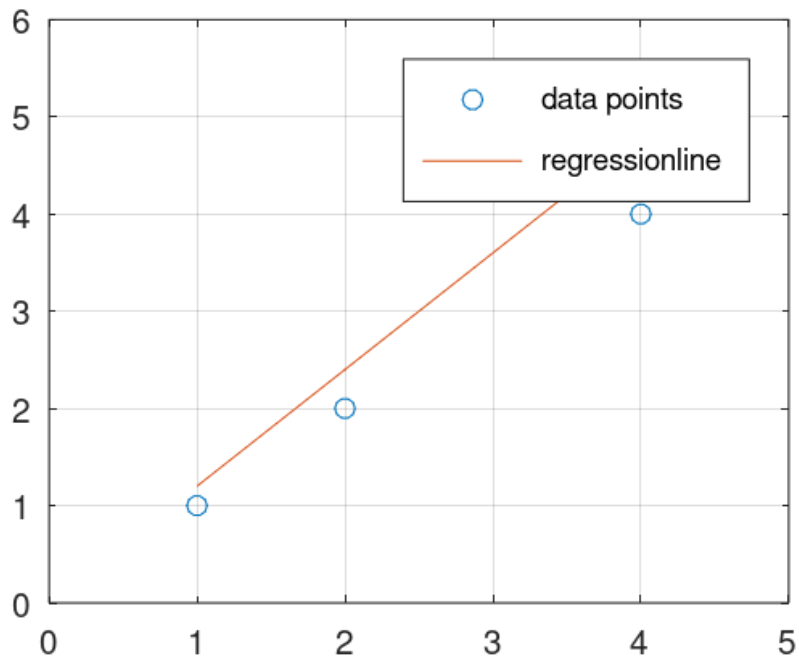


Рис. 3.10: График точек и регрессии в Octave

3.7 График $y = x^2 \sin x$

Построим график $y = x^2 \sin x$.

1. Очистим память и рабочую область фигуры:

```
clear;
clf;
```

2. Зададим вектор x :

```
x = linspace(-10, 10, 100);
```

3. Построим график $y = x^2 \sin x$:

```
plot(x, x^2 * sin(x))
```

Ошибка:

`error: for x^y, only square matrix arguments are permitted and one argument`

Ничего не получилось. Мы задали в выражении матричное умножение, в то время как нужно поэлементное.

4. Построим график $y = x^2 \sin x$, используя поэлементное возведение в степень `.^` и поэлементное умножение `.*`:

```
plot(x, x.^2 .* sin(x))
```

5. Сохраним графики в виде файлов (два разных формата вызова функции):

```
print graph2.png -dpng  
print('graph2.pdf', '-dpdf')
```

В результате получим график (рис. [3.11]).

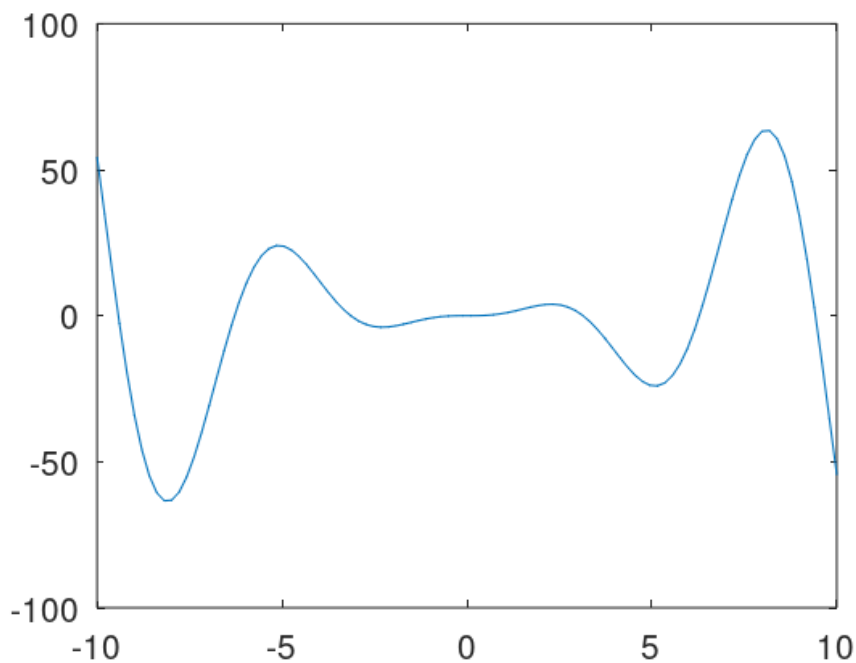


Рис. 3.11: График $y = x^2 \sin x$ в Octave

3.8 Сравнение циклов и операций с векторами

Сравним эффективность работы с циклами и операций с векторами. Для этого вычислим сумму:

$$\sum_{n=1}^{1000000} \frac{1}{n^2}$$

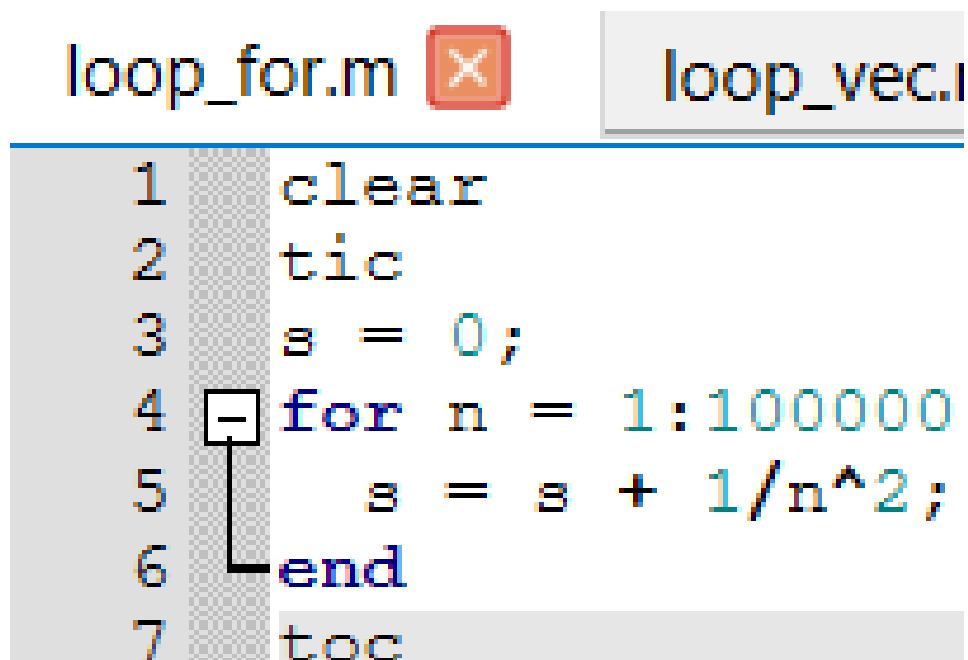
1. Очистим память и рабочую область фигуры:

```
clear;  
clf;
```

2. Вычислим сумму $\sum_{n=1}^{100000} \frac{1}{n^2}$ с помощью цикла. Создадим файл `loop_for.m` ([3.12]):

```
clear;  
tic;  
s = 0;  
for n = 1:100000  
    s = s + 1/n^2;  
end  
toc;
```

Функции `tic` и `toc` служат для запуска и остановки таймера.

The image shows a screenshot of the Octave editor interface. At the top, there are two window tabs: 'loop_for.m' (active) and 'loop_vec.m'. The 'loop_for.m' window displays a script with seven lines of code. Line 4 contains a 'for' loop starting at 1 and ending at 1000000. Line 5 is indented and contains the calculation 's = s + 1/n^2;'. Line 6 is the 'end' statement for the loop. A mouse cursor is positioned over the minus sign of the loop range '1:1000000'.

```
1 clear
2 tic
3 s = 0;
4 for n = 1:1000000
5     s = s + 1/n^2;
6 end
7 toc
```

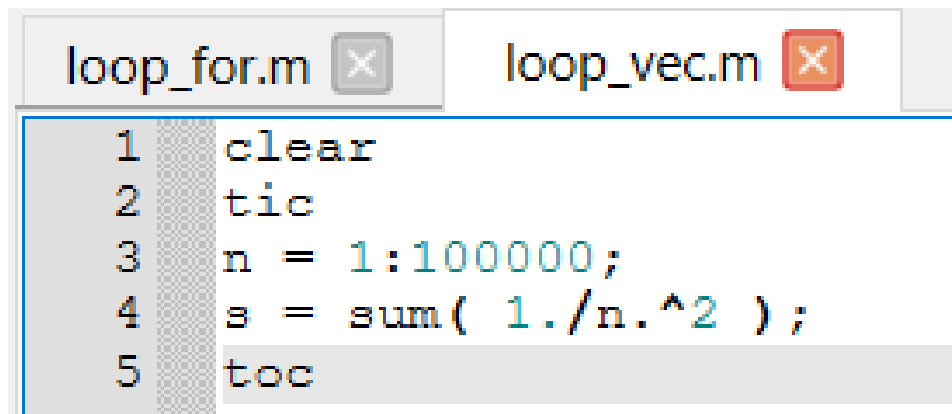
Рис. 3.12: Вычисление суммы с помощью цикла в Octave

3. Запустим файл `loop_for.m`. Вывод:

```
Elapsed time is 0.117988 seconds.
```

4. Вычислим ту же сумму с помощью операций с векторами. Создадим файл `loop_vec.m` ([3.13]):

```
clear;
tic;
n = 1:100000;
s = sum(1./n.^2);
toc;
```



```
1 clear
2 tic
3 n = 1:1000000;
4 s = sum( 1./n.^2 );
5 toc
```

Рис. 3.13: Вычисление суммы с помощью операций с векторами в Octave

5. Запустим файл `loop_vec.m`. Вывод:

```
Elapsed time is 0.00294495 seconds.
```

Сравните результаты ([3.14]).

```
>> loop_for
Elapsed time is 0.117988 seconds.
>> loop_vec
Elapsed time is 0.00294495 seconds.
```

Рис. 3.14: Сравнение способов вычисления суммы с помощью цикла и операций с векторами в Octave

6. Завершим запись в файл:

```
diary off
```

4 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы я получил первичные практические навыки работы с высокоуровневым языком программирования Octave.

Список литературы

1. Документация GNU Octave [Электронный ресурс]. 2024. URL: <https://www.gnu.org/software/octave/doc/interpreter/>.
2. Кулябов Д. С. Лабораторная работа №3. Введение в работу с Octave [Электронный ресурс]. RUDN, 2024. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/2372902/mod_resource/content/3/003-octave-intro.pdf.